Géométrie harmonique des variétés

Zegga Kaddour

2 janvier 2016

Remerciements

J'aimerai en premier lieu remercier tous les responsables de la poste graduation et les membres du conseil scientifique, faculté des sciences exactes de l'université de Sidi Bel Abes qui en su me faire confiance et qui m'ont permis de découvrir et de continuer jusqu'a présent à faire les mathématiques que j'aime.

Je remercie le professeur **Djaa Mustapha** pour les bons choix de sujets concernant ce travail et je le remercie pour sa patience.

Je remercie le professeur **Ouahab Abdelghani** pour son soutien durant ce travail.

Je suis trés reconnaissant envers le professeur **Benchohra Mouffok** pour l'honneur qu'il ma fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie trés chaleureusement le professeur **Benaissa Abbes** qui m'a honoré en acceptant d'être examinateur dans ce jury.

Je tient aussi m'éxprimer mes remerciements aux Docteurs **Oukkas Seddik** et **Nasri Rafik** pour avoir accepté d'apprécier mon travail et de m'honorer de leur présence au sein de jury.

Table des matières

Introduction

En 1964 J.Eells a donné naissance aux applications harmoniques, qui sont les correspondances entre les variétés Riemanniennes qui extrémisent une fonctionnelle énergie naturelle :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v_g, \tag{1}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$. Ces applications généralisent ainsi l' intégrale de Dirichlet, les géodésiques , les fonctions harmoniques et les applications analytiques complexes. Ce sont en faite des solutions pour les équations d'Euler-Lagrange (équations harmoniques) :

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \, \nabla d\varphi = 0$$

Localement :

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \, {}^M\Gamma^k_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi = 0.$$

qui est un système d'équations semi- linéaires , elliptiques d'ordre 2.

L'étude des applications harmoniques a débutée par J. Eells, J.H. Sampson et L. Lemaire [23] [22] . En 1993, J. Eells a donné une généralisation aux applications p-harmoniques et exponentiellement-harmoniques :

$$E(\varphi; D) = \int_D F(\frac{1}{2}|d\varphi|^2) \, v_g, \tag{2}$$

où F est une fonction polynômiale (resp exponentielle), puis en 1999 M. Ara a introduit les applications F-harmoniques, en considérant les applications $F : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.
Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle bi-énergie :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{3}$$

Notre objectif dans ce travail est la caracactérisation des sous variétés f-biharmoniques dans $\mathbb{S}^n$ et les courbes f-biharmoniques dans $\mathbb{S}^3$ dans le cas $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ positive.

Ainsi que l'étude des propriétés géometrique d'une extension plus large des applications harmoniques et bi-harmoniques introduite par M. Djaa [39],[20], appelée application f-harmonique et f-bi-harmonique correspondant aux points critiques des fonctionnelles f-énergie (resp f-bi-énergie) données par l'intégrale

$$E_f(\varphi; D) = \int_D f(x, \varphi(x), e(\varphi)(x)) \, v_g. \tag{4}$$

resp

$$E_{2,f}(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_f(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{5}$$

où $f : M \times N \times \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est une fonction de classe C^∞, dite fonction poids de torsion.

Ce travail a été motivé d'une part de généraliser les travaux précédents et d'autre part, en physique les techniques des systèmes intégrables utilisées dans la théorie des solitons ont été employés à trouver des familles d' applications f-harmoniques. Et en physique mathématique, les applications f-harmonique, sont utilisées pour la résolution des équations du mouvement d'un système continu de spins ([11]) et de la structure Ricci-soliton gradient ([42]).

Notons que depuis l'introduction des applications f-harmoniques et f-bi-harmoniques, plusieurs auteurs ont adapté cette notion pour étudier d'autres aspect géométriques, on peut cité comme références les travaux de M. Rimoldi and G. Veronelli [42], Chen Li et Chen Wenyi [13], Y.J. Chiang [14], Wei-jun Lu [36][37], Ye-Lin Ou [38], Y.Han and S. Feng [46] et d'autres.

Dans le premier chapitre, on rappel les principaux résultats des applications harmoniques, applications biharmoniques, morphismes harmoniques, tenseurs énergie impulsion et bi-énergie impulsion.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les principaux résultats des applications f-harmoniques et applications f-biharmoniques, où $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$ une fonction de torsion positive. On commence par le calcul de la première variation f-énergie , la deuxième variation f-énergie et la première variation f-bi-énergie en établissant les théorèmes suivants :

Théorème 0.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application C^∞ entre deux variétés riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_f(\varphi))\, v_g,$$

où $f : (x, y) \in M \times N \longrightarrow f(x, y) \in]0, +\infty[$ et $\tau_f(\varphi)$ est le champ f-tension de l'application φ défini par :

$$\begin{aligned} \tau_f(\varphi) &= \operatorname{trace}_g \nabla f_\varphi\, d\varphi - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi \\ &= f_\varphi\, \tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Théorème 0.2. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application f-harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compacte de M. Si $\{\varphi_{t,s}\}$ est une variation de φ, à deux paramètres à support dans D alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_f(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D h\big(J_{\varphi,f}(v), w\big) v_g. \tag{6}$$

où

$$\begin{aligned} J_{\varphi,f}(v) = & -f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(v, d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi v \\ & + e(\varphi)(\nabla^N_v \operatorname{grad}^N f) \circ \varphi - d\varphi(\operatorname{grad}^M v(f)) \\ & - v(f)\tau(\varphi) + < \nabla^\varphi v, d\varphi > (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Théorème 0.3. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application C^∞ entre deux variétés riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_{2,f}(\varphi))\, v_g,$$

où $\tau_{2,f}(\varphi)$ est le champ f-bi-tension de l'application φ défini par :

$$\begin{aligned}\tau_{2,f}(\varphi) \;\;=\;\; & -f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) \\ & + e(\varphi)(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} \operatorname{grad}^N f) \circ \varphi - d\varphi(\operatorname{grad}^M \tau_f(\varphi)(f)) \\ & - \tau_f(\varphi)(f)\tau(\varphi) + < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi,\end{aligned}$$

Ces théorèmes nous permettent de caractériser les applications f-harmoniques et les applications f-bi-harmoniques , en établissant les équations d'Euler-Lagrange associées. Puis nous caractérisons les morphismes harmoniques entre les variétés riemanniennes, le tenseur f-énergie impulsion et le tenseur f-bi-énergie impulsion :

Théorème 0.4. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est un morphisme f-harmonique ;*
2. *φ est semi-conforme vérifiant le système d'équations :*

$$f_{\varphi^\alpha}\, \tau(\varphi)^\alpha + g(\operatorname{grad}^M f_{\varphi^\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) - \frac{1}{2}\lambda^2 (f')_{\varphi^\alpha}(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi) = 0, \quad \alpha = 1, ..., n. \tag{7}$$

relativement à toute carte locale (y^α) de N.

3. *Pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,*

$$\Delta^M_f (v \circ \varphi) = f_{v\circ\varphi}\, \lambda^2\, (\Delta^N v) \circ \varphi,$$

où λ est une fonction positive sur M.

Théorème 0.5. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_f(\varphi), \delta g > \; v_g,$$

où $\langle \, , \rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $T^*M \otimes T^*M$ et $S_f(\varphi)$ est le tenseur f-énergie impulsion défini par :

$$S_f(\varphi) = f_\varphi\, e(\varphi)\, g - f_\varphi\, \varphi^* h, \tag{8}$$

$e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de φ et $\varphi^* h$ le pull-back de la métrique h.

Théorème 0.6. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compacte de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_{2,f}(\varphi), \delta g > \; v_g,$$

où $S_{2,f}(\varphi)$ est le tenseur f-bi-énergie impulsion donné par :

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(X,Y) - f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(X,Y) \\ &+ f_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)) \\ &- \tau_f(\varphi)(f)\big(e(\varphi)g(X,Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y))\big). \end{aligned}$$

Théorème 0.7. *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, alors :*

$$\text{div } S_{2,f}(\varphi) = -h(\tau_{2,f}(\varphi), d\varphi) - < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > \Big(df_\varphi - h((\text{grad}^N f)\circ\varphi, d\varphi)\Big).$$

Dans le troisième chapitre, nous considérons en particulier les applications f-biharmoniques telles que $f : (M,g) \to (0,\infty)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous démontrons d'abord le Théorème suivant :

Théorème 0.8. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète de volume infini , (N^n, h) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle négative et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ positive ,alors : toute application f-biharmonique $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de f-bi-énergie finie , satisfaitsant la condition :*

$$trace_g \nabla^\varphi f \nabla^\varphi - trace_g \nabla^\varphi \nabla^\varphi \leq 0 \tag{9}$$

est f-harmonique.

Dans la deuxième partie du chapitre 3, une caractérisation des sous variétés f-biharmoniques dans la sphère $\mathbb{S}^n$ est donnée par le Théorème :

Théorème 0.9. *soit $i : M \to \mathbb{S}^n$ l'inclusion cannonique d'une sous variété M de dimension m dans $\mathbb{S}^n$,alors i est f-biharmonnique si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} &1)\ (m-1)fgrad^M f + 3mfA_H(grad^M f) + \frac{1}{2}grad^M(|grad^M f|^2) \\ &- \frac{m^2}{2}f^2 grad^M(|H|^2) + 2mf^2 traceA_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp}(e_i) + fRicci^M(grad^M f) \\ &+ fgrad^M(\Delta^M f) + ftraceA_{B(e_i, grad^M f)}(e_i) = 0 \\ &2)\ m^2 f^2 H + m|grad^M f|^2 H + 3mf(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f}H)^\perp + B(grad^M f, grad^M f) \\ &+ mf(\Delta^M f)H + mf^2 traceB(e_i, A_H(e_i)) + mf^2(\Delta^\perp H) \\ &+ fB(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M f) + ftrace(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} B(e_i, grad^M f))^\perp = 0 \end{aligned}$$

où $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur M.

Puis, les courbes f-biharmoniques dans la sphère $\mathbb{S}^3$ sont caractérisées par le Théorème suivant :

Théorème 0.10. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$ paramétrée par la longueur de l'arc et $f : I \to (0,\infty)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Alors, la courbe γ est f-biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{cases} ff''' + f'f'' - 4k^2 ff' - 3kk'f^2 = 0 \\ 3kff'' + 4k'ff' + 2k(f')^2 + k''f^2 - k^3 f^2 - k\tau^2 f^2 + kf^2 = 0 \\ 4k\tau f' + 2k'\tau f + k\tau' f = 0, \end{cases}$$

où k est la courbure géodésique et τ la torsion géodésique de γ.

Dans le quatrième chapitre on définit une généralisation globale de l'opérateur d'Euler-Lagrange, les applications f-harmoniques et les applications f-biharmoniques entre deux variétés riemanniennes M et N, en considérant une fonction de torsion positive $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M \times N \times \mathbb{R})$. On commence par le calcul de la première variation f-énergie , la deuxième variation f-énergie et la première variation f-bi-énergie en établissant les théorèmes suivants :

Théorème 0.11. *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application differentiable entre deux variétés Riemanniennes et $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à support dans D, Alors*

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi_t; D)_{|t=0} = -\int_D h(\tau_f(\varphi), \upsilon)v_g, \tag{10}$$

où $\upsilon = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}_{|t=0}$ la variation du champ de vecteurs υ ,

$$\tau_f(\varphi) = f'_{\varphi}\tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_{\varphi}) - (grad^N f) \circ \varphi \tag{11}$$

et $\tau(\varphi) = trace\nabla d\varphi$ le champ de tension de φ

Théorème 0.12. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et $\{\varphi_{t,s}\}_{t,s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation à deux paramètres a support dans D, de φ ,notons :*
$v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}|_{t=s=0}$ et $w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}|_{t=s=0}$, alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}E(\varphi_{t,s}; D)|_{t=s=0} = \int_D h(J_{f,\varphi}(v), w)v_g, \tag{12}$$

où $J_{f,\varphi}(v) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ est donné par :

$$\begin{aligned} J_{f,\varphi}(v) = &-f'_{\varphi}traceR^N(v, d\varphi)d\varphi - trace\nabla^{\varphi} f'_{\varphi}\nabla^{\varphi}v + (\nabla^N_v grad^N f) \circ \varphi \\ &+ < \nabla^{\varphi}v, d\varphi > (grad^N f') \circ \varphi - trace\nabla^{\varphi} < \nabla^{\varphi}v, d\varphi > f''_{\varphi}d\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

ici $<,>$ désigne le produit scalaire dans $T^{\star}M \otimes \varphi^{-1}TN$ et R^N le tenseur de courbure de la variété (N, h) .

Théorème 0.13. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application f-harmonique entre deux variétés Riemanniennes , $f : M \times N \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ telle que $(x, y, r) \mapsto f(x, y, r)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à support compact inclu dans D . Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi_t; D)|_{t=0} = \int_D h(\tau_{2,f}(\varphi_t), \upsilon)v_g \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \tau_{2,f}(\varphi) = &-f'_{\varphi}traceR^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi - trace\nabla^{\varphi} f'_{\varphi}\nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) + (\nabla^N_{\tau_f(\varphi)}grad^N f) \circ \varphi \\ &+ < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > (grad^N f') \circ \varphi - trace\nabla^{\varphi} < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > f''_{\varphi}d\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

Ces théorèmes nous permettent de caractériser les applications f-harmoniques généralisées et les applications f-bi-harmoniques généralisées , en établissant les équations d'Euler-Lagrange associées. Puis nous caractérisons les morphismes harmoniques généralisés entre les variétés riemanniennes , le tenseur f-énergie impulsion généralisé et le tenseur f-bi-énergie impulsion généralisé.

Théorème 0.14. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, $f : (x,t,r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow f(x,t,r) \in (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial f}{\partial r})(x,t,r) \neq 0, \quad (x,t,r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (\dfrac{\partial f}{\partial t})(x,t,0) = 0, \quad (x,t) \in M \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{16}$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *φ est un morphisme f-harmonique,*
2. *φ est semi-conforme vérifiant le système d'équations :*

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^\alpha}\, \tau(\varphi)^\alpha + g(\operatorname{grad}^M (\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\varphi^\alpha}\, \tau(\varphi)^\alpha = 0 \tag{17}$$

relativement à toute carte locale (y^α) de N et pour tout $\alpha = 1, ..., n$

3. *il existe une fonction positive λ sur M telle que :*

$$\Delta_f^M(v \circ \varphi) = (\frac{\partial f}{\partial r})_{v\circ\varphi}\, \lambda^2\, (\Delta^N v) \circ \varphi,$$

Pour toute fonction differentiable v définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,

Théorème 0.15. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_f(\varphi), \delta g > \, v_g,$$

où $\langle\, , \rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $T^*M \otimes T^*M$,

$$S_f(\varphi) = f_\varphi\, g - f'_\varphi\, \varphi^* h, \tag{18}$$

$e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de φ et φ^*h le pull-back de la métrique h.

Proposition 0.1. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N \times \mathbb{R})$ une fonction positive, alors :*

$$div^M\ S_f(\varphi) = -h(\tau_f(\varphi), d\varphi) - h((grad^N f) \circ \varphi, d\varphi) + df_\varphi - f'_\varphi de(\varphi)$$

Théorème 0.16. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_{2,f}(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_{2,f}(\varphi), \delta g > \, v_g,$$

où $S_2(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ *est donné par :*

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(X,Y) - f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(X,Y) \\ &\quad + f'_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) + f'_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)) \\ &\quad - \tau_f(\varphi)(f) g(X,Y) + f''_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > h(d\varphi(X), d\varphi(Y)) \\ &\quad + \tau_f(\varphi)(f') h(d\varphi(X), d\varphi(Y)). \end{aligned}$$

où $< d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) >= \sum_{i=1}^{m} h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)\Big)$ *et* $\{e_1, ..., e_m\}$ *étant une base orthonormée sur* M.

Théorème 0.17. *Soient* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *,*
$f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N \times \mathbb{R})$ *une fonction positive, alors :*

$$\begin{aligned} div^M\ S_{2,f}(\varphi) &= -h(\tau_{2,f}(\varphi), d\varphi) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > df'_\varphi + < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > h((grad^N f') \circ \varphi, d\varphi) \\ &\quad - h\Big(d\varphi(grad^M \tau_f(\varphi)(f')) + \tau_f(\varphi)(f')\tau(\varphi)\ ,\ d\varphi\Big) \\ &\quad - \tau_f(\varphi)(f') de(\varphi) + < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > f''_\varphi de(\varphi) \\ &\quad + < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > h\Big(d\varphi(grad^M f''_\varphi) + f''_\varphi \tau(\varphi), d\varphi\Big) \end{aligned}$$

Chapitre 1

Géométrie des applications harmoniques et bi-harmoniques

Dans ce chapitre, on présente les notions d'application harmonique et bi-harmonique, application semi-conforme, morphisme harmonique, tenseur énergie impulsion et tenseur bi-énergie impulsion entre les variétés riemanniennes.

1.1 Les applications harmoniques

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M et $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞.

On définit l'énergie de φ sur D par :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v_g, \tag{1.1}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$ définie par :

$$|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)), \tag{1.2}$$

$\{e_1, ..., e_m\}$ étant une base orthonormée sur M et $v_g = \sqrt{\det g}\, dx^1...dx^m$ est l'élément de volume riemannien de la variété (M^m, g).

Définition 1.1. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞, entre deux variétés riemanniennes est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle énergie $E(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$, i.e :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.3}$$

$\{\varphi_t\}$ étant une variation de classe C^∞ de φ à support dans D.

Remarque 1.1. Une variation de φ à support dans un domaine compact $D \subset M$, est une famille d' applications $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \subset C^\infty(M, N)$, telle que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur $M \setminus \operatorname{int}(D)$.

1.1.1 Première variation de la fonctionnelle énergie

Théorème 1.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans un domaine compact D. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ *désigne le champ de vecteurs de variation de* $\{\varphi_t\}$,

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g\, \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\}$$

où $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur (M^m, g). $\tau(\varphi)$ est appelé champ de tension de φ.

Démonstration. Soient D un domaine compact de M, $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support dans D et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de vecteurs de variation. Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Si $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur M, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\
&= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\
&= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i))\, v_g. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^{m} \big\{e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big\{h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)) - h(v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i))\big\}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

D'après les formules (1.4), (1.5) et le théorème de Stokes, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} \big\{h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\big)\big\}\, v_g.$$

□

Théorème 1.2. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes est harmonique si et seulement si :*

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi = 0. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.

1. L'équation (1.6) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie fonctionnelle.
2. Localement, si (x^i) et (y^α) désignent les coordonnées locales sur M et N respectivement, alors :

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \tag{1.7}$$

L'equation (1.7) montre en particulier que les applications harmoniques sont les solutions d'un système élliptique non lineaire de second ordre.

Exemple 1.1. Si $N = \mathbb{R}$, on retrouve exactement les fonctions harmoniques $f : M \to \mathbb{R}$, c'est à dire les solutions de de l'equation : $\Delta f = 0$

Exemple 1.2. L'application identité $\mathrm{Id} : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est harmonique.

Exemple 1.3. Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ de classe C^∞, est harmonique si et seulement si, pour tout $\gamma = 1, ..., n$:

$$\Delta^M \varphi^\gamma \equiv \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big) = 0.$$

Exemple 1.4. Une courbe $\varphi : (\mathbb{R}, <,>_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si et seulement si :

$$\frac{d^2 \varphi^\gamma}{dx^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{d\varphi^\alpha}{dx}\frac{d\varphi^\beta}{dx}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi = 0,$$

pour tout $\gamma = 1, ..., n$. On retrouve l'équation des géodésiques de la variété (N^n, h).

1.1.2 Deuxième variation de la fonctionnelle énergie

Théorème 1.3. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M. Si $\{\varphi_{t,s}\}$ est une variation de φ à deux paramètres , à support dans D, alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D h\big(-\mathrm{trace}_g\, R^N(v, d\varphi)d\varphi - \mathrm{trace}_g (\nabla^\varphi)^2 v, w\big) v_g,$$

où

$$v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)} \quad , \quad w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

désignent les champs de vecteurs de variation.

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ base orthonormée sur M. Posons

$$\phi : (x, t, s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \varphi_{t,s}(x) \in N,$$

$$E_i = (e_i, 0, 0), \quad \frac{\partial}{\partial t} = (0, \frac{d}{dt}, 0) \;\texttt{et}\; \frac{\partial}{\partial s} = (0, 0, \frac{d}{ds}).$$

nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \frac{1}{2} \int_D \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h\big(d\phi(E_i), d\phi(E_i)\big) v_g\Big|_{(t,s)=(0,0)}. \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h\big(d\phi(E_i), d\phi(E_i)\big) &= \frac{\partial}{\partial t} h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\big) \\ &= h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\big) \\ &\quad + h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\big). \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\big) &= h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)\big) \\ &= h\big(R^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(E_i)) d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)\big) \\ &\quad + h\big(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)\big) \\ &\quad + h\big(\nabla^{\phi}_{\left[\frac{\partial}{\partial t}, E_i\right]} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)\big). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega(X) = h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(X)\Big), \quad X \in \Gamma(TM).$$

En tenant compte que φ est harmonique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \big\{ e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\} \\
&= \sum_{i=1}^m \Big\{ e_i\Big(h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big)\Big) \\
&\quad - h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big)\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^m \Big\{ h\Big(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big) \\
&\quad + h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i)\Big) \\
&\quad - h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big)\Big\}. \\
&= \sum_{i=1}^m \Big\{ h\Big(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big) \\
&\quad + h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \tau(\varphi)\big)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big). \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

D'après les équations (1.10) et (1.11), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \sum_{i=1}^m h\big(R^N(v, d\varphi(e_i))w, d\varphi(e_i)\big) \\
&\quad + \operatorname{div}^M \omega. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

En développant le deuxième terme à droite de l'égalité (1.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
h\big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\big) &= h\big(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big) \\
&= E_i\Big(h\big(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big)\Big) \\
&\quad - h\big(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big). \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Si η désigne la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\eta(X) = h(w, \nabla^\varphi_X v), \quad X \in \Gamma(TM).$$

alors on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^m \big\{ e_i\big(\eta(e_i)\big) - \eta\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\} \\
&= \sum_{i=1}^m \big\{ e_i\big(h(w, \nabla^\varphi_{e_i} v)\big) - h(w, \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} v)\big\}. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

D'après les égalités (1.13) et (1.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} h\big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\big)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \operatorname{div}^M \eta + \sum_{i=1}^{m} h(w, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} h\big(w, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v\big). \end{aligned} \tag{1.15}$$

En utilisant les équations (1.8), (1.9), (1.12), (1.15) et le théorème de Stokes, nous déduisons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \int_D \sum_{i=1}^{m} \Big\{ - h\big(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), w\big) \\ &\quad + h(w, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v) - h\big(w, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v\big)\Big\} v_g.\end{aligned}$$

□

1.2 Les applications bi-harmoniques

Soit (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M.

Une généralisation naturelle des applications harmoniques, est donnée par la fonctionnelle bi-énergie de $\varphi \in C^{\infty}(M \times N)$ définie par :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{1.16}$$

Définition 1.2. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^{∞} entre deux variétés riemanniennes, est dite bi-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie $E_2(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$ c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.17}$$

$\{\varphi_t\}$ étant une variation de φ à support dans D.

1.2.1 Première variation de la fonctionnelle bi-énergie

Théorème 1.4. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^{∞} entre deux variétés riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^{∞} de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_2(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ désigne le champ de variation associé à $\{\varphi_t\}$, et $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ bi-tension de φ défini relativement à une base orthonormée sur M, par :

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g (\nabla^{\varphi})^2 \tau(\varphi) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^{m} \Big\{\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\Big\}\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\phi : M \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow N$, l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big), \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)v_g\Big|_{t=0}. \quad (1.18)$$

On a :

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0) = \nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt})\ ,\ \big[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)\big] = 0$$

et

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\big(\nabla^M_{e_i}e_i,0\big) = \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi\big(0,\frac{d}{dt}\big).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\Big(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\Big)\\ &= R^N\big(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0)\big)d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\ &\quad +\nabla^\phi_{\left[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)\right]}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\big(\nabla^M_{e_i}e_i,0\big).\\ &= R^N\big(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0)\big)d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt})\\ &\quad -\nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi\big(0,\frac{d}{dt}\big). \qquad (1.19)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\quad,\quad \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} &= h\big(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)\big)\\ &+\ h\big(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v,\tau(\varphi)\big) - h\big(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi)\big). \quad (1.20)\end{aligned}$$

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h\big(\nabla^\varphi_X v,\tau(\varphi)\big), \quad X\in\Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^M\omega &= \sum_{i=1}^m\big\{e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i}e_i\big)\big\}\\ &= \sum_{i=1}^m\big\{e_i\big(h\big(\nabla^\varphi_{e_i}v,\tau(\varphi)\big)\big) - h\big(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi)\big)\big\}\\ &= \sum_{i=1}^m\big\{h\big(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v,\tau(\varphi)\big) + h\big(\nabla^\varphi_{e_i}v,\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)\big) - h\big(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi)\big)\big\}. \quad (1.21)\end{aligned}$$

Des formules (1.20) et (1.21), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big),\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0}$$

$$\sum_{i=1}^{m} h \quad \Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0)(e_i,0)\big), \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} h\big(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)\big) + \operatorname{div}^M \omega - \sum_{i=1}^{m} h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big). \quad (1.22)$$

Soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\eta(X) = h\big(v, \nabla^{\varphi}_X \tau(\varphi)\big), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^{m} \big\{e_i\big(\eta(e_i)\big) - \eta\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big\{e_i\big(h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big)\big) - h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big)\big\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big\{h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) + h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) - h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big)\big\}. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Substituant (1.22) dans (1.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big) \quad , \quad \nabla d\phi\big((e_i,0),(e_i,0)\big)\Big)\Big|_{t=0} = \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} h\big(R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), v\big) + \operatorname{div}^M \omega - \operatorname{div}^M \eta \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m} h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\big) - \sum_{i=1}^{m} h\big(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi)\big). \quad (1.24)
\end{aligned}$$

D'après les formules (1.18), (1.24) , et le théorème de Stokes, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} h\Big(-R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\tau(\varphi), v\Big)v_g.$$

□

Du Théorème 1.4, on déduit

Théorème 1.5. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞, entre deux variétés riemanniennes est bi-harmonique si et seulement si :*

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi) = 0. \quad (1.25)$$

Remarque 1.3. 1. L'équation (1.25) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle bi-énergie .

