

**Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès**  
**Faculté des Sciences Exactes**  
**Département de Mathématiques**

**Thèse de Doctorat en Mathématiques**

intitulée: « **Etude de la Décroissance de l'Energie de Certains Problèmes  
d'Evolution de Types Hyperbolique et Parabolique** »

**Par MAATOUG Abdelkader**

[Maatoug\\_aek@yahoo.fr](mailto:Maatoug_aek@yahoo.fr)

:

**Résumé**

Cette thèse de doctorat, a comme sujet l'étude du comportement asymptotique en temps des solutions de certaines équations non linéaires.

Ce travail se divise en six chapitres.

- Dans le chapitre 1, on donne une petite introduction, dans laquelle, on rappelle les types de stabilité et des résultats généraux connus dans la littérature sur certaines équations hyperboliques et paraboliques.
- Dans le chapitre 2, on rappelle quelques inégalités intégrales et quelques propriétés des certains espaces fonctionnels.
- Dans le chapitre 3, on étudie le comportement asymptotique de l'équation des ondes avec des non linéarités singulières de la forme  
$$u_{tt} - u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u) + |u|^{-\alpha} u = 0.$$
On donne une estimation de la décroissance de l'énergie en utilisant la méthode des multiplicateurs et des inégalités intégrales. On montre que l'énergie du système est majorée par une quantité dépendant de  $\sigma$ ,  $g$ ,  $r$  et  $\alpha$ , qui tend vers 0 (quand  $t$  tend vers  $\infty$ ). On donne aussi des exemples pour illustrer comment obtenir la stabilité exponentielle et la stabilité polynomiale de notre estimation générale.
- Dans le chapitre 4, on étudie le comportement asymptotique de l'équation des ondes quasi linéaire de type Kirchhoff avec des non linéarités singulières de la forme  
$$u_{tt} - |u_x|^{2\gamma} u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u) + |u|^{-\alpha} u = 0.$$
Dans ce cas aussi, on montre que l'énergie du système est majorée par une quantité dépendant de  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $g$ ,  $r$  et  $\alpha$ , qui tend vers 0 (quand  $t$  tend vers  $\infty$ ). On illustre, par des exemples, comment obtenir la stabilité exponentielle et stabilité polynomiale de notre estimation générale.  
La preuve est aussi basée sur la méthode des multiplicateurs et des inégalités intégrales.
- Dans le chapitre 5, on étudie l'équation parabolique quasi linéaire de la forme  
$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \beta |u|^p u = 0$$
On montre l'existence des solutions, dans le cas semi linéaire (i.e  $\rho=0$ ), par la méthode de Faedo-Galerkin et dans le cas général (i.e  $\rho \geq 0$ ) et on donne une estimation de l'énergie.
- Dans le chapitre 6, on étudie l'équation parabolique quasi linéaire de la forme  
$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \lambda \Delta u_t + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0$$
Pour une certaine classe du noyau  $g$ , on montre une estimation générale de l'énergie et on montre par des exemples que la stabilité exponentielle et la stabilité polynomiale ne sont que des cas particuliers de notre estimation.

## Summary

The PHD thesis entitled: « **Energy Decay of Some Evolution Problems of Hyperbolic and Parabolic Types** », deals with the asymptotic behavior in time of solutions of some nonlinear equations.

This work consists of six chapters.

- In chapter 1, we give a short introduction, in which, we recall the several types of stabilization and some general results known in the literature on hyperbolic and parabolic equations.
- In chapter 2, we recall some integral inequalities and some properties of some functional spaces.
- In chapter 3, we study the asymptotic stability of the wave equation with singular nonlinearities of the form
 
$$u_{tt} - u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u) + |u|^{-\alpha} u = 0.$$
 We prove decay estimates using multiplier method and weighted integral inequalities. We show that the energy of the system is bounded above by a quantity, depending on  $\sigma$ ,  $g$ ,  $r$  and  $\alpha$ , which tends to zero (as time goes to infinity). We give many significant examples to illustrate how to derive from our general estimates the polynomial, exponential or logarithmic decay. Our proof is based on the multiplier method and integral inequalities.
- In chapter 4, we study the decay properties of solutions for the initial boundary value problem of the degenerate quasilinear wave equation of Kirchhoff type with singular nonlinearities of the form
 
$$u_{tt} - |u_x|_{-2}^{2\gamma} u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u) + |u|^{-\alpha} u = 0.$$
 Also in this case, we prove decay estimates using multiplier method and weighted integral inequalities. We show that the energy of the system is bounded above by a quantity, depending on  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $g$ ,  $r$  and  $\alpha$ , which tends to zero (as time goes to infinity). We illustrate our result by many significant examples which permit us to derive from our general estimates the polynomial, the exponential or the logarithmic decay.
- In chapter 5, we study the quasilinear equation of the form
 
