

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

NEDRI Kadda

Intitulée de la thèse

Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique

Soutenu le 04/11/ 2015

Devant le jury composé de :

M ^r . ADDA BEDIA EL ABBAS	Professeur	UDL-SBA	President
M ^r . TOUNSI ABDELOUAHED	Professeur	UDL-SBA	Directeur de thèse
M ^r . HOUARI MOHAMED SID AHMED	MCA	U.MASCARA	Examineur
M ^r . KACI ABDELHAKIM	MCA	U. SAIDA	Examineur
M ^r . YEGHNEM REDHA	MCA	U. SAIDA	Examineur
M ^r . FEKRAR ABDELKADER	MCA	UDL-SBA	Examineur
M ^r . EL MEICHE NOUREDDINE	MCA	U.MASCARA	Invité

Année universitaire 2015-2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Ce travail s'inscrit dans le cadre du Cherchés une nouveau théorie sur la vibration libre d'une plaque rectangulaire en matériaux composites stratifiés simplement appuyées. Il a été réalisé au Laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabess de Sidi Belabess, sous la supervision du Professeur **El Abess Adda Bedia**, enseignant à l'Université Djilali Liabes de sidi belabess et directeur du laboratoire.

Je dois tout particulièrement remercier le président de jury, Monsieur le Professeur **E.ADDA BEDDIA**, pour l'intérêt qu'il a bien voulu apporter à ce travail et d'avoir accepter mon travail, et pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Je suis très heureux pour la richesse de la formation scientifique et humaines dans des conditions très favorables, ainsi je remercié mon Professeur pour l'ensemble de ses conseils et remarques.

Je tiens en premier lieu, à remercier sincèrement toutes les personnes, qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail. Je remercie vivement Monsieur le Professeur **Abdelouahed TOUNSI**, directeur de thèse. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour leurs conseils avisés, leur rigueur Scientifique et Leurs encouragements constants et leur amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **Houari Mohammed Sid Ahmed** maitre de conférences auprès de l'université de Mascara, **M^r. KACI ABDELHAKIM**, **M^r. YEGHNEM REDHA** des maitres de conférences auprès de l'université de Saida et **M^r. FEKRAR ABDELKADER** maitre de conférences auprès de l'université Djilali Liabess de sidi belabess de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabess de Sidi Belabess.

Je souhaite remercier en particulier **M^r. EL MEICHE NOUREDDINE** pour ses nombreux conseils et qui par son aide, a permis l'aboutissement de nombreux calculs.

Je voudrais enfin remercier l'ensemble de ma famille, et particulièrement mon épouse pour leur soutien inconditionnel au cours de ces dernières années.

Sommaire

Sommaire

Résumé

Abstract

Liste des notations

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale 1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. *Introduction* 8

I.2. *Les Principaux constituants de base d'un matériau composite*..... 9

I.2.1. *Les renforts*..... 10

I.2.1.1.1 *Les fibres de verre*..... 11

I.2.1.1.2. *Ensimage des fibres de verre*..... 12

I.2.1.2. *Les fibres de carbone*..... 13

I.2.1.3. *Les fibres d'aramide*..... 15

I.2.1.4. *Les fibres végétales (naturels)*..... 15

I.2.1.5 *Caractéristiques mécaniques des fibres*..... 15

I.2.2. *Les matrices*..... 17

I.2.2.1. *Les résines thermoplastiques*..... 17

I.2.2.2. *Les résines thermodurcissables*..... 18

I.2.2.3. *Les élastomères*..... 19

I.2.3. *Charges et les additifs*..... 19

I.2.4. *L'interface fibre-matrice*..... 21

I.3. *Applications commerciales et industrielles des matériaux composites*..... 23

I.4. *Avantages et inconvénients des matériaux composites*..... 24

I.5. *Conclusion*..... 25

Chapitre II : *Structure et propriétés des matériaux composites*

II.1. <i>Introduction</i>	26
II.2. <i>Architecture des fibres</i>	26
II.2.1. <i>Matériaux composites monocouches</i>	28
II.2.2. <i>Matériaux composites stratifiés</i>	28
II.2.3. <i>Désignation d'un matériau composite stratifié</i>	29
II.2.3.1. <i>Matériau composite stratifié avec angles positifs et négatifs</i>	31
II.2.3.2. <i>Matériau composite stratifié symétriques</i>	31
II.2.3.3. <i>Matériau composite stratifié antisymétriquement</i>	31
II.2.3.3. <i>Matériau composite stratifié équilibré</i>	31
II.2.3.4. <i>Matériau composite stratifié orthogonal</i>	31
II.2.3.5. <i>Matériau composite stratifié hybrides</i>	31
II.2.4. <i>Composites sandwiches</i>	32
II.3. <i>Loi de mélange</i>	33
II.4. <i>Loi de comportement</i>	35
II.4.1. <i>Matériau anisotrope</i>	36
II.4.2. <i>Matériau monoclinique</i>	36
II.4.3. <i>Matériau orthotropique</i>	36
II.4.4. <i>Matériau transversalement isotrope</i>	37
II.4.5. <i>Matériau isotrope</i>	37
II.5. <i>Endommagement des composites</i>	38
II.5.1. <i>Différents Modes d'endommagements</i>	38
II.5.1.1. <i>Fissuration matricielle</i>	39
II.5.1.2. <i>Délaminage entre couches</i>	40
II.5.1.3. <i>Rupture des fibres</i>	40
II.6. <i>Conclusion</i>	41

Chapitre III : *Théories des plaques composites stratifiées*

III.1. <i>Généralités sur la Théorie des Stratifiés</i>	42
III.2. <i>Architecture des stratifiés</i>	42
III.2.1. <i>Notations et objectif</i>	43
III.3. <i>Champ des déplacements</i>	43
III.3.1 <i>Déformation d'une normale</i>	44

III.3.2. Schémas du premier degré.....	45
III.4. Champ des déformations.....	47
III.5. Champ des contraintes.....	47
III.5.1. Simplification dans le cadre de la théorie des plaques.....	48
III.6. Résultantes et moments..	48
III.6.1 Résultantes en membrane.....	48
III.6.2 Résultantes en cisaillement.....	49
III.6.3 Moments de flexion et de torsion.....	50
III.7. Modèles de structures multicouches.....	50
III.7.1. Approche par développement asymptotique.....	51
III.7.2. Modèles de monocouche équivalente.....	52
III.7.2.1 Théorie Classique de Love-Kirchhoff	52
III.7.2.1.1. Champ des déformations	52
III.7.2.1.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés.....	52
III.7.2.1.1.2 Expression du champ des déformations.....	53
III.7.2.1.2. Champ des contraintes	55
III.7.2.1.2. 1. Forme du champ des contraintes	55
III.7.2.1.2.2 Expression des contraintes	55
III.7.2.1.3. Expressions résultantes et moments	56
III.7.2.1.3.1. résultantes en membrane	56
III.7.2.1.3.2. Résultantes de flexion et de torsion	57
III.7.2.1.4 Équation du comportement mécanique d'un stratifié.....	58
III.7.2.1.4.1 Équation constitutive	58
III.7.2.1.4.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux.....	59
III.7.2.1.4.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes	60
III.7.2.2 Le modèle classique de Reissner-Mindlin (FSDT, First ordre Shear Deformation Theory)	61
III.7.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	63
III.7.3. Théories Zig-zag	65
III.7.4. Approche par couche (layer wise)	66
III.8. Conclusion	67

Chapitre IV Etude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée

IV.1. Introduction	68
IV.2. Modèles de fondations	69
IV.2.1. Model de Winkler.....	69
IV.2.2. Model de Pasternak	70
IV.3. Configuration géométrique	71
IV.4. Théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique	71
IV.4.1. Hypothèses et Champ de déplacement de la Théorie raffinée	71
IV.4.2. Cinématique et équations constitutives	72
IV.4.3. Champs des déformations	73
IV.4.4. Champs des contraintes.....	74
IV.4.5. Equations gouvernantes	75
IV.5. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée	78
IV.6. Conclusion	80

Chapitre V Résultats et discussions

V.1. Introduction	81
V.2. Structure étudiée et matériaux.....	82
V.2.1. Analyse en vibration.....	83
V.3. Validation des résultats.....	84
V.3.1. Effet du rapport d'orthotropie $E1/E2$	84
V.3.2. Effet de la géométrie de la plaque (a/h)	86
V.3.3 Effet de la fondation élastique	87
V.4. Conclusion	90
Conclusion générale	91
Référence Bibliographique	94

Résumé

Une analyse de vibration libre de plaques composites stratifiées sur fondation élastique est examinée par une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffinée dans le présent document. Cette théorie de plaque raffinée est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux sont constitués d'éléments de flexion et de cisaillement dans laquelle les composants de flexion ne contribuent pas aux forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas aux moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une fonction hyperbolique de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, de sorte que représentent les distributions paraboliques de contraintes de cisaillement transversaux et satisfont zéro conditions de contrainte de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Le nombre d'inconnues indépendants de la théorie actuelle est de quatre, contre cinq dans d'autres théories de déformation de cisaillement. Dans cette analyse, la fondation est modélisée comme deux paramètres de type Pasternak et de type Winkler, si le deuxième paramètre de la fondation est de zéro. L'équation de mouvement de plaques rectangulaires stratifiées épais simplement appuyées reposant sur fondation élastique est obtenue par le principe de Hamilton. Les résultats numériques obtenus par la présente analyse de vibration libre des plaques stratifié croisé sur fondation élastique sont présentés et comparés à ceux qui sont disponibles dans la littérature. On peut en conclure que la théorie proposée n'est pas seulement précis, mais également efficace pour prédire les fréquences naturelles de plaques composites stratifiées.

Mots-clés:

vibration libre, la théorie de cisaillement de déformation de la plaque, plaque composite stratifié, Fondation élastique,

Abstract

A free vibration analysis of laminated composite plates on elastic foundation is examined by a refined hyperbolic shear deformation theory in this paper. This refined plate theory is based on the assumption that the transverse displacements consist of bending and shear components in which the bending components do not contribute toward shear forces and, likewise, the shear components do not contribute toward bending moments. The most interesting feature of this theory is that it accounts for a hyperbolic function across the plate thickness, so account for parabolic distributions of transverse shear stresses and satisfy zero shear stress conditions at the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction factors. The number of independent unknowns of present theory is four, as against five in other shear deformation theories. In the analysis, the foundation is modelled as two parameter Pasternak type foundation and Winkler type if the second foundation parameter is zero. The equation of motion for simply supported thick laminated rectangular plates resting on elastic foundation is obtained through Hamilton's principle. The numerical results obtained through the present analysis for free vibration of cross-ply laminated plates on elastic foundation are presented, and compared with the ones available in the literature. It can be concluded that the proposed theory is not only accurate but also efficient in predicting the natural frequencies of laminated composite plates.

Keywords: Free vibration, Shear deformable plate theory, Laminated composite plate, Elastic foundation

يتم فحص و تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المتدرج وضيغينا والمرتكزة على أساس مرن من قبل نظرية تشوه القص المتطورة على شكل قطع مكافئ في هذه الوثيقة. وتستند نظرية صفائح المتطورة على افتراض أن الانتقال العرضي يتكون من عنصرين الانحناء والقص، والمكونات الانحناء التي لا تساهم في قوى القص، وبالمثل، فإن مكونات القص لا تسهم في لحظات الانحناء.

والميزة الأكثر إثارة للاهتمام في هذه النظرية هو تمثيل لتوزيع الإجهاد على شكل قطع مكافئ عبر سمك اللوحة بحيث تمثل التوزيعات المكافئة للاجهادات والقص العرضي التي تستوفي الشرط صفر على الأسطح العلوية والسفلية للوحة دون مساعدة عامل التصحيح القص. عدد المجاهيل الحرة في هذه النظرية هو أربعة مقابل خمسة في النظريات الأخرى لتشوه القص.

في هذا التحليل، القاعدة الممثل هي قاعدة باسترناك و ونكلير إذا كان معامل الثاني للقاعدة يساوي الصفر. ويمكن الحصول على معادلة الحركة للصفحة المستطيلة المدرجة السميكة بارتكاز بسيط على قاعدة مرنة بواسطة مبدأ هاملتون. وتم عرض النتائج الرقمية التي حصلنا عليها من هذا التحليل للاهتزازات الحرة لصفائح المدرجة متقاطعة على قاعدة مرنة، ومقارنتها مع تلك المتوفرة للنظريات الأخرى، ويمكن استنتاج بان النظرية المقترحة ليست دقيقة فحسب بل أيضا فعالة لتنبؤ ترددات الطبيعية للوحات المركبة المدرجة.

كلمات البحث: الاهتزاز الحر، نظرية تشوه القص للوحة، الصفحة المركبة المدرجة، قاعدة مرنة

Liste des notations

Liste des notations

$E1$ Module de Young longitudinal

$E2$ Module de Young transversal

ν Coefficient de Poisson

Q_{ij} sont les constantes de rigidités

a Longueur de la plaque

b Largeur de la plaque

h Epaisseur de la plaque

u_0, v_0 , Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

u, v, w Les déplacements dans les directions x, y, z .

u_b et v_b composantes de la flexion

u_s et v_s composantes de cisaillement

$f(z)$ est la fonction de forme de cisaillement

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Contraintes normales

τ_{xz}, τ_{yz} Contraintes de cisaillement

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ Déformation dans la direction x, y et z

γ_{xz}, γ_{yz} Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$ Champ virtuel de déplacement

δU la variation de l'énergie de déformation

δV la variation de l'énergie potentielle

δK est la variation de l'énergie cinétique

U_F est l'énergie de déformation de la fondation

G_p Le module de cisaillement du sol

k_p Le module de réaction du sol

$w(x)$ La déformée du terrain.

f_e Est la densité de la force de réaction de la base

κ_0 coefficient fondation linéaire de Winkler

κ_1 coefficient fondation linéaire de Pasternak

$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$ Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$ Champ de déformation transversal virtuel

N_x, N_y, N_{xy} Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy} Moments de flexion

Q_{xz}, Q_{yz} Effort de cisaillement

∂ Dérivée partielle

n Nombre de couche

ρ est la densité de masse de la plaque

G Module de cisaillement dans le plan (x, z)

i et j Sont des nombres naturels.

A_{ij} Termes de rigidité en membrane de la plaque

B_{ij} Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij} Termes de rigidité de flexion de la plaque

$\{\Delta\}$ Le vecteur des déplacements généralisés

Listes des figures

Listes des figures

CHAPITRE I

Fig.I-1 *les constituants de base Des composites*8

Fig.I-2 *Les différents types de composites*9

Fig.I-3 *Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre*12

Fig.I-4 *Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN*13

Fig.I-5 *Exemples de charges utilisées dans les CMO*19

Fig.I-6 *Le rôle de l'interface sur la ténacité des*21

Fig.I-7 *Les différents types des constituants de base*21

Fig.I-8a *Répartition des polymères thermodurcissables*22

Fig.I-8b *Répartition des composites à matrice organique*23

CHAPITRE II

Fig.II-1 *Fibres longues de carbone*26

Fig.II-2 *Fibres longues tissu 3D*26

Fig.II-3 *Matériaux composite monocouche*27

Fig.II-4 *Matériau composite stratifié*28

Fig.II-5 *Désignation d'un stratifié*29

Fig.II-6 *Convention de signe pour la désignation des stratifiés*29

Fig.II-7 *Structure composite sandwich*31

Fig.II-8 *Mécanismes de rupture observés dans un stratifié*37

Fig.II-9 *Modes d'endommagements dans un stratifié croisé*40

CHAPITRE III

Fig.III-1	Élément de plaque.....	42
Fig.III-2	Élément de stratifié.....	43
Fig.III-3	Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement.....	45
Fig.III-4	Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse.....	46
Fig.III-5	Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse.....	46
Fig.III-6	Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.....	49
Fig.III-7	Représentation schématique des résultantes de cisaillement.....	50
Fig.III-8	Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	50
Fig.III-9	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.....	53
Fig.III-10	Plaque soumise à une traction suivant l'axe x.....	62
Fig.III-11	Cinématique de Reissner-Mindlin.....	62
Fig.III-12	Cinématique de la théorie d'ordre élevé.....	63
Fig.III-13	Introduction de la fonction zig-zag de Murakami dans la distribution linéaire.....	65
Fig.III-14	Description de déplacement du modèle Monocouche équivalente (à gauche) et Layer wise.....	66

CHAPITRE IV

Fig.IV-1	Hypothèse Winkler.....	69
Fig.IV-2	Approximation Winkler.....	70
Fig.IV-3	Plaque composite stratifiée reposant sur une fondation élastique	71

CHAPITRE V

- Fig.V-1** Effet de rapport d'orthotropie sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée sur appuis élastique pour différent rapport a/h . (a) $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et (b) $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$88
- Fig.V-2** Effet de rapport d'orthotropie sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée croisé antisymétriquement $(0/90/0/90)$ sur fondation élastique: (a) $K_1 = 10$; (b) $K_0 = 100$ 90

Liste des tableaux

Liste des tableaux

CHAPITRE I

Tab. I-1 <i>Constituants des fibres de verre</i>	12
Tab. I-2 <i>Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques</i>	14
Tab. I-3 <i>Divers caractéristiques de diverses fibres</i>	16
Tab. I-4 <i>Caractéristiques des résines thermoplastiques</i>	18
Tab. I-5 <i>caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables</i>	19

CHAPITRE V

Tab. V-1 <i>propriétés matérielles sans dimension de matériau utilisé</i>	82
Tab. V-2 <i>Modèles de déplacement</i>	83
Tab. V-3 <i>Fréquences fondamentales $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapports d'orthotropes avec $a/h = 5$</i>	85
Tab. V-4 <i>Fréquences fondamentales $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapport longueur / épaisseur a/h avec $E_1/E_2 = 40$</i>	86
Tab. V-5 <i>Comparaison des paramètres de fréquences fondamentales $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ d'une plaque carrée isotrope.....</i>	87

Introduction générale

Introduction générale

Les propriétés des matériaux naturels ne permettent pas toujours de les utiliser pour des applications particulières. Les progrès scientifiques rendent désormais possible l'élaboration de matériaux composites dont les caractéristiques sont optimisées en fonction de l'application finale visée. Les composites sont obtenus par assemblage d'au moins deux matériaux : l'un appelé renfort constitue l'ossature le plus souvent sous forme fibreuse qui assure la tenue mécanique, l'autre appelé matrice est un liant qui assure la cohésion de la structure et la transmission des efforts vers le renfort. Du fait de leur bonne tenue mécanique et de leur faible masse volumique, les composites sont largement utilisés, notamment dans l'industrie aéronautique et spatiale.

Deux grandes problématiques peuvent être associées à l'utilisation des matériaux composites. Premièrement, la diversité de leurs domaines d'application les expose à une grande variété de modes de sollicitation et d'endommagement. Deuxièmement, le choix d'un composite pour une application particulière nécessite d'avoir une bonne connaissance de ses propriétés. Dès lors, l'évaluation de ces propriétés présente un grand intérêt.

Ces deux problématiques se déclinent en des variantes multiples, suivant le type d'endommagement à détecter (délaminage, fissure, etc.) ou la nature de la propriété à évaluer (mécanique, thermique, etc.). En conséquence, le développement de nouvelles théories ou de méthode de calcul et contrôle s'avère nécessaire pour répondre efficacement à la diversité des situations.

Les plaques stratifiées en matériaux composites sont largement utilisées dans l'industrie et dans les nouveaux champs de technologie. À cause de hauts degrés d'anisotropie et de basse rigidité en cisaillement transversal, (Hypothèse de Kirchhoff). La théorie classique de stratifié n'est plus adéquate. L'hypothèse ne déclare que la normale transversale au plan moyenne d'une plaque reste droit et normale après la déformation, l'effet de cisaillement transversal négligeable. Les théories raffinées basé en enlèvement de ces termes de normaux transversal qui ont été utilisées récemment.

Parmi les phénomènes physiques qui agissent sur les structures pendant leur durée de vie le phénomène des vibrations et les conditions d'environnement. Donc le comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites soumis à des vibrations libres mérite bien d'être étudiées puisque aucune des solutions exactes obtenues ne couvre pas tous les états de frontières possibles, les facteurs géométriques, différents types des matériaux, les effets de déformation de cisaillement et l'effet thermique sur les fréquences de vibration. Par conséquent, cette insuffisance des informations nous a permis d'investir dans ce domaine.

De plus, Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le génie civil. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réalistes de fondation est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques.

