

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbes
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Par :

KHELIFA ZOUBIDA

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Intitulée de la thèse

**Analyse et modélisation de l'influence de
cisaillement transverse sur le comportement statique
et dynamique des poutres FGM**

Soutenue le

Composition de jury :

Pr. TOUNSI ABDELOUAHED

U.D.L – SBAPrésident du jury

MCA.T.HASSAIN DAOUDJI

U TIARETDirecteur de thèse

Pr. E. A. ADDA BEDIA

UDL - SBA Co-directeur de thèse

MCA . ZIDOUR MOHAMED

U TIARETEXamineur

MCA. AMEUR MOHAMED

ENP Oran Examineur

MCA .BOURAMANA MOHAMED.UDL - SBA Examineur

MCA HADJI LAZREGU TIARET Invité

Année universitaire 2015/2016

Remerciement

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr **TAHAR HESSEIN DAOUADJI** de m'avoir confié ce sujet de recherche. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Son soutien et ses conseils depuis ma graduation m'ont beaucoup aidé et poussé vers l'avant.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr **HADJI LAZREG** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants et mes collègues du département du génie civil Université de Tiaret à Mr **BOUAKKAZ KHALED** ; Mr **TLIDJI YUCEF** ; Mr **ZIDOUR MOHAMED**.

Je souhaite exprimer mes remerciements à Mr **E. ADDA BEDIA** ; Mr **A. TOUNSI** et l'ensemble des chercheurs du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je tiens aussi à remercier : mes chers parents qui ont toujours sacrifié pour me voir réussir ; mon mari Tourquiabdelkader et mes deux familles Khelifa et Tourqui

Résumé

L'objectif de ce travail est d'effectuer une étude statique et dynamique des poutres FGM sous l'influence du cisaillement transverse en se basant sur le concept de l'axe neutre. Sachant que les propriétés matérielles varient selon une loi de puissance suivant la direction transversale de la poutre.

Nous utilisons une théorie raffinée de cisaillement transverse d'ordre élevé pour la réponse statique et dynamique des poutres fonctionnellement graduées.

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur et satisfait les conditions de traction nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement.

En utilisant cette présente théorie et le concept de la surface neutre, les équations de mouvement pour la poutre en FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution analytique de type Navier a été utilisée pour le problème de flexion et de la vibration libre. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie.

Pour montrer la précision et l'efficacité de cette théorie, les résultats obtenus sont comparés avec les résultats existant dans la littérature.

Mots clés : Cisaillement transverse, matériaux à gradient de propriété, Axe neutre, Vibration, Solution de Navier.

Abstract

The objective of this work is to carry a static and dynamic study of FGM beams under of transverse shear based on the concept of the neutral axis .Knowingthatmaterialproperties vary according to a power law following the transverse direction of the beam.We use a refinedtheoryof transverse shear stiff nesses of high order for the static and dynamic response of functionally graded beams.

The mostinterestingfeature of this theory is that it represents a parabolic variation of transverse shear stresses according to the thickness and satisfies the conditions of traction zero on the top and bottom surfaces of the beam without shear correction factor.

Usingthistheory and the concept of the neutral axis.Theequations of motion for the FGMbeam are obtained by using the principle of Hamilton's. The analytical solutions of type Navier was used for the problem of bending and free vibration. Numerical examples are presented to verify the accuracy of current theory. To demonstrate the accuracy and efficiency of the current theory, the results obtained are compared with the results of other theories of shear in the literature.

Key words:FGM, transverse shear, materials with gradient property, neutral axis, Vibration, Solution of Navier.

الهدف من هذا العمل القيام بدراسة السلوك الستاتيكي و الديناميكي لرافدة ذات خصائص مادية متغيرة بالتدرج في اتجاه الارتفاع، تحت تأثير القص العرضي استنادا للمحور المحايد مع العلم أن خصائص المواد تختلف وفقا لقانون الاسية فيالاتجاه العرضي للعارضة

نستخدم نظرية مكررة من تشوه القص من الترتيب العالي للاستجابة الستاتيكية والديناميكية للعوارض المتدرجة وظيفيا.

الميزة الأكثر إثارة للاهتمام في هذه النظرية هو أنها تمثل قطعي مكافئ لاجهادات القص وفقا للسلك وفي شروط الجبر المنعدمة على الأسطح العلوية والسفلية للعارضة دون عامل التصحيح القص.

باستخدام هذه النظرية والمحور المحايد معادلات الحركة للعارضة يتم الحصول عليها باستخدام مبدأ "هاملتون" . الحل التحليلي لنوع "نافير" استخدمت للمشكلة من الانحناء والاهتزاز الحر وعرضنا أمثلة عديدة للتحقق من دقتها , لإثبات دقة وكفاءة النظرية، تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج نظريات أخرى.