2. Si les variétés M et N sont munis respectivement des coordonnées (x^i) et (y^α), au voisinage des point $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$, alors :

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= g^{ij}\Big\{\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i\partial x^j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\\ &+\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^j} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\rho}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^v_{\alpha\beta}\,{}^N\Gamma^\sigma_{v\rho}\\ &-{}^M\Gamma^k_{ij}\Big(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^k} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^k}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Big) - \tau^v\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}\Big\}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi,\end{aligned}$$

où $\tau^\gamma = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)$ et ${}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}$ désigne les composantes du tenseur de courbure de (N^n, h).

3. Toute application harmonique est bi-harmonique.

Exemple 1.5. L'application identité Id : $(M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est bi-harmonique.

Exemple 1.6. Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$,de classe C^∞, est bi-harmonique si et seulement si $\Delta^M\big(\Delta^M\varphi^\sigma\big) = 0$, pour tout $\sigma = 1, ..., n$.

1.3 Morphismes harmoniques

1.3.1 Application semi-conforme

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞, entre deux variétés riemanniennes. L'espace tangent au point $x \in M$ se décompose en somme directe :

$$T_xM = H_x \oplus V_x$$

d'un espace vertical $V_x = kerd\phi_x$ et d'un espace horizontal $H_x = V_x^\perp$ (complément orthogonal de V_x).
On note :

$$C_\phi = \{x \in M / d\phi_x \cong 0\} \tag{1.26}$$

L'ensemble des points critiques de ϕ.

$$\overline{M} = M \backslash C_\phi \tag{1.27}$$

Définition 1.3. *Supposons $m \geq n$, l'application $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ est dite semi-conforme si pour tout $x \in \overline{M}$,*

$$d\phi_{x/H_x} : H_x \to T_{\phi(x)}N$$

est une application linéaire surjective et conforme.
i.e : il existe une fonction $\lambda : \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $X, Y \in H_x$, on a

$$h(d_x\phi(X), d\phi_x(Y)) = \lambda^2(x) g(X, Y). \tag{1.28}$$

(pour plus de détail voir [3], [17])

Remarques 1.1. *:*

- *Sur* $\overline{M}$, *on a :* $\lambda^2 = \frac{1}{n}|d\phi|^2$.
- *La fonction* λ *peut-être étendue d'une manière régulière à* M, *en posant* $\lambda_{/C_\phi} \equiv 0$.
- *La fonction* $\lambda : M \to \mathbb{R}_+$ *est appelée fonction de dilatation de* ϕ.
- *Si* $m < n$, *alors la seule application semi-conforme est l'application constante* $\phi = Cst$ ($\overline{M} = \emptyset$, $C_\phi = M$) *puisque* $d_x\phi$ *ne peut pas être surjectve.*
  Par la suite, on considère dans le cas semi conforme $m \geq n$.
- *Si* $C_\phi = \varnothing$, *alors* ϕ *est dite conforme de dilatation* λ.
- *Si* φ *est semi-conforme, alors localement, on a :*

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = \lambda^2 \left(h^{\alpha\beta} \circ \varphi\right) \tag{1.29}$$

pour tout $\alpha, \beta = 1, ..., n$.

Définition 1.4. *Soit* $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *une application semi-conforme de dilatation* λ, *alors :*

- ϕ *est dite submersion semi-conforme, si* $C_\phi = \emptyset$.
- ϕ *est dite submersion riemannienne , si* $C_\phi = \emptyset$ *et* $\lambda = \mathbf{1}_M$.

Proposition 1.1 ([17])**.** *Soient* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application semi-conforme.*
Si $f \in C^\infty(N)$, *alors :*

$$\Delta^M(f \circ \phi) = df(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N f) \circ \phi \tag{1.30}$$

1.3.2 Morphismes harmoniques

Définition 1.5. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *entre deux variétés riemanniennes. L'application* φ *est dite morphisme harmonique si, pour toute fonction* $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *harmonique sur* $V \subset N$ *ouvert avec* $\varphi^{-1}(V)$ *non vide, alors la composée* $v \circ \varphi$ *est harmonique sur* $\varphi^{-1}(V)$ *dans* M.

Théorème 1.6. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. φ *est un morphisme harmonique ;*
2. φ *est harmonique et semi-conforme ;*
3. *Pour toute fonction* v *définie sur un ouvert* V *de* N *tel que* $\varphi^{-1}(V)$ *soit non vide,*

$$\Delta^M(v \circ \varphi) = \lambda^2 \left(\Delta^N v\right) \circ \varphi,$$

où λ *est une fonction positive sur* M.

Pour la démonstration du Théorème (1.6), nous allons besoin de lemme suivant :

Lemme 1.1 ([3]). *Soit* $y_0 \in N^n$, (y^γ) *des coordonnées normales en* y_0 *et* $\{C_\gamma, C_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n$ *des constantes avec* $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, $\sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha\alpha} = 0$, *alors Il existe un voisinage* V *de* y_0 *dans* N *et une fonction harmonique* $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tous* $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$ *:*

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = C_\alpha \ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = C_{\alpha\beta}, \tag{1.31}$$

Démonstration. du Théorème (1.6) Supposons que $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique. Munissons les deux variétés différentiables M et N de coordonnées locales (x^i) et (y^α) respectivement, autour des point $x_0 \in M$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et supposons que (y^α) soient des coordonnées normales en y_0. D'après le lemme 1.1 il existe une fonction harmonique v telle que pour tout $\alpha, \beta = 1, ..., n$, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = c_{\alpha\beta}, \tag{1.32}$$

avec $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ et $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$.

La fonction $v \circ \varphi$ est harmonique dans un voisinage de x_0, d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^M (v \circ \varphi) \\ &= dv(\tau(\varphi)) + \mathrm{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= \mathrm{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi), \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\nabla dv = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta. \tag{1.34}$$

D'après (1.33) et (1.34) on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha,\beta} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) c_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Puisque $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$, on déduit :

$$0 = \sum_{\alpha} g(\mathrm{grad}^M \varphi^1, \mathrm{grad}^M \varphi^1) c_{\alpha\alpha}. \tag{1.36}$$

D'après (1.35) et (1.36), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha} \Big[g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) - g(\mathrm{grad}^M \varphi^1, \mathrm{grad}^M \varphi^1) \Big] c_{\alpha\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq \beta} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Soient $\alpha_0 \neq 1$, on pose

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1\,; \\ -1, & \text{si } \alpha = \beta = \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \neq 1, \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

D'après (1.37), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1). \tag{1.38}$$

C'est-à-dire, pour tout $\alpha = 1, ..., n$, on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha}) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1). \tag{1.39}$$

Soit $\alpha_0 \neq \beta_0$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \alpha_0 \text{ et } \beta = \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \text{ ou } \beta \neq \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

D'après (1.37), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\beta_0}) = 0. \tag{1.40}$$

C'est-à-dire, pour tous $\alpha \neq \beta = 1, ..., n$, on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\beta}) = 0. \tag{1.41}$$

des formules (1.39) et (1.41), on obtient :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\beta}) = \lambda^2\, \delta_{\alpha\beta}, \tag{1.42}$$

pour tous $\alpha, \beta = 1, ..., n$, où $\lambda = |\operatorname{grad}^M \varphi^1|$. Ainsi, d'après (1.29) l'application φ est semi-conforme. Si $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, définie sur un ouvert V de N, de la Proposition 1.1 on a :

$$\begin{aligned} \Delta^M(v \circ \varphi) &= dv(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= dv(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N v) \circ \phi \end{aligned} \tag{1.43}$$

Tenant compte que φ est un morphisme harmonique, de la formule (1.43), on déduit $\tau(\varphi) = 0$ c'est-à-dire l'application φ est harmonique, d'où (1) $\Longrightarrow$ (2). D'après la formule (1.43) on a (2) $\Longrightarrow$ (3). Enfin (3) $\Longrightarrow$ (1). □

1.4 Tenseur énergie impulsion

les tenseurs énergie-impulsion se déduisent d'une fonctionnelle, en considérant les variations par rapport à la métrique. Cette perespective est dùe à D.Hilbert (voir [16])

Proposition 1.2. *Soient $\varphi : (M^m, g)$, $N^n, h)$ des variétés riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe C^∞. Si $\{g_t\}_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$ une variation de la métrique g ($g_0 = g$), alors :*

$$\delta g = \frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M).$$

Localement on a :

$$g_t = g_{ij}(t,x)\, dx^i \otimes dx^j \quad , \quad g_0 = g = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j \quad et \quad \delta g = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,x) \Big|_{t=0} dx^i \otimes dx^j$$

Définition 1.6. *Soient $\varphi : (M^m, g)$, $N^n, h)$ des variétés riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe C^∞. Le tenseur énergie impulsion de φ est défini par :*

$$S(\varphi) = e(\varphi)\, g - \varphi^* h, \tag{1.44}$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$S(\varphi)(X,Y) = e(\varphi)\, g(X,Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y)).$$

où $e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de φ.

Proposition 1.3. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D < S(\varphi), \delta g > \, v_g,$$

où $\langle\, ,\, \rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $T^*M \otimes T^*M$.

Pour la preuve de la Proposition 1.3, on peut se référer à [3] et [17].

La relation de base entre le tenseur énergie impulsion et les applications harmoniques est donnée par le théorème suivant ([2])

Théorème 1.7. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, alors :*

$$\mathrm{div}^M\, S(\varphi) \;=\; -h(\tau(\varphi), d\varphi).$$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x, pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$. Au point x, on a :

$$S(\varphi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\delta_{ij} - h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).$$

Tenant compte qu'au point x, $\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i)$ et $\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_k) = \nabla^\varphi_{e_k} d\varphi(e_j)$, alors :

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{div}^M\, S(\varphi)\big)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\big(S(\varphi)(e_i, e_j)\big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} e_i\big(h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\big)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{m} e_i\big(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} h\big(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_k), d\varphi(e_k)\big) - \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\
&= -h\big(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\big).
\end{aligned}$$

□

Du théorème 1.7, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞.*

1. *Si φ est harmonique, alors $\operatorname{div}^M \ S(\varphi) = 0$.*
2. *Si φ est une submersion et si $\operatorname{div}^M \ S(\varphi) = 0$, alors φ est harmonique.*

1.5 Tenseur bi-énergie impulsion

Définition 1.7. *Soient $\varphi : (M^m, g)$,(N^n, h) des variétés riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe C^∞. Le tenseur bi-énergie impulsion $S_2(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ associé à l'application φ est défini pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ par :*

$$\begin{aligned} S_2(\varphi)(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X,Y) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > g(X,Y) \\ &\quad + h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau(\varphi)), \end{aligned} \tag{1.45}$$

où

$$< d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) >= \sum_{i=1}^m h\big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)\big),$$

relativement à une base orthonormée $\{e_1, ..., e_m\}$ sur M.

Proposition 1.4. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D < S_2(\varphi), \delta g > \ v_g. \tag{1.46}$$

Pour la démonstration de la Proposition 1.4, nous allons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1.2 ([34])**.** *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et $\{g_t\}$ une variation C^∞ de g. Le champ de vecteur $\xi = \big(\operatorname{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2} \operatorname{grad}^M \big(\operatorname{trace}_g(\delta g)\big)$ satisfait :*

$$\delta(|\tau(\varphi)|^2) \ = \ -2 < h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > -2\, h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)). \tag{1.47}$$

Démonstration. Localement, on a :

$$\begin{aligned} \delta(\tau(\varphi)^\alpha) &= -g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - \xi^k \varphi^\alpha_k & (1.48) \\ < h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g > &= g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} & (1.49) \\ h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)) &= \xi^k \varphi^\alpha_k \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} & (1.50) \\ \delta(|\tau(\varphi)|^2) &= \delta\big(\tau(\varphi)^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}\big) & \\ &= 2\,\delta(\tau(\varphi)^\alpha) \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} & \\ &= -2 g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - 2\xi^k \varphi^\alpha_k \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}. & (1.51) \end{aligned}$$

En substituant les formules (1.49) et (1.50) dans (1.51), on obtient (1.47). □

Lemme 1.3. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation C^∞ de g. Si on pose*

$$\xi = \big(\operatorname{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2}\operatorname{grad}^M\big(\operatorname{trace}(\delta g)\big),$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_D h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi))v_g &= \int_D \Big\langle -\operatorname{sym}\big(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\operatorname{div}^M\big(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp\big)g, \delta g\Big\rangle\, v_g. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Démonstration. Soit $\omega = h(d\varphi, \tau(\varphi))$, alors :

$$\int_D \omega(\xi)v_g = \int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big)v_g - \frac{1}{2}\int_D \omega\big(\operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g))\big)v_g. \tag{1.53}$$

Le premier terme du coté droit de l'égalité (1.53) est donné par :

$$\begin{aligned}\int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big)v_g &= \int_D g(\omega^\sharp, (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp)v_g \\ &= \int_D g^*(\omega, \operatorname{div}^M(\delta g))v_g,\end{aligned}$$

où g^* est la métrique riemannienne induite sur T^*M.

D'autre part, si pour $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, on pose $C(\omega, \sigma) = \omega^i \sigma_{ij} dx^j$, on obtient :

$$g^*(\omega, \operatorname{div}^M \sigma) = \operatorname{div}^M(C(\omega, \sigma)^\sharp) - \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \sigma\rangle. \tag{1.54}$$

Pour $\sigma = \delta g$, de la formule (1.54), on trouve :

$$\int_D \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big)v_g = -\int_D \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \delta g\rangle. \tag{1.55}$$

Remarquant pour $\lambda \in C^\infty(M)$, on a :

$$\omega(\operatorname{grad}^M \lambda) = g^*(\omega, d\lambda). \tag{1.56}$$

Pour $\lambda = \operatorname{trace}(\delta g)$, de la formule (1.56) on obtient :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_D \omega\big(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}(\delta g))\big)v_g &= -\frac{1}{2}\int_D g^*(\omega, d(\operatorname{trace}(\delta g)))v_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_D g(\omega^\sharp, \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g)))v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_D \operatorname{trace}(\delta g)\operatorname{div}^M(\omega^\sharp)v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_D \langle \operatorname{div}^M(\omega^\sharp)g, \delta g\rangle v_g. \end{aligned} \tag{1.57}$$

En substituant les formules (1.55) et (1.57) dans (1.53), nous obtenons (1.52). $\square$

Démonstration de la Proposition 1.4.

D'après la formule (1.47) et le Lemme 1.2, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(\varphi;D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D \delta(|\tau(\varphi)|^2)v_g + \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2\delta(v_{g_t})\\ &= \frac{1}{2}\int_D \Big(-2 < h(\nabla d\varphi,\tau(\varphi)),\delta g > -2h(d\varphi(\xi),\tau(\varphi))\Big)v_g\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_D < \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g,\delta g > v_g,\end{aligned}$$

et d'après le Lemme 1.3, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(\varphi;D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D -2 < h(\nabla d\varphi,\tau(\varphi)),\delta g > v_g + \frac{1}{2}\int_D < \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g,\delta g > v_g\\ &+ \frac{1}{2}\int_D \Big(\Big\langle 2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla h(d\varphi,\tau(\varphi))\big) - \mathrm{div}^M\,\big(h(d\varphi,\tau(\varphi))^\sharp\big)g,\delta g\Big\rangle\Big)v_g.\end{aligned} \tag{1.58}$$

Posons :

$$\begin{aligned}S_2(\varphi) &= -2h(\nabla d\varphi,\tau(\varphi)) + 2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla h(d\varphi,\tau(\varphi))\big)\\ &\quad - \mathrm{div}^M\,\big(h(d\varphi,\tau(\varphi))^\sharp\big)g + \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g.\end{aligned} \tag{1.59}$$

Soit $\{e_1,...,e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i}e_j = 0$ au point x, pour tous $i,j \in \{1,...,m\}$. Au point x, on a :

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla h(d\varphi,\tau(\varphi))\big)(e_i,e_j) &= \nabla^\varphi_{e_i}h(d\varphi(e_j),\tau(\varphi)) + \nabla^\varphi_{e_j}h(d\varphi(e_i),\tau(\varphi))\\ &= 2h(\nabla d\varphi(e_i,e_j),\tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi))\\ &\quad + h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)),\end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}^M\,\big(h(d\varphi,\tau(\varphi))^\sharp\big) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(g(h(d\varphi,\tau(\varphi))^\sharp,e_i)\big)\\ &= \sum_{i=1}^m e_i\big(h(d\varphi(e_i),\tau(\varphi))\big)\\ &= \sum_{i=1}^m \Big\{h(\nabla^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i),\tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\Big\}\\ &= |\tau(\varphi)|^2 + < d\varphi,\nabla^\varphi\tau(\varphi) > .\end{aligned} \tag{1.61}$$

En substituant les formules (1.60) et (1.61) dans (1.59) puis dans (1.58), on obtient (1.46)

□

Théorème 1.8. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, alors :*

$$\operatorname{div}^M S_2(\varphi) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).$$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x, $(1 \leq i, j \leq m)$.

Si on note

$$S_2(\varphi) = T_1 + T_2$$

où $T_1, T_2 \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ sont deux champs de tenseurs définis par :

$$\begin{aligned}
T_1(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X,Y) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > g(X,Y),\\
T_2(X,Y) &= h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

Alor au point x, on a :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}^M T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(T_1(e_i, e_j)\big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i\big(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2\delta_{ij} - < d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) > \delta_{ij}\big)\\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi), \tau(\varphi)) - e_j\big(< d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > \big)\\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi), \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\\
&\quad - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)).\\
(\operatorname{div}^M T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\big(T_2(e_i, e_j)\big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i\big(h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))\big)\\
&= \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau(\varphi))\\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

Tenant compte qu'au point x, on a :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) \quad et \quad \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j) = \nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i)$$

$$\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) = R^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\tau(\varphi)$$

alors :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}^M\ T_1)(e_j) + (\mathrm{div}^M\ T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&= -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).
\end{aligned}$$

□

Du Théorème 1.8, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2. *Soient* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞.

1. *Si* φ *est bi-harmonique, alors* $\mathrm{div}^M\ S_2(\varphi) = 0$.
2. *Si* φ *est une submersion et si* $\mathrm{div}^M\ S_2(\varphi) = 0$, *alors* φ *est bi-harmonique.*

Chapitre 2

Les applications f-harmoniques et f-biharmoniques

Dans ce chapitre on définit une généralisation de l'opérateur d'Euler-Lagrange, les applications f-harmoniques et les applications f-biharmoniques entre deux variétés riemanniennes M et N, en considérant une fonction de torsion positive $f \in C^\infty(M \times N)$.

Dans le cas où $f = 1$, on retrouve les résultats du chapitre 1 .

2.1 Les applications f-harmoniques

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M, $f : M \times N \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction de classe C^∞ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. On appelle f-énergie de φ sur le domaine D, la fonctionnelle $E_f(\varphi; D)$ définie par :

$$E_f(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D f(x, \varphi(x))\, |d\varphi|^2\, v_g. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite f-harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle f-énergie* (2.1) *pour tout domaine compact D de M, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{2.2}$$

pour toute variation $\{\varphi_t\}$ de classe C^∞ à support dans D de l'application φ.

2.1.1 Première variation de la fonctionnelle f-énergie

Théorème 2.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_f(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ *est le champ de vecteurs de variation de* $\{\varphi_t\}$*,*
$f_\varphi : x \in M \longrightarrow f_\varphi(x) = f(x, \varphi(x)) \in (0, \infty)$. *et* $\tau_f(\varphi)$ *est le champ de f-tension de* φ *défini par :*

$$\begin{aligned}
\tau_f(\varphi) &= \operatorname{trace}_g \nabla f_\varphi \, d\varphi - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi \\
&= f_\varphi \, \tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Démonstration. Soient D un domaine compact de M, $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de vecteurs de variation. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M. Considérons la fonction $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^m f_{\varphi_t} \, h(\nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0)) \, v_g\Big|_{t=0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_{\varphi_t}}{\partial t} \, h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0)) \, v_g\Big|_{t=0} \\
&= \int_D \sum_{i=1}^m f_{\varphi_t} \, h(\nabla^\phi_{(e_i,O)} d\phi(0, \frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i, 0)) \, v_g\Big|_{t=0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_{\varphi_t}}{\partial t} \, h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0)) \, v_g\Big|_{t=0} \\
&= \int_D \sum_{i=1}^m f_\varphi \, h(\nabla^\varphi_{e_i} v, d\varphi(e_i)) \, v_g + \int_D v(f) \, e(\varphi) \, v_g. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

où $e(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\Big|_{t=0}$ et $\frac{\partial f_{\varphi_t}}{\partial t}\Big|_{t=0} = v(f) = h\big(v, (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi\big)$.

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega(X) = h(v, f_\varphi d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \big\{ e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big) \big\} \\
&= \sum_{i=1}^m \big\{ h(\nabla^\varphi_{e_i} v, f_\varphi d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^\varphi_{e_i} f_\varphi d\varphi(e_i)) - h(v, f_\varphi d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \big\}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

D'après les formules (2.4), (2.5) et le théorème de Stokes, on obtient :

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^m \big\{ h\big(v, \nabla^\varphi_{e_i} f_\varphi d\varphi(e_i) - f_\varphi \, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi\big) \big\} \, v_g.$$

□

En prenant $v = \tau_f(\varphi)$, du Théorème 2.1, on déduit :

Théorème 2.2. *Soit $f : M \times N \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞. Si $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, alors φ est f-harmonique si et seulement si :*

$$\tau_f(\varphi) = f_\varphi\,\tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi = 0. \tag{2.6}$$

Remarques 2.1.

1. *L'équation (2.6) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle f-énergie .*
2. *Si $f = 1$ sur M, on a $\tau_f(\varphi) = \tau(\varphi)$ champ de tension de φ.*
3. *Soient $f_1 : M \longrightarrow (0,\infty)$, $f_2 : N \longrightarrow (0,\infty)$ deux fonctions C^∞ et $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ pour tout $(x,y) \in M\times N$. Si $\widetilde{\varphi} = \varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, \widetilde{h})$ où $\widetilde{h} = f_2\,h$. Alors :*

$$\tau_f(\varphi) = (f_2\circ\varphi)\big(f_1\,\tau(\widetilde{\varphi}) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)\big).$$

En effet ;

$$\begin{aligned}\tau_f(\varphi) &= f_\varphi\tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi\\ &= f_1(f_2\circ\varphi)\tau(\varphi) + (f_2\circ\varphi)d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1) + f_1 d\varphi(\operatorname{grad}^M(f_2\circ\varphi))\\ &\quad -e(\varphi)f_1(\operatorname{grad}^N f_2)\circ\varphi.\end{aligned}$$

Soit $\{e_1,...,e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x\in M$ telle que $\nabla^M_{e_i}e_j = 0$ au point x, pour tous $i,j\in\{1,...,n\}$. Au point x,

$$\begin{aligned}\tau_f(\varphi) &= f_1(f_2\circ\varphi)\sum_{i=1}^m \nabla^N_{d\varphi(e_i)}d\varphi(e_i) + (f_2\circ\varphi)d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)\\ &\quad +f_1(f_2\circ\varphi)\sum_{i=1}^m\Big(\frac{1}{(f_2\circ\varphi)}d\varphi(e_i)(f_2)d\varphi(e_i)\Big)\\ &\quad -f_1(f_2\circ\varphi)\sum_{i=1}^m\Big(\frac{1}{2(f_2\circ\varphi)}h(d\varphi(e_i),d\varphi(e_i))(\operatorname{grad}^N f_2)\circ\varphi\Big).\end{aligned}$$

La connexion de Levi-Civita de $(N^n,\widetilde{h})$ est :

$$\widetilde{\nabla}^N_X Y = \nabla^N_X Y + \frac{1}{2f_2}X(f_2)Y + \frac{1}{2f_2}Y(f_2)X - \frac{1}{2f_2}h(X,Y)\operatorname{grad}^N f_2.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tau_f(\varphi) &= f_1(f_2\circ\varphi)\sum_{i=1}^m\widetilde{\nabla}^N_{d\varphi(e_i)}d\varphi(e_i) + (f_2\circ\varphi)d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)\\ &= f_1(f_2\circ\varphi)\tau(\widetilde{\varphi}) + (f_2\circ\varphi)d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)\\ &= (f_2\circ\varphi)\big(f_1\tau(\widetilde{\varphi}) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)\big).\end{aligned}$$

4. *Soit $f_1 : M \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞. Si $f(x,y) = f_1(x)$ pour tout (x,y) dans $M \times N$, alors $\tau_f(\varphi) = \tau_{f_1}(\varphi) = f_1\tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)$ et φ est f-harmonique si et seulement si φ est f_1-harmonique.*
5. *Soit $f_2 : N \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞. Si $f(x,y) = f_2(y)$ pour tout (x,y) dans $M \times N$, alors $\tau_f(\varphi) = (f_2 \circ \varphi)\,\tau(\widetilde{\varphi})$ où $\widetilde{\varphi} = \varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, \widetilde{h})$ et $\widetilde{h} = f_2\,h$.*
6. *Munissons les deux variétés M et N des coordonnées locales (x^i) et (y^α) respectivement. Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est f-harmonique si et seulement si :*

$$g^{ij}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\Big)\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^j} - \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\frac{\partial f}{\partial y^\gamma} = 0, \quad \delta = 1, ..., n.$$

En particulier, l'application identité $(\mathbb{R}^m, <,>_{\mathbb{R}^m}) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, <,>_{\mathbb{R}^m})$ est f-harmonique si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{2-m}{2}\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0, \quad i = 1, ..., m,$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ une fonction positive $\big($Ex. Soit $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ une fonction positive, et soit $f(x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m) = F(y^1 - \frac{2-m}{2}x^1, ..., y^m - \frac{2-m}{2}x^m)\big)$.