Les chercheurs ont proposé divers modèles de base pour décrire les interactions structures-bases (sol), Le modèle de la fondation élastique le plus simple est le modèle de Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre ressorts, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak [Pasternak, 1954] qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak a été largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases).

En conséquence, les fréquences de vibration libre des plaques composites, calculé par l'utilisation la théorie classique de plaque mince sont plus élevés que ceux obtenus par la théorie de plaque Mindlin [Mindlin, 1951], dans lequel l'influence du cisaillement transversal n'est pas négligée.

Un certain nombre des théories de déformations de cisaillement ont été proposées à ce jour. Le premier est la théorie de plaques stratifiées isotropes est apparemment dû à [Stavski, 1965]. La théorie a été généralisée pour plaques stratifiés anisotropes par [Yang et al, 1966]. Ils ont été montré [Srinivas et Rao, 1970 ; Whitney et Sun, 1973 ; Bert, 1974] que le Yang-

Norris - Stavski (YNS) théorie est suffisant pour prédire la réponse aux vibrations et aux flexions de plaques stratifiés anisotropes dans les premiers modes.

[Whitney et Pagano, 1970] ont utilisé la théorie YNS pour étudier la flexion cylindrique de structure stratifiée antisymétriques à plis croisés et équilibrés sous chargement sinusoïdal et la vibration libre des plaques antisymétriques équilibrés [voir aussi Fortier et Rossettos, 1973 ; Shinha et Rath, 1975].

[Bert et Chen, 1978] ont présenté par l'utilisant de la théorie YNS, une solution de forme fermée pour la vibration libre de plaques stratifiés rectangulaires antisymétriques équilibré simplement appuyée.

[Noor, 1973] a également présenté des solutions exactes de l'élasticité tridimensionnelle pour la vibration libre des plaques composites stratifiés isotropes, orthotropes et anisotropes qui sert de solutions de référence pour la comparaison par de nombreux chercheurs.

[Reddy, 1979] présent une analyse de la vibration libre des plaques stratifiée antisymétriques équilibré en admet l'effet de déformation transversale de cisaillement par la méthode des éléments finis. Il a également tiré un ensemble d'équations d'équilibre variationnellement cohérentes pour les modèles cinématiques initialement proposées par Levinson et Murthy[Reddy, 1984].

[Reddy et Khdeir, 1989] ont présenté des solutions analytiques et d'éléments finis pour prédire le comportement de la vibration et de flambement des plaques stratifiés composites en utilisant diverses théories pour prouver la nécessité de théories de déformation de cisaillement.

[Shankara et Iyengar, 1996] a également présenté, une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour l'étude la réponse des vibrations libre de plaques composites stratifiés en utilisant la méthode d'éléments finis.

[Khdeir et Reddy, 1999] ont obtenu un ensemble complet d'équations linéaires de la théorie du second ordre pour analyser le comportement de vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés et équilibré.

[Singh et al. 2001] ont présenté des fréquences naturelles de plaques composites avec des propriétés des matériaux aléatoires utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

[Rastgaar et al. 2006] ont présenté des fréquences naturelles de plaques composites stratifiées utilisant la théorie troisième ordre de déformation de cisaillement.

Dans une étude, [Şimşek, 2010^a] a étudié les déviations dynamiques et les contraintes d'une poutre fonctionnellement graduées et simplement appuyée soumis à une masse en mouvement à l'aide d'Euler- Bernoulli, Timochenko et la théorie de déformation de cisaillement parabolique des poutres.

[Şimşek, 2010^b] a étudié la vibration libre de poutres fonctionnellement graduées ayant différentes conditions aux limites en utilisant la théorie classique, la théorie premier ordre et les différentes théories de déformation de cisaillement des poutres d'ordre supérieur. Analyse du contraintes d'une plaque fonctionnellement graduées due à des charges thermiques et mécaniques a été donnée par [Matsunaga, 2009] à l'aide d'une théorie d'ordre supérieur à deux dimensions.

[Mantari et al, 2012] est développé Une nouvelle théorie de cisaillement de déformation trigonométrique pour des plaques isotropes, stratifiées et plaque sandwiches, où le déplacement de la surface moyenne développé comme une fonction tangentielles trigonométriques de coordonnées de l'épaisseur et le déplacement transversal considérées constantes a travers l'épaisseur.

La plupart des théories ci-dessus sont appelés modèles monocouche équivalentes (ESLMs) et ils ont été appliquées à une variété de problèmes mécaniques liés aux plaques et coques composites. Cependant, ces théories ne remplissent pas les conditions de continuité de la contrainte de cisaillement transversale au niveau des interfaces de couche.

Bien que les théories d'approximation de couche discrètes sont exacts, mais ils sont assez complexes à résoudre les problèmes parce que l'ordre de leurs équations régissant dépend du nombre de couches. Dans les théories de l'approche par couche, des composants de déplacement sont continus à travers l'épaisseur du stratifié, mais les dérivés des déplacements direction de l'épaisseur peut être discontinu en différents points à travers l'épaisseur,

permettant ainsi la possibilité de contraintes transversales continues au niveau des interfaces de la couche de séparation de matériaux dissemblables [Reddy, 1993; Reddy et Robbins, 1994]. [Barbero et Reddy 1990] ont développé des solutions analytiques pour les déplacements et les contraintes dans les stratifiés composite en utilisant une théorie de l'approche par couche.

[Lee et Saravanos, 1997] ont étudié les structures de plaques intelligent thermo-piézo-électrique utilisant un généralisées mécanique couche discrète.

[Carrera, 2003] a présenté un aperçu historique des théories zigzag de plaques et coques multicouches.

[Cho et Oh, 2004] ont développé une théorie zigzag d'ordre élevée du plaque raffiné pour la prédiction des comportements mécaniques, thermiques et électriques entièrement couplés.

[Gherlone et Di Sciuva, 2007] ont présenté un élément fini de plaque mixte employons un modèle zigzag de la plaque raffiné pour l'analyse de plaques composites multicouches soumis à des charges thermiques et mécaniques.

Récemment, [El Meiche et al. 2011] ont élaboré une nouvelle théorie de la plaque pour étudier le flambage et la vibration de plaques sandwichs fonctionnellement graduées. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux sont constitués d'éléments de flexion et de cisaillement dans laquelle les composants de flexion ne contribuent pas aux forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas aux moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une fonction hyperbolique à travers l'épaisseur de la plaque, de sorte que représentent les distributions paraboliques de contraintes de cisaillement transversaux et satisfont la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. En outre, il contient quatre variables indépendantes que contre cinq dans d'autres théories de déformation de cisaillement. En utilisant les mêmes hypothèses sur le champ de déplacement, [Vo et Thai, 2012] ont étudié la vibration et les comportements de flambage de poutres composites. Un élément poutre à deux nœuds C1 avec cinq degrés de liberté (DOF) par nœud qui représente les effets de déformation de cisaillement et tout couplage provenant de l'anisotropie de matériau est élaboré pour résoudre le problème.

Dans ce document, la nouvelle théorie de la plaque développée par [El Meiche et al. 2011] est étendue pour la première fois au comportement de vibration libre de plaques composites stratifiées basée sur fondation élastique. La fondation élastique est modélisée comme fondation Pasternak à deux paramètres. Les équations du mouvement sont calculées en utilisant le principe de Hamilton. Les Fréquences fondamentales se trouvent en résolvant une équation aux valeurs propres. Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés à des solutions provenant des autres modèles et de la littérature, et jugés en bon accord.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette dynamique en développant une nouvelle théorie des plaques à quatre variables pour étudier la vibration libre des plaques composites stratifiés isotropes et anisotropes basé sur une fondation élastiques.

La thèse débute par une introduction générale, structuré ensuite autour de cinq chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives. Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en donnant une représentation assez large des principaux constituants.

L'objectif de deuxième chapitre est de présenter les matériaux composites structuraux et les principaux mécanismes d'endommagement qui se produisent au sein d'un matériau composite stratifié et nous présente aussi les lois du mélange et les lois de comportement de matériaux composites.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons la théorie des plaques stratifiées, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons des différentes théories des plaques composites correspondantes.

Le quatrième chapitre est consacré à une étude analytique du comportement vibratoire des plaques stratifiées simplement appuyées se reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak, sont examinées par une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à quatre variables et une nouvelle fonction de forme. Cette fonction remplit exactement les conditions de frontières d'efforts sur les deux extrémités, supérieure et inférieure, de la plaque.

Le cinquième chapitre est consisté à valider le modèle en vue de garantir que le model est fiables et précises sur les plaques stratifiées croisés antisymétriques basé sur une fondation élastique afin d'étudier l'influence de ce dernier sur les fréquences propres.

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale permettant de souligner l'efficacité de la méthode utilisée dans les calculs des matériaux composites et des perspectives envisagées à l'avenir.

Chapitre I

*Généralités sur les
matériaux composites*

Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Un matériau composite est défini comme étant un assemblage d'au moins deux constituants non miscibles, mais ayant une forte capacité d'adaptation. Les qualités respectives des constituants associés se complètent pour former un matériau aux performances mécaniques, thermiques, électriques et/ou physico-chimiques améliorées. Le développement des matériaux composites ayant une ou plusieurs de ces propriétés particulières répond généralement à un besoin spécifique. Il est ainsi possible de créer des matériaux hétérogènes permettant par exemple, de réduire la masse d'une pièce, tout en améliorant ses propriétés mécaniques, grâce à l'association d'un renfort fibreux et d'une résine organique. L'adaptabilité de ce matériau en fait un atout incontestable qui explique son utilisation de plus en plus répandue, notamment dans l'industrie du transport (aérien, maritime et ferroviaire), des sports et loisirs, et dans l'industrie du bâtiment.

Le matériau composite est constitué d'un renfort, qui contribue aux propriétés mécaniques de la pièce, et d'un liant, appelé matrice. Le rôle de la matrice est d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort, mais aussi de transférer les flux d'efforts entre les plis, de garantir la tenue à l'environnement (corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température. Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites qui peuvent être classés suivant différents critères, La nature de la matrice est un de ces critères qui permet de répartir les composites en trois grandes familles :

- Les Composites à Matrices Organiques, telles que les polymères organiques (résine thermodurcissable ou thermoplastique) ;
- Les Composites à Matrices Céramiques, réservés aux applications à haute température ;
- Les Composites à Matrice Métallique.

Ces matériaux peuvent aussi être classés selon la nature du renfort, détaillée ci-après ou selon l'objectif recherché via leurs utilisations. Si l'optimisation des coûts est le principal

objectif, on parlera de composites ‘grande diffusion’. En revanche, pour une utilisation dans le but d’optimiser les performances mécaniques ou thermiques, liées à une réduction de poids, on parlera de composite ‘hautes performances’. Outre ces deux constituants de base, on trouve également l’interface, La charge et l’additif spécifique Voir **Fig. I.1**.

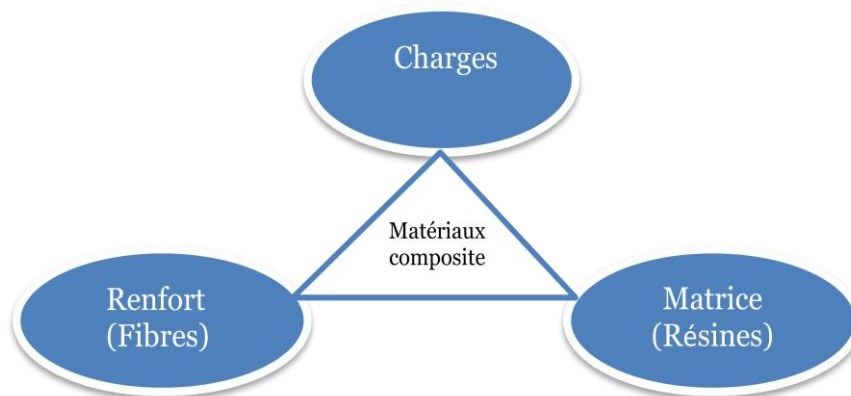


Fig. I.1 : les constituants de base Des composites.

I.2. Les Principaux constituants de base d’un matériau composite :

Nous avons vu qu’un matériau composite est essentiellement constitué d’une matrice et d’un renfort. Le choix de ces deux constituants obéit aux exigences et contraintes de service (caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, résistance à la corrosion, etc.) tout en s’assurant de la compatibilité entre les éléments associés. A cet effet, les matrices organiques constituées de résines polymères associées à différentes charges et additifs sont celles qui offrent le plus de flexibilité du point de vue développement (synthèse de nouvelles résines) et conception (compatibilité avec différents renforts grâce à leur déformabilité et à la diversité de leurs compositions et propriétés mécaniques). De plus la légèreté, le faible coût de fabrication et la facilité de mise en œuvre de ce type de résines font des composites à matrices organiques la principale catégorie de composites utilisés dans l’industrie. Le terme renfort se réduit aux fibres dans leurs différentes présentations (particules, courtes, longues, tissus, etc.).

I.2.1. Les renforts :

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite (comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc.). Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique..) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales.

Le renfort du matériau composite est le constituant qui va supporter la plus grosse partie des efforts mécaniques. Il peut se présenter sous différentes formes [Chrétien, 1986] (*Figure I.2*) :

- particulaire, charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écaillés ou de poudre micro ou nano particulaire,
- fibres courtes, pour les renforts surfaciques non texturés tel que le mat,
- fibres continues pour les renforts texturés tels que les tissus (taffetas, sergé et satin,...), ou les renforts unidirectionnels tels que les nappes.

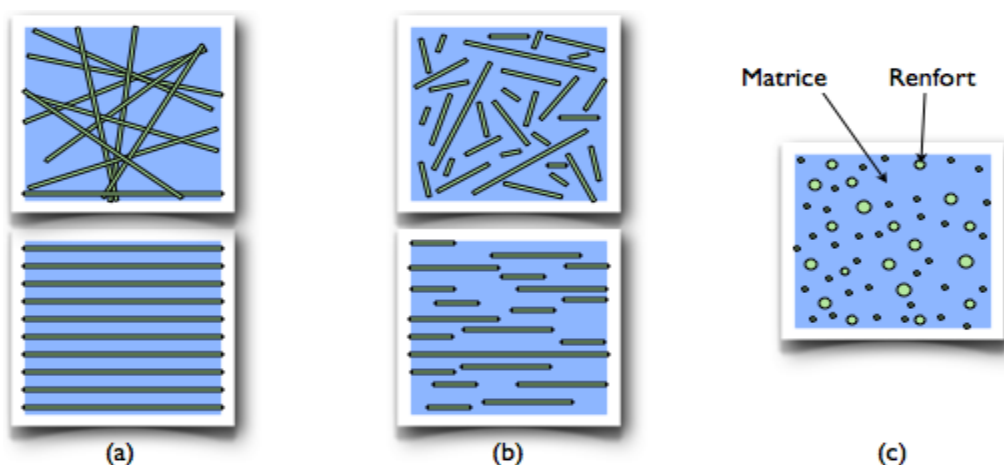


Figure I.2 : Les différents types de composites.

a) fibres continues, b) fibres courtes, c) particulaire

Il existe des architectures fibreuses complexes multidirectionnelles 2D, 3D. Le type de tissu est choisi en fonction de sa drapabilité, c'est à dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi est surtout choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce.

Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

I.2.1.1.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre qui sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (bâtiment, nautisme et autres applications non structurales aéronautiques). Leur fabrication se fait en général par étirage décrit par la figure 1-2.elles sont obtenues à partir des oxydes minéraux constituant la matière première silice et d'additifs (silice, alumine etc...). Le verre est coulé en fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, le verre en phase plastique est simultanément étiré à grand vitesse et refroidi. Les conditions de refroidissement et de vitesse d'étirage permettent d'obtenir soit des filaments continus, soit des fibres discontinues, de diamètres déterminés, il existe deux procédés d'étirage, conduisant chacun à un type de fil déterminé.

- Étirage mécanique.
- Étirage pneumatique.

Les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités voir Tableau (I-1) :

Fibres *E* pour les composites grandes diffusions (GD) ;

Fibres *D* pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;

Fibres *R* pour les composites hautes performances (HP).

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de T° élevées.

Tableau (I-1) : Constituants des fibres de verre

constituants	Composition en masse (%)		
	Verre E	Verre D	Verre R
Silice SiO ₂	53 - 54	73 - 74	
Alumine Al ₂ O ₃	14 15,5		
Chaux CaO	20 - 24	0,5 – 0,6	
Magnésie MgO	20 - 24	0,5- 0,6	60
Oxyde de bore B ₂ O ₃	6,5 - 9		25
Fluor F	0 - 0,7	22-23	9
Oxyde de fer Fe ₂ O ₃	<1		6
Oxyde de titane TiO ₂	< 1	0,1-0,2	
Oxyde de sodium Na ₂ O	<1	1,3	
Oxyde de potassium K ₂ O	<1	1,5	

I.2.1.1.2. Ensimage des fibres de verre

Les filaments de verre issus de la filière ne peuvent pas utilisés directement pour diverses raisons :

- L'absence de cohésion entre les filaments, qui s'oppose à la constitution de fils;
- La sensibilité du verre à l'abrasion, conduisant à une détérioration lors des manipulations postérieures au fibrage;
- La sensibilité à attaque de l'eau;
- La création de charges électrostatiques consécutive aux divers frottements;

Pour remédier ces défauts, on réalise à la sortie de la filière une opération dit d'ensimage de composition complexe. A la lumière des défauts évoqués ci-avant, les diverses fonctions de l'ensimage sont :

- Établir une certaine cohésion entre les filaments;
- Donner une plus ou moins grande raideur aux fils;
- Protéger les filaments contre l'abrasion;
- Éviter l'apparition de charges électrostatiques;
- Faciliter L'immigration des filaments par la résine

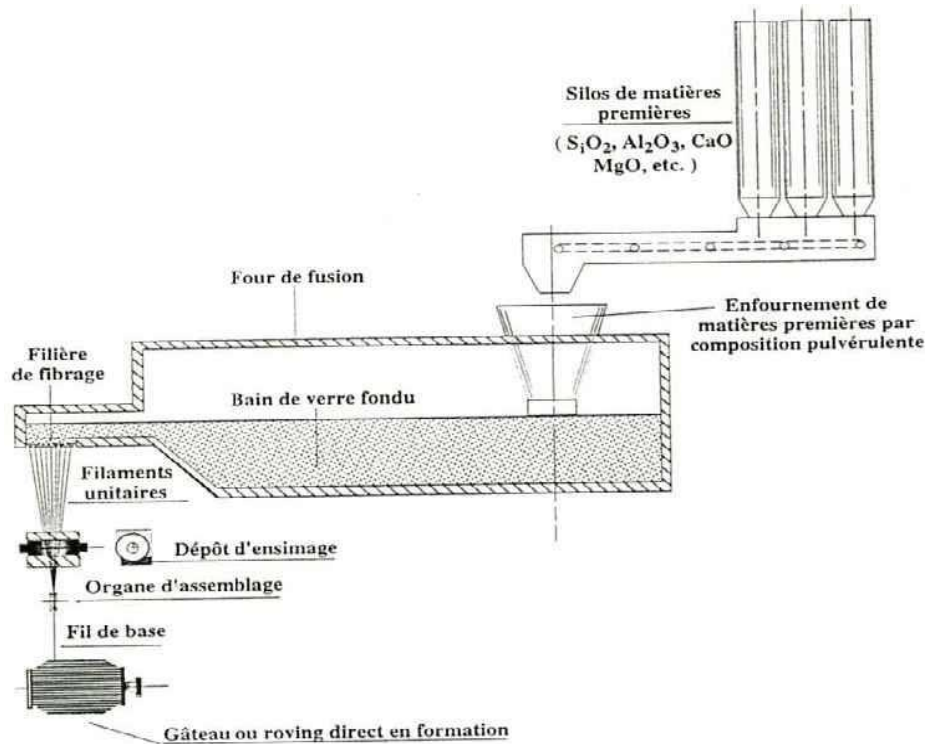


Figure 1.3 : Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre. [Billoët, 1993].

I.2.1.2. Les fibres de carbone

Les fibres de carbone qui sont utilisées pour des applications structurales. Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée (figure 1.4). Le plus utilisé de ces précurseurs est le Poly Acrylo Nitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300°C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500°C. Il ne subsiste alors que la structure lamellaire hexagonale 2-D d'atomes de carbone. Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de 7 µm de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) (5,5 µm de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de 3000°C, sous argon. Cette graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres.