الكلمات المفتاحية: عرضية القص، المواد مع خاصية التدرج، المحور المحايد، اهتزاز، طول نافيه

Sommaire

Résumé.....	i
Abstract.....	ii
ملخص.....	iii
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	vi
Introduction générale.....	2
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET A GRADIENT DE PROPRIETES	
I. Introduction.....	5
I.1. Les matériaux composites	5
I.1.1. Les composites grandes diffusions (GD).....	6
I.1.2. Les composites hautes performances (HP).....	6
I.1.3. Les Matrices.....	6
I.1.4. Les renforts.....	7
I.5 Propriétés physiques des composites	9
I.6. Propriétés mécaniques des composites.....	11
I.7. Les matériaux à gradient de propriétés type FGM.....	12
I.8 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	14
I.9. Propriétés matérielles effectives des FGM.....	15
I.10 domaines d'utilisation des FGMs	16
I.10.1 Aéronautique.....	16
I.10.2 Matières industrielles.....	17

I.10.3 Optoélectronique.....	17
I.10.4 Biomatériaux.....	17
I.10.5 Génie civil.....	18
I.11 Les méthodes d'élaboration des FGM.....	19
I.11.1 Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade).....	19
I.11.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	20
I.11.3 Dépôt par Electrophorèse.....	20
I.11.4 Compaction Sèche Des Poudres	21
I.11.5 Projection Plasma	21
I.11.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	22
I.11.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	23
I.11.8 Frittage En Infiltration	24
I.11.9 Frittage Laser Différentiel.....	24
I.11.10 Implantation ionique (Sputtering) I.11.10 Implantation ionique (Sputtering).....	25
I.12 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM	25
I.12.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM	25
I.12.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	27
I.12.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	27
I.13. Conclusion.....	29
 CHAPITRE II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES	
II.1 Introduction.....	31
II.2 Historique.....	31
II.3 Equations de base de la théorie d'élasticité	31

II.3.1 Définition.....	31
II.3.2 Relation déformations-déplacements	37
II.3.3 Relation contraintes-déformations.....	39
II.3.4 Equations d'équilibre	43
II.4 La théorie d'élasticité plane	50
II.4.1 Etat plan de contrainte.....	50
II.4.2 Etat plan de déformation.....	51
II.5 Les équations fondamentales de l'élasticité plane	53
II.5.1 Les équations d'équilibre.....	53
II.6 Loi de comportement des matériaux élastiques.....	54
II.7 L'équations de compatibilité et le potentiel des contraintes.....	56
II.8 La loi de Hooke	56
II. 8.1 Loi de Hooke généralisée.....	57
II.9 Milieux solides.....	59
II.9.1 solide élastique linéaires	59
II.10 Les différentes théories des poutres.....	63
II.10. 1 Modèle d'Euler Bernoulli (classical laminated beam theory- CLBT).....	63
II.10.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT).....	64
II.10.3 Théorie d'Ordre Elevé	66
II.11 Conclusion	68
 CHAPITRE III : Etude analytique du comportement statique et dynamique des poutres FGM en se basant sur le concept de l'axe neutre	
III.1 Introduction.....	70

III.2. Formulation théorique	71
III.2. 1. Surface physique neutre.....	71
III.2.2. Hypothèses de base.....	73
III.2.3. Equations cinématiques et constitutives.....	74
III.2.4 Équations du mouvement.....	74
III.3. Solution analytique.....	77
III.4. Analyse du comportement statique et dynamique des poutres FGM utilisant un nouveau modèle de cisaillement.....	78
III.4.1. Cinématique et équations constitutives	78
III.4.2. Équations du mouvement	79
IV.3. Solution analytique.....	81
III.5. Conclusion.....	83
CHAPITRE IV : RESULTAS ET DISCUSSION	
IV.1. Introduction	83
V.2. Résultats numériques et discussion.....	83
IV.2.1. Résulta de la nouvelle théorie de cisaillement.....	83
IV.2.1 Résultats d'analyse de flexion	81
IV.2.2 Résultats pour l'analyse de la vibration libre	88
IV.2.2 Résultat du nouveau modèle de cisaillement.....	95
IV.2.2.1 Résultats d'analyse de flexion.....	95
IV.2.2.1 Résultats d'analyse de la vibration libre.....	98
IV.3 Conclusion	99

Conclusion générale et perspectives.....	101
Références bibliographiques.....	103

Liste des figures

Figure.I.1	Les différentes familles de matrice.....	8
Figure.I.2	Principaux matériaux de renfort.....	8
Figure I.3	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	14
Figure I.4	La distribution composante des matériaux.....	15
Figure I.5	Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	16
FigureI.6	Principe de la Méthode de Coulage en Bande.....	19
Figure I.7	Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux.....	21
Figure I.8	Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane).....	22
FigureI.9	Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	23
Figure I.10	Disposition du procédé frittage laser différentiel.....	25
Figure. I.11	Les dimensions de la poutre FGM.....	26
Figure I.12	La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	27
Figure I.13	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	29
Figure. I.14	La variation du module de Young de la poutre E-FGM.....	29
Figure II.1.	Présentation tridimensionnelle des contraintes sur une surface gauche.....	32
Figure II.2	Etat de contrainte pour un élément tridimensionnel infiniment petit.....	33
Figure II.3	Point A sur la surface d'un solide.....	34
Figure II.4	Contrainte principal et direction principale.....	35
Figure II.5	Déformations dans un solide.....	36
Figure II.6	Déformation au voisinage d'un point A.....	37
Figure II.7	Prolongement linéaire d'un élément prismatique.....	40
Figure II.8	Les contraintes normales sur les différentes faces d'un élément.....	41
Figure II-9	Variation des contraintes pour un élément infinitésimal.....	44
Figure II.10	La variation des contraintes sur les facettes d'un élément.....	45
Figure II.11	Présentation des contraintes agissant sur un élément.....	47
Figure II. 12	Configuration tridimensionnelle des contraintes.....	48
Figure II.13	Exemple de structures en déformation plane.....	52
Figure II.14	Les conditions de contour en contrainte plane.....	54
Figure II. 15	Cinématique d'Euler Bernoulli.....	63
Figure II.16	Cinématique de Timoshenko.....	65
Figure II.17	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	66
Figure III.1	Position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque FGM.....	71
Figure IV.1	Variation de la contrainte normale axiale à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).....	87
Figure IV.2	Variation de la contrainte du cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).....	87