Exemple 2.1. Soit $\varphi : (\mathbb{R}^*, <,>_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, <,>_{\mathbb{R}})$ une fonction C^∞ et soit $f(x,y) = e^{x\,y}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. φ est f-harmonique si et seulement si $\varphi'' + \varphi\,\varphi' + \frac{1}{2}x(\varphi')^2 = 0$, (par exemple. $\varphi(x) = \frac{4}{x}$).

2.1.2 Deuxième variation de la fonctionnelle f-énergie

Théorème 2.3. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application f-harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M. Si $\{\varphi_{t,s}\}$ est une variation à deux paramètres et à support dans D de l'application φ, alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}E_f(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} = \int_D h\big(J_{\varphi,f}(v), w\big)v_g. \tag{2.7}$$

où $v = \dfrac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{t=s=0}$ *et* $w = \dfrac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{t=s=0}$ *désignent les champs de vecteurs de variation et*

$$\begin{aligned} J_{\varphi,f}(v) \;=\; & -f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(v, d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi v \\ & + e(\varphi)(\nabla^N_v \operatorname{grad}^N f) \circ \varphi - d\varphi(\operatorname{grad}^M v(f)) \\ & - v(f)\tau(\varphi) + < \nabla^\varphi v, d\varphi > (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Soit la fonction :

$$\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$$

définie par $\phi(x,t,s) = \varphi_{t,s}(x)$, on note par : $E_i = (e_i, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial t} = (0, \frac{d}{dt}, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial s} = (0, 0, \frac{d}{ds})$. Alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}E_f(\varphi_{t,s}) = \frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big[f(x, \varphi_{t,s}(x))h(d\varphi_{t,s}(e_i), d\varphi_{t,s}(e_i))\Big]v_g.$$

On a :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[f(x,\varphi_{t,s}(x))h\Big(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(f(x,\varphi_{t,s}(x))\Big).h(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)) + f(x,\varphi_{t,s}(x)).h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)). \tag{2.8}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[f(x,\varphi_{t,s}(x))h\Big(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big] &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f(x,\varphi_{t,s}(x))\ .h(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i))\\
&+\frac{\partial}{\partial t}f(x,\varphi_{t,s}(x)).h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i))\\
&+\ \frac{\partial}{\partial s}f(x,\varphi_{t,s}(x))\ .h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i))\\
&+f(x,\varphi_{t,s}(x)).h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i))\\
&+f(x,\varphi_{t,s}(x)).h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\varphi_{t,s}(e_i),\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\varphi_{t,s}(e_i)).\end{aligned} \tag{2.9}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(x,\varphi_{t,s}(x)) &= df\big(0,\frac{\partial\varphi_{t,s}(x)}{\partial t}\big)=df\big(0,d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big)\\
&= h\big((\operatorname{grad}^N f)\circ\phi,d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big).\\
\frac{\partial}{\partial s}f(x,\varphi_{t,s}(x)) &= h\big((\operatorname{grad}^N f)\circ\phi,d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\big).\\
\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f(x,\varphi_{t,s}(x)) &= h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}(\operatorname{grad}^N f)\circ\phi,d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big)\\
&\quad+h\big((\operatorname{grad}^N f)\circ\phi,\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big).\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}f(x,\varphi_{t,s}(x)).h\Big(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{(t=s=0} = e(\varphi)h\big((\nabla^N_w\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi,v\big) + e(\varphi)h\big((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi,\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\big)|_{t=s=0}. \tag{2.10}$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(x,\varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} &= h((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi,v)h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i),d\phi(E_i))|_{t=s=0}\\
&= v(f)h(\nabla^{\phi}_{E_i}d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),d\phi(E_i))|_{t=s=0}\\
&= v(f)\Big[e_i(h(w,d\varphi(e_i)))-h(w,\tau(\varphi))\Big].\end{aligned} \tag{2.11}$$

Si ω_1 désigne la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_1(Y) = h(w, d\varphi(Y)), \quad Y \in \Gamma(TM).$$

alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(x, \varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\varphi_{t,s}(e_i), d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} &= v(f)\operatorname{div}^M \omega_1 - h(w, v(f)\tau(\varphi)) \\ &= \operatorname{div}^M(v(f)\omega_1) - h(w, d\varphi(\operatorname{grad}^M v(f))) \\ &- h(w, v(f)\tau(\varphi)).\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial s} f(x, \varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_{t,s}(e_i), d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} &= h((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, w). < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > \\ &= h\big(< \nabla^{\varphi} v, d\varphi > (\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, w\big),\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m f(x, \varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_{t,s}(e_i), d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} &= \sum_{i=1}^m f_\varphi h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(e_i))\Big|_{t=s=0} \\ &= \sum_{i=1}^m f_\varphi h(R^N(w, d\varphi(e_i))v, d\varphi(e_i)) \\ &+ \sum_{i=1}^m f_\varphi h(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(e_i))\Big|_{t=s=0} \\ &= -\sum_{i=1}^m f_\varphi h(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), w) \\ &+ \sum_{i=1}^m f_\varphi e_i(h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(e_i)))\Big|_{t=s=0} \\ &- f_\varphi h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\varphi))\Big|_{t=s=0}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si ω_2 désigne la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_2(Y) = h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(Y))\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \quad Y \in \Gamma(TM).$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{m} f(x,\varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_{t,s}(e_i), d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} = -f_{\varphi} h(\operatorname{trace}_g R^N(v,d\varphi)d\varphi, w)$$
$$+ f_{\varphi}\operatorname{div}^M \omega_2 - f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\varphi))\Big|_{t=s=0}$$
$$= -f_{\varphi} h(\operatorname{trace}_g R^N(v,d\varphi)d\varphi, w) + \operatorname{div}^M(f_{\varphi}\omega_2)$$
$$- h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(\operatorname{grad}^M f_{\varphi}))\Big|_{t=s=0}$$
$$- f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\varphi))\Big|_{t=s=0}. \tag{2.15}$$

Finalement on obtient :

$$f(x,\varphi_{t,s}(x)).h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_{t,s}(e_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\varphi_{t,s}(e_i)) = f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\tfrac{\partial}{\partial t}), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\tfrac{\partial}{\partial s}))\Big|_{t=s=0}$$
$$= f_{\varphi}\Big[e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, w)) - h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v, w)\Big],$$

$$\sum_{i=1}^{m} f(x,\varphi_{t,s}(x)).h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi_{t,s}(e_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\varphi_{t,s}(e_i)\Big)\Big|_{t=s=0} = f_{\varphi}\Big[\operatorname{div}^M \omega_3 - h(\operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2 v, w)\Big]$$
$$= \operatorname{div}^M(f_{\varphi}\omega_3) - h(\nabla^{\varphi}_{\operatorname{grad}^M f_{\varphi}} v, w)$$
$$- h(f_{\varphi}\operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2 v, w)$$
$$= \operatorname{div}^M(f_{\varphi}\omega_3) - h(\operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} f_{\varphi}\nabla^{\varphi} v, w). \tag{2.16}$$

où ω_3 désigne la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_3(Y) = h(\nabla^{\varphi}_Y v, w), \quad Y \in \Gamma(TM)$$

D'après les formules (2.9), (2.11), (2.12), (2.13), (2.15) et (2.16), on obtient (2.7). □

2.2 Les applications f-bi-harmoniques

Définition 2.2. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M et $f : M \times N \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞.*

La fonctionnelle f-bi-énergie d'une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est définie par :

$$E_{2,f}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_f(\varphi)|^2 v_g. \tag{2.17}$$

Définition 2.3. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ entre deux variétés Riemanniennes est dite f-bi-harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle f-bi-énergie $E_{2,f}(\varphi; D)$ pour tout domaine compact D de M c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{2.18}$$

$\{\varphi_t\}$ étant une variation de classe $\mathcal{C}^\infty$ de φ à support dans D.

2.2.1 Première variation de la fonctionnelle f-bi-énergie

Théorème 2.4. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application* C^∞ *entre deux variétés riemanniennes et soit* $\{\varphi_t\}$ *une variation de classe* C^∞ *de* φ *à support dans* D*. Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_{2,f}(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_{2,f}(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ *désigne le champ de vecteurs de variation de* $\{\varphi_t\}$ *et* $\tau_{2,f}(\varphi)$ *est le champ* f*-bitension de* φ *défini par :*

$$\begin{aligned} \tau_{2,f}(\varphi) &= -f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) \\ &\quad + e(\varphi)(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} \operatorname{grad}^N f) \circ \varphi - d\varphi(\operatorname{grad}^M \tau_f(\varphi)(f)) \\ &\quad - \tau_f(\varphi)(f)\tau(\varphi) + < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi &= \sum_{i=1}^m R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\ \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) &= \sum_{i=1}^m \Big(\nabla^\varphi_{e_i} f_\varphi \nabla^\varphi_{e_i} \tau_f(\varphi) - f_\varphi \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau_f(\varphi) \Big) \\ < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > &= \sum_{i=1}^m h\big(\nabla^\varphi_{e_i} \tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)\big). \end{aligned}$$

relativement à une base orthonormée $\{e_1, ..., e_m\}$ *sur* M*.*

Démonstration. Soient D un domaine compact de M, $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de vecteurs de variation.
Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$, alors :

$$\frac{d}{dt} E_{2,f}(\varphi_t; D) = \int_D h(\nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} \tau_f(\varphi_t), \tau_f(\varphi_t)) v_g. \tag{2.19}$$

Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Au point x, on a :

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} \tau_f(\varphi_t) = \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} \nabla^\phi_{(e_i,0)} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i) - \nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} e(\varphi_t)(\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi_t. \tag{2.20}$$

Le premier terme du coté droit de l'égalité (2.20) est :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} \nabla^\phi_{(e_i,0)} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i) &= \sum_{i=1}^m R^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i, 0)) f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{(e_i,0)} \nabla^\phi_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i). \end{aligned} \tag{2.21}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i), \tau_f(\varphi_t)) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i), \tau_f(\varphi_t))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t))) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i), \tau_f(\varphi_t))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_{\varphi_t}}{\partial t}.h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} f_{\varphi_t} h(\nabla^{\phi}_{\frac{(0,\partial}{\partial t})} d\varphi_t(e_i,0), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t)). \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Soit ω_1 la 1-forme différentielle à support dans D définie sur M par :

$$\omega_1(Y) = h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(Y), \tau_f(\varphi_t))\Big|_{t=0}, \quad Y \in \Gamma(TM).$$

D'après (2.22), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i,0), \tau_f(\varphi_t))\Big|_{t=0} &= \operatorname{div}^M \omega_1 - h((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, v).< d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t)))\Big|_{t=0} (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} d\varphi_t(e_i,0), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t)))\Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{\partial}{\partial t}), f_{\varphi}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t)))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(h(v, f_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} f_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)). \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Soit ω_2 la 1-forme différentielle à support dans D définie sur M par :

$$\omega_2(Y) = h(v, f_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{Y}\tau_f(\varphi)), \quad Y \in \Gamma(TM).$$

L'équation (2.24) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{m} f_{\varphi} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} d\varphi_t(e_i,0), \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\tau_f(\varphi_t)))\Big|_{t=0} = \operatorname{div}^M \omega_2 - h(v, \operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} f_{\varphi}\nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi)). (2.25)$$

D'après les formules (2.21), (2.23) et (2.25), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} f_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i), \tau_f(\varphi_t))\Big|_{t=0} &= h(f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi, v) \\
&\quad + \operatorname{div}^M \omega_1 - h(< d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > (\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, v) \\
&\quad - \operatorname{div}^M \omega_2 + h(\operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} f_\varphi \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), v). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme du coté droit de l'égalité (2.20) est donné par :

$$\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} e(\varphi_t)(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi_t = \frac{\partial e(\varphi_t)}{\partial t}(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi_t + e(\varphi_t)\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})}(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi_t. \qquad (2.27)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(\varphi_t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t} h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i,0))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(h(v, d\varphi(e_i))) - h(v, \tau(\varphi)) \\
&= \operatorname{div}^M \omega_3 - h(v,\tau(\varphi)), \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

où ω_3 est une 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_3(Y) = h(v, d\varphi(Y)) \quad Y \in \Gamma(TM)$$

D'après les formules (2.27) et (2.28), on a

$$\begin{aligned}
h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{\partial}{\partial t})} e(\varphi_t)(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi_t, \tau_f(\varphi_t))\Big|_{t=0} &= \tau_f(\varphi)(f)\ \operatorname{div}^M \omega_3 - \tau_f(\varphi)(f)\, h(v,\tau(\varphi)) \\
&\quad + e(\varphi) h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \operatorname{grad}^N f\circ\varphi_t, \tau_f(\varphi_t))\Big|_{t=0} \qquad (2.29) \\
&= \operatorname{div}^M(\tau_f(\varphi)(f)\,\omega_3) - h(v, d\varphi(\operatorname{grad}^M \tau_f(\varphi)(f))) \\
&\quad - \tau_f(\varphi)(f) h(v,\tau(\varphi)) + e(\varphi) h(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} \operatorname{grad}^N f, v)
\end{aligned}$$

D'après les formules (2.19), (2.20), (2.26), (2.29) et Théorème de Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_{2,f}(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} &= \int_D \Big\{ h(f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi, v) \\
&\quad - h(< d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > (\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, v) \\
&\quad + h(\operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} f_\varphi \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), v) \\
&\quad + h(v, d\varphi(\operatorname{grad}^M \tau_f(\varphi)(f))) \\
&\quad + \tau_f(\varphi)(f) h(v,\tau(\varphi)) \\
&\quad - e(\varphi) h(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} \operatorname{grad}^N f, v)\Big\} v_g.
\end{aligned}$$

□

Par conséquant nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Soit* $f : M \times N \longrightarrow (0, \infty)$ *une fonction de classe* C^∞*. Une application lisse* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *entre deux variétés riemanniennes est* f*-bi-harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}\tau_{2,f}(\varphi) \;=\; & -f_\varphi \operatorname{trace}_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) \\ & + e(\varphi)(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} \operatorname{grad}^N f) \circ \varphi - d\varphi(\operatorname{grad}^M \tau_f(\varphi)(f)) \\ & - \tau_f(\varphi)(f)\tau(\varphi) + < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > (\operatorname{grad}^N f) \circ \varphi = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Remarques 2.2.

1. *L'équation (2.30) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle* f*-bi-énergie.*
2. *toute application f-harmonique est f-bi-harmonique.*
3. *Si* $f = 1$ *sur* M *alors* $\tau_{2,f}(\varphi) = \tau_2(\varphi)$ *(champ bi-tension de* φ*).*
4. *Soit* $f_1 : M \longrightarrow (0, \infty)$ *une fonction de classe* C^∞*. Si* $f(x, y) = f_1(x)$ *pour tout* $(x, y) \in M \times N$*, alors* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est* f*-bi-harmonique si et seulement si elle est* f_1*-bi-harmonique et on a :*

$$\tau_{2,f}(\varphi) = \tau_{2,f_1}(\varphi) = -f_1 \operatorname{trace}_g R^N(\tau_{f_1}(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi f_1 \nabla^\varphi \tau_{f_1}(\varphi).$$

2.3 Morphismes f-harmoniques

Soient (M^m, g) une variété riemannienne, $f : (x, t) \in M \times \mathbb{R} \longrightarrow f(x, t) \in (0, \infty)$ une fonction de classe C^∞ et U un ouvert de M.

Définition 2.4. *Une fonction* $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* f*-harmonique si :*

$$\Delta^M_f u \equiv f_u \, \Delta^M u + du(\operatorname{grad}^M f_u) - e(u)\,(f')_u = 0, \tag{2.31}$$

où $f_u : M \longrightarrow (0, +\infty)$ *est une fonction de classe* C^∞*, définie par :*

$$f_u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in U, \tag{2.32}$$

$(f')_u : M \longrightarrow (0, +\infty)$ *est une fonction de classe* C^∞*, définie par :*

$$(f')_u(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x)), \quad x \in U. \tag{2.33}$$

Définition 2.5. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *entre deux variétés riemanniennes. L'application* φ *est un morphisme* f*-harmonique si, pour toute fonction harmonique* $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *sur un ouvert* $V \subset N$ *tel que* $\varphi^{-1}(V)$ *soit non vide, alors la composée* $v \circ \varphi$ *est* f*-harmonique sur* $\varphi^{-1}(V)$*.*

Théorème 2.6. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est un morphisme f-harmonique ;*
2. *φ est semi-conforme vérifiant le système d'équations :*

$$f_{\varphi^\alpha}\,\tau(\varphi)^\alpha + g(\mathrm{grad}^M f_{\varphi^\alpha}, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) - \frac{1}{2}\lambda^2(f')_{\varphi^\alpha}(h^{\alpha\alpha}\circ\varphi) = 0, \quad \alpha = 1,...,n. \tag{2.34}$$

relativement à toute carte locale (y^α) de N.

3. *Pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,*

$$\Delta_f^M(v\circ\varphi) = f_{v\circ\varphi}\,\lambda^2\,(\Delta^N v)\circ\varphi,$$

où λ est une fonction positive sur M.

Démonstration. Supposons que $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme f-harmonique. Munissons les deux variétés différentiables M et N des coordonnées locales (x^i) et (y^α) respectivement, autour des point $x_0 \in M$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et supposons que (y^α) sont des coordonnées normales en y_0. D'après le lemme 1.1 il existe une fonction harmonique v telle que :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = c_{\alpha\beta}\ , \quad \alpha,\beta = 1,...,n \tag{2.35}$$

avec $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$. La fonction $v\circ\varphi$ est f-harmonique dans un voisinage de x_0. Au point x_0, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = 0\ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = c_{\alpha\beta}, \tag{2.36}$$

pour tout $\alpha,\beta = 1,...,n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_f^M(v\circ\varphi) \\ &= f_{v\circ\varphi}\,\Delta^M(v\circ\varphi) + dv(d\varphi(\mathrm{grad}^M f_{v\circ\varphi})) - e(v\circ\varphi)\,(f')_{v\circ\varphi}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$dv(d\varphi(\mathrm{grad}^M f_{v\circ\varphi})) = 0, \tag{2.38}$$

$$e(v\circ\varphi) = 0. \tag{2.39}$$

D'après (2.37), (2.38) et (2.39) on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^M(v\circ\varphi) \\ &= dv(\tau(\varphi)) + \mathrm{trace}_g\,\nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= \mathrm{trace}_g\,\nabla dv(d\varphi, d\varphi). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Comme au point x_0 :

$$\nabla dv = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta. \tag{2.41}$$

Alors d'après (2.36), (2.40) et (2.41), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha,\beta} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) c_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta} g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

On a :

$$0 = \sum_{\alpha} g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1) c_{\alpha\alpha}. \tag{2.43}$$

D'après (2.42) et (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \sum_{\alpha} \Big[g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) - g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1) \Big] c_{\alpha\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq \beta} g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Soit $\alpha_0 \neq 1$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1\,; \\ -1, & \text{si } \alpha = \beta = \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \neq 1, \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Alors d'après (2.44), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1). \tag{2.45}$$

On obtient alors :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1), \tag{2.46}$$

pour tout $\alpha = 1, ..., n$. Soit $\alpha_0 \neq \beta_0$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \alpha_0 \text{ et } \beta = \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \text{ ou } \beta \neq \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Alors d'après (2.44), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\beta_0}) = 0. \tag{2.47}$$

Ainsi,

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = 0, \tag{2.48}$$

pour tout $\alpha \neq \beta = 1, ..., n$.

Il suit de (2.47) et (2.48) que φ est semi conforme,

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = \lambda^2 \, \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.49}$$

pour tout $\alpha, \beta = 1, ..., n$.

Pour chaque fonction de classe C^2, $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble ouvert V de N,

$$\begin{aligned} \Delta_f^M (v \circ \varphi) \;&=\; f_{v\circ\varphi} \, \Delta^M (v \circ \varphi) + dv(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_{v\circ\varphi})) \\ &\quad - e(v \circ \varphi)(f')_{v\circ\varphi} \\ &=\; f_{v\circ\varphi} dv(\tau(\varphi)) + f_{v\circ\varphi} \operatorname{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &\quad + dv(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_{v\circ\varphi})) - e(v \circ \varphi)(f')_{v\circ\varphi}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Comme, φ est semi-conforme, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_f^M(v\circ\varphi) &= f_{v\circ\varphi}dv(\tau(\varphi))+f_{v\circ\varphi}\lambda^2(\Delta^N v)\circ\varphi \\ &\quad +dv(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_{v\circ\varphi}))-e(v\circ\varphi)(f')_{v\circ\varphi}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Par un choix spécial de la fonction harmonique v on conclut que la condition morphisme f-harmonique implique :

$$f_{v\circ\varphi}dv(\tau(\varphi))+dv(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_{v\circ\varphi}))-e(v\circ\varphi)(f')_{v\circ\varphi}=0,$$

c'est-à-dire, relativement aux coordonnées locales (y^α) sur N, on a :

$$f_{\varphi^\alpha}\,\tau(\varphi)^\alpha+g(\operatorname{grad}^M f_{\varphi^\alpha},\operatorname{grad}^M\varphi^\alpha)-\frac{1}{2}\lambda^2(f')_{\varphi^\alpha}(h^{\alpha\alpha}\circ\varphi)=0,$$

pour tout $\alpha=1,...,n$. Ainsi, on obtient l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2). De la formule (2.51) on déduit (2) $\Longrightarrow$ (3). Enfin l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1) est triviale. □

Exemple 2.2. L'application identité $Id:(\mathbb{R}^m,<,>_{\mathbb{R}^m})\longrightarrow(\mathbb{R}^m,<,>_{\mathbb{R}^m})$ est un morphisme f-harmonique si et seulement si, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{2.52}$$

pour tout $i=1,...,m$, où $f\in C^\infty(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})$ est une fonction positive. Soit $F\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ une fonction positive, parmis les solutions du système d'équations (2.52), on trouve les fonctions du type $f(x^1,...,x^m,t)=F(t-\frac{1}{2}x^1,...,t-\frac{1}{2}x^m)$.

- Si $f(x,t)=1$ pour tout $(x,t)\in M\times\mathbb{R}$, la condition (2.34) est équivalent à $\tau(\varphi)=0$, c'est-à-dire φ est harmonique et on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *[3] Une application $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ est un morphism harmonique si et seulement si $\varphi:M\longrightarrow N$ est harmonique et semi conforme.*

- Si $f(x,t)=f_1(x)$ pour tout $(x,t)\in M\times\mathbb{R}$, où $f_1\in C^\infty(M)$ est une fonction positive, la condition (2.34) équivalent à $f_1\,\tau(\varphi)+d\varphi(\operatorname{grad}^M f_1)=0$ c'est-à-dire φ est f_1-harmonique, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. *[38] Une application $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ est un morphisme f_1-harmonique si et seulement si $\varphi:M\longrightarrow N$ est f_1-harmonique et semi conforme, avec $f_1\in C^\infty(M)$ est une fonction positive.*

Corollaire 2.3. *Soient $f:M\times\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$ une fonction positive, $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ un morphisme f-harmonique de dilatation λ_1 et $\psi:(N^n,h)\longrightarrow(P,k)$ un morphisme harmonique de dilatation λ_2. Alors la composition $\psi\circ\varphi:M\longrightarrow P$ est un morphisme f-harmonique de dilatation $\lambda_1(\lambda_2\circ\varphi)$.*

Démonstration. Soient V un ouvert de N et $v:V\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ (resp U un ouvert de P et $u:U\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞), on a

$$\Delta_f^M(v\circ\varphi)=f_{v\circ\varphi}\,\lambda_1^2\,(\Delta^N v)\circ\varphi,$$

resp

$$\Delta^N(u \circ \psi) = \lambda_2^2\,(\Delta^P u) \circ \psi,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Delta_f^M(u \circ \psi \circ \varphi) &= f_{u\circ\psi\circ\varphi}\lambda_1^2\,(\Delta^N(u \circ \psi)) \circ \varphi \\ &= f_{u\circ\psi\circ\varphi}\lambda_1^2\,(\lambda_2 \circ \varphi)^2(\Delta^P u) \circ \psi \circ \varphi.\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞.*
Si $f(x, t) = f_1(x)\, f_2(t)$ pour tout $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$, où $f_1 \in C^\infty(M)$ et $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ deux fonctions positives. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *φ est un morphisme f-harmonique*
2. *φ est semi conforme de dilatation λ verifiant :*

$$(f_2 \circ \varphi^\alpha)\, \tau_{f_1}(\varphi)^\alpha + \frac{1}{2}\lambda^2 f_1(f_2' \circ \varphi^\alpha)(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi) = 0, \quad \alpha = 1, ..., n. \tag{2.53}$$

relativement aux coordonnées locales (y^α) sur N.

Démonstration. D'après le Théorème 2.6, l'application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est un morphisme f-harmonique si et seulement si $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est semi conforme de dilatation λ satisfaisant la condition

$$f_{\varphi^\alpha}\, \tau(\varphi)^\alpha + g(\mathrm{grad}^M f_{\varphi^\alpha}, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) - \frac{1}{2}\lambda^2 (f')_{\varphi^\alpha}(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi) = 0,$$

pour tout $\alpha = 1, ..., n$, relativement aux coordonnées locales (y^α) sur N, c'est-à-dire.

$$\begin{aligned}& f_1(f_2 \circ \varphi^\alpha)\, \tau(\varphi)^\alpha + f_1 g(\mathrm{grad}^M(f_2 \circ \varphi^\alpha), \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) \\ & +(f_2 \circ \varphi^\alpha) g(\mathrm{grad}^M f_1, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) - \frac{1}{2}\lambda^2 f_1(f_2' \circ \varphi^\alpha)(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi) = 0,\end{aligned} \tag{2.54}$$

parce que $f_{\varphi^\alpha} = f_1(f_2 \circ \varphi^\alpha)$.