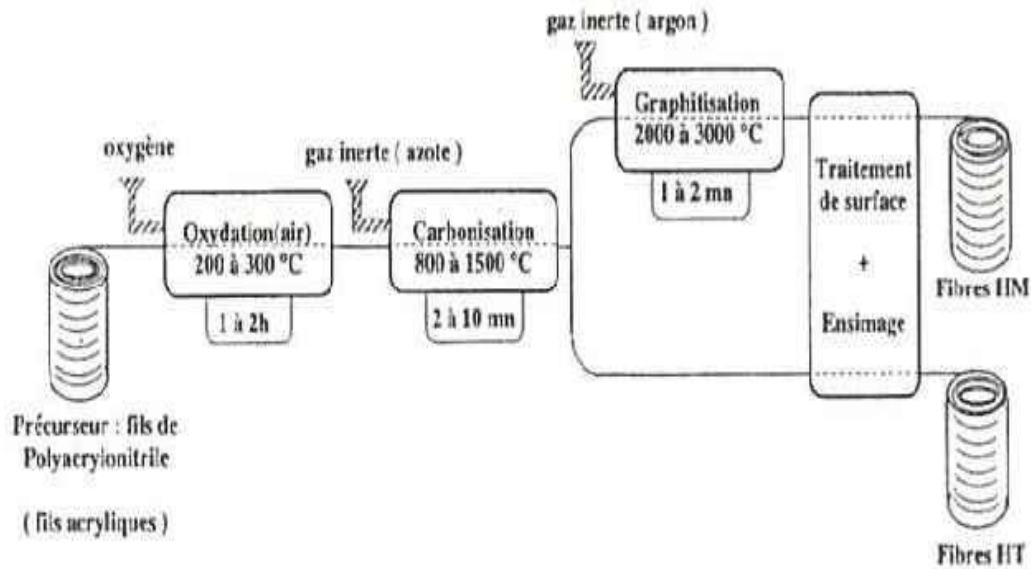


Figure 1.4 : Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN.

Les propriétés mécaniques de ces différentes fibres sont données par le **tableau 1.2**. De même que pour les filaments de verre, les filaments de carbone sont soumis à un traitement de surface (imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer les propriétés d'adhérence fibre/matrice. Ce traitement de surface est suivi par un procédé d'ensimage textilo-plastique qui facilite l'accrochage de la matrice organique, qui protège les fibres contre l'abrasion et qui favorise l'agglomération des filaments lors de la fabrication des mèches. Il est important de noter que les fibres de carbone sont sensibles à l'oxygène dès 400°C, et qu'elles présentent une mauvaise résistance aux chocs. Enfin, le prix de ces fibres reste relativement élevé mais il n'a cessé de diminuer avec l'augmentation des volumes de production.

Tableau 1.2 : Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (Fibres seules).

Type de fibre	Module Elastique E_l (GPa)	Contrainte à rupture σ_R (Mpa)	Exemple de fibre
Haute Résistance (HR)	$E_l < 265$	3500	P-30X (Cytec), F1
Module Intermédiaire (IM)	$265 < E_l < 320$	5600	P-55S (Cytec), F2
Haut Module (HM)	$320 < E_l < 440$	4400	M40J (Torayca)
Très Haut Module (THM)	$E_l > 440$	3900	P-75S (Cytec), M55J (Torayca)

I.2.1.3. Les fibres d'aramide :

Fibres d'aramide elles sont issues de la chimie organique des polyamides aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température; ses propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre,
- D'un prix encore trop élevé.

Les fibres d'aramide (plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar, Twaron, Technora, Nomex, etc...) [Billoët, 1993], [Chrétien, 1986], qui sont utilisées pour des applications bien plus ciblées, tel que la protection balistique (gilets pare-balles) ou pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1, par exemple.

I.2.1.4. Les fibres végétales (naturels) :

Les fibres végétales qui présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques car mises en œuvre à partir de produits naturels, elles pourront constituer une alternative intéressante aux fibres de verre en raison de leur plus grande facilité de recyclage lorsque leurs propriétés physiques seront mieux appréhendées. Actuellement, elles présentent plusieurs verrous techniques majeurs pour une utilisation massive dans les matériaux composites [Balay et al, 2004], [Billoët, 1993],

I.2.1.5 Caractéristiques mécaniques des fibres :

Le tableau (I-3) suivant représente diverse caractéristiques de diverse fibres.

Tableau (I-3) : Divers caractéristiques de diverses fibres.

Caractéristiques mécaniques	Verre		Carbone		Kevlar		Céramique	
	E	R	HR	HM	29	149	Al ₂ O ₃	Al ₂ O ₃ SiO ₂
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2600	2550	1450	1810	1440	1470	3400-3950	3100-3200
Diameter (μm)	10à20	/	5à7	5à7	12	12	8	/
Module d'Young Ef (GPa)	73	86	230	400	60	160	300-390	190-250
Contrainte à la rupture σ_{fu} (MPa)	3400	4400	3000- 4000	2800	3000	2400	1500-2000	2100-2200
Module spécifique Ef (MNm/kg)	28	/	130	210	42	110	90-100	60-80
Contraintes spécifiques σ_{fu}/ρ (kNm/kg)	1300	/	1710- 2290	1550	2080	1630	440-500	685

Note : Les renforts peuvent également s'arranger sous formes hybrides (Mélange de fils continus et les fils coupés) afin d'augmenter la résistance du composite. Les fibres les plus utilisées sont les fibres de carbone, fibres de verre et les fibres d'aramide. Selon les fibres utilisées, les composites sont classifiés en trois types:

- ❖ Fibres de verre renforcées de polymères (GFRP: Glass fiber reinforced polymer),
- ❖ Fibres de carbone renforcées de polymères (CFRP: Carbon fiber reinforced polymer),
- ❖ Fibres d'aramide renforcées de polymères (AFRP: Aramid-fiber-reinforced polymer).

L'utilisation d'une couche d'interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Les fibres destinées à la fabrication des composites reçoivent un apprêt spécifique comportant un agent collant qui permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure, en outre, une fonction de lubrification (pour le protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres).

I.2.2. Les matrice :

La matrice a pour principal objectif de transmettre les efforts mécaniques au renfort. Elle doit aussi assurer la protection du renfort vis à vis des diverses conditions environnementales (corrosion, oxydation, vieillissement humide...). Dans le cas des CMO, un très grand nombre de polymères peuvent être utilisés comme matrices. Ces résines synthétiques résultent de composés chimiques obtenus par réticulation d'une macromolécule (association de molécules appelées monomères), sous l'action de la chaleur et/ou d'un catalyseur. Trois catégories de ces matières plastiques peuvent cependant être distinguées :

- les polymères thermoplastiques (cristallins, semi-cristallins ou amorphes) ;
- les polymères thermodurcissables (amorphes) ;
- les élastomères (amorphes).

I.2.2.1. Les résines thermoplastiques :

Les résines thermoplastiques sont des polymères à chaînes linéaires ou ramifiées, c'est-à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. Les résines thermoplastiques présentent le gros avantage de pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui permet de faciliter leur moulage par viscoplasticité.

Cette transformation est par ailleurs réversible, ce qui permet de recycler ce matériau. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes, et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Renforcées avec des fibres courtes ou avec des fibres longues, l'utilisation de ces résines se développe fortement notamment comme matrice des composites "structuraux".

Parmi les résines thermoplastiques utilisées dans les composites aéronautiques on peut citer le polyéther-imide (PEI), le polyphénylsulfure (PPS), le polyéther-éther-cétone (PEEK), le polyéther-cétone-cétone (PEKK) qui sont présentées dans le tableau I.4.

Tableau I.4 : Caractéristiques des résines thermoplastiques.

Matrice TP	Masse volumique Kg/cm³	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
PPS	1,3	65	4000	100%
PEI	1,15	105	3300	60%
PEEK	1,3	90	4000	50%

I.2.2.2. Les résines thermodurcissables :

Qualifie un polymère ne pouvant être mis en œuvre qu'une seule fois et qui devient infusible et insoluble après polymérisation. Une fois durci, leur forme ne peut plus être modifiée. La polymérisation peut être engendrée par une montée en température (résines à chaud) ou de produits chimiques type catalyseurs (résines à froid). Après polymérisation et durcissement, une nouvelle montée en température ne permettra pas au produit de revenir dans son état initial (liquide).

Les résines thermodurcissables sont les produits les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux", Généralement associées avec des fibres longues.

Actuellement, les résines thermodurcissables principalement utilisées sont les suivantes :

- Les résines époxydes qui possèdent une Excellente adhérence sur fibres et de bonnes caractéristiques mécaniques. elles sont souvent utilisées avec un renfort en fibres de carbone pour la réalisation de pièces structurales aéronautiques.
- Les résines phénoliques sont les plus anciennes résines thermodurcissables, découvert an début du siècle en 1909 par BAEKELAND, dont le type le plus connu la « Bakélite », elles possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques et excellente tenue a la chaleur et au fluage et permet les inconvénients une résistance à la traction et une tenue aux chocs généralement faibles.
- Les résines polyimides sont surtout utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C). Elles restent toutefois très onéreuses et difficiles à mettre en œuvre, mais présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température.

En dépit de leurs bonnes tenues mécaniques, ces résines sont très sensibles aux chocs. Afin de pallier cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant avant polymérisation à des résines thermoplastiques.

Le tableau I.5 ci-dessous regroupe quelques caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

Matrices TD	Masse volumique (kg.m ⁻³)	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Module de cisaillement	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
	ρ	E	G	ν	s_r	A	a
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	10×10^{-5}
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	205	10^{-5}
Polyimide	1400	4000à19000	1100	0.35	70	1	8×10^{-5}

I.2.2.3. Les élastomères :

Les élastomères plus familièrement appelés « caoutchoucs », appartiennent à la grande famille des polymères, Les élastomères sont des polymères naturels ou synthétiques dont la structure particulière confère une importante élasticité (jusqu'à 500% d'allongement par rapport à la taille initiale). Elles sont aujourd'hui largement utilisés en tant que solutions antivibratoires pour des domaines très variés, tels que l'automobile, l'aéronautique, l'industrie, A titre d'exemple, nous pouvons citer les élastomères suivants : les silicones d'élastomères, les polyuréthanes, le néoprène, le latex, etc....

I.2.3. Charges et les additifs :

Enfin, des charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir d'avantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice (charges renforçant, ex : charges sphériques creuses 5 à 150 μ m). Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent *grosso modo* de la même façon que dans les plastiques "traditionnels". On peut par exemple rencontrer (Figure I.5) :

- Des micro-billes de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant ;
- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;

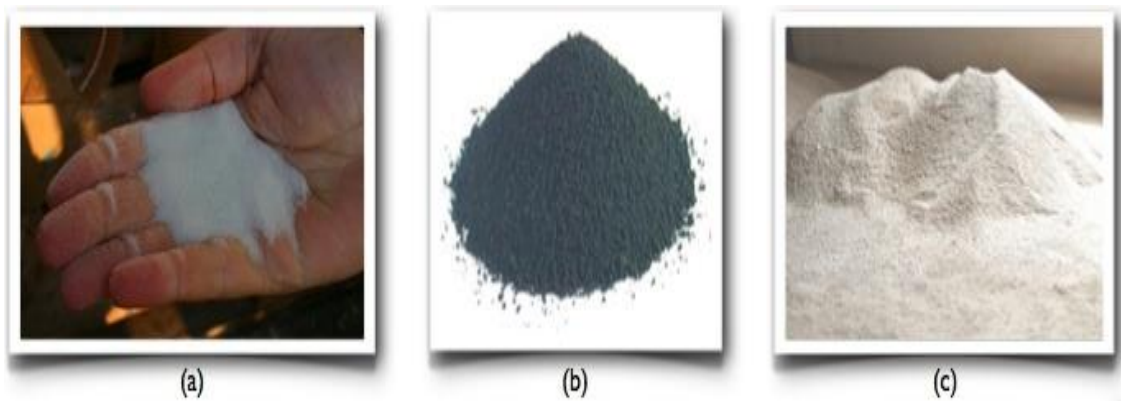


Figure I.5 : Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) micro-billes de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

Les **additifs** possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des *agents d'interface*, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice.

On rencontre également :

- des stabilisants, qui retardent les dégradations dues à l'oxygène, aux UV ou encore à l'ozone ;
- des ignifugeants ou retardateurs de flamme (la plupart des polymères sont inflammables) ;
- des agents de démoulage ;
- des colorants...

Il est ainsi possible de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite, et d'adapter finement ses propriétés aux besoins du concepteur.

La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- Quelques dizaines de % dans le cas de charges ;
- A quelques % et moins dans le cas d'additifs ;

I.2.4. L'interface fibre-matrice

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des *interfaces*, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue...

En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures; lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure I.6(a)), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure I.6(b)). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. L'interface joue donc le rôle de fusible et rend les composites plus ductiles et plus tenaces, c'est-à-dire plus résistants à la rupture, que leurs constituants élémentaires.

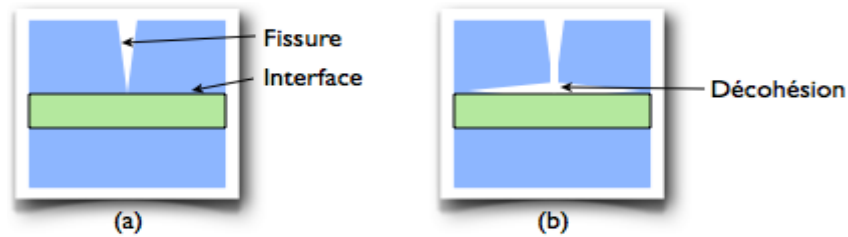


Figure I.6 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites : lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b).

Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants. Ce phénomène, allié au faible taux de défauts permet d'expliquer un paradoxe. Les composites à base de fibres de verre longues, par exemple, sont bien plus résistants que le verre massif, alors que leurs propriétés mécaniques proviennent essentiellement des fibres de verre, Ceci illustre un aspect fondamental des composites grâce à leur structure et leur géométrie, ils possèdent des propriétés que leurs constituants seuls n'ont pas, ou dit autrement, ils ont un comportement différent de celui qu'auraient leurs constituants pris isolément.

Ainsi, certains composites à fibres et à matrices céramiques ont un comportement ductile, alors qu'il est bien connu que les céramiques ont des comportements fragiles...

La figure I.7 ci-dessous regroupe quelques différents types des constituants de base de matériaux composites.

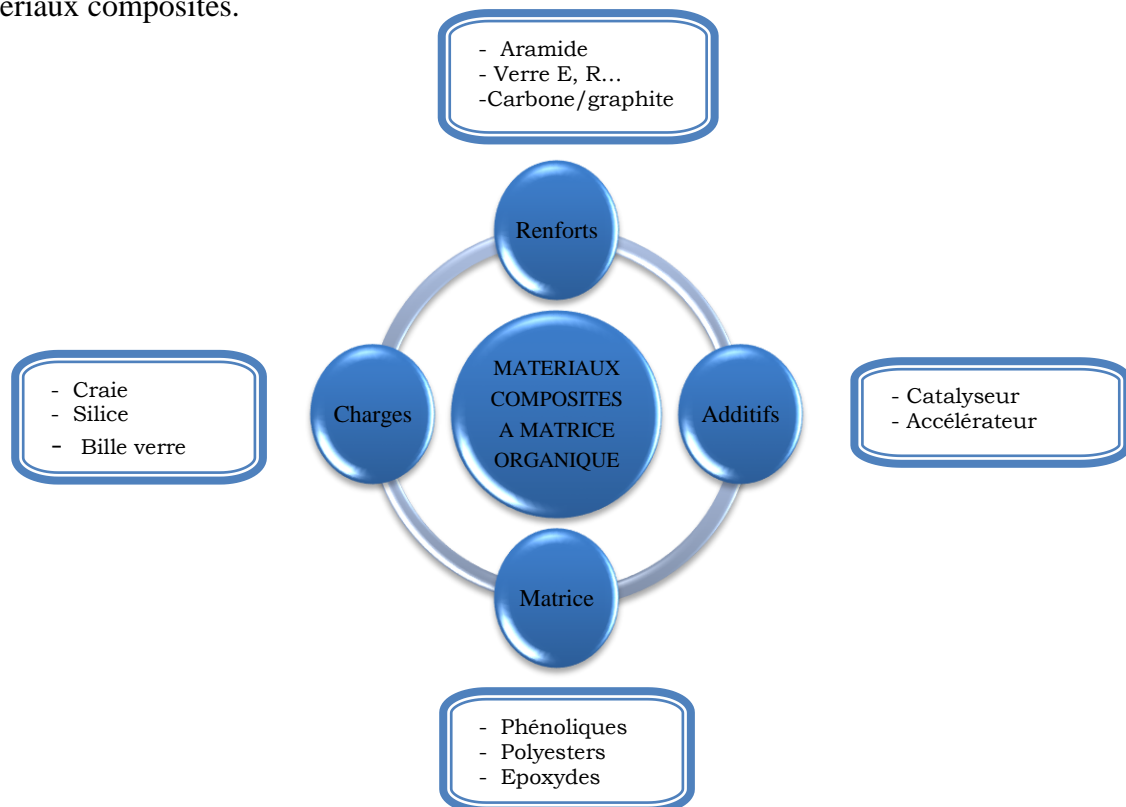


Fig I.7 : Les différents types des constituants de base

I.3. Applications commerciales et industrielles des matériaux composites :

Les polymères se retrouvent dans d'innombrables objets et structures de notre quotidien. Les thermodurcissables sont principalement utilisés dans la construction alors que le tiers du volume des thermoplastiques est destiné à l'emballage (fig. I.8a) environ 5% de ces polymères sont utilisée sous la forme de matrice dans des matériaux composites. Les principaux domaines d'application des composites sont Les transports aérien, maritime, routier, ferroviaire, la construction et l'électronique alors que le sports et loisirs consomment environ 6% du volume total des composites (fig. I.8b). Si depuis le milieu des années 1990, l'aviation et le militaire ne sont plus, relativement aux autres, les marchés principaux des composites, la construction, l'électronique et le transport sont en pleine évolution.

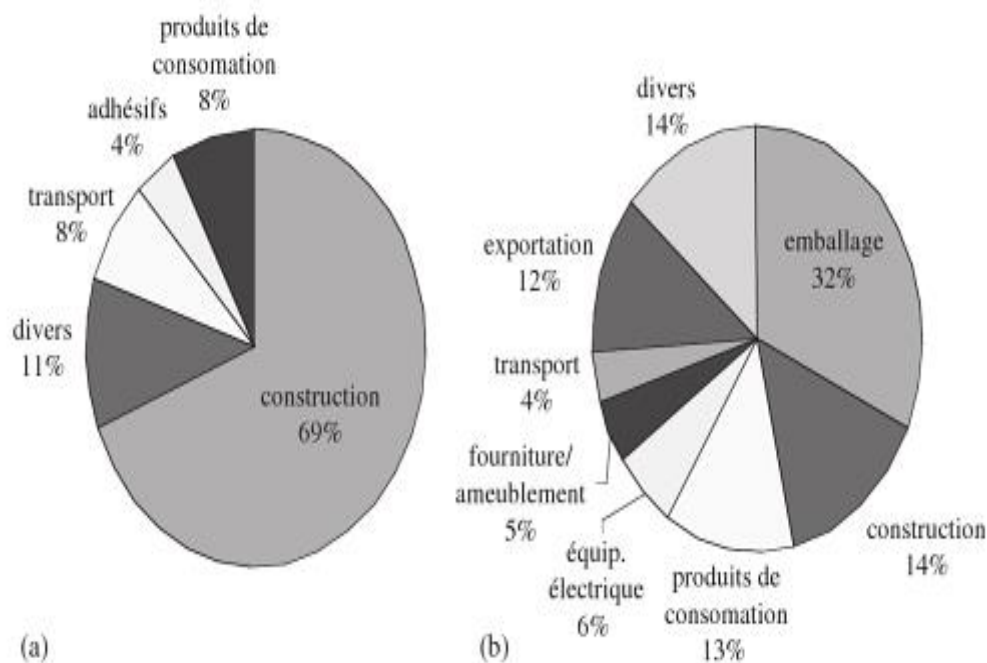


Fig. I.8a : Répartition des polymères thermodurcissables (a) et thermoplastique (b) dans leurs différents domaines d'applications.