Figure IV.3 Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de la poutre FGM pour différentes valeurs d'indice de puissance p et du rapport L/h 88

Figure. IV.4 Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de la poutre FGM pour différentes valeurs d'indice de puissance p et du rapport L/h 90

Liste des tableaux

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	13
Tableau II.1 : indicatif les modules d'Young et coefficients de Poisson de certains matériaux Usuels.....	62
Tableau IV.1 : Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L/h=5$).....	81
Tableau IV.2 : Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L/h=10$).....	82
Tableau IV.3 : Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L/h=20$).....	83
Tableau IV.4 : Distribution des contraintes adimensionnelles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L=2h$).....	86
Tableau IV.4 Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de puissance pour la poutre FGM ($L/h = 20$).....	89

Introduction générale

Introduction générale

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ses propriétés par association d'un matériau très dure à la surface d'un matériau tenace pose le problème d'interface. Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations de contraintes, et aussi pour les matériaux composites, il y a de fortes chances que le décollement fibre –matrice se produise à certaines conditions de chargement extrêmes; la solution d'une transition continue des propriétés recherchées par un gradient de propriétés FGM et la variation progressive de la fraction volumétrique des matériaux FGM peut résoudre ce problème. Face à ce problème; l'utilisation des matériaux à gradient de propriété type FGM demeure efficace parce qu'ils présentent un changement progressif dans la composition et les propriétés en fonction de l'orientation spatiale à l'intérieur du matériau. Parmi les classes des matériaux composites nous avons les matériaux FGM ayant une variation continue des propriétés d'une surface à l'autre.

Ces matériaux peuvent être fabriqués en faisant varier la teneur en pourcentage de deux ou plusieurs matériaux tels que les nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de propriété souhaitée dans les directions dimensionnelles. Les matériaux à gradient de propriété FGM sont des matériaux composites dans lesquels les propriétés mécaniques varient continuellement suivant des directions préférées. Macroscopiquement, les matériaux FGM sont assumées de les considérer comme matériaux isotropes.

Plusieurs chercheurs ont étudiés le comportement des poutres en matériau FGM, et qui ont définis la fraction volumétrique en utilisant plusieurs lois de mélange; tel que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E- FGM ou encore la loi sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes entre tous les interfaces.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM); ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

L'utilisation des FGM a augmenté considérablement pendant les deux dernières décennies, en particulier dans la construction aérospatiale, structures des véhicules et notamment dans les applications civiles et militaires. Les composants structuraux faits de matériaux anisotropes

sont idéaux pour des applications structurales en raison des rapports élevés de force/poids et de rigidité/poids.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Des Nouveaux programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21^{ème} siècle. Un nouveau programme Japonais pris en charge par les universités et qui traite 67 thématiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Le but de ce travail est d'analyser le comportement statique et dynamique des poutres en FGM sous l'influence du cisaillement transverse en utilisant une théorie de cisaillement raffinée des poutres en se basant sur le concept de l'axe neutre, Pour cela nous sommes intéressés aux matériaux à gradient évalué ou nous étions amenés à les analyser par des formulations analytiques et à étudier le phénomène de flexion et de vibration libre des poutres FGM.

Notre travail a pris en compte deux parties essentielles, à savoir: la partie théorique et la partie analytique.

La partie théorique : composé de deux chapitres, le premier chapitre traite des généralités sur les matériaux à gradient de propriété tout en définissant leurs concepts, leurs caractéristiques et leurs domaines d'application.

Le second chapitre sera consacré à l'étude et l'analyse des différentes théories des poutres.

La partie analytique contient deux chapitres, Au troisième chapitre, une analyse statique et dynamique des poutres en matériaux à gradient de propriété type FGM en se basant sur le concept de la surface neutre.

Quant au quatrième chapitre une comparaison et validation des résultats numériques, tout en les comparant avec ceux trouvés dans les études et théories relatives au cisaillement.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette présente théorie dans la résolution du comportement statique et dynamique des poutres FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

Chapitre I

**GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET A
GRADIENT DE PROPRIETES**

I. Introduction

Un matériau n'est pas de la matière première brute, mais une matière élaborée en vue d'un usage. Cela nécessite une symbiose entre la préparation de nouveaux composés et la conception de nouveaux objets. Il est évident que la diversité des matériaux modernes est telle qu'on ne peut en faire une représentation exhaustive en quelques lignes. Il est plus en plus difficile de faire un choix entre les matériaux dits « traditionnels » comme le bois, le béton et l'acier et les matériaux « évolutifs » comme les céramiques, les métaux, les plastiques. La tendance actuelle n'est d'ailleurs pas de les opposer comme des ennemis mais de les marier pour engendrer des matériaux plus performants tels que le matériau composite et les matériaux à gradient de propriétés « FGM » [Elomari 2011]

I.1. Les matériaux composites

Un matériau composite peut être défini comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de nature différente à échelle microstructurale. Les composites sont le plus souvent constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels ;

Ils apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les matériaux composites (à matrice métallique, élastomère, polymère ou céramique) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer des fonctions (forme et matériaux), alors des systèmes de plus en plus performants.

Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement. Parmi les composites [Kassimi 2011],

On distingue deux types :

I.1.1. Les composites grandes diffusions (GD)

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

I.1.2. Les composites hautes performances (HP)

Principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP.

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort

I.1.3. Les Matrices :

Les matrices ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. Les matrices peuvent être de nature métallique, céramiques ou polymère (figure I-1)

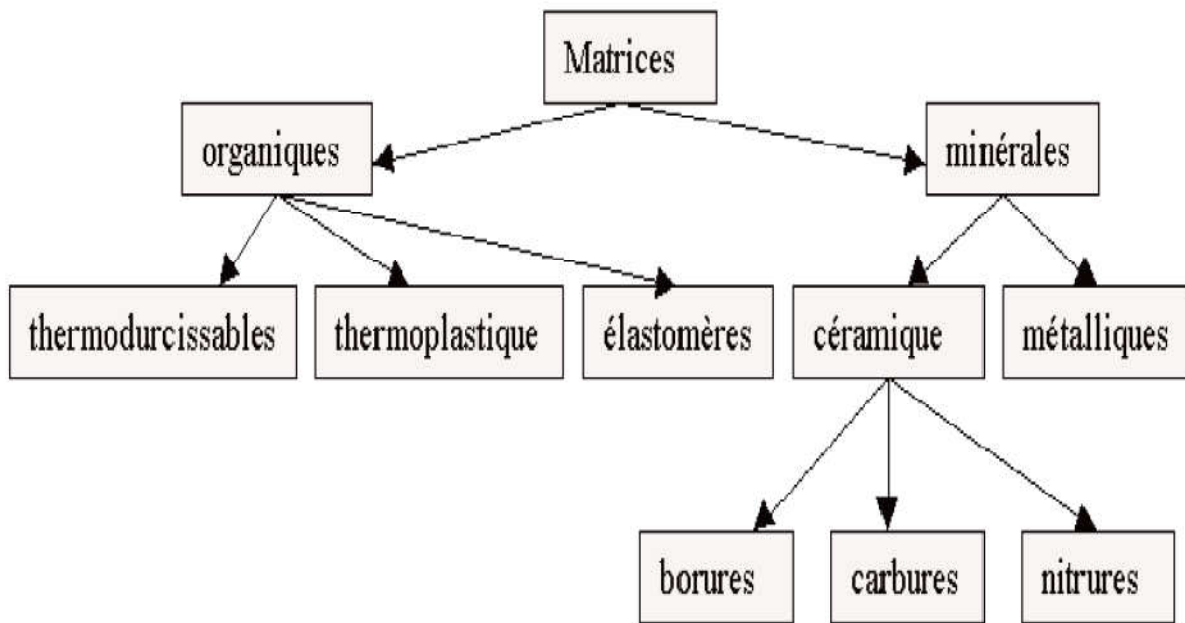


Figure.I.1 : Les différentes familles de matrice[Bahlouli, 1993].

Les matrices les plus utilisées pour la fabrication des matériaux composites sont en matériaux résineux constitués de polymères, modifiés par différents adjuvants et additifs : agents de démoulage, stabilisants, pigments

I.1.4. Les renforts :

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique.
- l'architecture du renfort.

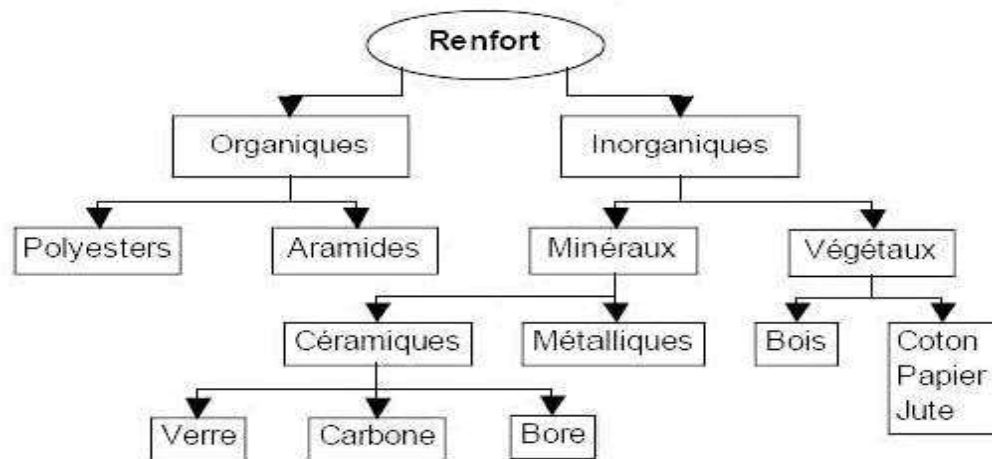


Figure.I.2.Principaux matériaux de renfort [Glossaire, 2004]

I.1.4.1 Fibre de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques). [Ait atmane2011]

I.1.4.2 Fibre de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

I.1.4.3 Fibre d'aramide

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- La fibre haut module : employée dans le renforcement pour les composites hautes

performances.