Soit $\tau_{f_1}(\varphi) = f_1\, \tau(\varphi) + d\varphi(\mathrm{grad}^M f_1)$ le champ f_1-tension de φ, on a :

$$\tau_{f_1}(\varphi)^\alpha = f_1 \tau(\varphi)^\alpha + g(\mathrm{grad}^M f_1, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha). \tag{2.55}$$

D'après (2.49) et (2.50), on obtient :

$$\begin{aligned}& (f_2 \circ \varphi^\alpha)\, \tau_{f_1}(\varphi)^\alpha + f_1 g(\mathrm{grad}^M(f_2 \circ \varphi^\alpha), \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) \\ & -\frac{1}{2}\lambda^2 f_1(f_2' \circ \varphi^\alpha)(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi) = 0,\end{aligned} \tag{2.56}$$

le deuxième terme du coté gauche de (2.56) est :

$$\begin{aligned}f_1 g(\mathrm{grad}^M(f_2 \circ \varphi^\alpha), \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) &= f_1(f_2' \circ \varphi^\alpha) g(\mathrm{grad}^M \varphi^\alpha, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) \\ &= \lambda^2 f_1(f_2' \circ \varphi^\alpha)(h^{\alpha\alpha} \circ \varphi).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne. Une application de classe C^∞,*

$$\varphi : (M,g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n}), \quad x \longmapsto (\varphi^1(x), ..., \varphi^n(x))$$

est un morphisme f-harmonique si et seulement si ses composantes φ^α sont f-harmonique dont les gradients sont orthogonaux et de même norme en chaque point.

Démonstration. La condition (2.34) du théorème 2.6 se réduit à :

$$f_{\varphi^\alpha}\, \Delta^M \varphi^\alpha + g(\operatorname{grad}^M f_{\varphi^\alpha}, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) - e(\varphi^\alpha)(f')_{\varphi^\alpha} = 0,$$

pour tout $\alpha = 1, ..., n$, on déduit que les fonctions φ^α sont f-harmoniques. □

Proposition 2.2. *Soient $\varphi = (\varphi^1 + ... + \varphi^n) : (M,g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ un morphisme harmonique et $f_1 = e^{-\frac{1}{2}(\varphi^1+...+\varphi^n)}$. Si $f(x,t) = f_1(x)\, e^{t+c}$, pour tout $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$, alors φ est un morphisme f-harmonique.*

Démonstration. L'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ est un morphisme harmonique si et seulement si elle est harmonique et semi conforme de dilatation λ. Soit $f_1 = e^{-\frac{1}{2}(\varphi^1+...+\varphi^n)}$, d'où :

$$\tau_{f_1}(\varphi)^\alpha = f_1 \tau(\varphi)^\alpha + g(\operatorname{grad}^M f_1, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) = g(\operatorname{grad}^M f_1, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha),$$

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}^M f_1 &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\varphi^1+...+\varphi^n)} (\operatorname{grad}^M \varphi^1 + ... + \operatorname{grad}^M \varphi^n) \\ &= -\frac{1}{2} f_1 (\operatorname{grad}^M \varphi^1 + ... + \operatorname{grad}^M \varphi^n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\tau_{f_1}(\varphi)^\alpha = -\frac{1}{2} f_1 \Big(g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) + ... + g(\operatorname{grad}^M \varphi^n, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) \Big).$$

Comme φ est semi-conforme de dilatation λ, on obtient :

$$\tau_{f_1}(\varphi)^\alpha = -\frac{1}{2}\lambda^2 f_1 (<,>_{\mathbb{R}^n})^{\alpha\alpha} \circ \varphi = -\frac{1}{2}\lambda^2 f_1. \tag{2.57}$$

Soit $f(x,t) = f_1(x)\, e^{t+c}$ pour tout $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, où $c \in \mathbb{R}_+$, la condition (2.53) est équivalente à (2.57),

finalement, d'après corollaire 2.4 l'application φ est un morphisme f-harmonique. □

Exemple 2.3. Soient (M,g) une variété riemannienne, $\gamma : M \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞ et $M \times_{\gamma^2} \mathbb{R}^n$ la variété produit munie de la métrique $G_\gamma = g + \gamma^2 <,>_{\mathbb{R}^n}$. La projection normale :

$$\pi_2 : (M \times_{\gamma^2} \mathbb{R}^n, G_\gamma) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n}),$$

est un morphisme harmonique ([3]). Selon la proposition 2.2 la projection normale π_2 est un morphisme f-harmonique avec :

$$f(x, y_1, ..., y_n, t) = e^{-\frac{1}{2}(y^1+...+y^n)+t+c}, \quad c \in \mathbb{R}_+$$

pour tout $(x, y_1, ..., y_n, t) \in M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Exemple 2.4. Soit $H^m = (\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x_m^2} <,>_{\mathbb{R}^m})$. La projection :

$$\pi_1 : H^m \longrightarrow (\mathbb{R}^{m-1}, <,>_{\mathbb{R}^{m-1}}), \quad (x_1, ..., x_{m-1}, x_m) \longmapsto a\,(x_1, ..., x_{m-1}),$$

où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ est un morphisme harmonique ([26]). Selon la proposition 2.2 la projection π_1 est un morphisme f-harmonique avec :

$$f(x_1, ..., x_{m-1}, x_m, t) = e^{-\frac{a}{2}(x_1+...+x_{m-1})+t+c}, \quad c \in \mathbb{R}_+$$

pour tout $(x_1, ..., x_{m-1}, x_m, t) \in H^m \times \mathbb{R}$.

Exemple 2.5.

1. Soit $\varphi : (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}, <,>_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}, <,>_{\mathbb{R}^2})$ l'application définie par :

$$\varphi(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}).$$

Alors φ est un morphisme f-harmonique, semi-conforme de dilatation $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. avec :

$$f(x,y,t) = F\Big(2\,t - \frac{x+y}{x^2+y^2}\Big),$$

où $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ est une fonction de classe C^∞. En effet , on a :

$$\varphi^1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \varphi^2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_{\varphi^1}(x,y) = F\Big(\frac{x-y}{x^2+y^2}\Big)$$

$$f_{\varphi^2}(x,y) = F\Big(\frac{y-x}{x^2+y^2}\Big), \quad \Delta^{\mathbb{R}^2}\varphi^1 = \Delta^{\mathbb{R}^2}\varphi^2 = 0$$

$$\mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2}\varphi^1 = \Big(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big), \quad \mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2}\varphi^2 = \Big(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)$$

$$\mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2} f_{\varphi^1} = F'\Big(\frac{x-y}{x^2+y^2}\Big)\Big(-\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big)$$

$$\mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2} f_{\varphi^2} = F'\Big(\frac{y-x}{x^2+y^2}\Big)\Big(\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big)$$

$$< \mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2}\varphi^1, \mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2} f_{\varphi^1} >_{\mathbb{R}^2} = \frac{F'\Big(\frac{x-y}{x^2+y^2}\Big)}{(x^2+y^2)^2}, < \mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2}\varphi^2, \mathrm{grad}^{\mathbb{R}^2} f_{\varphi^2} >_{\mathbb{R}^2} = \frac{F'\Big(\frac{y-x}{x^2+y^2}\Big)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$e(\varphi^1) = e(\varphi^2) = \frac{1}{2(x^2+y^2)^2}, \quad (f')_{\varphi^1} = 2F'\Big(\frac{x-y}{x^2+y^2}\Big), \quad (f')_{\varphi^2} = 2F'\Big(\frac{y-x}{x^2+y^2}\Big)$$

D'après (2.3) les fonctions φ^1 et φ^2 sont f-harmonique et d'après la proposition 2.1 l'application φ est un morphisme f-harmonique.

2. De la même façon, on démontre que si ψ est une application définie par :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, <,>_{\mathbb{R}^3}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, <,>_{\mathbb{R}^3}) \\ (x,y,z) &\mapsto \Big(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\Big) \end{aligned}$$

alors :
ψ est semi conforme de dilatation $\lambda(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
ψ est un morphisme f-harmonique , avec :

$$f(x,y,z,t) = \frac{F\Big(2\,t - \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\Big)}{x^2+y^2+z^2},$$

où, $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ est une fonction de classe C^∞.

Exemple 2.6. Soientt $M = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ et $\varphi : (M, <,>_{\mathbb{R}^3}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, <,>_{\mathbb{R}^2})$ définie par :

$$\varphi(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}, z).$$

Alors φ est une application semi-conforme de dilatation $\lambda = 1$ et un morphisme f-harmonique avec :

$$f(x,y,z,t) = \frac{F\Big(2\,t - z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)}{x},$$

où, $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ est une fonction de classe C^∞. En effet, on a :

$$\varphi^1(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi^2(x,y,z) = z$$

$$f_{\varphi^1}(x,y,z) = \frac{F\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big)}{x}, \quad f_{\varphi^2}(x,y,z) = \frac{F\Big(z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)}{x}$$

$$\Delta^M \varphi^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Delta^M \varphi^2 = 0$$

$$\mathrm{grad}^M \varphi^1 = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\Big), \quad \mathrm{grad}^M \varphi^2 = (0,0,1)$$

$$\mathrm{grad}^M f_{\varphi^1} = \Big(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}F - x^2F'}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yF'}{x\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{F'}{x}\Big).$$

Ici $F = F\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big)$ et $F' = F'\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big)$.

$$\mathrm{grad}^M f_{\varphi^2} = \Big(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}F + x^2F'}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{yF'}{x\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{F'}{x}\Big).$$

Et ici $F = F\Big(z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)$ et $F' = F'\Big(z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)$.

$$< \mathrm{grad}^M \varphi^1, \mathrm{grad}^M f_{\varphi^1} >_{\mathbb{R}^3} = \frac{(x^2+y^2)F'\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big) - \sqrt{x^2+y^2}F\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big)}{x(x^2+y^2)}$$

$$< \mathrm{grad}^M \varphi^2, \mathrm{grad}^M f_{\varphi^2} >_{\mathbb{R}^3} = \frac{F'\Big(z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)}{x}$$

$$e(\varphi^1) = e(\varphi^2) = \frac{1}{2}, \quad (f')_{\varphi^1} = \frac{2F'\Big(\sqrt{x^2+y^2} - z\Big)}{x}, \quad (f')_{\varphi^2} = \frac{2F'\Big(z - \sqrt{x^2+y^2}\Big)}{x}.$$

Remarque 2.1. La proposition 2.2 est vraie pour une application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$, où N est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et h est une métrique conforme sur $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire. $h = e^{2\gamma} <,>_{\mathbb{R}^n}$, $\gamma \in C^\infty(N)$.

2.4 Tenseur f-énergie impulsion

Soient (M^m, g), (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $f : M \times N \to (0, \infty)$ une fonction C^∞.

Théorème 2.7. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_f(\varphi), \delta g > \, v_g,$$

où $\langle \, , \rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $T^*M \otimes T^*M$,

$$S_f(\varphi) = f_\varphi \, e(\varphi) \, g - f_\varphi \, \varphi^* h, \tag{2.58}$$

$e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de φ et $\varphi^* h$ le pull-back de la métrique h.

Démonstration. on a :

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D f_\varphi \delta(|d\varphi|^2) v_g + \frac{1}{2}\int_D f_\varphi |d\varphi|^2 \delta(v_{g_t}).$$

Comme :

$$\delta(v_{g_t}) = \frac{1}{2}\langle g, \delta g\rangle v_g, \quad \delta\Big(\frac{|d\varphi|^2}{2}\Big) = -\frac{1}{2}\langle \varphi^* h, \delta g\rangle, \tag{2.59}$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \int_D f_\varphi\big(-\frac{1}{2}\langle \varphi^* h, \delta g\rangle\big) v_g + \frac{1}{2}\int_D f_\varphi |d\varphi|^2 \big(\frac{1}{2}\langle g, \delta g\rangle v_g\big).$$

□

Remarque 2.2.

1. En particulier, si $f = 1$, on retrouve le tenseur énergie impulsion de φ défini dans [3]
$$S_f(\varphi) = S(\varphi) = e(\varphi)\, g - \varphi^* h.$$

2. Soit $f_1 : M \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction de classe C^∞,
si $f(x, y) = f_1(x)$ pour tout $(x, y) \in M \times N$, on retrouve le tenseur énergie impulsion de φ défini dans [39]
$$S_f(\varphi) = S_{f_1}(\varphi) = f_1 \, e(\varphi)\, g - f_1 \, \varphi^* h.$$

Proposition 2.3. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors :*

$$\operatorname{div}^M S_f(\varphi) \;=\; -h(\tau_f(\varphi), d\varphi) + e(\varphi)\big(df_\varphi - h((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, d\varphi)\big).$$

Démonstration. Relativement à une base orthonormée $(e_1, ..., e_m)$ au point $x \in M$, on a :

$$S_f(\varphi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2} f_\varphi \sum_{k=1}^{m} h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\delta_{ij} - f_\varphi h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).$$

De sorte que :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}^M S_f(\varphi))(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(S_f(\varphi)(e_i, e_j)) \\
&= \sum_{i,k=1}^{m} \frac{1}{2} e_i(f_\varphi) h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\delta_{ij} \\
&\quad + \sum_{i,k=1}^{m} \frac{1}{2} f_\varphi e_i(h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k)))\delta_{ij} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} e_i(f_\varphi) h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} f_\varphi e_i(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))) \\
&= e(\varphi) df_\varphi(e_j) + \sum_{k=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_k), d\varphi(e_k)) \\
&\quad -h(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi), d\varphi(e_j)) \\
&\quad -f_\varphi h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j)).
\end{aligned}$$

En vertu de la symétrie de la deuxième forme fondamental, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}^M S_f(\varphi))(e_j) &= e(\varphi) df_\varphi(e_j) - h(d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi), d\varphi(e_j)) \\
&\quad -f_\varphi h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)).
\end{aligned}$$

Soit $\tau_f(\varphi) = f_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi$ le champ de f-tension de φ, alors on a :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}^M S_f(\varphi))(e_j) &= e(\varphi) df_\varphi(e_j) - h(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_j)) \\
&\quad -e(\varphi) h((\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, d\varphi(e_j)).
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.3.

1. En particulier , si $f = 1$. Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors ([3]) :

$$\mathrm{div}^M\ S_f(\varphi) = \mathrm{div}^M\ S(\varphi) \quad = \quad -h(\tau(\varphi), d\varphi).$$

2. Soit $f_1 : M \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction de classe C^∞ si $f(x, y) = f_1(x)$ pour tout $(x, y) \in M \times N$. Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors ([39]) :

$$\mathrm{div}^M\ S_f(\varphi) = \mathrm{div}^M\ S_{f_1}(\varphi) \quad = \quad -h(\tau_{f_1}(\varphi), d\varphi) + e(\varphi) df_1.$$

2.5 Tenseur f-bi-énergie impulsion

Soient (M, g) , (N, h) deux variétés riemanniennes, $f \in C^\infty(M \times N)$ une fonction positive.

Théorème 2.8. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_{2,f}(\varphi; D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D < S_2(\varphi), \delta g > \ v_g,$$

où $S_2(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ est le tenseur f-bi-énergie impulsion donné par :

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X, Y) \quad = \quad & -\frac{1}{2} |\tau_f(\varphi)|^2 g(X, Y) - f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(X, Y) \\ & + f_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)) \\ & - \tau_f(\varphi)(f)\big(e(\varphi) g(X, Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y))\big). \end{aligned}$$

$< d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) >= \sum_{i=1}^m h\big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)\big)$, $\{e_1, ..., e_m\}$ *étant une base orthonormée sur M.*

Pour la preuve du Théorème 2.8, on démontre d'abord les lemmes suivants :

Lemme 2.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Si $\{g_t\}$ est une variation C^∞ de g. Alors le champ de vecteurs $\xi = \big(\mathrm{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2} \mathrm{grad}^M \big(\mathrm{trace}_g(\delta g)\big)$ satisfait :*

$$\begin{aligned} \delta(|\tau_f(\varphi)|^2) \quad = \quad & -2 f_\varphi < h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > -2 f_\varphi h(d\varphi(\xi), \tau_f(\varphi)) \\ & -2 < df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > + \tau_f(\varphi)(f) < \varphi^* h, \delta g > . \end{aligned}$$

Démonstration. Relativement aux coordonnées locales (x^i) sur M et (y^α) sur N respectivement, on a :

$$\delta(|\tau_f(\varphi)|^2) = \delta\big(\tau_f(\varphi)^\alpha \tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}\big) = 2\, \delta(\tau_f(\varphi)^\alpha) \tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}.$$

$$\delta(\tau_f(\varphi)^\alpha) = \delta\big(f_\varphi \tau(\varphi)^\alpha + \theta^\alpha - \eta^\alpha\big) = f_\varphi\, \delta(\tau(\varphi)^\alpha) + \delta(\theta^\alpha) - \delta(\eta^\alpha), \tag{2.60}$$

où :

$$\tau(\varphi)^\alpha = g^{ij}\Big(\varphi^\alpha_{i,j} +^N \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\varphi^\mu_i\varphi^\sigma_j -^M \Gamma^k_{ij}\varphi^\alpha_k\Big),$$

$$\theta^\alpha = g^{ij}(f_\varphi)_i\varphi^\alpha_j, \quad \eta^\alpha = e(\varphi)h^{\alpha\mu}f_\mu.$$

D'après ([34]) on a :

$$\delta(\tau(\varphi)^\alpha) \;=\; -g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - \xi^k\varphi^\alpha_k,$$

Le premier terme du coté droit de (2.60) est donné par :

$$f_\varphi\, \delta(\tau(\varphi)^\alpha) = -f_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - f_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k.$$

Le deuxième terme du coté droit de (2.60) est donné par :

$$\delta(\theta^\alpha) = \delta(g^{ij})(f_\varphi)_i\varphi^\alpha_j.$$

D'après (2.59) le troisième terme du coté droit de la formule (2.60) se réduit à :

$$-\delta(\eta^\alpha) = -\delta(e(\varphi))\, h^{\alpha\mu}f_\mu = \frac{1}{2} < \varphi^*h, \delta g > h^{\alpha\mu}f_\mu.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta(\tau_f(\varphi)^\alpha) \;&=\; -f_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - f_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k \\ &\quad +\delta(g^{ij})(f_\varphi)_i\varphi^\alpha_i + \frac{1}{2} < \varphi^*h, \delta g > h^{\alpha\mu}f_\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(|\tau_f(\varphi)|^2) \;&=\; -2f_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij}\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - 2f_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &\quad +2\delta(g^{ij})(f_\varphi)_i\varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} + < \varphi^*h, \delta g > h^{\alpha\mu}f_\mu\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &=\; -2f_\varphi < h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > -2f_\varphi h(d\varphi(\xi), \tau_f(\varphi)) \\ &\quad -2 < df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > +\tau_f(\varphi)(f) < \varphi^*h, \delta g > .\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞. *Si* $\{g_t\}$ *est une variation de classe* C^∞ *de* g *et* ξ *est le champ de vecteurs défini par* $\xi = \big(\operatorname{div}^M(\delta g)\big)^\sharp - \frac{1}{2}\operatorname{grad}^M\big(\operatorname{trace}_g(\delta g)\big)$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_M f_\varphi h(d\varphi(\xi), \tau_f(\varphi))v_g \;&=\; \int_M \langle -\operatorname{sym}\big(\nabla f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))\big) \\ &\quad +\frac{1}{2}\operatorname{div}^M\big(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp\big)g, \delta g\rangle\, v_g.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\omega = f_\varphi\, h(d\varphi, \tau_f(\varphi))$, d'après la définition de ξ, on a :

$$\int_M \omega(\xi) v_g = \int_M \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big) v_g - \frac{1}{2}\int_M \omega\big(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}_g(\delta g))\big) v_g, \tag{2.61}$$

le premier terme du coté droit de (2.61) est :

$$\begin{aligned}\int_M \omega\big((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp\big) v_g &= \int_M g(\omega^\sharp, (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp) v_g \\ &= \int_M g^*(\omega, \operatorname{div}^M(\delta g)) v_g.\end{aligned}$$

(ici g^* désigne la métrique induite sur T^*M).

D'autre part , si $\sigma \in \Gamma(\otimes^2 T^*M)$ et $C(\omega,\sigma) = \omega^i \sigma_{ij} dx^j$, on a :

$$g^*(\omega, \operatorname{div}^M \sigma) = \operatorname{div}(C(\omega,\sigma)^\sharp) - \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \sigma\rangle. \tag{2.62}$$

En prenant $\sigma = \delta g$, on obtient :

$$\int_M \omega\big((\operatorname{div}(\delta g))^\sharp\big) v_g = -\int_M \langle \operatorname{sym}(\nabla\omega), \delta g\rangle.$$

Si $\lambda \in C^\infty(M)$, on a :

$$\omega(\operatorname{grad}^M \lambda) = g^*(\omega, d\lambda). \tag{2.63}$$

Pour $\lambda = \operatorname{trace}(\delta g)$, le deuxième terme du coté droit de (2.61) s'écrit :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_M \omega\big(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}(\delta g))\big) v_g &= -\frac{1}{2}\int_M g^*(\omega, d(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_M g(\omega^\sharp, \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M \operatorname{trace}(\delta g)\operatorname{div}(\omega^\sharp) v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M \langle \operatorname{div}(\omega^\sharp) g, \delta g\rangle v_g.\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 2.8.
D'après (2.59) et le lemme 2.1, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_M \delta(|\tau_f(\varphi)|^2) v_g + \frac{1}{2}\int_M |\tau_f(\varphi)|^2 \delta(v_{g_t}) \\ &= \frac{1}{2}\int_M \Big(-2f_\varphi < h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > -2 f_\varphi h(d\varphi(\xi), \tau_f(\varphi)) \\ &\quad -2 < df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > + \tau_f(\varphi)(f) < \varphi^* h, \delta g > \Big) v_g \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_M < \frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g, \delta g > v_g,\end{aligned}$$

et d'après le lemme 2.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_M \big(-2f_\varphi < h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > +\langle 2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))\big) \\
&\quad - \mathrm{div}\,\big(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp\big)g, \delta g\rangle - 2 < df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > \\
&\quad + \tau_f(\varphi)(f) < \varphi^* h, \delta g > \big)v_g + \frac{1}{2}\int_M < \frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g, \delta g > v_g.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_{2,f}(\varphi) &= -2f_\varphi h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)) + 2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))\big) \\
&\quad - \mathrm{div}\,\big(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp\big)g - 2df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \tau_f(\varphi)(f)\varphi^* h + \frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g.
\end{aligned}$$

Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{sym}\,\big(\nabla f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))\big)(X,Y) &= 2f_\varphi h(\nabla d\varphi(X,Y), \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + f_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + f_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + X(f_\varphi)h(d\varphi(Y), \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + Y(f_\varphi)h(d\varphi(X), \tau_f(\varphi)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2df_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi))(X,Y) &= -X(f_\varphi)h(d\varphi(Y), \tau_f(\varphi)) \\
&\quad - Y(f_\varphi)h(d\varphi(X), \tau_f(\varphi)).
\end{aligned}$$

Relativement à une base orthonormée $(e_1, ..., e_m)$ au point $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\big(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp\big) &= \sum_{i=1}^m e_i(g(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp, e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m e_i(f_\varphi h(d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi))) \\
&= \sum_{i=1}^m e_i(f_\varphi)h(d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi)) + \sum_{i=1}^m f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m f_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&= h(d\varphi(\mathrm{grad}^M f_\varphi), \tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(\tau(\varphi), \tau_f(\varphi)) \\
&\quad + f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > .
\end{aligned}$$

Soit $\tau_f(\varphi) = f_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(\mathrm{grad}^M f_\varphi) - e(\varphi)(\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi$ le champ de f-tension de φ, alors :

$$\mathrm{div}\,\big(f_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))^\sharp\big) = |\tau_f(\varphi)|^2 + e(\varphi)\tau_f(\varphi)(f) + f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > .$$

Remarque 2.4.

1. Si $f = 1$. Alors le tenseur f-bi-énergie impulsion d'une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ entre deux variétés riemanniennes est donné par :

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X,Y) &= S_2(\varphi)(X,Y) \\ &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X,Y) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) > g(X,Y) \\ &\quad + h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau(\varphi)). \end{aligned}$$

(on retrouve le résultat obtenu dans le chapitre 1)

2. Soit $f_1 : M \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction positive si $f(x, y) = f_1(x)$ pour tout $(x, y) \in M \times N$. Alors le tenseur f-bi-énergie impulsion d'une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est :

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X,Y) &= S_{2,f_1}(\varphi)(X,Y) \\ &= -\frac{1}{2}|\tau_{f_1}(\varphi)|^2 g(X,Y) - f_1 < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_{f_1}(\varphi) > g(X,Y) \\ &\quad + f_1 h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_{f_1}(\varphi)) + f_1 h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_{f_1}(\varphi)). \end{aligned}$$

(on retrouve le résultat obtenu dans [39])

Théorème 2.9. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, alors :*

$$\text{div } S_{2,f}(\varphi) = -h(\tau_{2,f}(\varphi), d\varphi) - < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > \big(df_\varphi - h((\text{grad}^N f) \circ \varphi, d\varphi)\big).$$

Démonstration. Ecrivons $S_{2,f}(\varphi) = T_1 + T_2 + T_3$ où $T_1, T_2, T_3 \in \Gamma(\odot^2 T^* M)$ sont définis par :

$$\begin{aligned} T_1(X,Y) &= -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(X,Y) - f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(X,Y), \\ T_2(X,Y) &= f_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)), \\ T_3(X,Y) &= -\tau_f(\varphi)(f)\big(e(\varphi) g(X,Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y))\big). \end{aligned}$$

Relativement à une base orthonormale $(e_1, ..., e_m)$ au point $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned} (\text{div } T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_1(e_i, e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i\big(-\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 \delta_{ij} - f_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > \delta_{ij}\big) \\ &= -h(\nabla^\varphi_{e_j} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) - e_j(f_\varphi) < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > \\ &\quad - f_\varphi e_j(< d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) >) \\ &= -h(\nabla^\varphi_{e_j} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) - e_j(f_\varphi) < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > \\ &\quad - \sum_{i=1}^m f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} \tau_f(\varphi)) - \sum_{i=1}^m f_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j} \nabla^\varphi_{e_i} \tau_f(\varphi)), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{div}\ T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(T_2(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i\big(f_\varphi h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi))\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(f_\varphi) h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + e_i(f_\varphi) h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&= h(d\varphi(\mathrm{grad}^M f_\varphi),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + f_\varphi h(\tau(\varphi),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + h(d\varphi(e_j),\mathrm{trace}_g\,\nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&= h(\tau_f(\varphi),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + h(e(\varphi)(\mathrm{grad}^N f)\circ\varphi,\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + h(d\varphi(e_j),\mathrm{trace}_g\,\nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&= h(\tau_f(\varphi),\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + e(\varphi)e_j(\tau_f(\varphi)(f)) - e(\varphi)h(\nabla^\varphi_{\tau_f(\varphi)}\mathrm{grad}^N f, d\varphi(e_j)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + h(d\varphi(e_j),\mathrm{trace}_g\,\nabla^\varphi f_\varphi \nabla^\varphi\tau_f(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} f_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\text{div } T_3)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(T_3(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i\big(-\tau_f(\varphi)(f)e(\varphi)\delta_{ij} + \tau_f(\varphi)(f)h(d\varphi(e_i),d\varphi(e_j))\big) \\
&= -e_j(\tau_f(\varphi)(f))e(\varphi) - \tau_f(\varphi)(f)e_j(e(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} e_i(\tau_f(\varphi)(f))h(d\varphi(e_i),d\varphi(e_j)) + \sum_{i=1}^{m} \tau_f(\varphi)(f)h(\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(e_i),d\varphi(e_j)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \tau_f(\varphi)(f)h(d\varphi(e_i),\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(e_j)) \\
&= -e_j(\tau_f(\varphi)(f))e(\varphi) - \tau_f(\varphi)(f)e_j(e(\varphi)) \\
&\quad + h(d\varphi(\text{grad}^M \tau_f(\varphi)(f)),d\varphi(e_j)) + \tau_f(\varphi)(f)h(\tau(\varphi),d\varphi(e_j)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \tau_f(\varphi)(f)h(d\varphi(e_i),\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(e_j)).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.5.