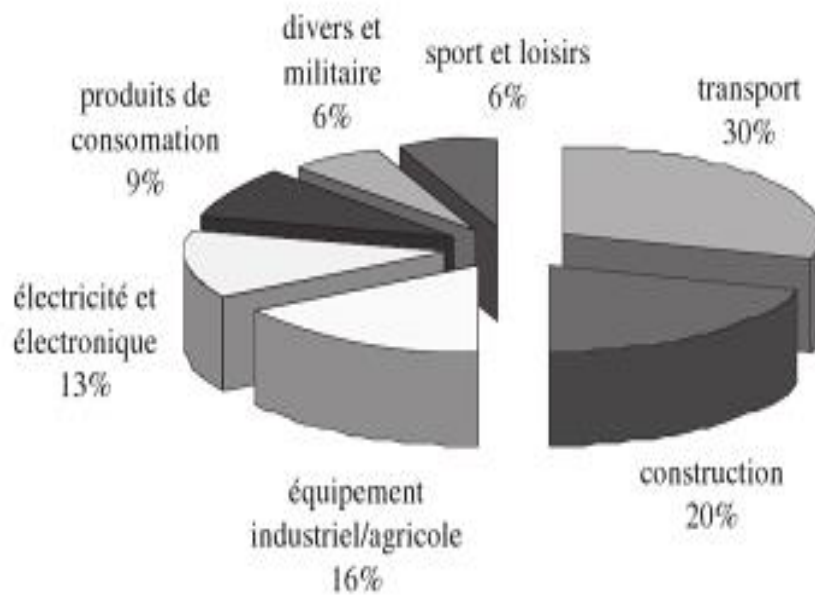


Fig. I.8b : Répartition des composites à matrice organique dans leur domaines d'applications.

I.4. Avantages et inconvénients des matériaux composites :

Le principal intérêt de l'utilisation des Composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques telle que :

- Ils sont beaucoup plus légers.
- Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques...
- Ils offrent de grandes possibilités de créer de pièces complexes.
- Grande résistance à la fatigue.
- Bonne conductibilité thermique et électrique.
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bonne tenue à l'humidité
- bonne tenue au feu ;

Au titre des inconvénients :

- Ils sont beaucoup plus Sensibilité à tous les impacts ;
- Coût élevée (temps, étude et mise en œuvre) ;
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.
- La détection des ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.

I.5. Conclusion :

En combinant des matériaux de divers types, on réalise des matériaux composites qui sont dotés d'un ensemble de propriétés physiques et mécaniques que ne possède pas chacun des constituants pris séparément.

Dans ce chapitre, nous avons fait une étude bibliographique aux matériaux composites, nous sommes surtout limités aux matériaux composites fibreux à matrice organique qui constituent un domaine en pleine expansion. Afin de donner un aperçu général des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Les technologies avancées exigent en effet des matériaux combinant à la fois légèreté et propriété mécaniques élevées. Ces caractéristiques sont difficilement accessibles aux matériaux simples.

Chapitre II

Structure et propriétés des matériaux composites

Structure et propriétés des matériaux composites

II.1. Introduction

Les matériaux composites permettent d'atteindre des niveaux de performances inégalés. En effet, ils possèdent une structure géométrique spécialement conçue pour leur conférer des propriétés que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettre de remplir de nombreuses fonctions techniques. Pour tirer le meilleur parti de leurs capacités, les composites sont généralement conçus en même temps que les pièces qu'ils constituent. La frontière entre le produit et le matériau est donc plus floue qu'avec les matériaux traditionnels, ce qui implique de profonds changements dans la conception des produits industriels.

II.2. Architecture des fibres

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent des performances médiocres en compression et en cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

En effet, le principal intérêt de ces fibres est la possibilité de choisir leur orientation, ce qui permet de renforcer la pièce dans les directions selon lesquelles elle est la plus sollicitée. Cependant, les fibres étant de diamètre microscopique (quelques microns), il n'est naturellement pas envisageable de les disposer une à une. Elles sont donc fournies sous la forme de semi-produits pouvant être de plusieurs types :

- soit des plis ou nappes, pouvant être unidirectionnels (toutes les fibres sont parallèles, Figure *II-1* (a)) ou mats (les fibres sont disposées "en vrac" dans toutes les directions du plan) ; ces plis sont alors fournis en rouleaux ;
- soit des fils, formés de nombreuses fibres tressées entre elles, et fournis en bobines (Figure *II-1* (b)) ;
- soit des tissus plans préfabriqués à l'aide de ces fils, et fournis en rouleaux (Figure *II-1* (c)).

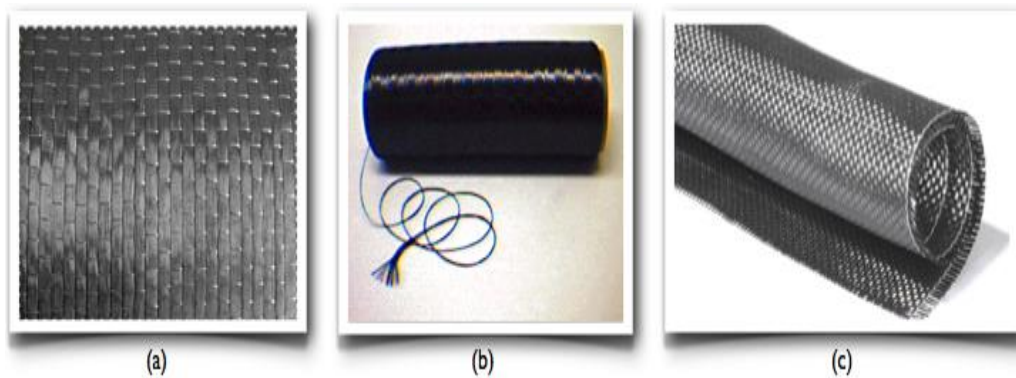


Figure II-1 : Fibres longues de carbone : (a) en rouleaux unidirectionnels (les fils de trame blancs ne sont là que pour maintenir les fibres parallèles), (b) en bobines de fils (on distingue les fibres à l'extrémité du fil), (c) en rouleaux de tissu 2D équilibré

En outre, pour mettre en forme certains composites (et notamment les composites à matrice céramique), il est nécessaire de réaliser des préformes fibreuses, c'est-à-dire des tissus tridimensionnels ayant la forme de la pièce, au sein desquels on déposera ensuite la matrice **Figure II-2**.

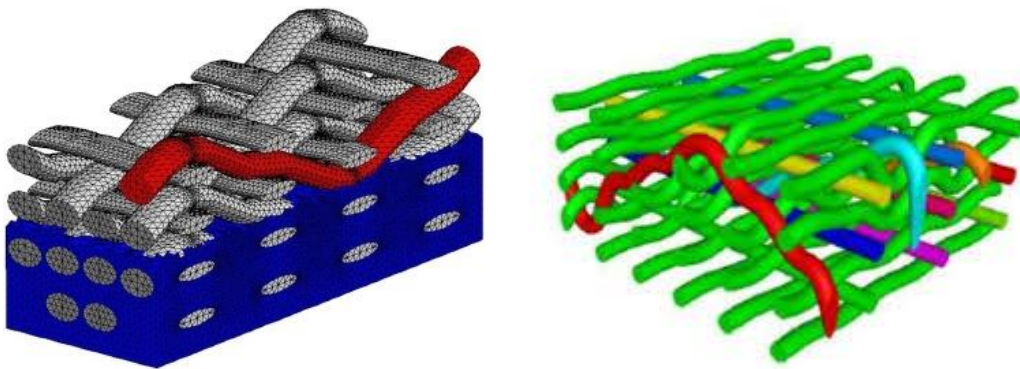


Figure II-2 : Fibres longues tissu 3D

Dans les composites à fibres, les fibres (renfort) sont enrobées dans un composant (matrice). Les fibres peuvent être disposées parallèlement les unes aux autres selon un angle pré défini ou de façon aléatoire. Un matériau composite est constitué de différentes phases appelées renfort et matrice.

Les structuraux peuvent être monocouche, stratifiés (empilement de monocouche) ou de structure sandwich (3 couches dont deux couches externes identiques).

II.2.1. Matériaux composites monocouches :

Les matériaux composites monocouches sont caractérisés par Architecture des fibres (figure II.3). En distingue les matériaux composites à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. L'empilement des matériaux composites monocouches dans une direction permet d'obtenir une structure composite stratifiée. On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise.

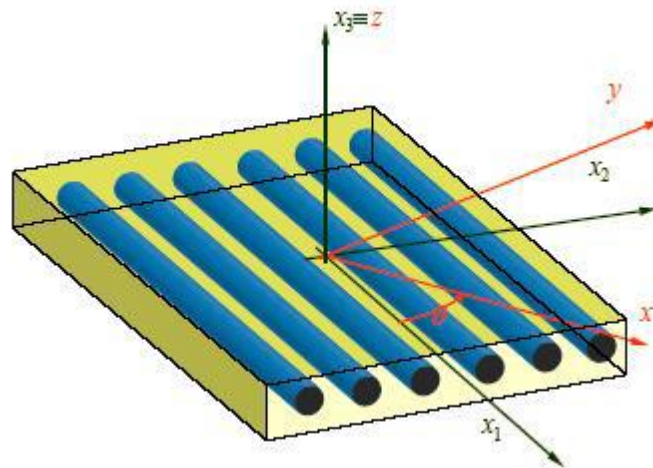


Figure II.3 : Matériaux composite monocouche.

II.2.2. Matériaux composites stratifiés :

Les stratifiés sont constitués d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désignée comme le référentiel du stratifié. Le choix des empilements et plus précisément des orientations permettent d'obtenir des propriétés mécaniques spécifiques.

Dans le cas générale, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibre de verre, fibres de carbone, etc. chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé (Figure II-4):

- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées.
- Une stratification croisée au délaminage inter-laminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plans du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

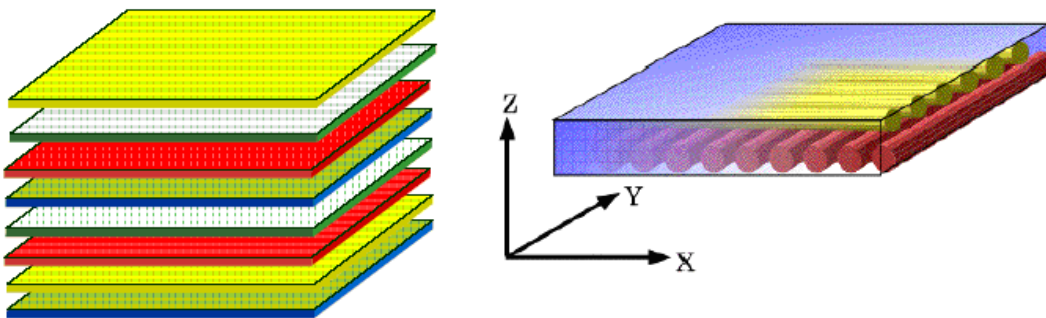


Figure II-4 : Matériau composite stratifié.

II.2.3. Désignation d'un matériau composite stratifié

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant (figure II-5).

Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe X de référence ;

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique ;
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre ;

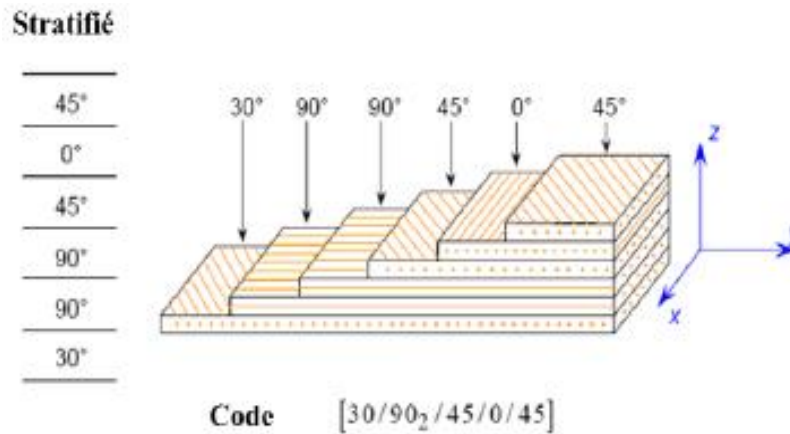


Figure II-5 : désignation d'un stratifié

Nous examinons les divers types de stratifiés

II.2.3.1. matériau composite stratifié avec angles positifs et négatifs

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues mais de signes opposés, les signes + ou - sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (Figure. II-6)

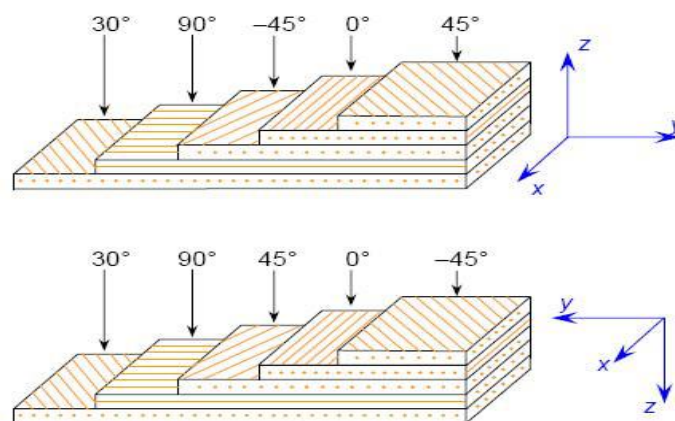


Figure (II-6) : Convention de signe pour la désignation des stratifiés

II.2.3.2. Matériau composite stratifié symétriques :

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

- Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique ($[90 / 45_2 / 0]_s$).
- Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédent, la couche centrale étant surlignée ($[90 / 45_2 / \bar{0}]_s$). Pour un stratifié à deux couches symétriques on a :

- La même matrice de rigidité $(Q_{ij})_k$;
- La même épaisseur h_k ;
- Des côtes opposées z_k et $-z_k$;

II.2.3.3. Matériau composite stratifié antisymétriquement :

Une stratifié antisymétrique est constituée de couche en nombre impair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes antisymétriques par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- Des cotes opposées z_k et $-z_k$.
- La même épaisseur h_k ;
- Des orientations θ et $-\theta$ par rapport aux axes de référence de plaque stratifiée.

II.2.3.3. Matériau composite stratifié équilibré :

Stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientée suivant la direction $+\theta$.

II.2.3.4. Matériau composite stratifié orthogonal :

Stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

II.2.3.5. Matériau composite stratifié hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différents. Il sera nécessaire de les mentionner dans la désignation ($[0_v / \pm 45_c / 90_c]_s$).

Les matériaux hybrides sont réalisés pour diverses :

- Obtenir un matériau composite ayant de meilleures propriétés que celles de chacun des composants séparés,
- Obtenir un matériau composite répondant aux caractéristiques mécaniques attendues à un prix raisonnable,
- Obtenir des effets esthétiques agréables résultant du mélange des fibres utilisées

II.2.4. Composites sandwichs :

Les matériaux composites sandwichs résultent, de l'association de deux peaux, de faibles épaisseurs, constituées de matériaux de haute résistance et haut module, et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible masse volumique (figure II.7). Ces structures complexes offrent de grandes potentialités aux concepteurs dans des domaines très divers. On peut d'abord songer à des applications structurales classiques pour lesquelles il faut allier légèreté et rigidité, comme l'industrie aérospatiale, ou généralement le transport. Leur résistance à la corrosion, quand les divers constituants ne sont pas métalliques ont fait des matériaux sandwichs des matériaux de choix pour la construction navale. Ces matériaux sont employés comme structures primaires dans le cas des petites et moyennes unités. L'usage des sandwichs se répand aussi dans l'industrie du bâtiment et cette fois, se sont leurs excellentes caractéristiques d'isolation thermique et acoustique qui sont considérées. Il se comporte mécaniquement comme une poutre en I et possède une grande résistance en flexion due à l'écartement des peaux. En revanche, il connaît certains inconvénients :

- Un risque de flambement.
- Une tenue thermique variable suivant les natures des composants.

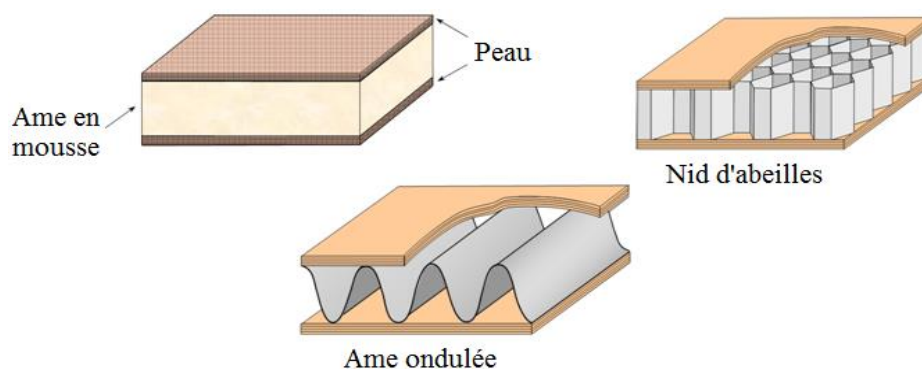


Figure II.7 : Structure composite sandwich.

II.3. Loi de mélange :

Les composites, mélanges de matériaux aux propriétés souvent très différentes, permettent de réaliser de remarquables compromis entre les propriétés de matériaux rigides mais fragiles et de matériaux ductiles mais trop souples.

Lorsqu'on mélange deux matériaux de masses volumiques différentes, la masse volumique du composite est la moyenne des masses volumiques pondérée par la fraction volumique des constituants. Il n'en va pas de même des propriétés de conduction thermique ou d'élasticité car ces propriétés physiques ne sont pas représentées par des scalaires mais par des tenseurs d'ordre 2 et 4 respectivement. L'objectif du problème est de montrer que la loi de mélange des propriétés élastiques dépend de l'arrangement dans l'espace des différents constituants du composite. Cette propriété essentielle est illustrée dans le cas de deux morphologies typiques de composites biphasés, à savoir les composites stratifiés et les composites à fibres longues unidirectionnelles. Dans la pratique, le choix d'arrangements judicieux permet d'ailleurs d'optimiser les propriétés des mélanges de matériaux.

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre, il vient alors:

E_L en sens longitudinal :

$$E_L = V_m E_m + V_f E_f \quad (\text{II-1})$$

E_T en sens transversal :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (\text{II-2})$$

V_m : Fraction volumique de matrice

V_f : Fraction volumique de fibre

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (\text{II-3})$$

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et ν_f .

Matrice: comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients E_m et ν_m .

Lors d'une traction en sens longitudinal, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = V_m \varepsilon_{Tm} + V_f \varepsilon_{Tf} \quad (\text{II-4})$$

Chacune des déformations latérales ε_{Tm} et ε_{Tf} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{Tf} = \nu_{LTf} \varepsilon_L$ et $\varepsilon_{Tm} = \nu_{LTm} \varepsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = V_m \nu_m + V_f \nu_f \quad (\text{II-5})$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (\text{II-6})$$

On suppose que les dilatations longitudinales des fibres et de la matrice sont identiques, c'est à dire que l'on a :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m \quad (\text{II-7})$$

La différence des contraintes longitudinales thermiques pour le coefficient de dilatation des fibres α_f et de la matrice α_m ne sont pas nulles.

Les contraintes longitudinales dans les fibres et dans la matrice sont :

$$\sigma_1^f = E_f (\varepsilon_1 - \alpha_f \Delta T) \quad (\text{II-8})$$

$$\sigma_1^m = E_m (\varepsilon_1 - \alpha_m \Delta T) \quad (\text{II-9})$$

La résultante des efforts de traction, étant nulle, on a la relation :

$$V_f \sigma_1^f + V_m \sigma_1^m = 0 \quad (\text{II-10})$$

En reportant dans cette relation les valeurs des contraintes σ_1^f et σ_1^m on obtient :

$$(V_m E_m + V_f E_f) \varepsilon_1 = (V_m \alpha_m E_m + V_f \alpha_f E_f) \Delta T \quad (\text{II-11})$$

Le coefficient de dilatation longitudinale α_1 est :

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\Delta T} \quad (\text{II-12})$$

On obtient la relation suivante :

$$\alpha_1 = \frac{(1-V_f)\alpha_m E_m + V_f \alpha_f E_f}{(1-V_f)E_m + V_f E_f} \quad (\text{II-13})$$

Le coefficient de dilatation thermique transverse α_2 est :

$$\alpha_2 = V_f \alpha_f + V_m \alpha_m + \frac{v_m E_f - v_f E_m}{\frac{V_f E_f + E_m}{1-V_f} + V_f} (\alpha_m - \alpha_f) \quad (\text{II-14})$$

II.4. Loi de comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée:

$$\sigma = C \varepsilon \quad (\text{II-15})$$

Sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{61} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{61} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{61} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{61} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II-16})$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

II.4.1. Matériau anisotrope :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

II.4.2. Matériau monoclinique :

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau, la loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

La matrice de souplesse a la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

II.4.3. Matériau orthotropique :

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-18})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

II.4.4. Matériau transversalement isotrope :

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{32} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{12}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-19})$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'ingénieur.