I.1.4.4 Fibre de bore

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

I.1.4.5 Fibre de silice (ou de quartz)

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

I.1.4.6 Fibres de polyéthylène de haut module

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

I.5 Propriétés physiques des composites

Chaque type de matériau composite a ses propres caractéristiques physiques selon les caractéristiques de fibres utilisées, le pourcentage de fibres, le type de résine, les configurations de la section transversale et de la surface du matériau de renforcement et de la méthode de fabrication.

a. Propriétés de masse

Les fractions massiques (des fibres, de la matrice et des additifs) peuvent être déterminées à partir d'essais en laboratoire. La taille des particules inorganiques, qui peuvent être sphériques ou allongées, est donnée en termes de tailles moyennes des particules, exprimée normalement comme le diamètre sphérique équivalent, en microns.

La taille moyenne des particules varie entre 0,1 et 0,3 μm . Les tailles des particules sont généralement graduées, échelonnées, pour assurer une bonne distribution spatiale des fillers. On doit reconnaître que les diamètres des fibres de renforcement non métalliques courantes qui s'étendent de 6 à 25 μm , peuvent être du même ordre de grandeur que les diamètres des fillers. Ceci peut avoir un effet sur les propriétés résultantes du composite. De plus, de

nombreux fillers ont des formes allongées et peuvent produire une anisotropie structurale dans la phase matricielle. Cependant, la résine est normalement isotropique.

b. Propriétés thermiques

La connaissance des coefficients d'expansion thermique est particulièrement importante. Dans le cas d'un béton renforcé de barres en acier, les CET des deux matériaux ont des valeurs très proches. On a donc suggéré que le béton renforcé d'acier pouvait tolérer des changements en température sans générer des contraintes internes à l'interface entre les barres de renforcement et le béton. Celles-ci pourraient conduire à un endommagement ou à une réduction de la capacité d'adhérence. Mais les barres, dans ce cas là, ont deux C.E.T, un dans le sens longitudinal et l'autre dans le sens transversal.

Pour la plupart des matériaux composites unidirectionnels, couramment utilisés dans la construction, le C.E.T longitudinal est proche de celui du béton. Cependant, le C.E.T transversal est 2 à 10 fois supérieur à celui du béton. Ceci est dû au fait que le C.E.T longitudinal est dominé par les fibres (qui ont des C.E.T longitudinaux faibles) tandis que le C.E.T transversal est dominé par celui de la matrice, qui est, d'une façon significative, plus grand que celui des fibres.

On doit non seulement reconnaître que le C.E.T des matériaux composites ont des valeurs différentes dans la direction longitudinales et transversales, mais que, les constituants individuels peuvent aussi être anisotropiques et avoir des propriétés longitudinales et transversales différentes.

On sait, par exemple, que les fibres de carbone et d'aramide sont isotropiques transversalement. Elles ont des C.E.T différents dans les directions longitudinales et transversales.

c. Propriétés hygroscopiques

Le coefficient d'expansion hygroscopique (C.E.H), est une propriété physique des matériaux composites. Il décrit les changements dimensionnels qui se développent, quand le matériau absorbe de l'humidité. Ce phénomène n'est pas considéré comme important pour les renforcements métalliques. Comme dans le cas des C.E.T, le C.E.H est différent dans les directions longitudinales et transversales. Les constituants peuvent atteindre des concentrations en humidité différentes à l'équilibre. De plus, la plupart des fibres absorbent beaucoup moins d'humidité que les résines polymériques (sauf dans le cas des fibres organiques, tels que les fibres d'aramides. Souvent, l'absorption de l'humidité dans la fibre est négligeable. Dans le cas des composites unidirectionnels, on suppose souvent que le C.E.H

dans la direction longitudinale est nulle. De plus, on suppose que l'expansion hygroscopique dans la direction transversale est reliée au C.E.H de la matrice.

d. Propriétés chimiques

Les propriétés chimiques des matériaux composites sont peut être les propriétés les plus difficiles à identifier pour les renforcements. Ceci est dû au fait que la composition chimique des matériaux composites joue un rôle central dans deux domaines. Ceux-ci sont un grand souci pour les ingénieurs en construction: la perte des propriétés mécaniques (spécialement la rigidité) à température élevée et la durabilité.

I.6. Propriétés mécaniques des composites

a. Déformation élastique

Contrairement à l'acier, les matériaux composites ne montrent pas une déformation plastique, et leur rupture est fragile. Dans le béton on ne peut généralement pas accepter qu'il ait une déformation plastique.

b. Relation contraintes-déformations

Les propriétés mécaniques des barres de renforcement, peuvent être obtenues à partir des propriétés des constituants, à l'aide de la règle des mélanges, qui considère que chaque constituant contribue selon sa proportion en volume dans le composite. Soit V_f la fraction volumique des fibres. En première approximation, le module d'élasticité du composite est donné par l'expression suivante:

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \text{ avec } V_f + V_m = 1 \quad (I-1)$$

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m(1 - V_f) \quad (I-2)$$

Ou

E_c : module d'élasticité du composite.