1. En particulier, si $f = 1$. Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application C^∞. Alors :

$$\text{div } S_{2,f}(\varphi) = \text{div } S_2(\varphi) \;=\; -h(\tau_2(\varphi),d\varphi).$$

   (on retrouve le résultat obtenu dans le chapitre 1 , [34])

2. Soit $f_1 : M \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction positive, si $f(x,y) = f_1(x)$ pour tout $(x,y) \in M\times N$ et soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application de classe C^∞, alors :

$$\text{div } S_{2,f}(\varphi) = \text{div } S_{2,f_1}(\varphi) \;=\; -h(\tau_{2,f_1}(\varphi),d\varphi) - < \nabla^{\varphi}\tau_{f_1}(\varphi), d\varphi > df_1.$$

   (on retrouve le résultat obtenu dans [39])

Chapitre 3

Les sous variétés f-biharmoniques dans un espace à courbure sectionnelle constante

Dans ce chapitre nous considérons en particulier les applications f-biharmonique telles que $f : (M, g) \to (0, \infty)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.(voir [39]) Nous démontrons d'abord que toute application f-biharmonique de f-bi-énergie fini, sur une variété Riemannienne complète de volume infini, a valeurs dans une variété rimannienne de courbure sectionnelle négative satisfaisant certaines conditions est f-harmoniques (Théorème3.1). Puis nous présentons quelques propriétés des sous variétés f-biharmoniques dans un espace à courbure sectionnelle constante, en particulier dans la sphère $\mathbb{S}^n$ et nous donnons une caractérisation des courbes f-biharmoniques dans $\mathbb{S}^3$

3.1 Les applications f-harmoniques

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M et $f : M \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction de classe C^∞ strictement positive.

On appelle f-énergie d'une application $\varphi : M^m \to N^n$ de classe C^∞ sur D, la fonctionnelle E_f définie par :

$$E_f(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D f(x)\, |d\varphi|^2\, v_g. \tag{3.1}$$

Définition 3.1. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite f-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle f-énergie $E_f(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subseteq M$, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{3.2}$$

où $\{\varphi_t\}$ est une variation de φ à support dans D.

Définition 3.2. *[38] Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes et $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive.Le champ f-tension de φ est donné par :*

$$\tau_f(\varphi) = trace \nabla f d\varphi = f\tau(\varphi) + d\varphi(grad^M(f)) \tag{3.3}$$

φ est dite f-harmonique si et seulement si $\tau_f(\varphi) = 0$

Remarques 3.1.

1. *Si* $f=1$, *on retrouve la définition du champ de tension associé à* φ, $\tau_f(\varphi)=\tau(\varphi)$.
2. *Une application harmonique* $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ *est* f*-harmonique si et seulement si* $\operatorname{grad}^M f\in\operatorname{Ker} d\varphi$.
3. *Localement on a :*

$$\tau_f(\varphi) \;=\; g^{ij}\Big(f\,\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+f\,\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi-f\,\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}+\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi.$$

Exemple 3.1. Soit $\varphi:(\mathbb{R},<,>_{\mathbb{R}})\longrightarrow(\mathbb{R},<,>_{\mathbb{R}})$ une fonction de classe C^∞. Si $f(x)=e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors φ est f-harmonique si et seulement si φ est solution de l'équation differentielle :

$$f\,\varphi''+f'\varphi'=0$$

i.e :

$$\varphi''+\varphi'=0.$$

D'où : $\varphi(x)=a+b\,e^{-x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

L'exemple 3.1, montre qu'une application f-harmonique n'est pas nécessairement harmonique.

3.2 Les applications f-biharmonniques

Définition 3.3. *[39] pour tout domaine D compact de M, La fonctionnelle f-bi-energie de* φ *est :*

$$E_{2,f}(\varphi;D)=\frac{1}{2}\int_D|\tau_f(\varphi)|^2v_g \tag{3.4}$$

ou v_g *est l'element de volume sur la variété M. L'application* φ *est dite f-bi-harmonique si est seulement si elle est point critique de sa fonctionnelle f-bienergie, l'equation d'Euler Lagrange associée est :*

$$\tau_{2,f}(\varphi)=-f trace R^N(\tau_f(\varphi),d\varphi)d\varphi-trace[\nabla^\varphi f\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)-f\nabla_{\nabla^M}\tau_f(\varphi)]=0, \tag{3.5}$$

relativement à une base orthonormée $\{e_1,.....,e_m\}$, *nous avons :*

$$trace R^N(\tau_f(\varphi),d\varphi)d\varphi=\sum_{i=1}^m R^N(\tau_f(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),$$

$$trace[\nabla^\varphi f\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)-f\nabla_{\nabla^M}\tau_f(\varphi)]=\nabla^\varphi_{e_i}f\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)-f\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau_f(\varphi),$$

$\tau_{2,f}(\varphi)$ *est appelé le champ f-bitension de* φ

Exemple 3.2. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ application differentiable et $f(x)=e^x$, alors :
1- φ est f-harmonique si et seulement si

$$\varphi^{''}+\varphi^{'}=0,$$

i.e φ est de la forme : $a + be^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2- φ est f-biharmonique si et seulement si

$$\varphi^{''''} + 4\varphi^{'''} + 5\varphi^{''} + 2\varphi^{'} = 0,$$

i.e la function φ est de la forme $\varphi(x) = a + be^{-2x} + ce^{-x} + d.xe^{-x}$, avec $a, b, c, \in \mathbb{R}$.

□

De l'equation (3.5) on déduit que toute application f-harmonique est f-biharmonique, réciproquement nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète de volume infini , (N^n, h) une variété Riemannienne de coubure sectionnelle négative et $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ positive ,alors : toute application f-biharmonique $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de f-bi-énergie fini qui satisfait :*

$$trace_g \nabla^{\varphi} f \nabla^{\varphi} - f trace_g \nabla^{\varphi} \nabla^{\varphi} \leq 0 \tag{3.6}$$

est f-harmonique.
Relativement à une base orthonormale $\{e_1, .., e_m\}$ sur M et pour tout $X \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$, l'inégalité (3.6) est équivalente a :

$$\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} f \nabla^{\varphi}_{e_i} X, X) - f h(\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} X, X) = \sum_{i=1}^{m} h(e_i(f) \nabla^{\varphi}_{e_i} X, X) \leq 0$$

Démonstration. Suposons que $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ est f-biharmonique. on fixe un point $x \in M$ et soit $\{e_1, .., e_m\}$ une base orthonormale sur M telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$, pour tous $i, j = 1, .., m$. De la formule (3.5), nous obtenons :

$$-f \sum_{i=1}^{m} R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} f \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau_f(\varphi) = 0,$$

donc :

$$h(f \sum_{i=1}^{m} R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi)) + h(\nabla^{\varphi}_{e_i} f \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} -h(f \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) = & -h(f \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) \\ & + h(f \sum_{i=1}^{m} R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi)) \\ & + h(\nabla^{\varphi}_{e_i} f \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comme $trace_g \nabla^{\varphi} f \nabla^{\varphi} - trace_g \nabla^{\varphi} \nabla^{\varphi} \leq 0$ et la courbure sectionnelle de la variété N est négative , d'après l'equation (3.7) on déduit :

$$-h(\sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) \leq 0. \tag{3.8}$$

Soit ρ une fonction à support compact dans M, d'après (3.8) nous avons :

$$-h(\sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \rho^2\tau_f(\varphi)) \leq 0,$$

qui est équivalente à :

$$-\sum_{i=1}^{m} e_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \rho^2\tau_f(\varphi)) + \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \nabla^{\varphi}_{e_i}\rho^2\tau_f(\varphi)) \leq 0. \tag{3.9}$$

D'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_M \sum_{i=1}^{m} e_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \rho^2\tau_f(\varphi))v_g = 0. \tag{3.10}$$

D'après les formules (3.9) et (3.10) on a :

$$\int_M \sum_{i=1}^{m} \rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g + \int_M \sum_{i=1}^{m} 2\rho e_i(\rho)\ h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi))v_g \leq 0, \tag{3.11}$$

en appliquant l'inégalité de Young, nous avons :

$$-2h(\rho\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), e_i(\rho)\tau_f(\varphi)) \leq \epsilon\rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 + \frac{1}{\epsilon}e_i(\rho)^2\ |\tau_f(\varphi)|^2. \tag{3.12}$$

de (3.11) et (3.12), nous déduisons l'inégalité :

$$\int_M \sum_{i=1}^{m} \rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g \leq \epsilon \int_M \rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g + \frac{1}{\epsilon}\int_M \sum_{i=1}^{m} e_i(\rho)^2|\tau_f(\varphi)|^2 v_g. \tag{3.13}$$

pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ on a :

$$\frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m} \rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g \leq 2\int_M \sum_{i=1}^{m} e_i(\rho)^2|\tau_f(\varphi)|^2 v_g. \tag{3.14}$$

Considérons la fonction $\rho = \rho_R$ telle que $\rho \leq 1$ sur M, $\rho = 1$ dans la boule $B(x, R)$, $\rho = 0$ dans $M \setminus B(x, 2R)$ et $|grad^M \rho| \leq \frac{2}{R}$. Alors :

$$\frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m} \rho^2|\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g \leq \frac{8}{R^2}\int_M |\tau_f(\varphi)|^2 v_g. \tag{3.15}$$

Comme $E_{2,f}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau_f(\varphi)|^2 v_g < \infty$, quand $R \to \infty$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m} |\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)|^2 v_g = 0,$$

donc

$$\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi) = 0$$

pour tout $i = 1, ..., m$, alors

$$h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) = 0,$$

comme ∇^{φ} est compatible avec la métrique h :

$$\nabla^{\varphi}_{e_i}h(\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) = 0,$$

$$\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_f(\varphi)|^2 = 0$$

donc $|\tau_f(\varphi)|^2 = C = C^{ste}$
comme φ a une f-bi-energie fini, nous avons $\int_M |\tau_f(\varphi)|^2 v_g = C^2 \int_M v_g$ est fini, absurd car le volume de M est infini, donc $C = 0$.

□

Pour $f = 1$ nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète non compacte de volume infini, (N^n, h) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle négative alors toute application biharmonique $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de fonctionnelle bi-énergie fini est harmonique.*

3.2.1 Propriétés des applications f-harmoniques et f-bi-harmoniques

Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une immersion de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ entre deux variétés riemanniennes. Le fibré inverse $\varphi^{-1}(TN)$ se décompose en somme directe $(TM)^{\top} \oplus (TM)^{\perp}$ du fibré tangent $(TM)^{\top}$ et fibré normal $(TM)^{\perp}$. Si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ est une fonction positive, alors :

$$(\nabla^{\varphi}_X f d\varphi)(Y) = \nabla^{\varphi}_X(f d\varphi(Y)) - f d\varphi(\nabla^M_X Y) = B_f(X, Y) \tag{3.16}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. Pour toute base orthonormale $\{e_1, ..., e_m\}$ dans M, nous avons :

$$\tau_f(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} B_f(e_i, e_i) \tag{3.17}$$

Proposition 3.1. *Pour tous champs de vecteurs $\xi \in (TM)^{\perp}$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons :*

$$h(B_f(X, Y), \xi) = -f h(A_{\xi}(X), d\varphi(Y)) \tag{3.18}$$

où A_{ξ} est l'opérateur de weingarten défini par [3] :

$$\nabla^N_X \xi = A_{\xi}(X) + \nabla^{\perp}_X(\xi) \tag{3.19}$$

Démonstration. Comme $\xi \in (TM)^{\perp}$ et $d\varphi(Y) \in (TM)^{\top}$, alors :

$$h(\xi, f d\varphi(Y)) = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_X h(\xi, f d\varphi(Y)) \\
&= h(\nabla^N_X \xi, f d\varphi(Y)) + h(\xi, \nabla^{\varphi}_X f d\varphi(Y)) \\
&= h(\nabla^N_X \xi, f d\varphi(Y)) + h(\xi, \nabla^{\varphi}_X f d\varphi(Y) + f d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= h(A_{\xi}(X) + \nabla^{\perp}_X \xi, f d\varphi(Y)) + h(\xi, B_f(X, Y)),
\end{aligned}$$

d'où le resultat. □

3.2.2 Les sous variétés f-biharmoniques dans la sphère $\mathbb{S}^n$

Soit M une sous variété de $\mathbb{S}^n$ de dimension m , $i : M \to \mathbb{S}^n$ l'inclusion cannonique et $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive . on note par : B la seconde forme fondamentale de la sous variété M, A l'opérateur de weingarten et par H la courbure moyenne de la sous variété M ([31]).

Théorème 3.2. *soit $i : M \to \mathbb{S}^n$ l'inclusion cannonique d'une sous variété M de dimension m dans $\mathbb{S}^n$, alors i est f-biharmonnique si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$
\begin{aligned}
1) \quad & (m-1)fgrad^M f + 3mfA_H(grad^M f) + \frac{1}{2}grad^M(|grad^M f|^2) \\
& - \frac{m^2}{2}f^2 grad^M(|H|^2) + 2mf^2 A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp}(e_i) + fRicci^M(grad^M f) \\
& + fgrad^M(\Delta^M f) + fA_{B(e_i,grad^M f)}(e_i) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2) \quad & m^2 f^2 H + m|grad^M f|^2 H + 3mf(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f}H)^\perp + B(grad^M f, grad^M f) \\
& + mf(\Delta^M f)H + mf^2 B(e_i, A_H(e_i)) + mf^2(\Delta^\perp H) \\
& + fB(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M f) + f(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} B(e_i, grad^M f))^\perp = 0
\end{aligned}
$$

ou $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormale sur M.

Pour la démonstration du Théorème (3.2), nous allons besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. *Soit $\Delta^\perp$ le Laplacien dans le fibré normal de M , alors :*

$$
\begin{aligned}
trace(\nabla^{\mathbb{S}^n})^2 H = & -\frac{m}{2}grad^M(|H|^2) + 2\sum_{i=1}^m A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp}(e_i) \\
& + \sum_{i=1}^m B(e_i, A_H(e_i)) + \Delta^\perp H
\end{aligned}
$$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormale sur M telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x \in M$ pour tout $i, j = 1, .., m$. Alors au point x nous avons :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H &= \sum_{i=1}^m \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}\Big(A_H(e_i) + (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp\Big) \\
&= \sum_{i=1}^m \nabla^M_{e_i} A_H(e_i) + \sum_{i=1}^m B(e_i, A_H(e_i)) \qquad (3.20) \\
&+ \sum_{i=1}^m A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp}(e_i) + \sum_{i=1}^m (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i}H)^\perp)^\perp,
\end{aligned}
$$

or : $< A_H(X), Y >= - < B(X,Y), H >$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \nabla^M_{e_i}(A_H(e_i) &= \sum_{i,j=1}^{m} < \nabla^M_{e_i} A_H(e_i), e_j > e_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} e_i(< A_H(e_i), e_j >)e_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m} e_i(< B(e_i,e_j), H >)e_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m} e_i(< \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} e_i, H >)e_j,\end{aligned}$$

comme $\nabla^{\mathbb{S}^n}_X \nabla^{\mathbb{S}^n}_Y Z = R^{\mathbb{S}^n}(X,Y)Z + \nabla^{\mathbb{S}^n}_Y \nabla^{\mathbb{S}^n}_X Z + \nabla^{\mathbb{S}^n}_{[X,Y]} Z$ pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \nabla^M_{e_i}(A_H(e_i)) &= -\sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} e_i, H > e_j - \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} e_i, \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H > e_j \\ &= -\sum_{i=1}^{m} < R^{\mathbb{S}^n}(e_i,e_j)e_i, H > e_j - \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} e_i, H > e_j \\ &\quad -\sum_{i=1}^{m} < B(e_i,e_j), (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H)^{\perp} > e_j,\end{aligned}$$

comme $\mathbb{S}^n$ est à courbure sectionnelle constante 1 , alors
$R^N(X,Y)Z =< Y, Z > X - < X, Z > Y$, pout tous $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m} \nabla^M_{e_i} A_H(e_i) &= -\sum_{i,j=1}^{m} e_j(< \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} e_i, H >)e_j + \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} e_i, \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} H > e_j \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{m} < A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H)^{\perp}}(e_i), e_j > e_j \\ &= -m \sum_{j=1}^{m} e_j(< H, H >)e_j + m \sum_{j=1}^{m} < \nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_j} H, H > e_j + \sum_{i=1}^{m} A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H)^{\perp}}(e_i) \\ &= -\frac{m}{2} \sum_{j=1}^{m} e_j(< H, H >)e_j + \sum_{i=1}^{m} A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} H)^{\perp}}(e_i)\end{aligned} \tag{3.21}$$

les equations (3.20) et (3.21) achèvent la démenstration du lemme (3.1) □

Démonstration. du théorème(3.2)
Le champ f-tension de i est donné par :

$$\begin{aligned}\tau_f(i) &= f\tau(i) + di(grad^M f) \\ &= mfH + grad^M f,\end{aligned}$$

soit $\{e_1,...,e_m\}$ une base orthonormale telle que en $x \in M$ on a $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$, $\forall (i,j=1,...,m)$, donc au point x nous avons :

$$\sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(\tau_f(i), di(e_i))di(e_i) = mf \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(H,e_i)e_i + \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(grad^M f, e_i)e_i,$$

or : $< H, e_i >= 0$ et $R^{\mathbb{S}^n}(X,Y)Z =< Y,Z > X- < X,Z > Y$, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(\tau_f(i), di(e_i))di(e_i) = m^2 f H + (m-1) grad^M f \tag{3.22}$$

nous savons que :

$$\sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} f \nabla^i_{e_i} \tau_f(i) = \nabla^i_{grad^M f} \tau_f(i) + f \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} \tau_f(i), \tag{3.23}$$

le premier terme du coté droit de l'equation (3.23) est :

$$\begin{aligned}
\nabla^i_{grad^M f} \tau_f(i) &= m \nabla^i_{grad^M f} f H + \nabla^i_{grad^M f} grad^M f \\
&= m|grad^M f|^2 H + mf \nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f} H + \nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f} grad^M f \\
&= m|grad^M f|^2 H + mf A_H(grad^M f) + mf(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f} H)^\perp \\
&+ \nabla^M_{grad^M f} grad^M f + B(grad^M f, grad^M f) \\
&= m|grad^M f|^2 H + mf A_H(grad^M f) + mf(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M f} H)^\perp \\
&+ \frac{1}{2} grad^M(|grad^M f|^2) + B(grad^M f, grad^M f),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

pour le deuxième terme du coté droit de l'equation (3.23)on a :

$$\begin{aligned}
f \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} \tau_f(i) &= mf \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} f H + f \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} grad^M f \\
&= mf \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \Big(e_i(f) H + f \nabla^i_{e_i} H \Big) + \sum_{i=1}^m f \nabla^i_{e_i} \Big(\nabla^M_{e_i} grad^M f + B(e_i, grad^M) \Big) \\
&= mf(\Delta^M f) H + 2mf \nabla^{\mathbb{S}^n}_{grad^M} H + mf^2 \sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} H \\
&+ f \sum_{i=1}^m \nabla^M_{e_i} \nabla^M_{e_i} grad^M f + f \sum_{i=1}^m B(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M f) \\
&+ f \sum_{i=1}^m A_{B(e_i, grad^M f)}(e_i) + f \sum_{i=1}^m (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{e_i} B(e_i, grad^M f))^\perp.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

D'après le lemme (3.1) nous avons :

$$\sum_{i=1}^m \nabla^i_{e_i} \nabla^i_{e_i} H = -\frac{m}{2} grad^M(|H|^2) + 2 trace A_{(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{.} H)^\perp}(.) + trace B(., A_H(.)) + \Delta^\perp H, \tag{3.26}$$

l'équation :

$$trace(\nabla^M)^2 grad^M f = Ricci^M(grad^M f) + grad^M(\Delta^M f), \tag{3.27}$$

et les equations : (3.22) , (3.23) , (3.24) , (3.25) et (3.26), nous obtenons le resultat du Théorème (3.2). □

Si $f = 1$ nous arrivons au corrolaire suivant :

Corollaire 3.2. *Soit M une sous variété de la sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension m, alors l'inclusion cannonique $i : M \to \mathbb{S}^n$ est biharmonnique si et seullement si :*

$$1)\ -\frac{m}{2} grad^M(|H|^2) + 2 trace A_{(\nabla^N_{.} H)^\perp}(.) = 0,$$

$$2)\ mH + trace B(., A_H(.)) + \Delta^\perp H = 0$$

Ce resultat est donné par : R.Caddeo, S.Montaldo, C.Oniciuc ([7])

Exemple 3.3. Considérons

$$M = \mathbb{S}^m(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\frac{1}{\sqrt{2}}\} = \left\{(x_1, ..., x_{m+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^{m+2} \ / \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = \frac{1}{2}\right\}$$

une hypersurface parallèle de $\mathbb{S}^{m+1}$. La seconde forme fondamentale de M est :

$$B(X, Y) = \nabla di(X, Y) = < X, Y > H,$$

ou $H = -\eta$ et $\eta = (x_1, ..., x_{m+1}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ([7],[35]).
Par un calcul direct nous avons :

$$A_H X = -X \ , \ (\nabla_X^{\mathbb{S}^{m+1}} H) = 0 \ , \ \textit{pour tout } X \in \Gamma(TM) \textit{ et } \Delta^\perp H = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction positive et $\{e_i, ..., e_m\}$ une base orthonormale sur M alors :

$$\sum_{i=1}^m A_{B(e_i, grad^M f)}(e_i) = -grad^M f \ , \ \sum_{i=1}^m B(e_i, A_H(e_i)) = -mH,$$

$$\sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}^{\mathbb{S}^{m+1}} B(e_i, grad^M f))^\perp = (\Delta^M f) H.$$

D'après le thérème (3.2), l'inclusion i est f-biharmonique si et seulement si :

$$\begin{cases} -2(m+1) f grad^M f + \frac{1}{2} grad^M(|grad^M f|^2) + f Ricci^M(grad^M f) + f grad^M(\Delta^M f) = 0 \\ (m+1)|grad^M f|^2 + (m+2) f(\Delta^M f) = 0 \end{cases}$$

3.2.3 Les courbes f-biharmoniques dans $\mathbb{S}^3$

Théorème 3.3. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$ paramétrisée par la longueur de l'arc et $f : I \to (0,\infty)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Alors, la courbe γ est f-biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{cases} ff''' + f'f'' - 4k^2ff' - 3kk'f^2 = 0 \\ 3kff'' + 4k'ff' + 2k(f')^2 + k''f^2 - k^3f^2 - k\tau^2f^2 + kf^2 = 0 \\ 4k\tau f' + 2k'\tau f + k\tau' f = 0, \end{cases}$$

ou k est la courbure géodésique et τ la torsion géodésique de γ.

Démonstration. Soit $\{T, N, B\}$ une base orthonormale des vecteurs tangents à $\mathbb{S}^3$ le long de γ, ou $T = d\gamma(\frac{d}{dt})$ est le vecteur unitaire tangent à γ, N est le vecteur unitaire normal dans la direction de $\nabla^{\mathbb{S}^3}_T T$ et B est choisi de façon que $\{T, N, B\}$ est orientée positivement. Alors nous avons les équations de Frenet :

$$\begin{cases} \nabla^{\mathbb{S}^3}_T T = kN \\ \nabla^{\mathbb{S}^3}_T N = -kT + \tau B \\ \nabla^{\mathbb{S}^3}_T B = -\tau N. \end{cases} \tag{3.28}$$

Le champ de tension de la courbe γ est donné par :

$$\tau(\gamma) = \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} d\gamma(\frac{d}{dt}) = \nabla^{\mathbb{S}^3}_T T. \tag{3.29}$$

D'après (3.28) et (3.29), le champ de tension de γ sera :

$$\tau_f(\gamma) = f'T + kfN. \tag{3.30}$$

La courbe γ est f-biharmonique si et seulement si :

$$fR^{\mathbb{S}^3}(\tau_f(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) + \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} f \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \tau_f(\gamma) = 0. \tag{3.31}$$

D'après (3.30), le premier terme du coté gauche de (3.31) est :

$$fR^{\mathbb{S}^3}(\tau_f(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) = kf^2N, \tag{3.32}$$

ici $R^{\mathbb{S}^3}(X,Y)Z =< Y, Z > X- < X, Z > Y$ pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{S}^3)$.