II.4.5. Matériau isotrope :

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope.

Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22}-C_{23}}{2} = \frac{C_{11}-C_{22}}{2} \quad (\text{II-20})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

II.5. Endommagement des composites :

Lorsque les matériaux composites sont soumis à des efforts, soit lors d'un essai d'épreuve, soit en service, une série de mécanismes locaux d'endommagement entraîne une accumulation continue de défauts répartis dans toute la région chargée. Les composites stratifiés sont constitués d'empilements couches faisant apparaître une première particularité que l'on appelle la liaison interlaminaire. Cette liaison est bien souvent l'aspect défaillant de ces matériaux, d'autant qu'elle est le siège de défauts de toutes sortes (mauvaise polymérisation, porosités, fissures, micro vides,...etc.). L'ordre et la séquence d'apparition de ces endommagements dépendent principalement des paramètres suivants : la nature des constituants fibres/matrice ainsi que de l'architecture de la plaque stratifiée (figure II.8).

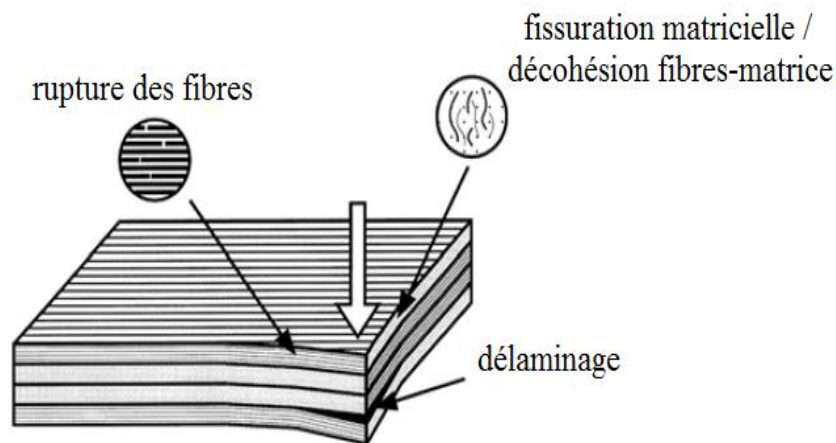


Figure II.8 : Mécanismes de rupture observés dans un stratifié.

II.5.1. Différents Modes d'endommagements:

Lors d'une sollicitation quelconque sur un matériau composite, le développement de l'endommagement au sein du matériau commence assez tôt. Dans un composite les premiers endommagements détectés commencent à se développer à l'échelle microscopique lorsque l'effort localisé atteint la limite de rupture d'un des constituants ou celle de l'interface les reliant. Les microfissures qui se développent sont habituellement trop petites pour causer la rupture finale du composite. Ainsi, un nombre important de ces microfissures s'accumulent dans le composite avant la rupture finale. Les paramètres, tels que la fraction volumique, l'orientation des fibres, l'épaisseur des plis et l'espacement entre fibres, jouent un rôle très

important dans la progression de l'endommagement. En conséquence, le procédé global de la rupture dans les composites est souvent considéré comme un processus d'accumulation de différents types d'endommagements.

Les mécanismes d'endommagement potentiels d'un matériau hétérogène, notamment les composites bases polymère soumis à une sollicitation mécanique, peuvent se regrouper en trois principaux modes différents selon le site où ils opèrent (figure II.9):

- Fissuration matricielle ;
- Rupture de l'interface fibre/matrice et déchaussement de fibre, délaminage (décohésion étendue intra plis);
- Rupture des fibres;
- Délaminage inter plis ;

II.5.1.1. Fissuration matricielle :

La complexité des matériaux composites introduit plusieurs types d'endommagements à l'échelle microscopique. Les microfissures se produisant au sein de la matrice apparaissent aux niveaux des porosités et des inclusions soit par fissuration transverse soit par fissuration longitudinale. Ce dernier mode de rupture se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à celle de cisaillement. Cette fissuration se propage selon la direction perpendiculaire à la sollicitation et elle peut provoquer une décohésion fibre-matrice.

- **Fissuration transverse** : Il s'agit de fissures qui traversent toute l'épaisseur des couches les plus désorientées par rapport à l'axe de sollicitation. Des micro-défauts au sein du matériau (comme des vides, des fibres cassées, le décollement fibre/matrice ou des microfissures de la matrice) peuvent être à l'origine de ces fissures amorcées par une forte concentration de contrainte locale. Ces fissures sont assez rectilignes et généralement perpendiculaires aux interfaces entre les couches adjacentes.
- **Fissuration longitudinale** : Il s'agit de fissures qui sont analogues aux précédentes, apparaissent toujours dans la matrice et sont perpendiculaires aux interfaces des couches, mais qui traversent toute l'épaisseur des couches orientées à 0° par rapport à l'axe de sollicitation.

II.5.1.2. Délaminage entre couches :

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes décrits précédemment (fissuration matricielle, rupture de fibres, décohésion, etc...), s'ajoute un autre mécanisme d'endommagement entre couche appelé délaminage. Le processus de délaminage est le résultat d'une chronologie de divers types d'endommagement. Les propriétés mécaniques de la matrice et de la fibre ainsi que les propriétés adhésives et cohésives de l'interface gèrent cette chronologie en révélant des types d'endommagement fréquemment rencontrés comme la micro fissuration de la matrice, la rupture des fibres et la rupture des interfaces. Le délaminage progresse essentiellement par fissuration interlaminaire considéré comme le premier responsable du dédoublement de son épaisseur.

A cela on associe un réseau très important de fissures intralaminaires qui sont eux aussi induites par les fissures interlaminaires par différents moyens (rupture de matrice, de fibre et d'interface) allant jusqu'au décollement total des deux plis. Ce type d'endommagement contribue largement à la dégradation des propriétés mécaniques de la structure. C'est un mécanisme de décohésion entre les couches qui apparaît sur le bord libre ou/et à l'intérieur de l'éprouvette. A cause des contraintes interlaminaires élevées près des bords, le délaminage s'amorce généralement à cet endroit, puis progresse en séparant les couches.

II.5.1.3. Rupture des fibres :

La rupture de fibre intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fr} de la fibre. Elle se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'excès d'effort provoquera la rupture des constituants voisins, et ce de proche en proche jusqu'à la ruine du volume sollicité.

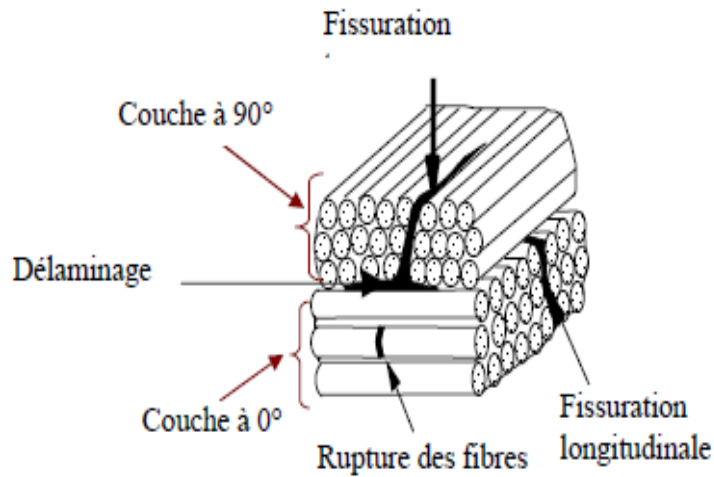


Figure II.9 : Modes d'endommagements dans un stratifié croisé

II.6. Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre des connaissances sur la structure et les différentes propriétés des matériaux composites conventionnels. Nous avons aussi vu que les structures en composites stratifiés en service peuvent subir des endommagements provoqués par l'application de charges fonctionnelles et/ou accidentelles. La propagation des zones endommagées, difficile à contrôler, peut conduire à une défaillance prématurée du système.

Chapitre III
Théories des plaques
composites stratifiées

Théories des plaques composites stratifiées

III.1. Généralités sur la Théorie des Stratifiés :

Cette partie développe les éléments fondamentaux de la théorie des plaques stratifiées. Les hypothèses générales de la théorie des stratifiés sont d'abord introduites dans ce chapitre, la théorie des stratifiés prenant en compte les effets du cisaillement transverse. Et ensuite en développée La théorie classique des stratifiés qui ne prennent pas en compte les effets du cisaillement transverse. De plus en va étudier l'effet de la séquence d'empilement des couches du stratifié.

III.2. Architecture des stratifiés :

Au chapitre II, nous avons mis en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- par la couche : plaques ou coques,
- par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance donnée à l'étude des plaques dans l'analyse des structures en composite. D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure III.1), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan Oxy. L'axe Oz correspond à la direction suivant l'épaisseur.

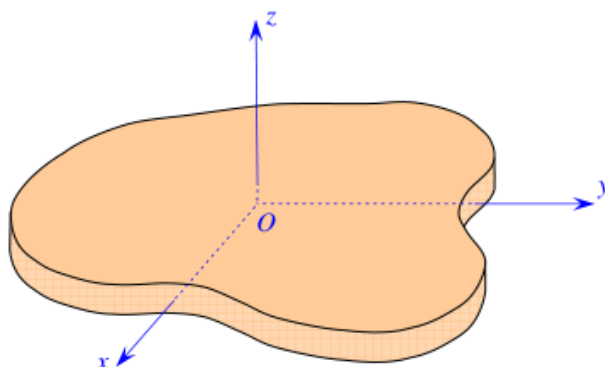


FIGURE III.1. Élément de plaque.

III.2.1. Notations et objectif :

Les notations utilisées sont reportées sur la figure III.2. Le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe Oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

L'objectif est de schématiser le comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, y) de difficulté moindre. La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques, hypothèses que nous développons dans ce chapitre.

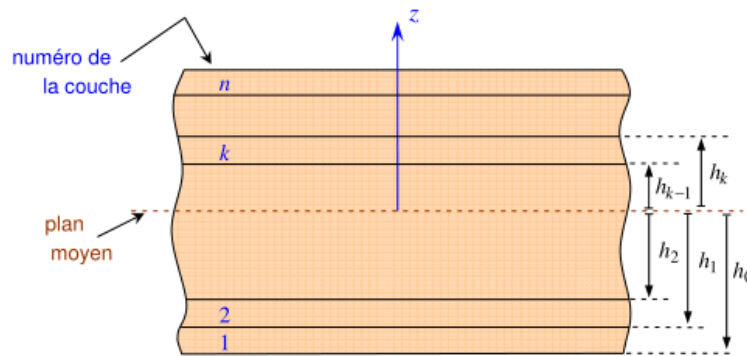


FIGURE III.2. Élément de stratifié.

III.3. Champ des déplacements :

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynômes en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations, et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations (III.1). Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (III.1), en série de la variable z à coefficients en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ du plan (Oxy) . Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par la suite suivant l'une des notations :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v_0 &= v_0(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ w_0 &= w_0(x, y, 0) = w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

III.3.1 Déformation d'une normale :

Cherchons-la déformée d'une normale AB au plan de la plaque, définie par $(x=a, y=b)$ (figure III.3). Tout point M appartenant à la normale AB à pour coordonnées (a, b, z) et son déplacement s'écrit d'après (3.1) :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= u_0(a, b) + z\varphi_x(a, b) + z^2\psi_x(a, b) + z^3\phi_x(a, b), \\ v(a, b, z) &= v_0(a, b) + z\varphi_y(a, b) + z^2\psi_y(a, b) + z^3\phi_y(a, b), \\ w(a, b, z) &= w_0(a, b) + z\varphi_z(a, b) + z^2\psi_z(a, b) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

L'équation de la déformée de la normale AB s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en z :

$$\begin{aligned} u(a, b, z) &= A_u + zB_u + z^2C_u + z^3D_u \\ v(a, b, z) &= A_v + zB_v + z^2C_v + z^3D_v \\ w(a, b, z) &= A_w + zB_w + z^2C_w \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale AB subit donc :

- une translation sans déformation suivant $A'B'$, composée d'une translation $[A_u = u(a, b, z), A_v = v(a, b, z)]$ dans le plan (Oxy) et d'une translation $[A_w = w(a, b, z)]$ suivant l'axe Oz ;

- puis une déformation suivant A"B", exprimée par les termes en z et dont la forme dépend du degré en z. Le champ des déplacements (3.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque.

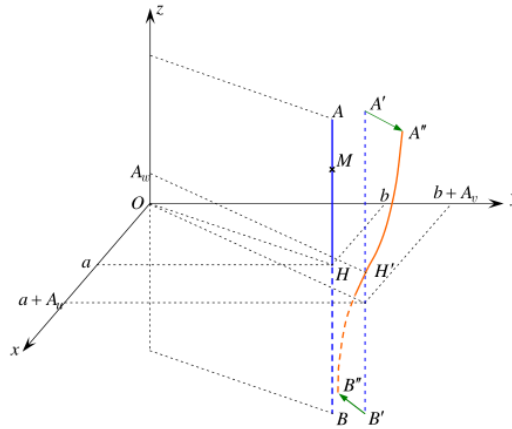


FIGURE III.3. Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement.

III.3.2. Schémas du premier degré

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchhoff) pour décrire le comportement des plaques se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale AB est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(a, b, z) &= A_u + zB_u, \\
 v(a, b, z) &= A_v + zB_v, \\
 w(a, b, z) &= A_w
 \end{aligned}
 \tag{III.6}$$

La déformée A"B" reste dans ce cas un segment de droite : les points situés sur une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

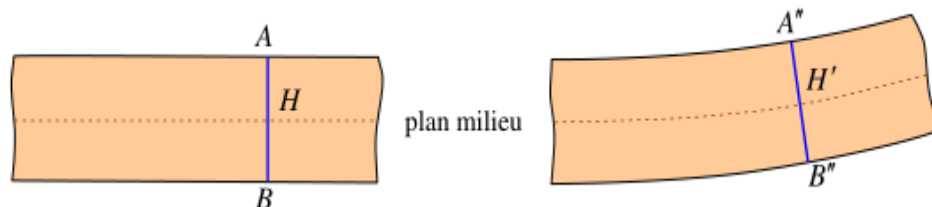


FIGURE III.4. Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse.

Une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation reste sur un segment de droite au cours de la déformation. De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte (théorie classique de stratifié), les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen (figure III.4). Dans ce cas, la déformée en H (déformée du plan (Oxy) et déformée de la normale AB) pourra être caractérisée (figure III.5) par :

- Les déplacements du point H : déplacement dans le plan (Oxy) $[A_u = u(a, b, z), A_v = v(a, b, z)]$ et déplacement transverse $[A_w = w(a, b, z)]$.
- les rotations θ_x et θ_y autour des directions \vec{i} et \vec{j} .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles β_x et β_y (figure III.5), reliés à θ_x et θ_y par :

$$\beta_x = -\theta_y, \beta_y = \theta_x \quad (\text{III.7})$$

Un schéma du premier degré permet de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il serait alors nécessaire de considérer un schéma du deuxième ordre, voire du troisième ordre.

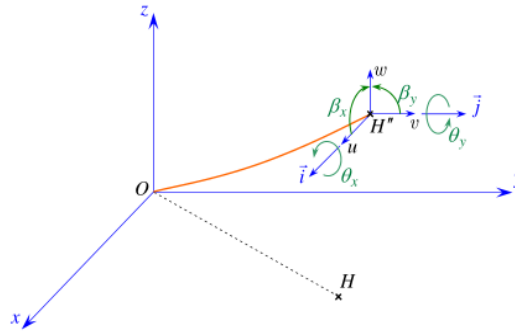


FIGURE III.5. Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse.

III.4. Champ des déformations :

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (III.4). Le champ des déformations se déduit par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\
 \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\
 \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

III.5. Champ des contraintes :

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes $(Oxyz)$ du stratifié, a été étudiée au chapitre précédente. L'état des contraintes en un point M du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations. Si le point M appartient à la couche k du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où \bar{C}_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k.

Il en résulte que les contraintes dans la couche k sont des polynômes en z. La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y). La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments, exercés sur la plaque.

III.5.1. Simplification dans le cadre de la théorie des plaques :

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{III.10})$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique. Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée. L'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des déformations ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , γ_{xy} correspond à l'état de contraintes planes, les contraintes dans la couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité \bar{Q}_{ij} suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Avec
$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{\bar{C}_{33}} (\bar{C}_{13}\varepsilon_{11} + \bar{C}_{23}\varepsilon_{22} + \bar{C}_{36}\varepsilon_{12}) \quad (\text{III.12})$$

Les coefficients \bar{Q}_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche k. La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

III.6. Résultantes et moments :

III.6.1 Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (\text{III.13})$$

Où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} dans la couche k. Soit :

$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.14})$$

Les composantes N_x , N_y , N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y). Elles sont schématisées symboliquement sur la figure III.6.

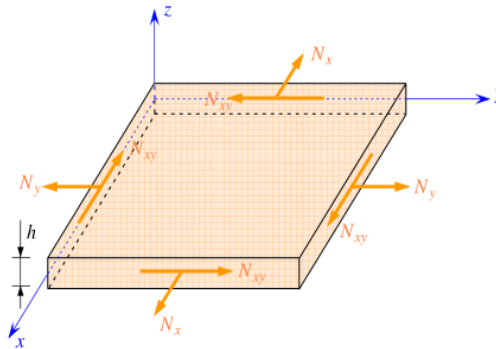


FIGURE III.6. Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

III.6.2 Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.15})$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure (III.7).

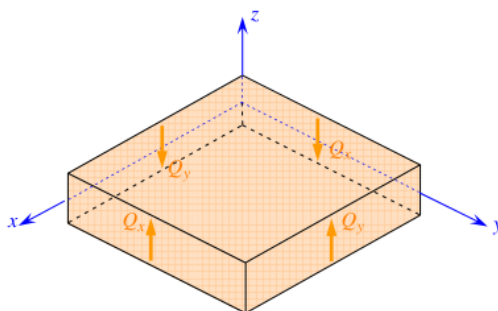


FIGURE III.7. Représentation schématisique des résultantes de cisaillement.

III.6.3 Moments de flexion et de torsion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \tag{III.16}$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure III.8.

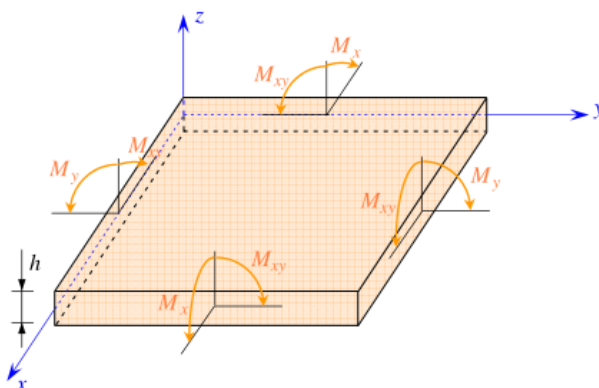


FIGURE III.8. Schématisation des moments de flexion et de torsion.

III.7. Modèles de structures multicouches

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. L'intérêt de la considération d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toute fois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles établies peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée de certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [Pagano 69], [Pagano70], [Srinivas 70], [Srinivas 73b].

De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse, . . .) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. Pour cette raison, une approche 3D peut fournir des informations dans certaines conditions (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires.

Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront prises en considération.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models)
- Approche par couche LW (Layer-wise).
- Approche par Théories Zig-zag.
- Approche développement asymptotique.

III.7.1. Approche par développement asymptotique

La technique de développement asymptotique est appliquée à des structures à priori peu épaisses c'est à dire quand le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est très petit, quand l'épaisseur tend vers zéro [L.E. Aghalovyan].

Le développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équation de mouvement).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite).

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [Duc Thai Nguyen].

III.7.2. Modèles de monocouche équivalente

Dans la famille des modèles de monocouches équivalentes on peut citer :

- Le modèle classique de Love-Kirchhoff
- Le modèle de Reissner-Mindlin
- Les modèles d'ordre supérieur

III.7.2.1 Théorie Classique de Love-Kirchhoff (CLT, classic lamination theory):

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "classique" de plaque. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée Fig.III.9. Donc la déformation dite de "cisaillement transverse" est supposée nulle [H. Kraus] et les effets dus à l'effort tranchant négligés. Il est bien entendu à réserver à des plaques minces et ne présentant pas trop de gradient de propriété dans l'épaisseur (attention aux sandwichs à âme souple par exemple).