E_f : module d'élasticité des fibres.

E_m : module d'élasticité de la matrice.

c. Comportement en traction

La variation de la résistance en traction des matériaux composites est beaucoup plus élevée, comparée à celle de l'acier. La variation dépend du type de fibres, de la configuration des

fibres, des liants et des dimensions de l'échantillon. Beaucoup d'essais ont été réalisés pour déterminer les résistances en traction des barres de renforcements.

D'une façon générale, ces barres sont caractérisées par:

- Les résistances en traction des barres à base de fibres de carbone ($V_f=47$ à 70%) sont pour la plupart comprises entre 1100 et 2200 MPa, le module élastique de 100 à 150 GPa.
- Les résistances en traction des barres en fibres de verre ($V_f=50$ à 60%) sont comprises entre 900 et 1100 MPa, le module élastique est autour de 45 GPa.
- Les résistances en traction des barres en fibres d'aramide ($V_f=43$ à 70%) sont comprises entre 1350 et 1650 MPa et leur module d'élasticité est d'environ 60 GPa.

d. Comportement en compression et cisaillement

Les matériaux composites sont généralement utilisés comme des renforcements de traction. Les résistances en compression et en cisaillement sont généralement très faibles. On n'utilise donc généralement pas les matériaux composites comme renforcement en compression et en cisaillement.

I.7. Les matériaux à gradient de propriétés type FGM :

Ces matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C . Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [M. Koizumi et al ; 1990].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les

deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [K. Kokini et al 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique -Bonne résistance à l'oxydation
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance mécanique -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

[Boch et al 1986].

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.3. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [P. Boch et al 1986].

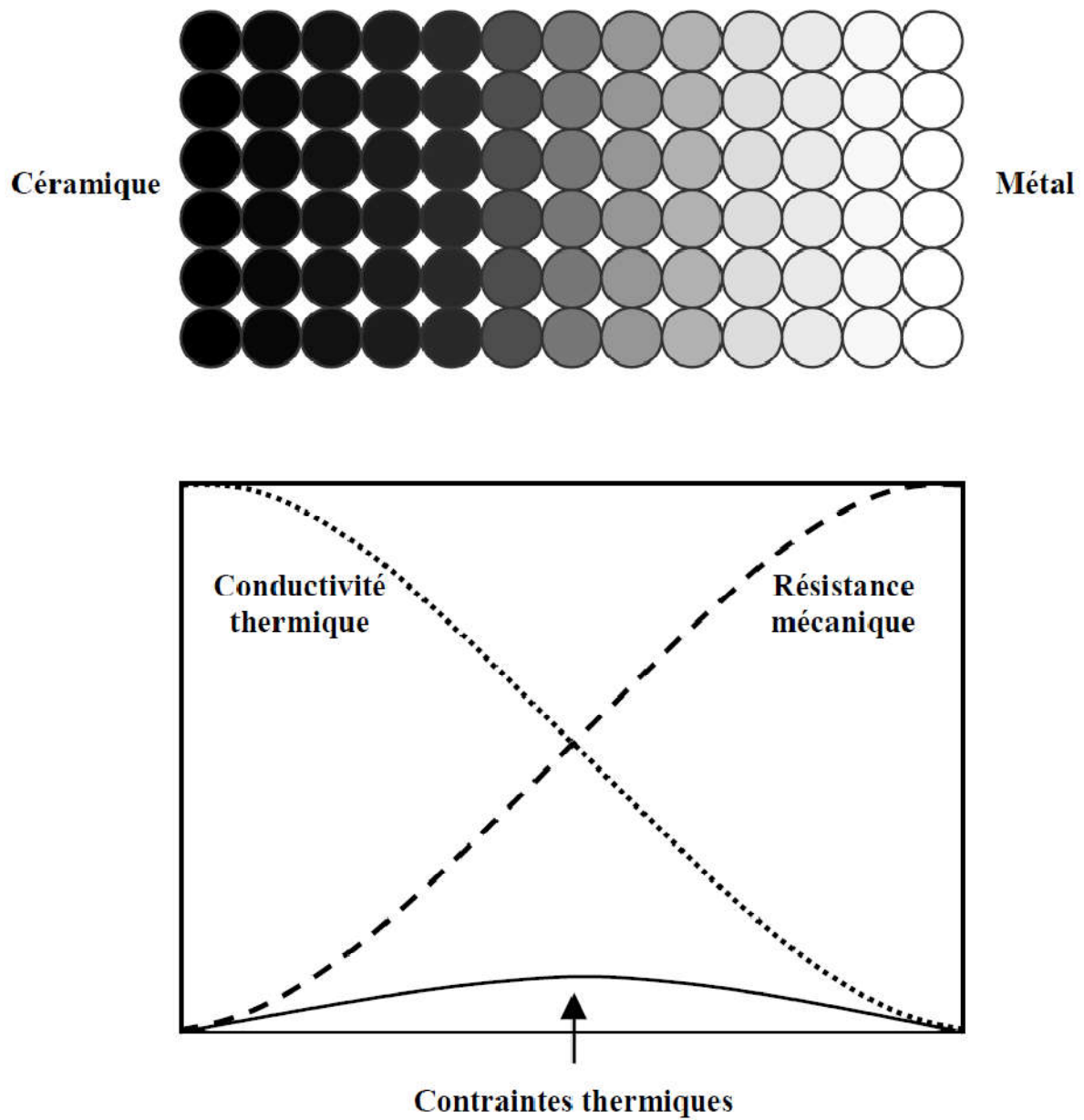


Figure I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés

I.8 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.4) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau reliéet (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan

composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

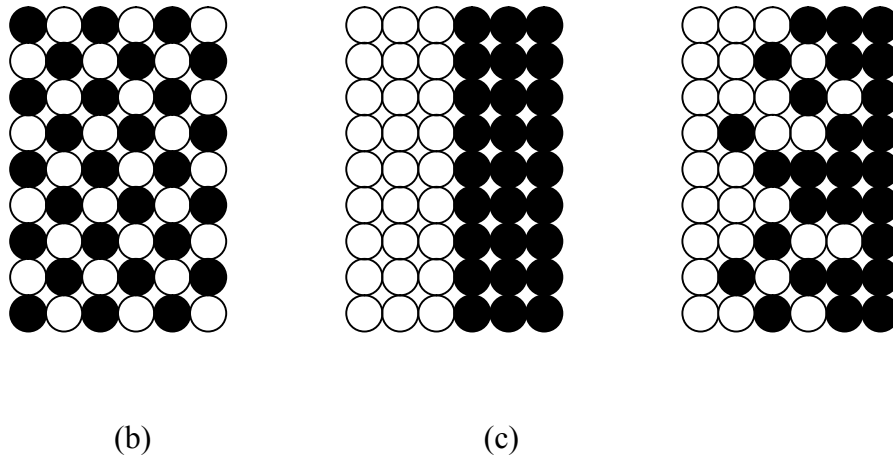


Figure I.4 La distribution composante des matériaux.

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.9. Propriétés matérielles effectives des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM. Pour le premier choix, une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du

métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c'est-à-dire ., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure I.5). Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) :

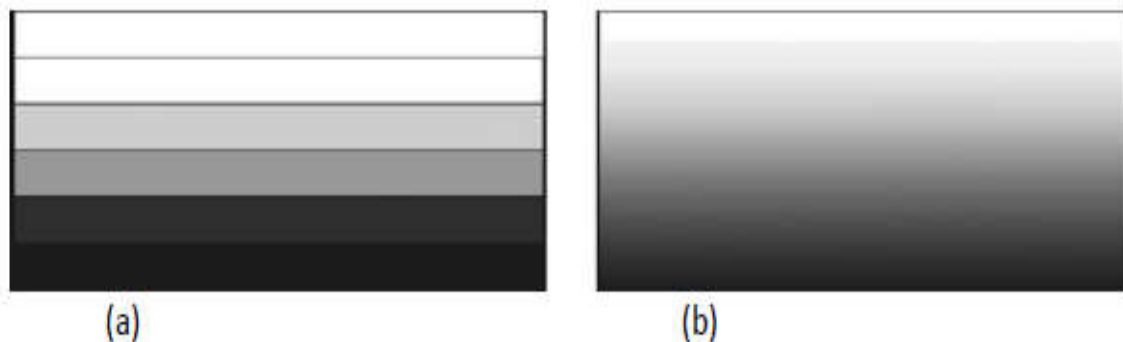


Figure. I.5 Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des poutres en FGM avec une variation de la fraction de volume qui suit une fonction de loi exponentielle.

I.10 domaines d'utilisation des FGMs

I.10.1 Aéronautique

Les matériaux FGMs ont été initialement conçus pour ce domaine. Pour avoir deux propriétés contradictoires, . À l'heure actuelle, ils permettent d'assurer la légèreté et la durabilité ; ils ont une large application dans l'aéronautique comme matériel de conversion d'énergie et d'autres. C'est une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. les FGMs sont également applicables au mur externe d'un avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.10.2 Matières industrielles

De nombreuses applications des matériaux FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Un exemple a la forme d'outils. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une auto-lubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.10.3 Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évités dans une certaine mesure. Application de FGMs aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.10.4 Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et à une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. Les FGM technologie est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents.

Technologie de classification de structure est utilisé dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

I.10.5 Génie civil

Ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

1.10.6 D'autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGMs sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été développés. En outre, de nouvelles recherches ont également développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nano-technologie de classification niveau.