D'après (3.28) et (3.30) le deuxième terme du coté gauche de (3.31) est donné par :

$$\begin{aligned} \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} f \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \tau_f(\gamma) = {} & (ff''' + f'f'' - 4k^2ff' - 3kk'f^2)T \\ & + (3kff'' + 4k'ff' + 2k(f')^2 + k''f^2 - k^3f^2 - k\tau^2f^2)N \\ & + (4k\tau ff' + 2k'\tau f^2 + k\tau' f^2)B. \end{aligned} \tag{3.33}$$

En remplaçant (3.33) et (3.32) dans (3.31), nous obtenons le resultat du Théorème (3.3). $\square$

Chapitre 4

Les applications f-harmoniques et f-biharmoniques généralisées

Dans ce chapitre on définit une généralisation globale de l'opérateur d'Euler-Lagrange, les applications f-harmoniques et les applications f-biharmoniques entre deux variétés Riemanniennes M et N, en considérant une fonction de torsion positive $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N \times \mathbb{R})$.

4.1 Les applications f-harmoniques généralisées

On considère $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes et

$$\begin{aligned} f :& M \times N \times \mathbb{R} \to (0, \infty) \\ & (x, y, r) \mapsto f(x, y, r), \end{aligned}$$

une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive.

Pour chaque domaine compact D de M, la fonctionnelle f-energie de l'application φ est donnée par :

$$E_f(\varphi; D) = \int_D f(x, \varphi(x), e(\varphi)(x)) v_g, \tag{4.1}$$

où $e(\varphi)$ est la densité d'energie de φ définie par :

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)),$$

v_g est l'element de volume de M et $\{e_i\}_{i=1,..,m}$ est une base orthonormale sur M.

Définition 4.1. *l'application φ est dite f-harmonique si est seulement si elle est point critique de la fonctionnelle f-energie, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_f(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} = 0, \tag{4.2}$$

où $\{\varphi_t\}$ est une variation de φ à support dans D.

4.1.1 Premiere variation de la fonctionnelle f-energie

Soit $f : M \times N \times \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $(x,y,r) \mapsto f(x,y,r)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
on note par : $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$, $f^{'} = \partial_r(f)$, $f^{''} = \partial_r(\partial_r(f))$
et soient : $f^{'}_\varphi$, $f^{''}_\varphi$ $\in C^\infty(M)$ définies par : $f^{'}_\varphi = f^{'}(x,\varphi(x),e(\varphi)(x))$,
$f^{''}_\varphi = f^{''}(x,\varphi(x),e(\varphi)(x))$

Théorème 4.1. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *entre deux variétés Riemanniennes et* $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ *une variation de* φ *à support dans D. Alors*

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi_t;D)_{|t=0} = -\int_D h(\tau_f(\varphi),\upsilon)v_g, \tag{4.3}$$

où $\upsilon = \frac{\partial\varphi_t}{\partial t}_{|t=0}$ *la variation du champ de vecteurs* υ *,*

$$\tau_f(\varphi) = f^{'}_\varphi\tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f^{'}_\varphi) - (grad^N f)\circ\varphi \tag{4.4}$$

et $\tau(\varphi) = trace\nabla d\varphi$ *le champ de tension de* φ.

Démonstration. On définit

$$\begin{aligned}\phi :&M \times (-\epsilon,\epsilon) \to N\\ &(x,t) \mapsto \varphi_t(x).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Soit ∇^ϕ la connexion pull-back dans le fibré $\phi^{-1}(TN)$. Notons que tout champ de vecteurs X sur M est considéré comme champ de vecteurs sur $M \times (-\epsilon,\epsilon)$, on a $[X,\partial_t] = 0$.
Donc, en utilisant (4.1) nous avons :

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi_t;D)_{|t=0} = \int_D \partial_t\Big(f(x,\varphi_t(x),e(\varphi_t)(x))\Big)_{|t=0} v_g, \tag{4.6}$$

calculons d'abord

$$\partial_t\Big(f(x,\varphi_t(x),e(\varphi_t)(x))\Big)|_{t=0} = df(d\phi(\partial_t))|_{t=0} + df(\partial_t e(\varphi_t))|_{t=0}, \tag{4.7}$$

le premier terme du coté droit de (4.7) :

$$df(d\phi(\partial_t))|_{t=0} = h(grad^N f\circ\varphi,\upsilon), \tag{4.8}$$

par rapport à une base $\{e_i\}_{i=1,..,m}$ orthonormée telle qu'au point $x \in M$, $\nabla_{e_i}e_j = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t(e(\varphi_t)) &= h(\nabla^\phi_{\partial_t}d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\\ &= h(\nabla^\phi_{e_i}d\varphi(\partial_t), d\varphi(e_i)),\end{aligned} \tag{4.9}$$

donc, le deuxième terme du coté droit de (4.7) :

$$\begin{aligned}df(\partial_t e(\varphi_t))|_{t=0} &= f^{'}_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i))\\ &= e_i h(\upsilon, f^{'}_\varphi d\varphi(e_i)) - h(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i} f^{'}_\varphi d\varphi(e_i)).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Soit α la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\alpha(X) = h(\upsilon, f^{'}_\varphi d\varphi(X))\ ,\ X \in \Gamma(TM) \tag{4.11}$$

D'après (4.10) et (4.11) nous obtenons :

$$df(\partial_t e(\varphi_t))|_{t=0} = div(\alpha) - h(d\varphi(grad^M f'_\varphi), v) - h(v, f'_\varphi \tau(\varphi)), \tag{4.12}$$

en remplaçant (4.7) , (4.8) et (4.12) dans (4.6) et nous utilisons le théorème divergence, nous obtenons le résultat du Théorème(4.1) précédent. □

Théorème 4.2. *Soient $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes et $f : M \times N \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ .Alors φ est dite application f-harmonique si est seulement si*

$$\tau_f(\varphi) = f'_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_\varphi) - (grad^N f) \circ \varphi = 0 \tag{4.13}$$

Remarque 4.1.

1. Si $f(x, y, r) = r$, $\forall(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$ on a $\tau_f(\varphi) = \tau(\varphi)$ champ de tension de φ.
2. Si $f(x, y, r) = f_1(x).r$, $(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, on a $\tau_f(\varphi) = \tau_{f_1}(\varphi)$, (voir [39])
3. Si $f(x, y, r) = \widetilde{f}(x, y)r$, $\forall(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, nous obtenons les résultats du chapitre 2.

4.1.2 Deuxième variation de la fonctionnelle f-energie

Théorème 4.3. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application f-harmonique entre deux variétés Riemanniennes. Si $\{\varphi_{t,s}\}_{t,s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à deux paramètres et a support dans D, alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)|_{t=s=0} = \int_D h(J_{f,\varphi}(v), w) v_g, \tag{4.14}$$

où $J_{f,\varphi}(v) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ donné par

$$\begin{aligned} J_{f,\varphi}(v) = &-f'_\varphi trace R^N(v, d\varphi)d\varphi - trace \nabla^\varphi f'_\varphi \nabla^\varphi v + (\nabla^N_v grad^N f) \circ \varphi \\ &+ < \nabla^\varphi v, d\varphi > (grad^N f') \circ \varphi - trace \nabla^\varphi < \nabla^\varphi v, d\varphi > f''_\varphi d\varphi \end{aligned} \tag{4.15}$$

ici $<,>$ désigne le produit scalaire dans $T^\star M \otimes \varphi^{-1}TN$, R^N le tenseur de courbure de la variété (N, h) et $v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}|_{t=s=0}$, $w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}|_{t=s=0}$,

Démonstration. Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to N$ définie par :

$$\phi(x, t, s) = \varphi_{t,s}(x),\ (x, t, s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

Notons que tout champ de vecteurs sur M est considéré comme champ de vecteurs sur $M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$, nous avons :

$$[X, \partial_t] = 0\ ,\ [X, \partial_s] = 0\ ,\ [\partial_s, \partial_t] = 0.$$

Pour le calcul de l'expression :

$$\frac{\partial^2}{\partial_t \partial_s} f(x, \varphi_{t,s}(x), e(\varphi_{t,s})(x))_{|t=s=0}, \tag{4.16}$$

nous commençons par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(x,\varphi_{t,s}(x),e(\varphi_{t,s})(x)) &= df(d\phi(\partial_t)) + df(\partial_t(e(\varphi_{t,s})(x))) \\ &= h(d\phi(\partial_t),(grad^N f)\circ\varphi) + h(\nabla^{\varphi}_{\partial_t}d\phi(e_i),d\phi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}},\end{aligned} \tag{4.17}$$

en passant a la deuxième dérrivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial_t\partial_s}f(x,\varphi_{t,s}(x),e(\varphi_{t,s})(x))_{|t=s=0} &= h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),(grad^N f)\circ\varphi)_{|t=s=0} \\ &+ h(d\phi(\partial t),\nabla^{\phi}_{\partial_s}(grad^N f)\circ\varphi)_{|t=s=0} \\ &+ h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),d\phi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} \\ &+ h(\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),\nabla^{\varphi}_{\partial_s}d\phi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} \\ &+ h(\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),d\phi(e_i))\ \partial_s(f^{'}_{\varphi_{t,s}})|_{t=s=0},\end{aligned} \tag{4.18}$$

en utilisant la propriété de l'opérateur gradient, le deuxième terme du coté droit de (4.18) devient :

$$h\Big(d\phi(\partial t),\nabla^{\phi}_{\partial_s}(grad^N f)\circ\varphi)\Big)_{|t=s=0} = h(w,\nabla^N_v(grad^N f)\circ\varphi) \tag{4.19}$$

par définition du tenseur de courbure de (N,h), le troisième terme du coté droit de (4.18) est :

$$\begin{aligned}h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\varphi(e_i),d\varphi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} &= f^{'}_{\varphi}h(R^N(w,d\varphi(e_i))v,d\varphi(e_i)) \\ &+ f^{'}_{\varphi}h(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),d\varphi(e_i))|_{t=s=0}\end{aligned} \tag{4.20}$$

en utilisant les propriétés de tenseur de courbure de N et la compatibilité de ∇^{φ} avec la métrique h, nous avons :

$$\begin{aligned}h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\varphi(e_i),d\varphi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} &= -f^{'}_{\varphi}h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),w) \\ &+ e_ih(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),f^{'}_{\varphi}d\varphi(e_i))|_{t=s=0} \\ &- h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),\nabla^{\varphi}_{e_i}f^{'}_{\varphi}d\varphi(e_i))|_{t=s=0} \\ &= f^{'}_{\varphi}h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),w) + div(\omega_1) \\ &- h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),\nabla^{\varphi}_{e_i}f^{'}_{\varphi}d\varphi(e_i))|_{t=s=0},\end{aligned} \tag{4.21}$$

où : ω_1 est la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_1(X) = h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),f^{'}_{\varphi}d\varphi(X))\ ,\ X\in\Gamma(TM).$$

Pour le quatrième terme du coté droit de (4.18), on a :

$$h(\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(e_i))f^{'}_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} = e_ih(f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w) - h(\nabla^{\varphi}_{e_i}f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w). \tag{4.22}$$

Soit ω_2 la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_2(X) = h(f'_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{X}v,w)\ ,\ X\in\Gamma(TM),$$

alors :

$$h(\nabla^{\varphi}_{\partial_t} d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{\partial_s} d\varphi(e_i)) f'_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} = div(\omega_2) - h(\nabla^{\varphi}_{e_i} f'_{\varphi} \nabla^{\varphi}_{e_i} v, w). \tag{4.23}$$

en outre :

$$\begin{aligned} \partial_s(f'_{\varphi_{t,s}})_{|t=s=0} &= \partial_s(f'(x, \varphi_{t,s}(x), e(\varphi_{t,s})(x)))_{|t=s=0} \\ &= df'(d\phi(\partial_s))_{|t=s=0} + df'(\partial_s(e(\varphi_{t,s})(x)))_{|t=s=0}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

par un calcul simple nous obtenons :

$$df'(d\phi(\partial_s))|_{t=s=0} = h(w, (grad^N f') \circ \varphi), \tag{4.25}$$

$$df'(\partial_s(e(\varphi_{t,s})(x)))|_{t=s=0} = f''_{\varphi} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} w, d\varphi(e_i)). \tag{4.26}$$

Donc, le dernier terme du coté droit de (4.18) :

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \partial_s f'_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} =& < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > h(w, (grad^N f') \circ \varphi) \\ &+ < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > f''_{\varphi} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} w, d\varphi(e_i)) \\ &= h(w, < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > (grad^N f') \circ \varphi) \\ &+ e_i h(w, < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > f''_{\varphi} d\varphi(e_i)) \\ &- h(w, \nabla^{\varphi}_{e_i} < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > f''_{\varphi} d\varphi(e_i)). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Soit ω_3 la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega_3(X) = h(w, < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > f''_{\varphi} d\varphi(X)) \ , \ X \in \Gamma(TM),$$

donc :

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \partial_s f'_{\varphi_{t,s}}|_{t=s=0} =& h(w, < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > (grad^N f') \circ \varphi) \\ &+ div(\omega_3) - h(w, \nabla^{\varphi}_{e_i} < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > f''_{\varphi} d\varphi(e_i)). \end{aligned} \tag{4.28}$$

En remplaçant (4.19), (4.21), (4.23), (4.28) dans l'equation (4.18) , en utilisant le théorème divergence et le faite que φ est f-harmonique , nous obtenons le résultat du Theorème (4.3) . □

4.2 Applications f-biharmoniques généralisées

Une généralisation naturelle des applications f-harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle obtenue en intégrant le carré de la norme du champ f-tension. Plus précisément :

Définition 4.2. *Une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ est dite f-biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle f-bi-énergie définie par :*

$$E_{2,f}(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_f(\varphi)|^2 v_g \tag{4.29}$$

pour tout domaine compact de M.

4.2.1 Première variation de la fonctionnelle f-bi-énergie

Théorème 4.4. *Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés Riemanniennes , $f : M \times N \times \mathbb{R} \to (0,\infty)$ telle que $(x,y,r) \mapsto f(x,y,r)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à support inclu dans D . Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi_t;D)|_{t=0} = \int_D h(\tau_{2,f}(\varphi),\upsilon)\upsilon_g \tag{4.30}$$

où :

$$\begin{aligned}\tau_{2,f}(\varphi) &= -f'_\varphi trace R^N(\tau_f(\varphi),d\varphi)d\varphi - trace\nabla^\varphi f'_\varphi \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) + (\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} grad^N f)\circ\varphi \\ &+ < \nabla^\varphi \tau_f(\varphi), d\varphi > (grad^N f')\circ\varphi - trace\nabla^\varphi < \nabla^\varphi\tau_f(\varphi), d\varphi > f''_\varphi d\varphi\end{aligned} \tag{4.31}$$

Démonstration. On définit $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon) \to N$ par : $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$, $(x,t)\in M\times(-\epsilon,\epsilon)$, nous avons

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi_t;D)|_{t=0} = \int_D h(\nabla^\phi_{\partial_t}\tau_f(\varphi_t),\tau_f(\varphi_t))\upsilon_g \tag{4.32}$$

par rapport à une base orthonormale $\{e_1,...,e_m\}$, au point $x\in M$, nous avons :

$$\nabla^\phi_{\partial_t}\tau_f(\varphi_t)|_{t=0} = \nabla^\phi_{\partial_t}\nabla^\phi_{e_i} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i)|_{t=0} - \nabla^\phi_{\partial_t}(grad^N f)\circ\varphi_t|_{t=0}, \tag{4.33}$$

par définition du tenseur de courbure de la variété N, on a :

$$\begin{aligned}\nabla^\phi_{\partial_t}\nabla^\phi_{e_i} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i)|_{t=0} &= f'_\varphi R^N(\upsilon, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\ &+ \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i)|_{t=0}\end{aligned} \tag{4.34}$$

la compatibilité de ∇^ϕ avec la métrique h de N nous donne :

$$h(\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} = e_i h(\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} - h(\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\nabla^\phi_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0}, \tag{4.35}$$

soit θ_1 la 1-forme differentielle a support dans D, sur M définie par :

$$\theta_1(X) = h(\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(X),\tau_f(\varphi_t)), \quad X\in\Gamma(TM)$$

alors :

$$h(\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} = div(\theta_1) - h(\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\nabla^\phi_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0}, \tag{4.36}$$

le second terme du coté droit de (4.36), est :

$$\begin{aligned}-h(\nabla^\phi_{\partial_t} f'_{\varphi_t} d\varphi_t(e_i),\nabla^\phi_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} &= -\partial_t(f'_{\varphi_t})h(d\varphi_t(e_i),\nabla^\phi_{e_i}\tau_f(\varphi_t)))|_{t=0} \\ &- f'_{\varphi_t} h(\nabla^\phi_{\partial_t} d\varphi_t(e_i),\nabla^\phi_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0},\end{aligned} \tag{4.37}$$

par un calcul simple, nous avons :

$$\begin{aligned}-\partial_t(f'_{\varphi_t}) &= -d\phi(\partial_t)(f')|_{t=0} - f''_{\varphi_t} h(\nabla^\phi_{e_j} d\phi(\partial_t), d\varphi_t(e_j))|_{t=0} \\ &= -h((grad^N f')\circ\varphi,\upsilon) - f''_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_j}\upsilon, d\varphi(e_j)),\end{aligned} \tag{4.38}$$

on note par $h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi_t))_{|t=0} = < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi >$, donc pour le premier terme du coté droit de l'equation (4.37) on a :

$$\begin{aligned}
-\partial_t(f^{'}_{\varphi_t})h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} &= - < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > \ h((grad^N f^{'}) \circ \varphi, \upsilon) \\
&\quad - e_j h\Big(\upsilon, f^{''}_{\varphi} < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > d\varphi(e_j)\Big) \\
&\quad + h\Big(\upsilon, \nabla^{\varphi}_{e_j} f^{''}_{\varphi} < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > d\varphi(e_j)\Big),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

soit θ_2 la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\theta_2(X) = h\Big(\upsilon, f^{''}_{\varphi} < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > d\varphi(X)\Big), \ X \in \Gamma(TM),$$

alors :

$$\begin{aligned}
-\partial_t(f^{'}_{\varphi_t})h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi_t))|_{t=0} &= - < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > \ h((grad^N f^{'}) \circ \varphi, \upsilon) \\
&\quad - div(\theta_2) + h\Big(\upsilon, \nabla^{\varphi}_{e_j} f^{''}_{\varphi} < \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi), d\varphi > d\varphi(e_j)\Big),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

le deuxième terme du coté droit de l'egalité (4.37) est :

$$\begin{aligned}
-f^{'}_{\varphi_t} h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i}\tau_f(\varphi_t))_{|t=0} &= -e_i(h(\upsilon, f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi))) \\
&\quad + h(\upsilon, \nabla^{\varphi}_{e_i} f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&= -div(\eta) + h(\upsilon, \nabla^{\varphi}_{e_i} f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

où η est la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\eta(X) = h(\upsilon, f^{'}_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{X}\tau_f(\varphi)), \quad X \in \Gamma(TM)$$

comme

$$-h(\nabla^{\varphi}_{\partial_t}(grad^N f^{'}) \circ \varphi_t, \tau_f(\varphi_t)))|_{t=0} = -h(\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} grd^N f \circ \varphi, \upsilon). \tag{4.42}$$

Alors finalement, d'après les égalités : (4.33), (4.34), (4.36), (4.37) (4.40), (4.41) , (4.42) et le Théorème divergence, nous obtenons le résultat du Théorème (4.4). □

Remarques 4.1.

1. *Si* $f(x, y, r) = r$ *pour tout* $(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$*, alors :* $\tau_{2,f}(\varphi) = \tau_2(\varphi)$ *, le champ bi-tension de* φ *(biharmonicité).*
2. *Si* $f(x, y, r) = f_1(x).r$ *pour tout* $(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$*, alors :*

$$\begin{aligned}
\tau_{2,f}(\varphi) &= -f_1 \ traceR^N(\tau_{f_1}(\varphi), d\varphi)d\varphi - trace[\nabla^{\varphi} f_1 \nabla^{\varphi}\tau_{f_1}(\varphi) - f_1 \nabla_{\nabla^M}\tau_{f_1}(\varphi)] \\
&= \tau_{2,f_1}(\varphi),
\end{aligned}$$

   on obtien le champ f-bi-tension de φ*.*

3. *Si* $f(x, y, r) = \widetilde{f}(x, y)r$ *pour tous* $(x, y, r) \in M \times N \times \mathbb{R}$ *, par un calcul simple le terme* $\nabla^N_{\tau_f(\varphi)} grd^N f \circ \varphi$ *sera remplacé par :* $e(\varphi)\nabla^N_{\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)} grd^N \widetilde{f} \circ \varphi - trace\nabla^{\varphi}\tau_{\widetilde{f}(\varphi)}(\widetilde{f})d\varphi$*, i.e* $\tau_{2,f}(\varphi) = \tau_{2,\widetilde{f}}(\varphi)$ *(un résultat de chapitre 2).*

4.3 Morphismes f-harmoniques généralisés

Dans ce paragraphe nous démontrons qu'une application entre deux variétés Riemanniennes est un morphisme f-harmonique généralisé si et seulement si elle est semi-conforme en satisfaisant certaines conditions, puis nous présentons quelques propriétés et exemples des morphismes f-harmoniques généralisés .

Soient (M^m, g) une variété riemannienne, $f : (x,t,r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto f(x,t,r) \in (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞ et U un ouvert de M.

Définition 4.3. *Une fonction $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite f-harmonique si :*

$$\Delta_f^M u \equiv (\frac{\partial f}{\partial r})_u \, \Delta^M u + du(\mathrm{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_u) - (\frac{\partial f}{\partial t})_u = 0, \tag{4.43}$$

où $(\frac{\partial f}{\partial r})_u : M \longrightarrow (0,+\infty)$ est une fonction de classe C^∞, définie par :

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_u(x) = (\frac{\partial f}{\partial r})(x, u(x), e(u)(x)), \quad x \in U, \tag{4.44}$$

$(\frac{\partial f}{\partial t})_u : M \longrightarrow (0,+\infty)$ est une fonction de classe C^∞, définie par :

$$(\frac{\partial f}{\partial t})_u(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x), e(u)(x)), \quad x \in U. \tag{4.45}$$

Définition 4.4. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. L'application φ est un morphisme f-harmonique généralisé si, pour toute fonction harmonique $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un ouvert $V \subset N$ tel que $\varphi^{-1}(V)$ non vide, alors la composée $v \circ \varphi$ est f-harmonique sur $\varphi^{-1}(V)$.*

Théorème 4.5. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, $f : (x,t,r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow f(x,t,r) \in (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\begin{cases} (\frac{\partial f}{\partial r})(x,t,r) \neq 0, & (x,t,r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (\frac{\partial f}{\partial t})(x,t,0) = 0, & (x,t) \in M \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.46}$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *φ est un morphisme f-harmonique généralisé ,*
2. *φ est semi-conforme vérifiant le système d'équations :*

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^\alpha} \tau(\varphi)^\alpha + g(\mathrm{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^\alpha}, \mathrm{grad}^M \varphi^\alpha) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\varphi^\alpha} \tau(\varphi)^\alpha = 0 \tag{4.47}$$

relativement à toute carte locale (y^α) de N et pour tout $\alpha = 1, ..., n$

3. il existe une fonction positive λ sur M telle que :

$$\Delta_f^M(\upsilon\circ\varphi)=(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi}\,\lambda^2\,(\Delta^N\upsilon)\circ\varphi,$$

Pour toute fonction differentiable υ définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,

Nous allons besoin du lemme suivant pour la démonstration de ce théorème.