III.7.2.1.1. Champ des déformations :

III.7.2.1.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (III.7). Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.17})$$

Cette hypothèse implique, d'après (III.8) :

φ_x et φ_y sont la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (III.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen (paragraphe III.3.2 et figure III.4). L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure III.9.

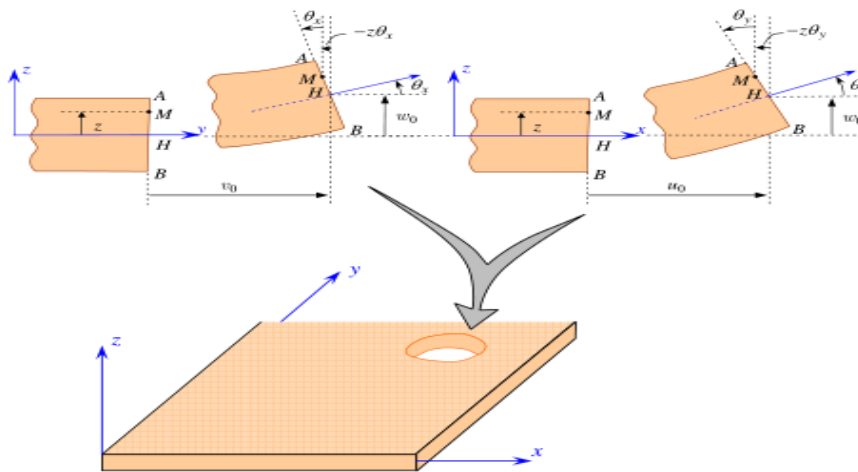


FIGURE III.9. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

III.7.2.1.1.2 Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, d'après (III.9) et en tenant compte des expressions (III.18):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
\gamma_{xz} &= 0 \\
\gamma_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{III.20}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.21}$$

Et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{III.22}$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \tag{III.23}$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(M) \quad (\text{III.25})$$

En posant :

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion. Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

III.7.2.1.2. Champ des contraintes :

III.7.2.1.2.1. Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (III.8). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{Q}_{11} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{12} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{16} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \bar{Q}_{12} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{22} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{26} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= \bar{Q}_{16} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{26} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{66} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Le tenseur des contraintes en M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} .

III.7.2.1.2.2 Expression des contraintes

Les relations (III.26) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \bar{Q}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Avec :

$$\bar{Q}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k$$

En tenant compte de (III.25), les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z [\bar{Q}]^k \{k\} \quad (\text{III.32})$$

La matrice $\{\sigma\}^k$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$.

La matrice de rigidité réduite $[\bar{Q}_{ij}]^k$ varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

III.7.2.1.3. Expressions résultantes et moments

III.7.2.1.3.1. résultantes en membrane

L'expression (III.14) associée à la relation (III.31) ou (III.32) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\bar{Q} \right]^k \{ \varepsilon^0 \} + z \left[\bar{Q} \right]^k \{ k \} dz \quad (\text{III.33})$$

Soit :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k \{ \varepsilon^0 \} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k \{ k \} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k (h_k - h_{k-1}) \{ \varepsilon^0 \} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \{ k \}$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y)$$

Dont les coefficients A_{ij} sont appelés les rigidités de membrane :

$$A = [A_{ij}] = \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{III.34})$$

Et Les coefficients B_{ij} sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$B = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q} \right]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (\text{III.35})$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x , N_y , N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

III.7.2.1.3.2. Résultantes de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (III.30) des contraintes dans l'expression (III.14). Soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[z [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z^2 [\bar{Q}]^k \{k\} \right] dz$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \{k\} \quad (\text{III.37})$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D k(x, y)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = [D_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (\text{III.38})$$

Dont les coefficients D_{ij} sont appelés les rigidités de flexion.

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

III.7.2.1.4 Équation du comportement mécanique d'un stratifié

III.7.2.1.4.1 Équation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (III.34) et (III.37) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

Les termes des matrices introduites A, B et D sont donnés par les expressions (III.34), (III.35) et (III.36). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur h_k et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$[A] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k \quad (\text{III.42})$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k z_k \quad (\text{III.43})$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left(e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12} \right) \quad (\text{III.44})$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} de l'équation constitutive (III.40) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche.

III.7.2.1.4.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux

Pour une couche orthotrope, d'épaisseur h , dont les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Où les constantes de la matrice de rigidité Q_{ij} sont exprimées par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

En fonction des modules de l'ingénieur : E_L et E_T les modules d'Young longitudinal et transversal, ν_{LT} le coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction longitudinale et G_{LT} le module de cisaillement mesuré dans le plan de la couche.

L'équation constitutive de la plaque s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11} h, & D_{11} &= Q_{11} \frac{h^3}{12}, \\ A_{12} &= Q_{12} h, & D_{12} &= Q_{12} \frac{h^3}{12}, \\ A_{22} &= Q_{22} h, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= Q_{22} \frac{h^3}{12}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= Q_{66} h, & D_{66} &= Q_{66} \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

Les équations de mouvement sont ensuite obtenues en reportant l'équation constitutive (III.44) du stratifié dans les relations fondamentales des plaques. Ces équations de mouvement s'écrivent :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{III.48})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (\text{III.49})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{III.50})$$

Où q est la charge de pression exercée sur le stratifié.

III.7.2.1.4.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope ne coïncident pas avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Où les coefficients \bar{Q}_{ij} hors axes en fonction des coefficients Q_{ij} dans les axes du matériau.

Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij} h \quad B_{ij} = 0 \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} = A_{ij} \frac{h^2}{12} \quad (\text{III.51})$$

L'équation constitutive de la plaque orthotrope s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.52})$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les résultantes normales (N_x , N_y) dépendent des déformations axiales ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 ainsi que de la déformation en cisaillement ε_{xy}^0 . Il existe donc dans ce cas un couplage traction-cisaillement.

De la même manière, les composantes des moments dépendent toutes des courbures en

flexion κ_x , κ_y , et de la courbure en torsion κ_{xy} . Il existe donc également un couplage flexion-torsion. Le couplage traction-cisaillement peut être illustré en appliquant un déplacement $(u, 0, 0)$ à une plaque orthotrope dont la direction L fait un angle θ avec l'axe de référence des déplacements (figure III.10).

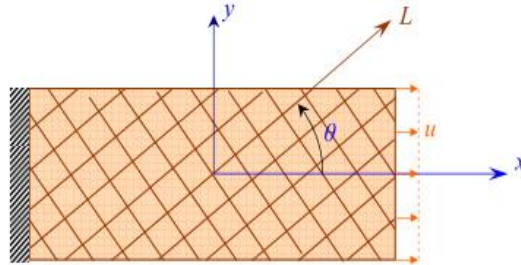


FIGURE III.10 : Plaque soumise à une traction suivant l'axe x.

Les équations de mouvement (III.49) à (III.50) sont alors modifiées suivant :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (III.53)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (III.54)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (III.55)$$

III.7.2.2 Le modèle classique de Reissner-Mindlin (FSDT, First ordre Shear Deformation Theory)

Pour introduire les effets dus au cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Fig. III.11).

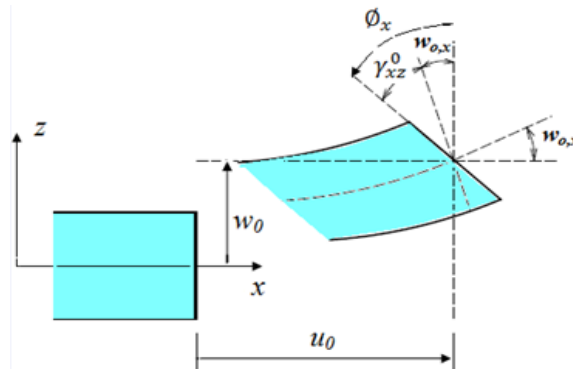


Figure III.11 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Avec: ϕ_x , ϕ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (figure III.8), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + w_{0,x}, \quad \phi_y = \gamma_{yz}^0 + w_{0,y} \quad (\text{III.57})$$

Où γ_{xz}^0 , γ_{yz}^0 les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

Ainsi on introduit la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte ces effets de cisaillements transverses. En 2000, [Choa] a comparé l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier d'ordre et celle déduite des équations d'équilibres de façon à obtenir des facteurs de corrections entre FSDT.

III.7.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Ces coefficients correcteurs dépendent du nombre de couches, des stratifications présentes dans le composite et du chargement. Ils sont donc difficiles à maîtriser pour le calcul de structure. Pour améliorer cela, des auteurs ont proposé des théories d'ordre supérieur ou les champs membranaires dans l'épaisseur sont non linéaires (Fig. III.12).

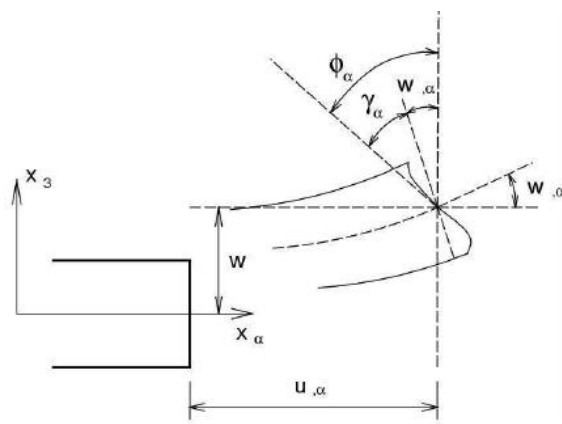


Figure III.12 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie tridimensionnelle. Le déplacement est donc supposé sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Cependant, pour augmenter la précision de la théorie, le nombre de degrés de liberté doit être croissant. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". La forme du déplacement suivant l'épaisseur proposée est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) + f(z)\gamma_{yz}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur:

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan] donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III.60})$$

- L'approche de Reissner [Reissner] exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.61})$$

- L'approche de Reddy [Reddy], La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.62})$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

[O. Polit et M. Touratier] proposent la forme "sinus" pour la fonction de cisaillement $f(z)$. Cette fonction est exprimée sous forme trigonométrique sinusoïdale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit donc :

✓ L'approche de Touratier avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.63})$$

III.7.3. Théories Zig-zag

Pour les modèles monocouches équivalentes, le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches. Une autre piste de développement concerne l'utilisation de modèles dans lesquels on introduit une fonction qui rend compte des perturbations des champs de déplacement aux interfaces. Cela permet d'affiner les modèles ESL en gardant un nombre d'inconnues indépendant du nombre de couches. Ces modèles sont connus sous l'appellation Zig-Zag [E. Carrera].

Le déplacement reste continu suivant l'épaisseur. Cependant, la pente de la fonction de déplacement de chaque couche est différente. Ce changement en forme de Zig-Zag entre deux couches adjacentes parfaitement collées prétend rendre compte de la différence de dé des couches. Le modèle le plus connu est celui de [Murakami] qui sera décrit plus loin et illustre bien la méthode. (Voir figure III.13)

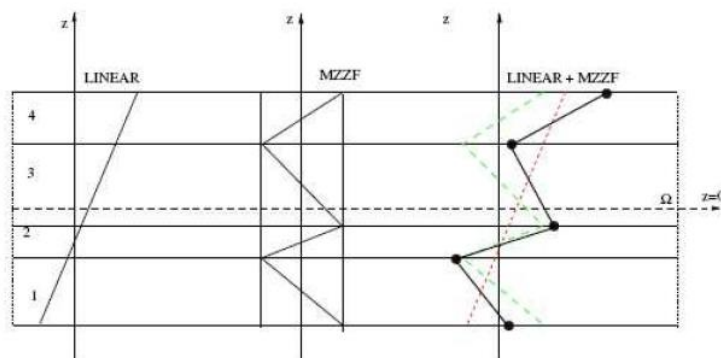


Figure III.13. Introduction de la fonction zig-zag de Murakami dans la distribution linéaire

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'élancement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis. La continuité de type C^1 de la théorie zig-zag complique leur implémentation numérique. De plus, la justification physique de cette unique fonction $f(z)$ est loin d'être évidente.

III.7.4. Approche par couche (layer wise)

Cette dernière remarque permet la transition avec les approches par couche (layer wise) [Reddy]. Si la réponse précise de chaque couche est nécessaire, si des gradients importants de déplacement et de contraintes entre les couches existent, comme c'est le cas pour les phénomènes locaux, les effets de bord, les sandwiches, alors une description plus raffinée et "par couche" des champs devient indispensable.

Cette approche augmente le nombre d'inconnues ainsi que la complexité de l'analyse. Les équations sont écrites pour chaque couche constitutive alors que les conditions d'interface sur le déplacement et la contrainte transversale sont présentées comme des contraintes supplémentaires. Ces exigences de l'interface peuvent être plus commodément imposées si les valeurs d'interface sont utilisées directement comme contraintes transversales et déplacements inconnus. Un exemple de descriptions LW a été tracé, voir la figure III.14. A noter que le type et le degré d'expansion dans chaque couche peuvent être indépendants et que des conditions de continuité sont demandées à l'interface entre deux couches adjacentes.

Les modèles LW proposent ainsi une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur et zig-zag, une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. Mais le nombre de degrés de liberté dépend du nombre de couches de la plaque composite.

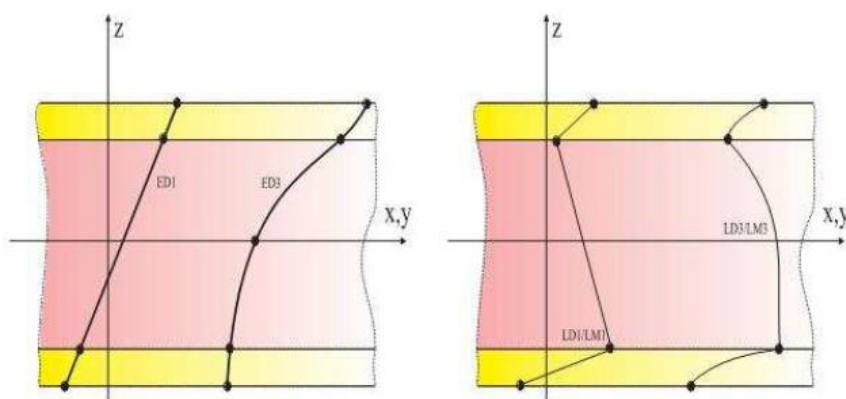


Figure III.14. Description de déplacement du modèle Monocouche équivalente (à gauche) et Layer wise

III.8. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'*approche* monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux composite car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

On peut constater que les modèles analytiques des plaques stratifiées à savoir la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

Chapitre IV

Etude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée

Etude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée

IV.1. Introduction

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérieuse de l'étude de leur comportement vibratoire et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette dernière touche de nombreux domaines, comme les technologies spatiales, l'ingénierie navale et civile, l'automobile, aéronautique, ainsi les ponts, les bâtiments. Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques stratifiées est un problème difficile qui se pose fréquemment au chercheur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques stratifiées est indispensable. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est le sujet de recherches exhaustives.

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courants dans le génie civil. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème est très important pour arriver à des concepts sûrs. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types industriels telles que les radiers, les réservoirs de stockage et les piscines. La théorie classique des plaques (CPT) qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la théorie classique CPT sous-estime la flèche. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances de la théorie CPT.

L'objectif de ce travail est d'analyser un nouveau modèle de déplacement pour des plaques stratifiées composites simplement appuyées sur fondation élastique. Les solutions analytiques sont présentées en utilisant une nouvelle théorie. La présente théorie de la plaque développée par [El Meiche et al. 2011] s'étend pour la première fois au comportement de vibration libre de plaques composites stratifiées sur fondation élastique. Cette théorie identifie la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement.

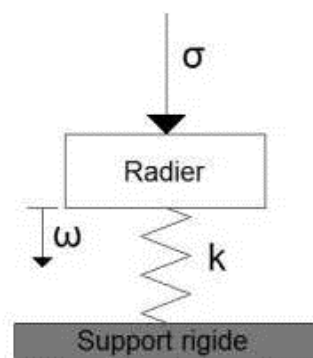
La fondation élastique est modélisée comme fondation Pasternak de deux paramètres. Les équations du mouvement de la plaque stratifiée sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

IV.2. Modèles de fondations :

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le génie civil. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques. Le modèle le plus simple de la fondation élastique est le modèle de Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement entre l'un l'autre, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque.

IV.2.1. Model de Winkler :

Elle consiste à substituer le sol par une « infinité » de ressorts élastiques juxtaposés et de même constante de raideur. Cette constante, k , caractérise le sol : elle exprime la proportionnalité entre la contrainte verticale appliquée et le tassement, et est appelée module de réaction du sol.



$$\sigma = k \omega$$

Avec σ : contrainte verticale

k : module de réaction

ω : tassement

Figure VI.1 : Hypothèse Winkler

Cette méthode simplificatrice permet une bonne approximation des déformées d'une poutre posée sur le sol ou d'un radier. Cependant, il est important d'insister sur le mot approximation. En effet, le principe de calcul proposé par Winkler néglige d'une part, l'interaction inévitable de deux ressorts juxtaposés (l'effet de Poisson du sol) et d'autre part, la zone externe à la fondation qui influence le tassement global. Selon Winkler, seule la zone située sous le radier se tasse comme indiqué sur la figure suivante.

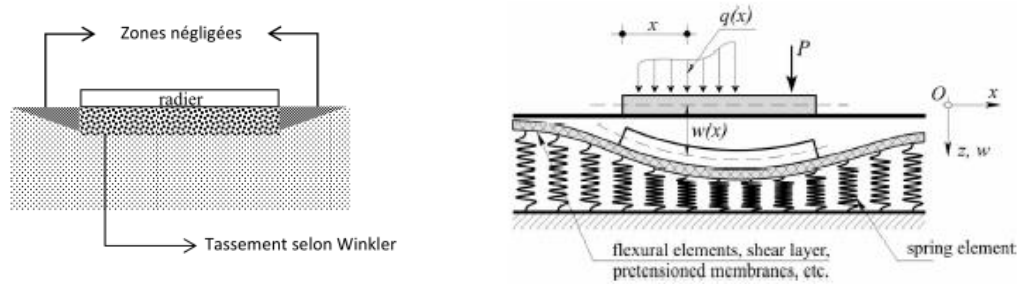


Figure VI.2 : Approximation Winkler

Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak [Pasternak 1954] qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases). [Shen 1995, Omurtag 1997, Matsunaga 2000, Filipich 2002, Zhou 2004, Huang 2008].

IV.2.2. Model de Pasternak :

Le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle G_p du sol en plus de la rigidité normale k_p . Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

$$P(x) = k_p w(x) - G_p w''(x) \quad (\text{IV.1})$$

Avec : $P(x)$ [N/m] la charge linéique s'appliquant sur le radier, G_p le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m], k_p le module de réaction du sol [Pa/m] et $w(x)$ la déformée du terrain.

IV.3. Configuration géométrique

Considérons à titre d'exemple numérique une plaque rectangulaire en matériau composite stratifié d'une longueur, largeur et épaisseur égales à $(a, b \text{ et } h)$, respectivement. La plaque est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_0 et une rigidité de cisaillement de k_1 . Selon la figure IV.3 indiquée ci-dessous. Le système global de coordonnées cartésiennes est choisi avec l'origine dans le coin et sur le plan médian de la plaque ($z = 0$). Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme : $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ et $-h/2 \leq z \leq h/2$.

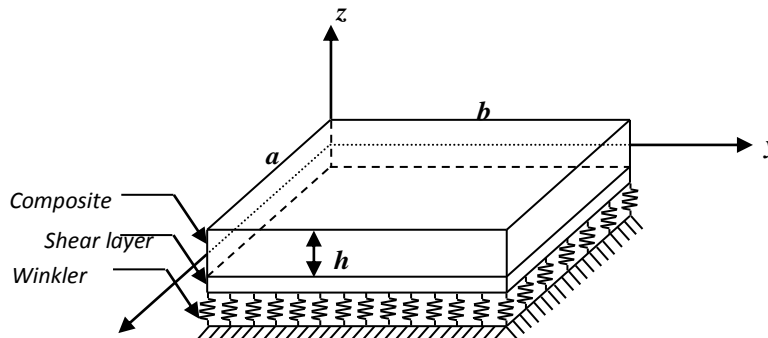


Figure IV.3: Plaque composite stratifiée reposant sur une fondation élastique.

IV.4. Théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique :

Le nombre de variables inconnues de la théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique est seulement quatre, contrairement au cinq variables dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

IV.4.1. Hypothèses et Champ de déplacement de la Théorie raffinée :

Le champ de déplacement de la présente théorie raffinée est choisi selon les hypothèses suivantes:

- les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.