$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \beta |u|^p u = 0$$
 We prove the existence of global solutions, in the semi linear case (i.e  $\rho = 0$ ), by means of the Faedo-Galerkin's method and we prove in the general case (i.e  $\rho \geq 0$ ) that the energy decays uniformly using the multiplier method and integral inequalities.
- In chapter 6, we study the quasilinear parabolic equation of the form
 
$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \lambda \Delta u_t + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0$$
 We prove the existence of global solutions in the linear case (i.e  $\rho = 0$ ) by means of the Faedo-Galerkin's method. In the general case (i.e  $\rho \geq 0$ ) we prove a general energy decay estimate for certain class of the kernel  $g$  and we give some examples to illustrate how to get from our estimate the exponential or the polynomial decay.

## ملخص

رسالة للدكتوراه المعنونة " تناقص الطاقة لبعض المسائل المتغيرة مع الزمن من النوع الزاندي والمكافئ " تدور حول دراسة تصرف حلول بعض المعادلات غير الخطية عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية.

هذا العمل ينقسم الى ست فصول

1 – في الفصل 1 ، نعطي مقدمة قصيرة، نذكر فيها بأنواع الاستقرارات و ببعض النتائج المعروفة فيما يتعلق ببعض المعادلات الزائدية والمكافئة.

2 – في الفصل 2 ، نذكر ببعض المتراجحات التكاملية و ببعض الخواص المتعلقة بفضاءات الدوال.

3 – في الفصل 3 ، ندرس استقرار حلول المعادلة الامواج التالية عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية.

$$u_{tt} - u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u_t) + |u|^{-\alpha} u = 0.$$

نبرهن تقدير للتناقص باستعمال طريقة الضرب بمعاملات والمتراجحات التكاملية. نبين ان طاقة الجملة محدودة من الاعلى بكمية متعلقة بالمتغيرات  $\sigma, g, r$  و  $\alpha$  وهذه الكمية تؤول الى 0 عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية.

نعطي امثلة لظهور كيف نحصل انطلاقا من تقديرنا العام على التناقص الاسي و التناقص الكثير حدودي.

4 – في الفصل 4 ، ندرس استقرار حلول المعادلة اللاخطية من نوع كيرشوف التالية ، عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية.

$$u_{tt} - |u_x|_{L^2}^{2\gamma} u_{xx} + \sigma(t) |u|^{-r} g(u_t) + |u|^{-\alpha} u = 0$$

نبرهن تقدير للتناقص باستعمال طريقة الضرب بمعاملات والمتراجحات التكاملية. نبين ان طاقة الجملة محدودة من الاعلى بكمية متعلقة ب  $\sigma, g, \alpha$  ،  $\gamma$  وهذه الكمية تؤول الى 0 عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية.

نعطي امثلة لظهور كيف نحصل انطلاقا من تقديرنا العام على التناقص الاسي و التناقص الكثير حدودي.

5 – في الفصل 5 ، ندرس استقرار حلول المعادلة التكافئية اللاخطية من نوع التالي

$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \beta |u|^p u = 0$$

نبرهن وجود حلول في حالة أي ة شبه الخطية ( $\rho = 0$ ) باستعمال طريقة Faedo-Galerkin

في حالة  $\rho \geq 0$  نبرهن تقدير للتناقص باستعمال طريقة الضرب بمعاملات والمتراجحات التكاملية.

6 – في الفصل 6 ، ندرس استقرار حلول المعادلة التكافئية اللاخطية من نوع التالي

$$|u|^\rho u_t - \Delta u - \lambda \Delta u_t + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0$$

نبرهن وجود حلول في حالة أي الخطية ( $\rho = 0$ ) باستعمال طريقة Faedo-Galerkin

في حالة  $\rho \geq 0$  نبرهن تقدير عام للتناقص باستعمال طريقة الضرب بمعاملات والمتراجحات التكاملية.

نبرهن التقدير من اجل بعض انوية الذاكرة و نعطي امثلة لظهور كيف نحصل انطلاقا من تقديرنا العام على

التناقص الاسي و التناقص الكثير حدودي.