Lemme 4.1. *[3] Soit y_0 un poit de N^n et $\{y^\gamma\}$ un système de coordonneés normales sur N centrées en y_0 et $\{C_\gamma, C_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n$ des constantes telles que $C_{\alpha\beta}=C_{\beta\alpha}$ et $\sum_\alpha C_{\alpha\alpha}=0$, alors il existe un voisinage V de y_0 dans N et une fonction harmonique $\upsilon : N\to\mathbb{R}$ telle que*

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial y^\alpha}(y_0)=C_\alpha,\quad \frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}(y_0)=C_{\alpha\beta}\tag{4.48}$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma=1,..,n$

Démonstration. du Théorème 4.5
Supposons que $\varphi : M\to N$ est morphisme f-harmonique, pour $x_0\in M$ nous considérons les systémes de coordonnées locales (x^i), (y^α) autour de x_0 , $y_0=\varphi(x_0)$ respectivement, en supposant que (y^α) est normal centré en y_0 . Pour vérifier la semi-conformalité de φ, on utilise le lemme (4.1), donc pour tous $(C_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^n$ avec $C_{\alpha\beta}=C_{\beta\alpha}$ et $\sum_\alpha C_{\alpha\alpha}=0$, on peut choisir une fonction harmonique υ telle que

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial y^\alpha}(y_0)=0,\quad \frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}(y_0)=C_{\alpha\beta},\tag{4.49}$$

pour tous $\alpha,\beta=1,..,n$, donc $\upsilon\circ\varphi$ est f-harmonique au voisinage de x_0 et d'après l'equation (4.43) de la définition (4.3) :

$$\begin{aligned}0&=\Delta_f^M(\upsilon\circ\varphi)\\&=(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi}\,\Delta^M(\upsilon\circ\varphi)+d(\upsilon\circ\varphi)(\mathrm{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})-(\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi},\end{aligned}\tag{4.50}$$

en particulier en x_0

$$d(\upsilon\circ\varphi)(\mathrm{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})=0\tag{4.51}$$

et

$$(\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi}=0,\tag{4.52}$$

car : $\frac{\partial\upsilon}{\partial y^\alpha}(y_0)=0,\quad e(\upsilon\circ\varphi)=0\quad et\quad (\frac{\partial f}{\partial t})(x,t,0)=0,\quad (x,t)\in M\times\mathbb{R}$.
D'après :(4.50), (4.51), (4.52) et $(\frac{\partial f}{\partial r})(x,t,r)\neq 0,\quad (x,t,r)\in M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}0&=\Delta^M(\upsilon\circ\varphi)\\&=d\upsilon(\tau(\varphi))+trace_g\nabla d\upsilon(d\varphi,d\varphi)\\&=trace_g\nabla d\upsilon(d\varphi,d\varphi),\end{aligned}\tag{4.53}$$

comme en x_0 :

$$\begin{aligned}\nabla d\upsilon &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) dy^\alpha \otimes dy^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta,\end{aligned} \tag{4.54}$$

en utilisant (4.50), (4.53) et (4.54), nous obtenons :

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\alpha,\beta} g(grad^M \varphi^\alpha, grad^M \varphi^\beta) C_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} g(grad^M \varphi^\alpha, grad^M \varphi^\alpha) C_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta} g(grad^M \varphi^\alpha, grad^M \varphi^\beta) C_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} \Big[g(grad^M \varphi^\alpha, grad^M \varphi^\alpha) - g(grad^M \varphi^1, grad^M \varphi^1) \Big] C_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta} g(grad^M \varphi^\alpha, grad^M \varphi^\beta) C_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{4.55}$$

soit $\alpha_0 \neq 1$ et

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1\,; \\ -1, & \text{si } \alpha = \beta = \alpha_0 \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \neq 1, \alpha_0 \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

□

alors d'après (4.55), nous avons :

$$g(grad^M \varphi^{\alpha_0}, grad^M \varphi^{\alpha_0}) = g(grad^M \varphi^1, grad^M \varphi^1) \tag{4.56}$$

$$g(grad^M \varphi^{\alpha}, grad^M \varphi^{\alpha}) = g(grad^M \varphi^1, grad^M \varphi^1), \tag{4.57}$$

pour tout $\alpha = 1, .., n$.
Soit $\alpha_0 \neq \beta_0$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \alpha_0 \ et \ \beta = \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \ ou \ \beta \neq \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

d'après (4.55), nous avons :

$$g(grad^M \varphi^{\alpha_0}, grad^M \varphi^{\beta_0}) = 0 \tag{4.58}$$

$$g(grad^M \varphi^{\alpha}, grad^M \varphi^{\beta}) = 0 \tag{4.59}$$

pour tous $\alpha \neq \beta = 1, ..., n$ il en résulte de (4.57) et (4.59) que le morphisme f-harmonique φ est semi conforme tel que :

$$g(grad^M \varphi^{\alpha}, grad^M \varphi^{\beta}) = \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \;\;,\; pour\ tous\ \alpha, \beta = 1, ..., n. \tag{4.60}$$

Pour toute fonction $\upsilon : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert V de N, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_f^M(\upsilon\circ\varphi) &= (\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi}\,\Delta^M(\upsilon\circ\varphi) + d\upsilon(d\varphi(\operatorname{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi}\\
&= (\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi} d\upsilon(\tau(\varphi)) + (\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi} trace_g \nabla d\upsilon(d\varphi, d\varphi)\\
&+ d\upsilon(d\varphi(\operatorname{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Comme φ est semi-conforme, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta_f^M(\upsilon\circ\varphi) &= (\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi} d\upsilon(\tau(\varphi)) + (\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi}\lambda^2(\Delta^N\upsilon)\circ\varphi\\
&+ d\upsilon(d\varphi(\operatorname{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Par un bon choix de la fonction harmonique υ et comme φ est un morphisme harmonique, on conclut que :

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi} d\upsilon(\tau(\varphi)) + d\upsilon(d\varphi(\operatorname{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\upsilon\circ\varphi})) - (\frac{\partial f}{\partial t})_{\upsilon\circ\varphi} = 0,$$

i.e. pour tout système de coordonnées local (y^α) dans N, nous avons :

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^\alpha}\tau(\varphi)^\alpha + g(\operatorname{grad}^M(\frac{\partial f}{\partial r})^\alpha_\varphi, \operatorname{grad}^M\varphi^\alpha) - (\frac{\partial f}{\partial t})^\alpha_\varphi = 0,$$

pour tout $\alpha = 1, .., n$. D'où, $(1) \Rightarrow (2)$ et d'aprés (4.62) on a $(2) \Rightarrow (3)$. Finalement, $(3) \Rightarrow (1)$

Remarques 4.2. *1. Si $f(x,t,r) = r$ pour tous $(x,t,r) \in M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la condition* (4.47) *est équivalente à $\tau(\varphi) = 0$ i.e φ est harmonique.*
Et, $\varphi : M \to N$ sera un morphisme harmonique si et seulement si elle est harmonique et semi conforme ([3]).

2. *Si $f(x,t,r) = f_1(x)r$ pour tous $(x,t,r) \in M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ou $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, positive alors la condition* (4.47) *est équivalente à*

$$f_1\tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f_1) = 0$$

i.e. φ est f_1-harmonique.
Et l'application $\varphi : M \to N$ est un morphisme f_1-harmonique si et seulement si elle est f_1-harmonique et semi-conforme [38].

3. *Si $f(x,t,r) = f_1(x,t)r$, pour tous $(x,t,r) \in M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ou $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M\times\mathbb{R})$ une fonction positive alors, φ est morphisme f-harmonique si est seulement si elle est morphisme f_1-harmonique* [19].

4. *Si $f(x,t,r) = F(r)$, pour tous $(x,t,r) \in M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, où $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $F' > 0$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) φ est un morphisme f-harmonique
(b) φ est un morphisme F-harmonique

(c) φ est semi conforme et satisfait

$$F^{'}(e(\varphi^{\alpha}))\tau(\varphi^{\alpha})+g(grad^{M}F^{'}(e(\varphi^{\alpha})),grad^{M}\varphi^{\alpha})=0,$$

pour tout $\alpha=1,..,n$ et tout système local (y^{α}) sur N.
(d) il existe une fonction positive, λ sur M telle que

$$\Delta_{f}^{M}(v\circ\varphi)=F^{'}(e(v\circ\varphi))\lambda^{2}(\Delta^{N}v)\circ\varphi.$$

pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N.

Proposition 4.1. *Soient $\varphi : M \to N$ un morphisme f-harmonique entre deux variétés Riemanniennes de dilatation λ_1 , $\psi : N \to P$ morphisme harmonique de dilatation λ_2 et $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ positive, satisfait (4.46). Alors la composition $\psi\circ\varphi : M \to P$ est un morphisme f-harmonique de dilatation $\lambda_1(\lambda_2\circ\varphi)$.*

Démonstration. Comme φ est un morphisme f-harmonique, d'après le théorème (4.5) nous avons :

$$\Delta_{f}^{M}(v\circ\varphi)=(\frac{\partial f}{\partial r})_{v\circ\varphi}\,\lambda_{1}^{2}\,(\Delta^{N}v)\circ\varphi,$$

pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N. De mème pour l'application ψ on a :

$$\Delta^{N}(u\circ\psi)=\lambda_{2}^{2}\,(\Delta^{P}u)\circ\psi,$$

pour toute fonction u définie sur un ouvert U de P, alors :

$$\begin{aligned}\Delta_{f}^{M}(u\circ\psi\circ\varphi)&=(\frac{\partial f}{\partial r})_{u\circ\psi\circ\varphi}\,\lambda_{1}^{2}\,(\Delta^{N}(u\circ\psi))\circ\varphi\\&=(\frac{\partial f}{\partial r})_{u\circ\psi\circ\varphi}\,\lambda_{1}^{2}\,(\lambda_{2}\circ\varphi)^{2}(\Delta^{P}u)\circ\psi\circ\varphi.\end{aligned}$$

□

Proposition 4.2. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $M\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ satisfait la condition (4.46). Alors l'application :*

$$\varphi:(M,g)\to(\mathbb{R}^{n},<,>_{\mathbb{R}^{n}}),\ x\mapsto(\varphi^{1}(x),\varphi^{2}(x),...,\varphi^{n}(x))$$

est un morphisme f-harmonique si et seulement si ses composantes φ^{α} sont f-harmoniques, dont les gradients sont orthogonaux et de même norme en chaque point.

Démonstration. la condition (4.47) du théorème (4.5) devient

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^{\alpha}}\Delta^{M}(\varphi^{\alpha})+g(\mathrm{grad}^{M}(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^{\alpha}},\mathrm{grad}^{M}\varphi^{\alpha})-(\frac{\partial f}{\partial t})_{\varphi^{\alpha}}=0,$$

pour tout $\alpha=1,..,n$ .i.e. les fonctions φ^{α} sont f-harmoniques. □

Exemple 4.1. Soit $M = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi :&(M, <,>_{\mathbb{R}^3}) \to (\mathbb{R}^2, <,>_{\mathbb{R}^2}) \\ &(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, z) \end{aligned}$$

est un morphisme f-harmonique avec :

$$f(x, y, z, t, r) = \frac{F(\frac{y}{x})e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+(t^2+1)r}}{x\sqrt{(x^2+y^2+1)(z^2+1)}},$$

où F est une fonction positive sur $\mathbb{R}$. En déduire :

$$\varphi^1(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2} \ \ , \ \ \varphi^2(x, y, z) = z$$

$$\Delta^M \varphi^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \Delta^M \varphi^2 = 0$$

$$e(\varphi^1) = \frac{1}{2} \ , \ e(\varphi^2) = \frac{1}{2}$$

$$grad^M \varphi^1 = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0) \ , \ grad^M \varphi^2 = (0, 0, 1).$$

Soit $f(x, y, z, t, r) = h(x, y, z)e^{(t^2+1)r}$ pour tous $(x, y, z, t, r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où h est une fonction differentiable positive sur M , nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r}(x, y, z, t, r) = h(x, y, z)(t^2+1) \ e^{(t^2+1)r} \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t, 0) = 2h(x, y, z) \ tr \ e^{(t^2+1)r}|_{r=0} = 0, \end{cases}$$

pour tous $(x, y, z, t, r) \in M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^1} = h(x, y, z)(x^2+y^2+1) \ e^{\frac{x^2+y^2+1}{2}} \ , \ (\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^2} = h(x, y, z)(z^2+1) \ e^{\frac{z^2+1}{2}}$$

$$(\frac{\partial f}{\partial t})_{\varphi^1} = h(x, y, z)\sqrt{x^2+y^2} \ e^{\frac{x^2+y^2+1}{2}} \ , \ (\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^2} = h(x, y, z)z \ e^{\frac{z^2+1}{2}}$$

$$\begin{aligned} grad^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^1} = & e^{\frac{x^2+y^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial x}x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}y^2 + \frac{\partial h}{\partial x} + 3hx + hx^3 + hxy^2)\frac{\partial}{\partial x} \\ & + e^{\frac{x^2+y^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial y}x^2 + \frac{\partial h}{\partial y}y^2 + \frac{\partial h}{\partial y} + 3hy + hy^3 + hyx^2)\frac{\partial}{\partial y} \\ & + e^{\frac{x^2+y^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial z}x^2 + \frac{\partial h}{\partial z}y^2 + \frac{\partial h}{\partial z})\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} grad^M(\frac{\partial f}{\partial r})_{\varphi^2} = & e^{\frac{z^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial x}z^2 + \frac{\partial h}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x} \\ & + e^{\frac{z^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial y}z^2 + \frac{\partial h}{\partial y})\frac{\partial}{\partial y} \\ & + e^{\frac{z^2+1}{2}}(\frac{\partial h}{\partial z}z^2 + \frac{\partial h}{\partial z} + 3hz + hz^3)\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

en utilisant la proposition (4.2), on déduit que l'application φ est f-harmonique si et seulement si :

$$\begin{cases} 3hx^2+3hy^2+h+\frac{\partial h}{\partial x}x^3+\frac{\partial h}{\partial x}xy^2+\frac{\partial h}{\partial x}x+hx^4+2hx^2y^2+\frac{\partial h}{\partial y}x^2y+\frac{\partial h}{\partial y}y^3+\frac{\partial h}{\partial y}y+hy^4=0, \\ \frac{\partial h}{\partial z}z^2+\frac{\partial h}{\partial z}+2hz+hz^3=0, \end{cases} \tag{4.63}$$

Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction positive, alors la fonction de type :

$$h(x,y,z)=\frac{F(\frac{y}{x})e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}}{x\sqrt{(x^2+y^2+1)(z^2+1)}}$$

satisfait le système d'equations (4.63)

4.4 Tenseur f-énergie impulsion généralisé

Soient (M^m,g) , (N^n,h) deux variétés riemanniennes, $f: M\times N\times\mathbb{R}\to(0,\infty)$ une fonction de classe C^∞.

Théorème 4.6. *Soient $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi;D)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}\int_D < S_f(\varphi),\delta g > \, v_g,$$

où $\langle\, ,\rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $T^*M\otimes T^*M$,

$$S_f(\varphi)=f_\varphi\, g - f'_\varphi\, \varphi^*h \tag{4.64}$$

est le tenseur f-énergie impulsion généralisé associé à φ , $e(\varphi)=\frac{1}{2}|d\varphi|^2$ est la densité d'énergie de φ et φ^*h le pull-back de la métrique h.

Démonstration. : $E_f(\varphi)=\int_D f(x,\varphi(x),e(\varphi)(x))v_g$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_f(\varphi;D)\Big|_{t=0} &= \int_D \delta\Big\{f(x,\varphi(x),e(\varphi))v_g\Big\} \\ &= \int_D \delta\Big\{f(x,\varphi(x),e(\varphi))\Big\}v_g+\int_D f(x,\varphi(x),e(\varphi))\delta(v_g),\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}\delta\Big\{f(x,\varphi(x),e(\varphi))\Big\} &= \delta(e(\varphi))f'_\varphi \\ &= -\frac{1}{2} < \varphi^\star h,\delta g > f'_\varphi\end{aligned}$$

et :

$$\delta(v_g)=\frac{1}{2} < g,\delta g > v_g,$$

alors :

$$\frac{d}{dt}E_f(\varphi;D)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}\int_D < \varphi^\star h, \delta g > f'_\varphi v_g$$
$$+\frac{1}{2}\int_D f_\varphi < g, \delta g > v_g$$
$$= \frac{1}{2}\int_D < f_\varphi g - f'_\varphi \varphi^\star h, \delta g > v_g,$$

d'où :

$$S_f(\varphi) = f_\varphi g - f'_\varphi \varphi^\star h$$

□

Remarque 4.2.

1. si $f(x,y,r) = r$ pour tout $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, on retrouve le tenseur -énergie impulsion défini dans le chapitre 1
$$S_f(\varphi) = S(\varphi) = e(\varphi)\, g - \varphi^* h.$$
2. Soit $f_1 : M \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞, si $f(x,y,r) = f_1(x)r$ pour tout $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, on retrouve le tenseur -énergie impulsion défini dans [39]
$$S_f(\varphi) = S_{f_1}(\varphi) = f_1\, e(\varphi)\, g - f_1\, \varphi^* h.$$
3. En particulier, si $f(x,y,r) = \widetilde{f}(x,y)r$ pour tous $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$ on retrouve le tenseur f-énergie impulsion associé à φ défini dans le chapitre 2
$$S_f(\varphi) = e(\varphi)\widetilde{f}_\varphi\, g - \widetilde{f}_\varphi \varphi^* h.$$

Proposition 4.3. *Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N \times \mathbb{R})$ une fonction positive, alors :*

$$div^M\ S_f(\varphi) = -h(\tau_f(\varphi), d\varphi) - h((grad^N f)\circ\varphi, d\varphi) + df_\varphi - f'_\varphi de(\varphi)$$

Démonstration. Relativement a une base orthonormée $\{e_1, ..., e_m\}$ sur M, telle que au point $x \in M$, $\nabla_{e_i} e_j = 0$, nous avons :

$$S_f(\varphi)(e_i, e_j) = f_\varphi \delta_{ij} - f'_\varphi h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)),$$

donc :

$$\begin{aligned}
div^M\ (S_f(\varphi))(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\Big(S_f(\varphi)(e_i,e_j)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i\Big(f_\varphi\delta_{ij}\Big) - \sum_{i=1}^m e_i\Big(f'_\varphi h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big)\\
&= \sum_{i=1}^m e_i(f_\varphi)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^m e_i(f'_\varphi) h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) - f'_\varphi \sum_{i=1}^m e_i h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\\
&= df_\varphi(e_j) - h(d\varphi(grad^M f'_\varphi), d\varphi(e_j)) - f'_\varphi h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) - \frac{1}{2} f'_\varphi \sum_{i=1}^m\ e_j h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\\
&= df_\varphi(e_j) - h\Big(f'_\varphi\tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_\varphi)\ ,\ d\varphi(e_j)\Big) - f'_\varphi de(\varphi)(e_j),
\end{aligned}$$

comme $\tau_f(\varphi) = f'_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_\varphi) - (grad^N f)\circ\varphi$, alors :

$$div^M\ (S_f(\varphi))(e_j) = -h(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_j)) - h((grad^N f)\circ\varphi, d\varphi(e_j)) + df_\varphi(e_j) - f'_\varphi de(\varphi)(e_j)$$

□

Remarques 4.3. *1)si $f(x,y,r) = r$ pour tout $(x,y,r) \in M\times N\times\mathbb{R}.$, alors :*

$$\mathrm{div}^M\ S_f(\varphi) = \mathrm{div}^M\ S(\varphi) \ = \ -h(\tau(\varphi), d\varphi).$$

2) Soit $f_1 : M \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction de classe C^∞ si $f(x,y,r) = f_1(x).r$ pour tout $(x,y,r) \in M\times N\times\mathbb{R}.$, alors ([39]) :

$$\mathrm{div}^M\ S_f(\varphi) = \mathrm{div}^M\ S_{f_1}(\varphi) \ = \ -h(\tau_{f_1}(\varphi), d\varphi) + e(\varphi)df_1.$$

3) Si $f(x,y,r) = \widetilde{f}(x,y)r$, pour tout $(x,y,r) \in M\times N\times\mathbb{R}$, alors on retrouve le resultat de la Proposition (2.3) du chapitre 2.
En effet :

$$f_\varphi = f(x,\varphi(x), e(\varphi)(x)) = \widetilde{f}(x,\varphi(x))e(\varphi)(x) = \widetilde{f}_\varphi e(\varphi)\ ,$$
$$df_\varphi = e(\varphi)d\widetilde{f}_\varphi + \widetilde{f}_\varphi de(\varphi)\ ,$$
$$f'_\varphi = \frac{\partial f}{\partial r}(x,\varphi(x), e(\varphi)(x)) = \widetilde{f}_\varphi\ ,$$

et

$$(grad^N f)\circ\varphi = e(\varphi)(grad^N \widetilde{f})\circ\varphi$$

4.5 Tenseur f-bi-énergie impulsion

Soient (M,g), (N,h) deux variétés riemanniennes, $f \in C^\infty(M\times N\times\mathbb{R})$ une fonction positive.

Théorème 4.7. *Soient $\varphi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$ une application de classe C^∞, D un domaine compact de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g, alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi;D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D < S_{2,f}(\varphi), \delta g > \ v_g,$$

où $S_{2,f}(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ est le tenseur f-bi-énérgie impulsion généralisé associé à φ donné par :

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi)(X,Y) \ &= \ -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(X,Y) - f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > g(X,Y) \\ &\quad + f'_\varphi h(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)) + f'_\varphi h(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)) \\ &\quad -\tau_f(\varphi)(f)g(X,Y) + f''_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > h(d\varphi(X), d\varphi(Y)) \\ &\quad +\tau_f(\varphi)(f')h(d\varphi(X), d\varphi(Y)). \end{aligned}$$

$< d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi) >= \sum_{i=1}^m h\big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)\big)$, $\{e_1,...,e_m\}$ *étant une base orthonormée sur* M.

pour la démonstration du Théorème (4.7), on démontre d'abord le lemmes suivant :

Lemme 4.2. *Soit* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *ùne application de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Si* $\{g_t\}$ *est une variation* $\mathcal{C}^\infty$ *de* g *.Alors le champ de vecteurs* $\xi = (div^M(\delta g))^\sharp - \frac{1}{2}grad^M(trace_g(\delta g))$ *satisfait :*

$$\begin{aligned}
\delta(|\tau_f(\varphi)|^2) = &- < f''_\varphi h(\tau(\varphi), \tau_f(\varphi))\varphi^* h, \delta g > -2f'_\varphi < h(\nabla d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > \\
&- 2f'_\varphi h(\tau_f(\varphi), d\varphi(\xi)) - 2 < df'_\varphi \odot h(d\varphi, \tau_f(\varphi)), \delta g > \\
&- f''_\varphi h\Big(d\varphi(grad < \varphi^* h, \delta g >), \tau_f(\varphi)\Big) - < h(d\varphi(grad f''_\varphi), \tau_f(\varphi))\varphi^* h, \delta g > \\
&+ < h(grad^N f', \tau_f(\varphi))\varphi^* h, \delta g >
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Démonstration. Nous avons :

$$E_{2,f}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_f(\varphi)|^2 v_g,$$

$$\tau_f(\varphi) = f'_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_\varphi) - (grad^N f) \circ \varphi.$$

relativement aux systèmes des coordonnées locales (x^i) sur M et (y^α) sur N respectivement, on a :

$$\begin{aligned}
\delta(|\tau_f(\varphi)|^2) &= \delta\Big(\tau_f(\varphi)^\alpha \tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}\Big) \\
&= 2\delta(\tau_f(\varphi)^\alpha)\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
\delta(\tau_f(\varphi)^\alpha) &= \delta(f'_\varphi \tau(\varphi)^\alpha + \theta^\alpha - \eta^\alpha) \\
&= \delta(f'_\varphi)\tau(\varphi)^\alpha + f'_\varphi \delta(\tau(\varphi)^\alpha) + \delta(\theta^\alpha) - \delta(\eta^\alpha),
\end{aligned} \tag{4.67}$$

où :

$$\theta^\alpha = g^{ij}(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j, \quad , \quad \eta^\alpha = h^{\alpha\mu} f_\mu$$

calculons $\delta(f'_\varphi)$ du premier terme du coté droit de l'equation (4.67) :

$$\begin{aligned}
\delta(f'_\varphi) &= \delta\Big(f'(x, \varphi(x), e(\varphi))\Big) \\
&= \delta(e(\varphi)) f''_\varphi \\
&= -\frac{1}{2} < \varphi^* h, \delta g > f''_\varphi,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

pour le deuxièmr terme du coté droit de l'equation (4.67), d'après ([34]) nous avons :

$$\delta(\tau(\varphi)^\alpha) = -g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} - \xi^k \varphi^\alpha_k \tag{4.69}$$

où , $\xi = (div\delta g)^\sharp - \frac{1}{2}grad^M(trace\delta g)$. Calculons le troisième terme du coté droit de (4.67) :

$$\begin{aligned}
\delta(\theta^\alpha) &= \delta\Big(g^{ij}\ (f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j\Big) \\
&= \delta(g^{ij})\ (f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j + g^{ij}\delta((f'_\varphi)_i)\varphi^\alpha_j \\
&= \delta(g^{ij})(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j - \frac{1}{2}g^{ij}(< \varphi^* h, \delta g > f''_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

pour le terme $(<\varphi^*h,\delta g> f''_\varphi)_i$ de l'equation (4.70) on a :

$$\begin{aligned}(<\varphi^*h,\delta g> f''_\varphi)_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(<\varphi^*h,\delta g>)f''_\varphi + <\varphi^*h,\delta g> (f''_\varphi)_i \\ &= <\nabla_{\partial i}\ \varphi^*h,\delta g> f''_\varphi + <\varphi^*h,\nabla_{\partial i}\ \delta g> f''_\varphi + <\varphi^*h,\delta g> (f''_\varphi)_i.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Remplaçons (4.71) dans (4.70) :

$$\begin{aligned}\delta(\theta^\alpha) &= \delta(g^{ij})(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j - \frac{1}{2}g^{ij} <\nabla_{\partial i}\ \varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j \\ &- \frac{1}{2}g^{ij} <\varphi^*h,\nabla_{\partial i}\ \delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j - \frac{1}{2}g^{ij} <\varphi^*h,\delta g> (f''_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j.\end{aligned} \tag{4.72}$$

pour le dernier terme du coté droit de (4.67), on a :

$$\begin{aligned}\delta(\eta^\alpha) &= \delta(h^{\alpha\mu}f_\mu) \\ &= h^{\alpha\mu}\delta(f_\mu) \\ &= h^{\alpha\mu}\delta\Big(f_\mu(x,\varphi(x),e(\varphi))\Big) \\ &= h^{\alpha\mu}\delta(e(\varphi))f'_\mu \\ &= -\frac{1}{2}h^{\alpha\mu} <\varphi^*h,\delta g> f'_\mu,\end{aligned} \tag{4.73}$$

en remplaçant (4.73), (4.72) , (4.69) et (4.68) dans (4.67), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta(\tau_f(\varphi)^\alpha) &= \delta(f'_\varphi)\tau(\varphi)^\alpha + f'_\varphi\delta(\tau(\varphi)^\alpha) + \delta(\theta^\alpha) - \delta(\eta^\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} <\varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\tau(\varphi)^\alpha - f'_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} \\ &- f'_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k + \delta(g^{ij})(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j - \frac{1}{2}g^{ij} <\nabla_{\partial i}\ \varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j \\ &- \frac{1}{2}g^{ij} <\varphi^*h,\nabla_{\partial i}\ \delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j - \frac{1}{2}g^{ij} <\varphi^*h,\delta g> (f''_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j \\ &+ \frac{1}{2}h^{\alpha\mu} <\varphi^*h,\delta g> f'_\mu\end{aligned} \tag{4.74}$$

en remplaçant l'equation (4.74), dans (4.66) , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta(|\tau_f(\varphi)|^2) &= - <\varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\tau(\varphi)^\alpha\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - 2f'_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij}\ \tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &- 2f'_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} + 2\delta(g^{ij})(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &- g^{ij} <\nabla_{\partial i}\ \varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - g^{ij} <\varphi^*h,\nabla_{\partial i}\ \delta g> f''_\varphi\varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &- g^{ij} <\varphi^*h,\delta g> (f''_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} + h^{\alpha\mu} <\varphi^*h,\delta g> f'_\mu\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{4.75}$$