- le déplacement transverse (w) contient deux composantes de la flexion (w_b) et cisaillement (w_s). Ces composantes sont fonctions des coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{IV.2})$$

- La contrainte normale dans la direction transversale (σ_z) est négligeable devant les autres contraintes normales (σ_x) et (σ_y) ;
- les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{IV.3})$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être donnés comme

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{IV.4})$$

À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s se dérivent les composantes de déformation γ_{xz} , γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être donnés comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV.5})$$

IV.4.2. Cinématique et équations constitutives :

En se basant sur les hypothèses précédentes et par l'utilisation des équations (2-5), le champ de déplacement peut être obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
\end{aligned} \tag{IV.6}$$

Où u_0 et v_0 désignent les déplacements le long des directions de coordonnées x et y d'un point matériel situé sur le plan médian de la plaque; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées x et y .

Où la fonction de forme est exprimée par [El Meiche et al. 2011] :

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \tag{IV.7}$$

Cette fonction aide à satisfaire la nullité des efforts de cisaillement transversaux aux deux facettes de la plaque. Les distributions paraboliques des efforts de cisaillement transversaux suivant l'épaisseur de la plaque sont prises en considération dans cette analyse à l'aide de la fonction de gauchissement proposée.

IV.4.3. Champs des déformations

Selon le champ proposé, la déformation transverse normale est encore nulle (ε_z). Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (IV.6) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{IV.8}$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^b \\ \mathbf{k}_y^b \\ \mathbf{k}_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{w}_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{w}_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{w}_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^s \\ \mathbf{k}_y^s \\ \mathbf{k}_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^s \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9a})$$

$$\text{Et } g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.9b})$$

IV.4.4. Champs des contraintes

L'état de contrainte dans chaque couche est donné par la Loi de Hooke comme suit

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \\ \boldsymbol{\tau}_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Où \mathbf{Q}_{ij} Les coefficients de la rigidité peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur dans les axes matérielles de la couche :

$$\mathbf{Q}_{11} = \frac{\mathbf{E}_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mathbf{Q}_{22} = \frac{\mathbf{E}_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mathbf{Q}_{12} = \frac{\nu_{12}\mathbf{E}_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (\text{IV.11})$$

$$\mathbf{Q}_{66} = \mathbf{G}_{12}, \quad \mathbf{Q}_{44} = \mathbf{G}_{23}, \quad \mathbf{Q}_{55} = \mathbf{G}_{13}$$

Etant donné que le matériau stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes avec leurs axes orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées de stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié (x, y, z) . Les relations constitutives pour n'importe quelle couche k d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées (x, y) , correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité réduite $\overline{\mathbf{Q}}_{ij}$ sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{IV.12})$$

Où Les coefficients de rigidité réduite \bar{Q}_{ij} donné par Reddy (1997).

IV.4.5. Equations gouvernantes :

Utilisant le principe d'énergie d'Hamilton qui dérive l'équation du mouvement de la plaque composite stratifié:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - V - T) dt = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Où U est l'énergie de déformation et T est l'énergie cinétique de la plaque composite, U_F est l'énergie de déformation de la fondation et V est le travail des forces externes. En utilisant le principe d'énergie totale minimale nous aurons une équation générale du mouvement et des conditions aux limites. En tenant compte des variations des équations précédentes et en intégrant par partie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} - \rho [\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dv - \int_A f_e \delta (w_b + w_s) dA \right] dt = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Ou(..) représente la dérivé seconde par rapport au temps et f_e est la densité de la force de réaction de la base. Pour le model de la fondation de Pasternak :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (\text{IV.15})$$

Si la fondation est modélisée comme fondation linéaire de Winkler, le coefficient k_1 dans Equation (IV.15) est égal zéro. Utilisant les équations (IV.9 a), l'équation (IV.14) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left\{ -\delta u_0 N_{x,x} - \delta v_0 N_{y,y} - \delta u_0 N_{xy,y} - \delta v_0 N_{xy,x} - \delta w_b M_{x,xx}^b - \delta w_b M_{y,yy}^b - 2\delta w_b M_{xy,xy}^b \right. \\
& \left. - \delta w_s M_{x,xx}^s - \delta w_s M_{y,yy}^s - 2\delta w_s M_{xy,xy}^s - \delta w_s S_{xz,x}^s - \delta w_s S_{yz,y}^s \right\} dA \\
& + \int_A f_e (\delta w_b + \delta w_s) dA - \int_A \left\{ \delta u_0 (I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \ddot{w}_{b,x} - I_4 \ddot{w}_{s,x}) + \delta v_0 (I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y}) \right. \\
& + \delta w_b (I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_3 (\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) - I_5 (\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy})) \\
& \left. + \delta w_s (I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_5 (\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) - I_6 (\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy})) \right\} dA \Big] dt = 0
\end{aligned} \tag{IV.16}$$

Les résultantes des contraintes par unité de longueur N , M et S des couches totales de la plaque sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \tag{IV.17a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \tag{IV.17b}$$

En utilisant l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.10), la résultante des contraintes d'une plaque laminée peut être liée au nombre total des couches par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \tag{IV.18}$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^{Tr}, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^{Tr}, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^{Tr}, \tag{IV.19a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^{Tr}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^{Tr}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^{Tr}, \tag{IV.19b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV.19c}$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.19d})$$

$$\mathbf{S} = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^{Tr}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^{Tr}, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19e})$$

Et les composants de rigidité et d'inertie sont donnés comme suit:

$$(A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{IV.20a})$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}[g(z)]^2 dz, \quad (i, j) = (4, 5) \quad (\text{IV.20b})$$

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz \quad (\text{IV.20c})$$

En rassemblant les coefficients des δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s dans l'équation (IV.16), les équations du mouvement résultantes sont :

$$\delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \ddot{w}_{b,x} - I_4 \ddot{w}_{s,x}$$

$$\delta v_0 : N_{xy,x} + N_{y,y} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y}$$

$$\delta w_b : M_{x,xx}^b + 2M_{xy,xy}^b + M_{y,yy}^b - k_0(w_b + w_s) + k_1 \nabla^2(w_b + w_s) = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_3(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) - I_5(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy}) \quad (\text{IV.21})$$

$$\delta w_s : M_{x,xx}^s + 2M_{xy,xy}^s + M_{y,yy}^s + S_{xz,x}^s + S_{yz,y}^s - k_0(w_b + w_s) + k_1 \nabla^2(w_b + w_s) = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_5(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) - I_6(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy})$$

Clairement, lorsque l'effet de la déformation de cisaillement transversal est négligé ($w_s = 0$), équation (IV.21) donne les équations du mouvement de plaque composite basé sur la théorie des plaques classiques.

IV.5. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée :

Des plaques rectangulaires composites stratifiées sont généralement classés selon le type du support utilisé. Nous sommes concernés ici par les solutions analytiques de l'équation (IV.21) pour la plaque composite stratifiée simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords latéraux.

$$v_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \quad (\text{IV.22a})$$

$$v_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (\text{IV.22b})$$

$$N_x(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \quad (\text{IV.22c})$$

$$u_0(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (\text{IV.22d})$$

$$u_0(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \quad (\text{IV.22e})$$

$$N_y(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \quad (\text{IV.22f})$$

Pour résoudre ce problème du comportement vibratoire de la flexion des plaques en matériaux composites stratifiés, on emploie les solutions de Navier qui sont développées sous la forme d'une double série trigonométrique de Fourier et qui satisfaisant les conditions aux limites de l'équation (IV.22) par les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée avec (m, n) le mode propre et les constantes $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$.

Après la substituant les équations. (IV.22), (IV.19) et (IV.20) dans les équations du mouvement (IV.21), Nous obtenons les équations aux valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n, pour le problème de la vibration libre.

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (IV.24)$$

Où $\{\Delta\}$ désigne la colonne

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mm}, V_{mm}, W_{bmm}, W_{smm}\}, \quad (IV.25)$$

Et

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.26)$$

Dans laquelle :

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2$$

$$a_{12} = \lambda \mu (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = -B_{11}\lambda^3$$

$$a_{14} = -B_{11}^s \lambda^3$$

$$a_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2$$

$$a_{23} = B_{11}\mu^3$$

$$a_{24} = B_{11}^s \mu^3$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$a_{34} = D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s \mu^4 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$a_{44} = H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1$$

$$m_{33} = I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{34} = I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{44} = I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2)$$

Pour trouvé les fréquences naturel des stratifiés en posent le facteur déterminant de coefficients de la matrice dans l'équation (IV.24) égal à zéro.

IV.6. Conclusion

C'est dans ce contexte, L'analyse des vibrations libres des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifiés simplement appuyées se reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak, sont examinées par une théorie développée dite la théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables avec une nouvelle fonction de forme. Cette fonction remplit exactement des conditions aux frontières sur les bords libres de la plaque. L'équation du mouvement pour la plaque rectangulaire en matériaux composites stratifiés antisymétriques se reposant sur fondation élastique est obtenue par le principe de Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres. . La comparaison des résultats de cette nouvelle théorie avec les solutions existantes dans la littérature sont présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre V

Résultats et discussions

Résultats et discussions

V.1. Introduction

Le vaste problème de la modélisation des plaques est étudié depuis de nombreuses années afin de pouvoir répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures, des impacts, du comportement acoustique ou des vibrations. Parmi les premiers travaux sur les théories des plaques, nous pouvons notamment citer ceux de Kirchhoff en 1850 et de Love en 1888 qui établissent un premier modèle de plaque sans prise en compte du cisaillement transverse ; ces travaux font encore à ce jour référence dans la littérature. Ces approches simples permettent d'obtenir des résultats, le plus souvent satisfaisants pour les structures fortement élancées (ces modèles sont encore appelés "modèles de plaques minces") puisque pour celles-ci, l'importance relative des contraintes de cisaillement transverse reste modérée. Toutefois, les théories classiques ne permettent pas d'atteindre une précision satisfaisante dans trois cas :

- Lorsque l'élancement de la plaque est faible, les contraintes de cisaillement transverse ne peuvent plus être négligées vis à vis des autres composantes, il est alors recommandé d'utiliser un modèle adapté aux "plaques épaisses".
- Dans le cas d'une étude dynamique, au voisinage d'un mode d'ordre élevé, le rapport entre la longueur d'onde de flexion et l'épaisseur de la plaque peut se réduire suffisamment pour que le mode de déformation s'apparente à la flexion d'une plaque épaisse.
- Lorsqu'il y a un fort ratio de module de Young entre les couches de la plaque, la variation des déformations de cisaillement au travers de la plaque est très importante et doit être prise en compte.

La dynamique des structures est devenue un paramètre concluant pour optimiser les besoins en performances, et ce dans des domaines aussi variés que l'automobile, l'aéronautique, le spatial ou l'armement.

Dynamique des structures industrielles s'intéressent au comportement Dynamique des structures soumises à un environnement de type vibratoire ou choc. Le sujet est présenté dans un souci de compréhension des phénomènes des structures. Les travaux sur l'analyse vibratoire des plaques orthotropes ont été étudiés, seulement des solutions approximatives sont disponibles à l'exception des plaques simplement appuyées. Nous approchons au chapitre IV une procédure de résolution exacte pour l'analyse de la vibration libre des plaques composite stratifiés, sur une fondation élastique à deux paramètres, est développée sur la prétention que les déplacements transversaux de cisaillement varient comme fonction hyperbolique suivant l'épaisseur de la plaque.

Dans ce chapitre nous propose une solution analytique pour étudier la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés basé sur une fondation élastique à deux paramètres (Pasternak), afin d'interpréter l'influence de ce dernier sur les fréquences propres à l'aide d'une nouvelle théorie à quatre variables. Pour la validation des résultats on va utiliser la fonction First-ordre (FSDPT) de [Whitney & Pagano, 1970], une fonction des déformations sinusoïdales (SSDPT) de [Touratier 1991], exponentielle (ESDPT) de [Karama et al, 2003], une fonction de déformation de cisaillement parabolique de [Reddy 1984].

V.2. Structure étudiée et matériaux :

L'étude analytique a été menée sur des structures stratifiées croisé symétriques et antisymétrique simplement appuie suivant une section carrée basé sur une fondation élastique de type Pasternak à deux paramètres, Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus. Il est supposé que l'épaisseur et les propriétés des matériaux pour tous les stratifiés sont les mêmes. Dans l'analyse, les propriétés élastiques du stratifié sans dimension sont rapportées au tableau V.1 suivant:

Propriétés adimensionnelles	E_1/E_2	G_{23}/E_2	G_{13}/E_2	G_{12}/E_2	ν_{12}
Matériau 1	open	0.5	0.6	0.6	0.25

Tableau V.1 : propriétés matérielles sans dimension de matériau utilisé.

Notre objectif est de vérifier l'exactitude et la convergence de la présente théorie actuelle pour prédire les réponses de la vibration libre des plaques composites laminé simplement appuyée grâce aux résultats numériques obtenus. . Des comparaisons sont faites avec diverses théories de la plaque et les solutions exactes de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. La description des différents modèles de déplacement est donnée dans le tableau 2.

Tableau V.2 : Modèles de déplacement.

Modèles	Théories	Inconnus
CLPT	Classical laminate plate theory	3
FSDT	First-order shear deformation theory(Whitney & Pagano, 1970)	5
PSDT	Parabolic shear deformation theory(Reddy, 1984)	5
ESDT	Exponential shear deformation theory (Karama et al. 2003)	5
SSDT	Sinusoidal shear deformation theory (Touratier, 1991)	5
Present	Present refined shear deformation plate theory	4

IV.I.2. Analyse en vibration :

L'équation du mouvement pour la plaque stratifiée est obtenue par le principe de Hamilton, Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

La détermination des calculs de modes et fréquences propres de vibration fait également appel à ces calculs aux valeurs propres. En effet, La fréquence fondamentale est représentée dans l'équation en tant que terme adimensionnel ($\bar{\omega}$). Cette fréquence est définie comme :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (\text{V.1})$$

Les relations suivantes sont utilisées pour la présentation de non dimensionnelle linéaire Winkler fondation paramètres et non dimensionnelle Pasternak fondation, respectivement :

$$\mathbf{K}_0 = \frac{k_0 L^4}{E_2 h^3}, \quad \mathbf{K}_1 = \frac{k_1 L^4}{E_2 h^3} \quad (\text{V.2})$$

V.3. Validation des résultats :

V.3.1. Effet du rapport d'orthotropie E_1/E_2 :

Notre objectif est d'estimer l'exactitude de la présente théorie de déformation de cisaillement d'hyperbolique raffinée sans fondation élastique. Les fréquences fondamentales du système, sont calculées par l'équation de la vibration libre (IV.26) comme problème de valeurs propres.

Le tableau V.3 montre la fréquence fondamentales obtenue pour le premier mode de vibration d'une plaque carrée antisymétrique d'empilement croisé avec un nombre différent de couches à d'épaisseurs égales, les résultats sont ensuite comparés avec ceux effectués par d'autres chercheurs ; la solution d'élasticité tridimensionnelle [Noor, 1973], [Whitney & Pagano, 1970], [Karama et al. 2003], [Touratier, 1991] et par [Reddy, 1984]. On voit que les résultats obtenus par la théorie de déformation en cisaillement raffiné sont en bonne concordance avec ceux indiqués par les autres théories.

Il convient de noter que le nombre d'inconnue en théorie actuelle est de quatre, tandis que le nombre d'inconnue dans les deux FSDT et les théories de la déformation d'ordre élevé de cisaillement (PSDT, ESDT et SSDT) est de cinq. On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement exacts, mais aussi simple dans la prédiction des fréquences naturelles de plaques de stratifié.

Tableau V.3: Fréquences fondamentales $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapports d'orthotropes avec $a/h = 5$.

No. of layers	Theory	E_1 / E_2				
		3	10	20	30	40
(0/90) ₁	Exact ^(a)	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	FSDT	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
	PSDT	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	ESDT	6.2224	7.0066	7.8584	8.5630	9.1661
	SSDT	6.2188	6.9964	7.8379	8.5316	9.1236
	Present	6.2164	6.9839	7.8095	8.4863	9.0610
(0/90) ₂	Exact ^(a)	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	FSDT	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
	PSDT	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	ESDT	6.5034	8.1939	9.6201	10.5261	11.1628
	SSDT	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
	Present	6.5017	8.1999	9.6353	10.5467	11.1853
(0/90) ₃	Exact ^(a)	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	FSDT	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
	PSDT	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	ESDT	6.5595	6.5595	9.9313	10.8756	11.5314
	SSDT	6.5567	8.4066	9.9211	10.8603	11.5102
	Present	6.5563	8.4069	9.9205	10.8568	11.5019
(0/90) ₅	Exact ^(a)	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	FSDT	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
	PSDT	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	ESDT	6.5885	8.5229	10.0881	11.0522	11.7180
	SSDT	6.5854	8.5156	10.0740	11.0309	11.6894
	Present	6.5846	8.5131	10.0670	11.0175	11.6682

Exact^(a): (Noor, 1973)

Ce tableau montre l'influence du rapport de l'orthotropie E_1/E_2 sur les fréquences naturelles, ce dernier devient plus rigide entraînant l'augmentation de sa fréquence. De plus lorsque le nombre de couches augmentation, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent augmentent les fréquences propres.

V.3.2. Effet de la géométrie de la plaque (a/h) :

Afin de mieux comprendre l'influence des paramètres de géométrie de la plaque composite stratifiée considérées sur leur comportement vibratoire, on a représenté sur le tableau V.4 l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h), du stratifié croisé antisymétrique $[0/90]_n$, avec un rapport varie de 2 à 100. On remarque que la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport longueur sur épaisseur (a/h). Néanmoins, à partir de $a/h \geq 20$, la fréquence fondamentale adimensionnelle atteint une valeur presque constante c'est-à-dire indépendante du rapport (a/h) et on peut dire tout simplement que la plaque se comporte comme une plaque mince.

Tableau V.4 : Fréquences fondamentales $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapport longueur / épaisseur a/h avec $E_1/E_2 = 40$.

aNo. of layers	Theory	a/h					
		2	4	10	20	50	100
(0/90) ₁	CLPT	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
	FSDT	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	PSDT	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	ESDT	5.8948	8.4561	10.5964	11.1132	11.2764	11.3005
	SSDT	5.8000	8.4017	10.5811	11.1089	11.2757	11.3003
	Present	5.6568	8.3208	10.5587	11.1025	11.2746	11.3000
(0/90) ₂	CLPT	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3083
	FSDT	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	PSDT	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	ESDT	5.8129	9.7362	14.8338	16.5683	17.1840	17.2781
	SSDT	5.7794	9.7314	14.8376	16.5700	17.1843	17.2782
	Present	5.7413	9.7464	14.8571	16.5773	17.1857	17.2786
(0/90) ₃	CLPT	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
	FSDT	5.6992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	PSDT	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	ESDT	5.9888	10.0323	15.4702	17.3787	18.0646	18.1699
	SSDT	5.9243	10.0036	15.4634	17.3768	18.0643	18.1698
	Present	5.8428	9.9838	15.4676	17.3792	18.0648	18.1699
(0/90) ₅	CLPT	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457
	FSDT	5.7140	10.0628	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	PSDT	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	ESDT	6.0889	10.1854	15.7847	17.7784	18.4991	18.6099
	SSDT	6.0133	10.1481	15.7739	17.7751	18.4985	18.6097
	Present	5.9129	10.1137	15.7716	17.7753	18.4986	18.6098

V.3.3 Effet de la fondation élastique :

Afin de valider la méthode actuelle dans le cas des plaques reposant sur une base élastique, les résultats du paramètre des fréquences naturelles fondamentales d'une plaque épaisse isotrope avec trios différentes valeurs du rapport longueur sur épaisseur (a/h), trois différentes valeurs de coefficients élastiques de Winkler et trios différentes valeurs de coefficient de Pasternak sont présentées dans le Tableau V.5. Ils sont comparés avec ceux obtenus par [Akhavan et al] et [Ait Atmane et al. (2010)]. On peut voir l'excellent accord de la nouvelle théorie avec la théorie de [Ait Atmane et al. (2010)]. On note ici que D est défini par [Ait Atmane et al. (2010)] comme : $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$.

Tableau V.5: Comparaison des paramètres de fréquences fondamentales $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque carrée isotrope.

Rapport longueur / épaisseur	K_0, K_1	Theories		
		Akhavan et al. (2009)	Ait Atmane et al. (2010)	Présent théorie
$a/h = 1000$	0, 0	19.7391	19.7392	19.7322
	$10^2, 10$	26.2112	26.2112	26.2049
	$10^3, 10^2$	57.9961	57.9962	57.9894
$a/h = 10$	0, 0	19.0840	19.0658	19.0657
	$10^2, 10$	25.6368	25.6236	25.6235
	$10^3, 10^2$	57.3969	57.3923	57.3922
$a/h = 5$	0, 0	17.5055	17.4531	17.4531
	$10^2, 10$	24.3074	24.2728	24.2727
	$10^3, 10^2$	56.0359	56.0311	56.0310

D'après les résultats obtenus, on peut remarquer que les fréquences fondamentales adimensionnelles de notre plaque augmentent d'une manière considérable quand les paramètres de base augmentent.

En vue d'une étude plus appropriées vis-à-vis de la vibration libre des plaques composites sur une fondation élastique, ces dernières sont conduites à une étude paramétrique qui tient compte des variables suivantes :

- Le rapport de propriétés matérielles.
- Le coefficient élastique de Winkler k_0 .
- Le coefficient de cisaillement (Pasternak) k_1 .

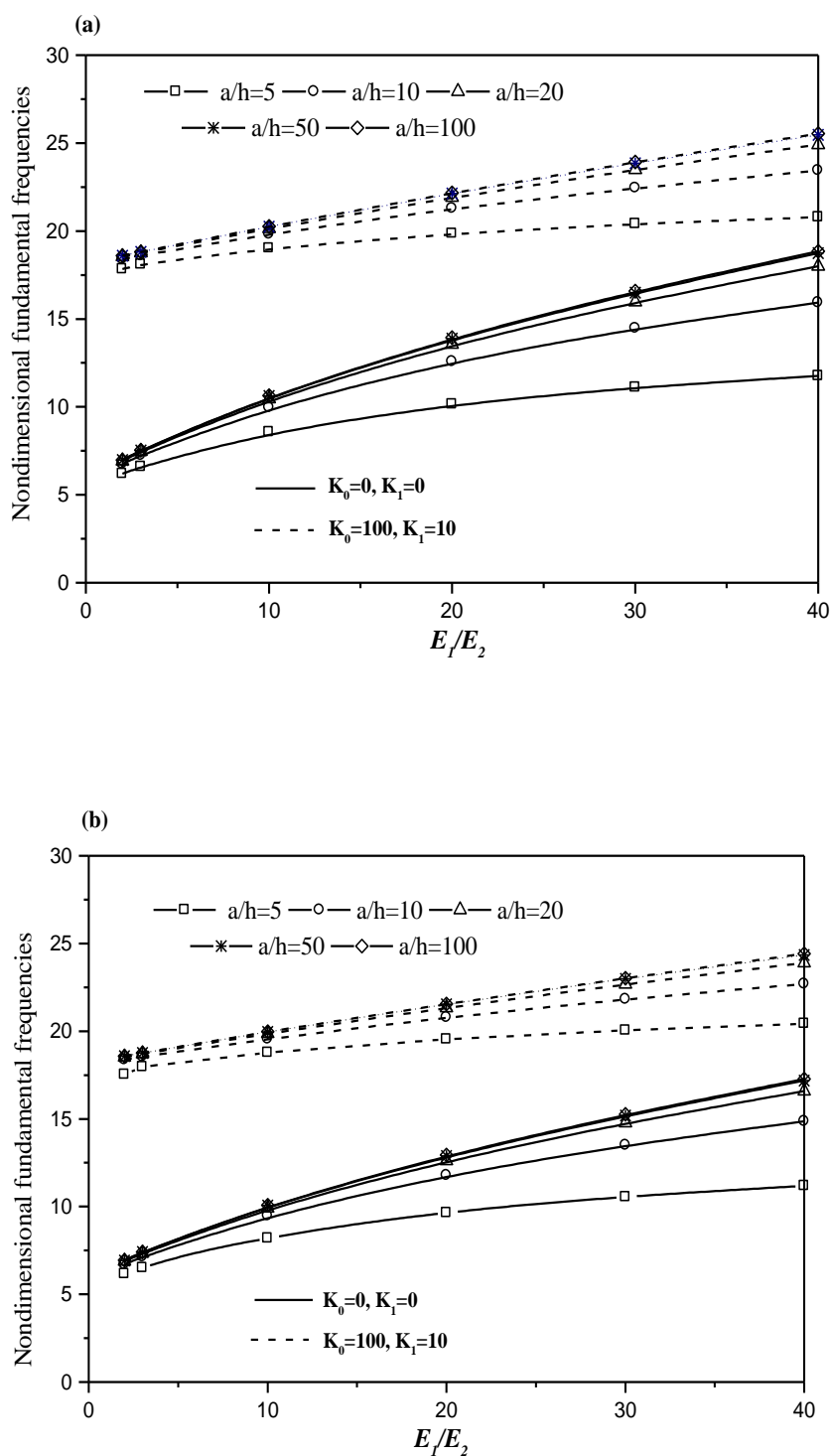


Figure V.1 : Effet de rapport d'orthotropie sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée sur appuis élastique pour différent rapport a/h .

(a) $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et (b) $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.

Les variations des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée croisé symétriquement et antisymétriquement sur une Fondation élastique avec le rapport d'orthotropie sont montrées dans les **Figures V.1 a et V.1 b**. On voit que l'augmentation du degré d'orthotropie provoque une augmentation des valeurs de la fréquence fondamentale pour différent rapport a/h .

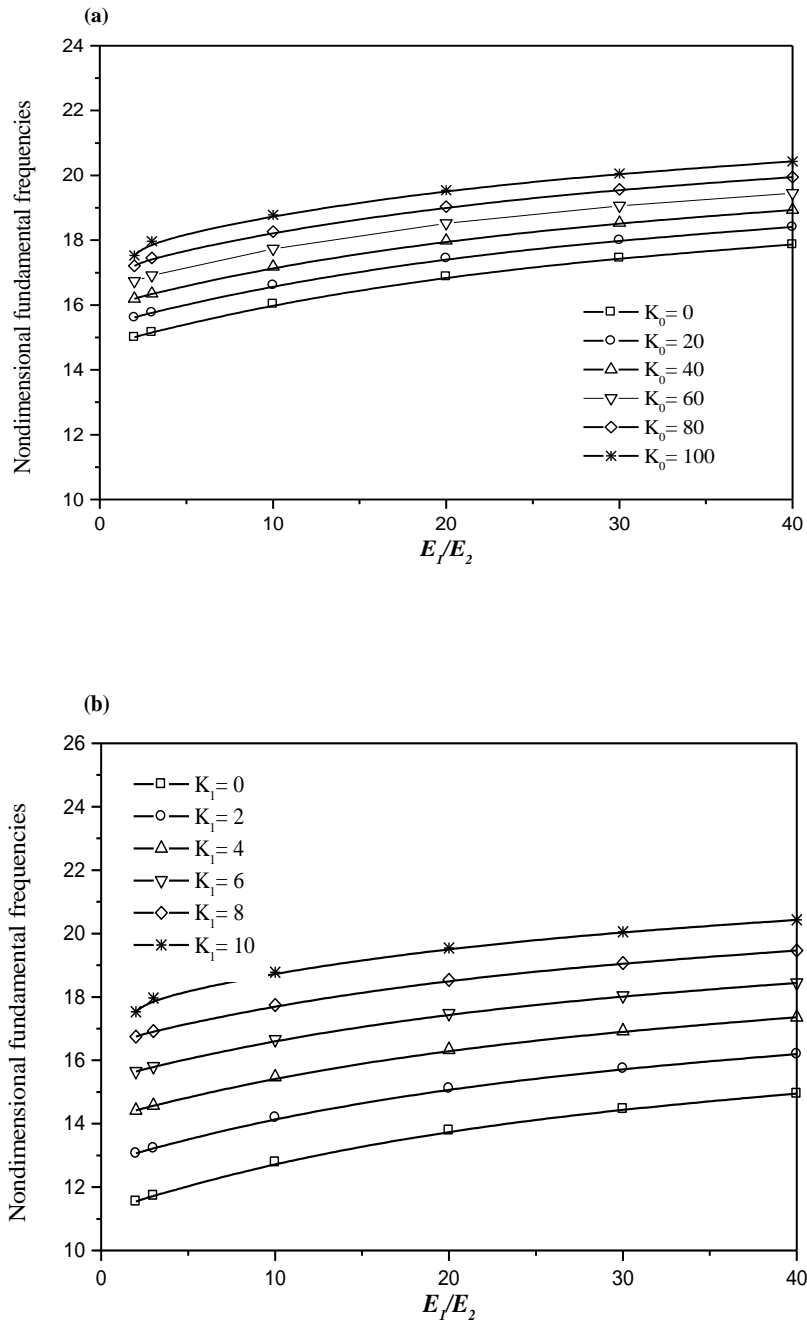


Figure V.2: Effet de rapport d'orthotropie sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée croisé antisymétriquement (0/90/0/90) sur fondation élastique:

(a) $K_1 = 10$; (b) $K_0 = 100$.

L'effet de la rigidité de la fondation sur le facteur adimensionnel de la vibration libre de plaque composite est montré dans les figures V.2a et V.2b ($a / h = 10$). On peut observer clairement que l'augmentation du rapport d'orthotropie du matériau conduit à une augmentation des fréquences fondamentales adimensionnelles.

V.4. Conclusion

Dans ce chapitre, la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné est adoptée pour analyser le comportement de la vibration libre des plaques stratifiées carrés. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes sur les bords intérieur et extérieur de la plaque, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Toutes les études comparatives montrent que les fréquences naturelles obtenues par la théorie proposée avec quatre inconnues sont presque identiques à ceux prévus par d'autres théories de déformation de cisaillement contenant cinq inconnues. En outre, contrairement à d'autres théories, la théorie proposée donne lieu à seulement quatre équations entraînant la simplicité de calcul en comparaison avec les autres théories d'ordre élevé rapportées dans la littérature ayant plus de nombre d'équations. Les résultats obtenus sont comparé avec la théorie tridimensionnelle d'élasticité linéaire et d'autres modèles de la littérature.

Nous avons effectué plusieurs applications numériques pour prédire les différents paramètres ayant une influencés sur la fréquence fondamentales adimensionnelle pour la vibration libre des plaques carré en matériaux composites stratifiés à plis croisés base sur fondation élastique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse avait pour objectif l'étude du comportement en vibration libre des plaques en matériaux composites isotropes et anisotropes reposé sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Les matériaux utilisés dans ce travail sont constitués de stratifiés croisé symétrique et antisymétrique.

Dans le cadre de ce travail, la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné à quatre variables est développé avec succès les comportements de vibrations des plaques stratifié simplement appui sur fondation élastique. La présente théorie de la plaque développée par El Meiche et al. (2011) se étend pour la première fois au comportement de vibration libre de plaques composites stratifiés sur fondation élastique. Cette théorie identifiée la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Équations du mouvement sont dérivées du principe de la Hamilton. Toutes les études comparatives montrent que les fréquences naturelles obtenues par la théorie proposée avec quatre inconnues sont presque identiques à ceux prévus par d'autres théories de déformation de cisaillement contenant cinq inconnues. Les équations du mouvement sont dérivées de principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des structures en plaques composites stratifiées antisymétriques à empilements croisés reposé sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak.

Des résultats numériques obtenus à l'aide de la théorie actuelle sont comparés soit avec des solutions de la théorie tridimensionnelle linéaire d'élasticité de [Noor, 1973], la théorie classique CPT, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT) de [Whitney & Pagano, 1970], la théorie de déformation en cisaillement parabolique (PSDPT) de [Reddy 1984], et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques (SSDPT) de [Touratier 1991] et celles qui sont calculés à l'aide d'autres théories d'ordre élevé.

On prend en compte le point de vue technique, l'absence de prise en compte de cisaillement transversal, ce qui constitue également un effet important sur le comportement vibratoire de la plaque, surtout en vue des comparaisons. Dans le cas de la prise en compte de cisaillement transversal ; il suffit de choisir l'ordre des fonctions de cisaillement et d'implémenter dans les calculs, en introduisant notamment les termes de cisaillement transversal dans les équations énergétiques. On peut en conclure que la théorie proposée est non seulement précise mais également efficace pour analyser les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées. D'après la comparaison de la nouvelle théorie avec d'autres modèles d'ordre élevé nous avons tiré les points suivants :

- ✓ Il est montré que l'augmentation des paramètres de la fondation élastique conduit à une augmentation des fréquences propres.
- ✓ L'augmentation du nombre de couches, la rigidité de la plaque est augmentée.
- ✓ Les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique CPT sont très supérieures que ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement, Cela implique que les résultats estimés par la théorie CPT donne une grande erreur pour une plaque épaisse.
- ✓ Les comparaisons des résultats des fréquences en utilisant le matériau isotrope montrent que les fréquences fondamentales de cette nouvelle théorie raffinée avec les résultats obtenus par [Akhavan et al.] sont presque identiques.
- ✓ Il est montré que les fréquences fondamentales naturelles diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation du rapport d'épaisseur de la couche.
- ✓ L'orientation des fibres à un grand effet sur le comportement vibratoire de la plaque.

Au futur on souhaite pour approfondir la recherche sur ce sujet on considère :

- ✓ Utilisation de la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné à quatre variables pour d'autres types d'appuis.
- ✓ Utilisation de la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné à quatre variables pour analysé la vibration forcée des plaques composites.

- ✓ L'influence de la température sur la vibration libre des plaques stratifiées orthotropes repose sur fondation élastique.
- ✓ Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode des éléments permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

L'objectif à l'avenir est de développer un outil éléments finis à base de déplacement comme le montre Vo et thaïlandaise (2012) pour l'analyse locale des plaques composites. Pour cela, la déclaration variationnelle dans l'équation. (IV.16) exige que les composants de flexion et de cisaillement de déplacement transversal et être deux fois dérivable et à continuité C^1 , alors que les déplacements axiaux u_0 et v_0 doit être une seule fois dérivable et à continuité C^0 . Ainsi, une formulation des éléments finis de la théorie actuelle sera considérée dans les travaux futurs de résoudre des problèmes plus complexes.

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées à quatre variables proposée est exacte, simple et même efficace pour la résolution du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites stratifiés, Cette théorie est donc très utile pour la prédiction de la vibration libre des structures composites sur fondation élastique pour continuer la recherche dans le domaine de l'aérodynamique.

Reference
Bibliographique

Bibliographie

[Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A., 2010]: “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int J Mech Mater Des*, **6(2)**, 113–21.

[El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda.Bedia, E.A. 2011]“A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**, 237–247.

[Billoët, 1993] : J.L. Billoët, ‘Introduction aux matériaux composites à hautes performances’, *Edition Broché*, 1993.

[Chrétien, 1986] : G. Chrétien, ‘Matériaux composites’, *Edition Technique et Documentation (Lavoisier)*, ISBN 2 85206 325 5, 1986.

[Balay et al., 2004] : C. Balay, Y. Grohens, I. Pillin, ‘Etat de l’art sur les matériaux composites biodegradables’, *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, Vol. 14, pp 135-166, 2004.

[Akhavan, H., Hosseini Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh. 2009]: “Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis”, *Computational Materials Science*, **44**, 951–961.

[Barbero, E.J., Reddy, J.N. 1990]:“An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1 –14.

[Bert, C.W., 1974]: “Structure design and analysis: part I. In: Chamis, C.C. (Ed.), *Analysis of Plates*. Academic Press, New York (Chapter 4).

[Bert, C.W., Chen, T.L.C. 1978]: “Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates”, *International Journal of Solids and Structure*, **14**, 465–473.

[Carrera, E. 2003]:“Historical review of zigzag theories for multilayered plates and shells”, *Appl Mech Rev*, **56**, 287–308.

[Cho, M., Oh, J. 2004]: “A finite element based on cubic zigzag plate theory for the prediction of thermo-electric-mechanical behaviours”, *International Journal of Solids and Structures*, **41**, 1357 – 1375.

[Fortier, R.C., Rossettos, J.N. 1973]: “On the vibration of shear deformable curved anisotropic composite plates”, *Journal of Applied mechanics*, **40**, 299–301.

- [Gherlone, M., Di Sciuva, M. 2007]: “Thermo-mechanics of undamaged and damaged multilayered composite plates: a sub-laminates finite element approach”, *Composite Structures*, **81**, 125–136.
- [Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C. 2012]: “A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 43–53.
- [Matsunaga, H. 2009]: “Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings”, *Compos. Struct.*, **87**, 344–57.
- [Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. 2003] “Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *International Journal of solids and structures*, **40**, 1525–1546.
- [Khdeir, A.A., Reddy, J.N. 1999] “Free vibration of laminated composite plates using second-order shear deformation theory”, *Composite Structures*, **71**, 617–626.
- [Lee, H.J., Saravanos, D.A. 1997] “Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates”, *International Journal of Solids Structures*, **34**, 3355 – 3371.
- [Mindlin, R.D. 1951] “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31–38.
- [Noor, AK. 1973] “Free vibrations of multilayered composite plates”, *AIAA J*, **11**, 1038–1039.
- [Rastgaar, Agaah, M., Mahinfalah, M., Nakhaie Jazar, G. 2006]: “Natural frequencies of laminated composite plates using third-order shear deformation theory”, *Composite Structures*, **72**, 273–279.
- [Reddy, J.N. 1979]: “Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method”, *Journal of Sound and Vibration*, **66 (4)**, 565–576.
- [Reddy, J.N. 1984]: “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *ASME J Appl Mech*, **51**, 745–752.
- [Reddy, J.N., Khdeir, A.A. 1989]: “Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories”, *AIAAJ*, **27(12)**, 1808–1817.
- [Reddy, J.N. 1993]: “An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates”, *Compos Struct*, **25**, 21–35.
- [Reddy, J.N., Robbins, D.H. 1994]: “Theories and computational models for composite laminates”, *Applied Mechanics Reviews*, **47**, 147–169.

- [Reddy, JN. 1997]: “Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis”, New York: CRC Press.
- [Shankara, C.A., Iyengar, N.G. 1996]: “A C0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates”, *Journal of Sound and Vibration*, **191**(5), 721–738.
- [Shinha, P.K., Rath, A.K. 1975]: “Vibration and buckling of cross-ply laminated circular cylindrical panels”, *Aeronautical Quarterly*, **26**, 211–218.
- [Şimşek, M. 2010a]: “Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories”, *Compos. Struct.*, **92**, 904–917.
- [Şimşek, M. 2010b]: “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories”, *Nuclear Engineering and Design*, **240**, 697-705.
- [Singh, B.N., Yadav, D., Iyengar, N.G.R. 2001]: “Natural frequencies of composite plates with random material properties using higher-order shear deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 2193–2214.
- [Srinivas, S., Rao, A.K., 1970]: “Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates”, *International Journal of solids and structures*, **6**, 1463–1481.
- [Stavski, Y., 1965]: “On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli”, *Topics in Applied Mechanics*. American Elsevier, New York, 105.
- [Touratier, M., 1991]: “An efficient standard plate theory”, *Int J Eng Sci.*, **29**, 901–16.
- [Vo, T.P., Thai, H.T., 2012]: “Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*.
- [Whitney, J.M., Pagano, N.J., 1970]: “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *Journal of Applied mechanics*, **37**, 1031–1036.
- [Whitney, J.M., Sun, C.T., 1973]: “A higher-order theory for extensional motion of laminated composites”, *Journal of sound and vibration*, **30**, 85–97.
- [Yang, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y., 1966]: “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”, *International Journal of Solids and Structure*, **2**, 665–684.
- [Duc Thai Nguyen. 2012] : Benchmark d'un modèle layer Wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Other. Université Paris-Est, 2012. French.
- [L.E. Aghalovyan. 2007]: An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies. In G.Jaiani and G.Podio-Guidugli

(Eds), IUTAM Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Models, Springer, 2007.

[H. Kraus. 1967]: Thin elastic shells. 1967.

[M. Choa and Jun-Sik Kimb, 2000]: A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. Composites: Part B, 31 :65–74, 2000.

[M. Touratier. 1991]: An efficient standard plate theory. Engng Sci, 29 :901–916, 1991.

[E. Reissner, 1945]: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. ASME J.appl. Mech, 12 :69–76, 1945.

[J N. Reddy, 1984]: A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, 51 :745–752, 1984.

[N.S. Putcha and J.N. Reddy. 1986]: Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element on a refined plate theory. Journal of Sound and Vibration, 104, no. 2:285–300, 1986.

[E. Carrera. 2002]: Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plate and shell. Archive of Computational Methods in Engineering, 9 no 2:87–140, 2002.

[H. Murakami. 1986]: Laminated composite plate theory with improved in-plane response. Journal of Applied Mechanics, 53(3) :661–666, 1986.