En utilisant la simplification des termes suivants, nous obtenons le resultat du Lemme (4.2) :

$$- <\varphi^*h,\delta g> f''_\varphi\tau(\varphi)^\alpha\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = - < f''_\varphi h(\tau(\varphi),\tau_f(\varphi))\varphi^*h,\delta g>,$$

$$-2f'_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij}\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = -2f'_\varphi g^{ai}g^{bj}\delta(g_{ab})h((\nabla d\varphi)_{ij},\tau_f(\varphi))$$
$$= -2f'_\varphi < h(\nabla d\varphi,\tau_f(\varphi)),\delta(g)>,$$

$$-2f'_\varphi\xi^k\varphi^\alpha_k\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = -2f'_\varphi h(\tau_f(\varphi),d\varphi(\xi)),$$

$$2\delta(g^{ij})(f'_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = -2 < df'_\varphi\odot h(d\varphi,\tau_f(\varphi)),\delta g>,$$

$$-g^{ij}\nabla_{\partial i}(<\ \varphi^*h,\delta g>)f''_\varphi\varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = -f''_\varphi h(d\varphi(grad<\varphi^*h,\delta g>),\tau_f(\varphi)),$$

de même :

$$-g^{ij}<\varphi^*h,\delta g>(f''_\varphi)_i\ \varphi^\alpha_j\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} = -< h(d\varphi(gradf''),\tau_f(\varphi)\varphi^*h,\delta g)>$$

et

$$h^{\alpha\mu}<\varphi^*h,\delta g>f'_\mu\tau_f(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} =< h(grad^N f',\tau_f(\varphi))\varphi^*h,\delta g>$$

□

Démonstration. du theorème (4.7)

D'après le Lemme (4.2), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{2,f}(\varphi;D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D\delta(|\tau_f(\varphi)|^2)\,v_g+\frac{1}{2}\int_D|\tau_f(\varphi)|^2)\delta(v_{g_t})\\ &= -\int_D < f''_\varphi h(\tau(\varphi),\tau_f(\varphi))\varphi^*h,\delta g>v_g-2\int_D f'_\varphi < h(\nabla d\varphi,\tau_f(\varphi)),\delta(g)>v_g\\ &-2\int_D f'_\varphi h(\tau_f(\varphi),d\varphi(\xi))v_g-2\int_D < df'_\varphi\odot h(d\varphi,\tau_f(\varphi)),\delta g>v_g\\ &-\int_D f''_\varphi h(d\varphi(grad<\varphi^*h,\delta g>),\tau_f(\varphi))v_g-\int_D < h(d\varphi(gradf''),\tau_f(\varphi)\varphi^*h,\delta g)>v_g\\ &+\int_D < h(grad^N f',\tau_f(\varphi))\varphi^*h,\delta g>v_g+\frac{1}{2}\int_D<\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2)g,\delta g>v_g\end{aligned}\tag{4.76}$$

En remplaçant f_φ par f'_φ dans le Lemme (2.2) du chapitre 2, nous obtenons :

$$-2\int_D f'_\varphi h(\tau_f(\varphi),d\varphi(\xi))v_g = -2\int_D <\ -sym\nabla f'_\varphi h(d(\varphi),\tau_f(\varphi))+\frac{1}{2}div(f'_\varphi h(d(\varphi),\tau_f(\varphi))^\sharp)g,\ \delta g\ >\tag{4.77}$$

pour le cinquième terme du coté droit de (4.76) :

$$
\begin{aligned}
-\int_D f''_\varphi h(d\varphi(grad < \varphi^* h, \delta g >), \tau_f(\varphi)) v_g &= -\int_D f''_\varphi e_i \Big\langle \varphi^* h, \delta g \Big\rangle h(d\varphi(e_i), \tau_f(\varphi)) v_g \\
&= -\int_D e_i \Big[< \varphi^* h, \delta g > h(d\varphi(e_i), f''_\varphi \tau_f(\varphi)) \Big] v_g \\
&+ < \varphi^* h, \delta g > e_i h(d\varphi(e_i), f''_\varphi \tau_f(\varphi)) v_g \\
&= \int_D < \varphi^* h, \delta g > \; div \; h(d\varphi, f''_\varphi \tau_f(\varphi)) v_g
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

En remplaçant les equations (4.77) et (4.78), dans (4.76) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
S_{2,f}(\varphi) &= f''_\varphi h\Big(\; \tau_f(\varphi), \tau(\varphi) \; \Big)\varphi^* h - 2 f'_\varphi h\Big(\tau_f(\varphi), \nabla d\varphi \; \Big) \\
&+ 2 sym \nabla f'_\varphi h\Big(d\varphi, \tau_f(\varphi) \; \Big) - div\Big(f'_\varphi h\Big(d\varphi, \tau_f(\varphi)\Big)^\sharp\Big) g \\
&- 2 df'_\varphi \odot h\Big(d\varphi, \tau_f(\varphi)\Big) + div\Big(f''_\varphi h(d\varphi, \tau_f(\varphi))\Big)\varphi^* h \\
&- h\Big(d\varphi(grad^M f''_\varphi), \tau_f(\varphi)\Big)\varphi^* h + h\Big(grad^N f', \tau_f(\varphi)\Big)\varphi^* h + \frac{1}{2}\Big|\tau_f(\varphi)\Big|^2 g,
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

calculons Le troisième terme du coté droit de (4.79) :

$$
\begin{aligned}
2 \; sym \nabla f'_\varphi h\Big(d\varphi, \tau_f(\varphi) \; \Big)(X, Y) &= 2 f'_\varphi h\Big(\nabla d\varphi(X, Y), \tau_f(\varphi) \; \Big) + f'_\varphi h\Big(d\varphi(X), \nabla^\varphi_Y \tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ f'_\varphi h\Big(d\varphi(Y), \nabla^\varphi_X \tau_f(\varphi)\Big) + X(f'_\varphi) h\Big(d\varphi(Y), \tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ Y(f'_\varphi) h\Big(d\varphi(X), \tau_f(\varphi)\Big),
\end{aligned} \tag{4.80}
$$

le quatrième terme du coté droit de (4.79) devient :

$$
\begin{aligned}
-div\Big(f'_\varphi h\Big(d\varphi, \tau_f(\varphi)\Big)^\sharp\Big) g &= -h\Big(d\varphi(grad^M f'_\varphi), \tau_f(\varphi)\Big) g \\
&- f'_\varphi h\Big(\tau_f(\varphi), \tau(\varphi)\Big) g \\
&- f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g \\
&= -\Big|\tau_f(\varphi)\Big|^2 g - \tau_f(\varphi)(f) g - f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g
\end{aligned} \tag{4.81}
$$

car $\quad f'_\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(grad^M f'_\varphi) = \tau_f(\varphi) + (grad^N f) \circ \varphi$

pour le cinquième terme du coté droit de (4.79) :

$$
\begin{aligned}
-2 df'_\varphi \odot h\Big(d(\varphi), \tau_f(\varphi)\Big)(X, Y) &= -X(f'_\varphi) h\Big(d\varphi(Y), \tau_f(\varphi)\Big) \\
&- Y(f'_\varphi) h\Big(d\varphi(X), \tau_f(\varphi)\Big),
\end{aligned} \tag{4.82}
$$

et pour le sixième terme du coté droit de (4.79), on a :

$$\begin{aligned} div\Big(f''_\varphi h(d\varphi,\tau_f(\varphi))\Big) &= e_i\Big(f''_\varphi h(d\varphi(e_i),\tau_f(\varphi))\Big) \\ &= h\Big(d\varphi(grad^M f''_\varphi),\tau_f(\varphi)\Big) + f''_\varphi h(\tau_f(\varphi),\tau(\varphi)) \\ &+ f''_\varphi < d\varphi,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)> . \end{aligned} \tag{4.83}$$

Finalement, en remplaçant les equations (4.80),(4.81),(4.82) et (4.83) dans (4.79), nous obtenons le resultat du Théorème (4.7). □

Remarque 4.3.

1. si $f(x,y,r)=r$ pour tout $(x,y,r)\in M\times N\times\mathbb{R}$, on retrouve le tenseur bi-énergie impulsion défini dans le chapitre 1

$$S_{2,f}(\varphi)=S_2(\varphi)=-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2g-<d\varphi,\nabla^\varphi\tau(\varphi)>g+2sym\ h(d\varphi,\nabla^\varphi\tau(\varphi)).$$

2. Soit $f_1:M\longrightarrow(0,\infty)$ une fonction de classe C^∞, si $f(x,y,r)=f_1(x)r$ pour tout $(x,y,r)\in M\times N\times\mathbb{R}$, on retrouve le tenseur f-bi-énergie impulsion défini dans [39]

$$S_{2,f}(\varphi)=S_{2,f_1}(\varphi)=-\frac{1}{2}|\tau_{f_1}(\varphi)|^2g-f_1<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_{f_1}(\varphi)>g+2f_1sym\ h(d\varphi,\nabla^\varphi\tau_{f_1}(\varphi)).$$

3. si $f(x,y,r)=\widetilde{f}(x,y).r$ pour tous $(x,y,r)\in M\times N\times\mathbb{R}$ on retrouve le tenseur f-bi-énergie impulsion associé à φ défini dans le chapitre 2

$$\begin{aligned} S_{2,f}(\varphi) &= -\frac{1}{2}|\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)|^2g-\widetilde{f}<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)>g+2\widetilde{f}sym\ h(d\varphi,\nabla^\varphi\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)) \\ &- e(\varphi)\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f})g+\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f})\varphi^\star h. \end{aligned}$$

Théorème 4.8. *Soient $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ une application de classe C^∞ , $f\in\mathcal{C}^\infty(M\times N\times\mathbb{R})$ une fonction positive, alors :*

$$\begin{aligned} div^M\ S_{2,f}(\varphi) &= -h(\tau_{2,f}(\varphi),d\varphi)-<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)>df'_\varphi \\ &+<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)>h((grad^N f')\circ\varphi,d\varphi) \\ &-h\Big(d\varphi(grad^M\tau_f(\varphi)(f'))+\tau_f(\varphi)(f')\tau(\varphi)\ ,\ d\varphi\Big) \\ &-\tau_f(\varphi)(f')de(\varphi)+<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)>f''_\varphi de(\varphi) \\ &+<d\varphi,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)>h\Big(d\varphi(grad^M f''_\varphi)+f''_\varphi\tau(\varphi),d\varphi\Big) \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le Théorème (4.5) et relativement a une base orthonormée $\{e_1,...,e_m\}$ sur M, telle que au point $x\in M$, $\nabla_{e_i}e_j=0$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
S_{2,f}(\varphi)(e_i,e_j) \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(e_i,e_j) - f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(e_i,e_j) \\
& + f'_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + f'_\varphi h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
& -\tau_f(\varphi)(f) g(e_i,e_j) + f''_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\
& +\tau_f(\varphi)(f') h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).
\end{aligned}
$$

Ecrivons $S_{2,f}(\varphi) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$,
où les termes : $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 \in \ \Gamma(\odot^2 T^* M)$ sont définis par :

$$T_1(e_i,e_j) = -\frac{1}{2}|\tau_f(\varphi)|^2 g(e_i,e_j) \ ,$$

$$T_2(e_i,e_j) = - f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > g(e_i,e_j) \ ,$$

$$T_3(e_i,e_j) = f'_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + f'_\varphi h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \ ,$$

$$T_4(e_i,e_j) = -\tau_f(\varphi)(f) g(e_i,e_j) \ ,$$

$$T_5(e_i,e_j) = \tau_f(\varphi)(f') h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).$$

$$T_6(e_i,e_j) = f''_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \ ,$$

Calculons maintenant la divergence de chaque terme. Pour le premier terme nous avons :

$$
\begin{aligned}
(div\ T_1)(e_j) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m e_i\Big(|\tau_f(\varphi)|^2 g(e_i,e_j)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m e_i\Big(|\tau_f(\varphi)|^2 \delta_{ij}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e_j(|\tau_f(\varphi)|^2) \\
&= -\frac{1}{2} e_j h(\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)) \\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi), \tau_f(\varphi)),
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

pour le deuxième terme :

$$
\begin{aligned}
(div\ T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i\Big(- f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > \delta_{ij}\Big) \\
&= -e_j(f'_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) >) \\
&= -e_j(f'_\varphi) < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > - f'_\varphi e_j(< d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) >) \\
&= - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_f(\varphi) > df'_\varphi(e_j) - f'_\varphi h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&- f'_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)),
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

le troisième terme :

$$\begin{aligned}
(div\ T_3)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\Big(f'_\varphi h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)) + f'_\varphi h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi))\Big) \\
&= h\Big(d\varphi(grad^M f'_\varphi), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) + f'_\varphi h\Big(\tau(\varphi), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ f'_\varphi h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) + f'_\varphi h\Big(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ h\Big(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i} f'_\varphi \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&= h\Big(\tau_f(\varphi), \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) + h\Big((grad^N f)\circ\varphi, \nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ f'_\varphi h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) + f'_\varphi h\Big(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&+ h\Big(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i} f'_\varphi \nabla^\varphi_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big),
\end{aligned} \tag{4.86}$$

pour le quatrième terme, on a :

$$\begin{aligned}
(div\ T_4)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\Big(-\tau_f(\varphi)(f)g(e_i, e_j)\Big) \\
&= -e_j(\tau_f(\varphi)(f)) \\
&= -e_j h\Big(\tau_f(\varphi), (grad^N f)\circ\varphi\Big) \\
&= -h\Big(\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi), (grad^N f)\circ\varphi\Big) - h\Big(\tau_f(\varphi), \nabla^\varphi_{e_j}(grad^N f)\circ\varphi\Big) \\
&= -h\Big(\nabla^\varphi_{e_j}\tau_f(\varphi), (grad^N f)\circ\varphi\Big) - h\Big(d\varphi(e_j), \nabla^N_{\tau_f(\varphi)}(grad^N f)\circ\varphi\Big),
\end{aligned} \tag{4.87}$$

et le cinquième terme :

$$\begin{aligned}
(div\ T_5)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\Big(\tau_f(\varphi)(f')h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big) \\
&= -h\Big(d\varphi(grad^M \tau_f(\varphi)(f')) + \tau_f(\varphi)(f')\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) \\
&- \tau_f(\varphi)(f')h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j)\Big).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

pour le dernier terme :

$$\begin{aligned}
(div\ T_6)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\Big(f''_\varphi < d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big) \\
&=< d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > h\Big(d\varphi(grad^M f''_\varphi)) + f''_\varphi\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) \\
&+ \nabla^\varphi_{e_i} < d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > f''_\varphi\ h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\
&+ < d\varphi, \nabla^\varphi\tau_f(\varphi) > f''_\varphi\ e_j\Big(e(\varphi)\Big).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

En utilisant les équations (4.84) , (4.85) , (4.86) , (4.87) , (4.88) et (4.89) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
(div\ S_{2,f}(\varphi))(e_j) = &-< d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > df'_{\varphi}(e_j) - f'_{\varphi}h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)) \\
&+ f'_{\varphi}h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) + h\Big(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}f'_{\varphi}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big) \\
&- h\Big(d\varphi(e_j), \nabla^{N}_{\tau_f(\varphi)}(grad^N f)\circ\varphi\Big) - h\Big(d\varphi(grad^M\tau_f(\varphi)(f')) \\
&+ \tau_f(\varphi)(f')\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) - \tau_f(\varphi)(f')h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(e_j)\Big) \\
&+ < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > h\Big(d\varphi(grad^M f''_{\varphi})) + f''_{\varphi}\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) \\
&+ \nabla^{\varphi}_{e_i} < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > f''_{\varphi}h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) + < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > f''_{\varphi}\ e_j\Big(e(\varphi)\Big).
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

Rappelons que le champ f-bi-tension de φ est donné par :

$$
\begin{aligned}
\tau_{2,f}(\varphi) = &-f'_{\varphi}trace_g R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi - trace_g\nabla^{\varphi}f'_{\varphi}\nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) \\
&+ (\nabla^{N}_{\tau_f(\varphi)}grad^N f)\circ\varphi + < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > (grad^N f')\circ\varphi \\
&- trace_g\nabla^{\varphi} < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > \ f''_{\varphi}d\varphi,
\end{aligned}
$$

et d'après la définition de tenseur de courbure riemannienne, nous déduisons :

$$
\begin{aligned}
f'_{\varphi}h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau_f(\varphi)\Big) - f'_{\varphi}h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_f(\varphi)\Big) &= f'_{\varphi}h\Big(R^N\Big(d\varphi(e_i), d\varphi(ej)\Big)\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)\Big) \\
&= f'_{\varphi}h\Big(R^N\Big(\tau_f(\varphi), d\varphi(e_i)\Big)d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\Big) \\
&= f'_{\varphi}h\Big(trace_g R^N\Big(\tau_f(\varphi), d\varphi\Big)d\varphi.d\varphi(e_j)\Big)
\end{aligned}
$$

Finalement , nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
(div\ S_{2,f}(\varphi))(e_j) = &-h(\tau_{2,f}(\varphi), d\varphi(e_j)) - < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > df'_{\varphi}(e_j) \\
&+ < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > h\Big((grad^N f')\circ\varphi\ , d\varphi(e_j)\Big) \\
&- h\Big(d\varphi(grad^M\tau_f(\varphi)(f')) + \tau_f(\varphi)(f')\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) \\
&- \tau_f(\varphi)(f')de(\varphi)(e_j) + < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > h\Big(d\varphi(grad^M f''_{\varphi})) \\
&+ f''_{\varphi}\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\Big) + < d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau_f(\varphi) > f''_{\varphi}\ de(\varphi)(e_j).
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

□

Remarques 4.4.

1. *Si* $f(x,y,r) = r$ *, pour tout* $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$*, alors nous obtenons la divergence du tenseur bi-énergie impulsion :*

$$
divS_{2,f}(\varphi) = divS_2(\varphi) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi)
$$

2. *Si* $f(x,y,r) = f_1(x)r$ *, pour tout* $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, *alors nous obtenons le cas des applications* f_1-*harmoniques :*

$$div^M \ S_{2,f}(\varphi) = -h(\tau_{2,f_1}(\varphi), d\varphi) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_{f_1}(\varphi) > df_1$$

3. *Si* $f(x,y,r) = \widetilde{f}(x,y)r$ *, pour tout* $(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, *alors nous obtenons le résultat de Théorème (2.9) du chapitre 2.*

En effet :

Si $f(x,y,r) = \widetilde{f}(x,y)r$ *,pour tout*$(x,y,r) \in M \times N \times \mathbb{R}$, alors :
$f_\varphi = e(\varphi)\widetilde{f}_\varphi$, $f' = \widetilde{f}$, $f'_\varphi = \widetilde{f}_\varphi$ et $f'' = f''_\varphi = 0$, donc :

$$\begin{aligned} div^M \ S_{2,f}(\varphi) &= -h(\tau_{2,f}(\varphi), d\varphi) - < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_{\widetilde{f}}(\varphi) > d\widetilde{f}_\varphi \\ &+ < d\varphi, \nabla^\varphi \tau_{\widetilde{f}}(\varphi) > h((grad^N \widetilde{f}) \circ \varphi, d\varphi) - h\Big(d\varphi(grad^M \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f})), d\varphi\Big) \\ &- h\Big(\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f})\tau(\varphi) \ , \ d\varphi\Big) - \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) de(\varphi), \end{aligned} \tag{4.92}$$

or, pour le sixième terme de (4.92), nous avons pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} -\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) de(\varphi)(X) &= -\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ X(e(\varphi)) \\ &= -\frac{1}{2} \ \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ Xh(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= -\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ h(\nabla^\varphi_X, d\varphi(e_i)) \\ &= -\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ e_i h(d\varphi(X), d\varphi(e_i)) + \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ h(d\varphi(X), \tau(\varphi)) \\ &= -e_i \ \Big(\tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ h(d\varphi(X), d\varphi(e_i))\Big) \\ &+ h\Big(d\varphi(X), d\varphi(grad^M \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}))\Big) \\ &+ \tau_{\widetilde{f}}(\varphi)(\widetilde{f}) \ h(d\varphi(X), \tau(\varphi)). \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), 243.263.

[2] P .Baird and J. Eells, A conservation law for harmonic maps, Lecture Notes in Math. 894,Springer (1981), 1-25.

[3] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds,Clarendon Press Oxford 2003.

[4] P. Baird, A. Fardoun And S. Ouakkas, conformal and semi-conformal biharmonic maps,annals of global analysis and geometry, 34 (2008),403-414.

[5] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques., Canad. J. Math. 65 (2013), 266-298

[6] R.L.Bishop R. L. and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 145, (1969), 1-49

[7] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc., Biharmonic submanifolds of S^3, Int. J. Math., 12(2001), 867-876.

[8] O.Calin and D. Chen Chang, Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds Applications to Partial Differential Equations, 2005 Birkhäuser Boston

[9] D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon and M. Herzlich, On the Kato inequality in Riemannian geoemetry. Séeminaires and Congrès, Société Mathématiques de France 2000.4(2000), p. 95Ű113

[10] C.Carathéodory, calculus of variations and partial déferential equations of the first order, vol. I and II, Holden Day, San Francisco, 1967 (first edition in German Teubner, Berlin (1935).

[11] Cieslinski J., Sym A. and Wesselius W., On the Geometry of the Inhomogeneous Heisenberg Ferromagnet Model : non-integrable case, J. Phys. A. Math. Gen. 26 (1993), 1353-1364.

[12] Chen B.Y., Geometry of submanifolds, Marcel Dekker Inc., New York, 1983.

[13] Chen Li and Chen Wenyi,Gradient estimates for positive f-harmonique functions, Acta Mathematica Scientia 2010,30B(5) :1614-1618

[14] Y.J. Chiang, f-biharmonic Maps between Riemannian Manifolds, Department of Mathematics, University of Mary Washington Fredericksburg, VA 22401, USA 2012.

[15] Course, .N, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target ; New York Journal of Mathematics. 13, (2007), 423-435.

[16] D.Hilbert Die Grundlagen der physik, Nachr.Ges.Wiss. Gottingen, (1915), P.395

[17] M. Djaa, Introduction à la Géométrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master - Doctorat) Centre Universitaire de Relizane(2013).

[18] M. Djaa and A. M. Cherif, On Generalized f-biharmonic Maps and Stress f-bienergy Tensor. Journal of Geometry and Symmetry in Physics JGSP 29(2013), pp. 65-81.

[19] A. M. Cherif and M. Djaa, On generaized f-harmonic morphisms, Co-ment. Math. Univ. Carolin. 55,1 (2014) pp 17-27.

[20] M. Djaa, A. M. Cherif, K. Zegga And S. Ouakkas, on the generalized of harmonic and bi-harmonic maps, international electronic journal of geometry, volume 5 no. 1 pp. 1-11 (2012).

[21] J. Eells, p-Harmonic and exponentially harmonic maps, lecture given at Leeds University, June 1993.

[22] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16(1978), 1-68.

[23] J. Eells and J.H. Sampson, Harmonic mappings of riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86(1964), 109-160.

[24] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) 107-144

[25] G.Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formula, Chinese Ann. Math., 7A (1986), 388Ű402 ; Note di Matematica, 28 (2009), 209Ű232

[26] S. Gudmundsson, the geometry of harmonic morphisms, University of Leeds,Department of Pure Mathematics, April 1992.

[27] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique collection Hermann. Paris (1968).

[28] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the ricci flow. Surveys in Diff. Geom. 27-136, 1995.

[29] R. S. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with boundary, Lect. Notes in Math. 471, Springer-Verlag, 1975.

[30] M. Herzlich, Refined Kato inequality in Riemannian geoemetry, Journées Equations aux dérivées partielle. Nantes 5-9 juin 2000.

[31] S.Kobayashi and K.Nomizu,Fondation of Diferential Geometry ,vol.I. Intersciense,New York-London 1963.

[32] S.Kobayashi and K.Nomizu,Fondation of Diferential Geometry ,vol.II. Intersciense,New York-London 1963.

[33] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variťetťes kĺahleriennes, Symposia Mathematica, Vol. III , Academic Press, London, 1968/1969, pp. 341Ű402.

[34] E. Loubeau, S. Montaldo, And C. Oniciuc, the stress-energy tensor for biharmonic maps, arXiv :math/0602021v1 [math.DG] 1 Feb 2006.

[35] E.Loubeau and C.Oniciuc. On the biharmonic and harmonic indices of the hopf map, Transaction of the American Mathematical Society, 359 (2007) , 5239-5256.

[36] Wei-jun Lu, On f-bi-harmonic maps between Riemannian manifolds,arXiv 2013.

[37] B. O'Neill, Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press,New York, 1983.

[38] Ye-Lin Ou. On f-harmonic morphisms between Riemannian manifolds, arXiv : 1103.5687v1, 2011

[39] Ouakkas, S., Nasri, R. and Djaa, M., On the f-harmonic and f-biharmonic maps, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 10, Number 1, 2010, Pages 11-27 Mars 2010.

[40] Ouakkas, S., Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications,26 (2008), 495-502.

[41] P. Pansu . Géométrie différentielle, Cours DEA, Laboratoire de Mathťematique dŠOrsay . 27 octobre 2005

[42] M. Rimoldi and G. Veronelli, f-Harmonic maps and Applications to Gradient Ricci Solitons, Institut Élie Cartan Université de Lorraine ; Journées Nancéiennes de Géométrie 17 et 18 janvier 2012.

[43] M. Svensson, Polynomyial Harmonic Morphisms, Examensarbete 20 polang Lunds Universitet Noveembre 1998.5-25.

[44] Wu HX, Chen W H. Topics of Riemannian Geometry. Beijing : Beijing University Press,1993.

[45] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), pp. 201-228.

[46] Yingbo Han and Shuxiang Feng, Some result of f-biharmonic maps, Acta Mathematica Universitatis Comeniane, In press 2014.