I.11 Les méthodes d'élaboration des FGM

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [Kieback 2003].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous,

I.11.1 Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières (figure I.6). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25 —1000 μ m) .Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

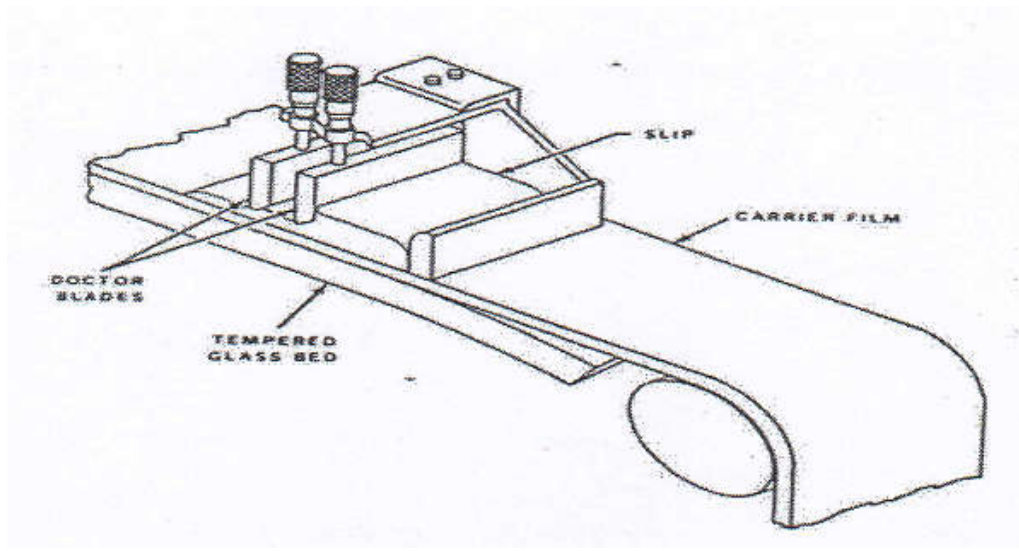


Figure I.6 Principe de la Méthode de Coulage en Bande

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler1973] ; soit par empilage de couches élaborés séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch 1986], [Boch 1987].

I.11.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion de la plate (coulage classique [Moya1992]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.11.3 Dépôt par Electrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que onappel le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure I-7.

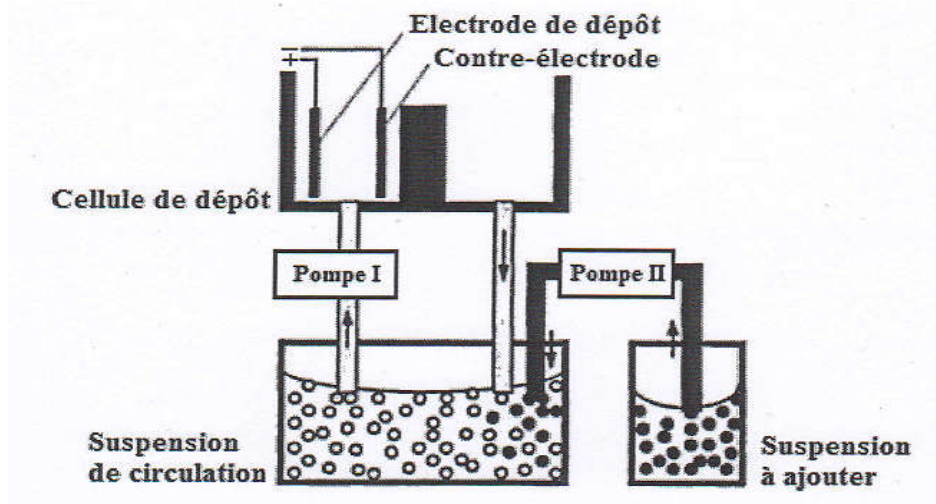


Figure I.7 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

I.11.4 Compaction Sèche Des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993].

I.11.5 Projection Plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 $^{\circ}\text{C}$ et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watremetz 2006]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa

microstructure approximative [Omori et al 1998]. Ichikawa [Ichikawa 2000] a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler lateneur en dépôt dans le silicium (SiC) pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.8.

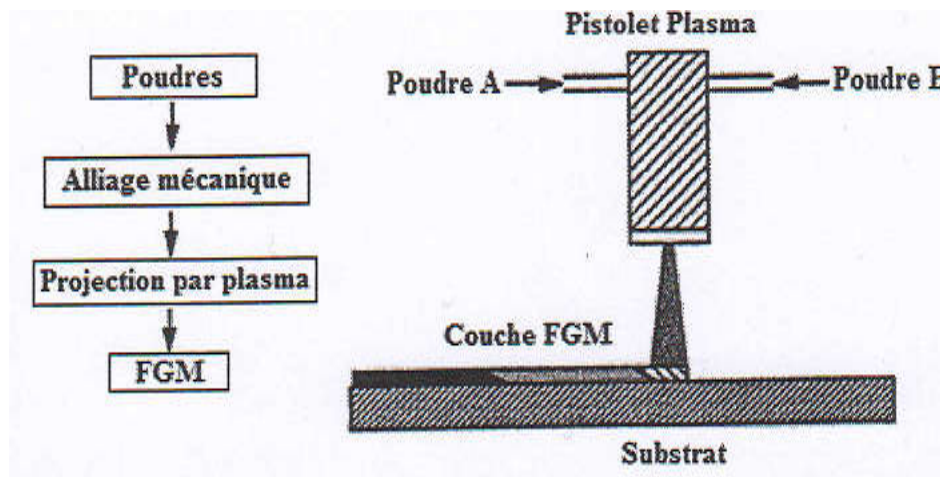


Figure I.8 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)

I.11.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [Miyamoto 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto 1999]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques

plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

I.11.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la figure I.9, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto 1999].

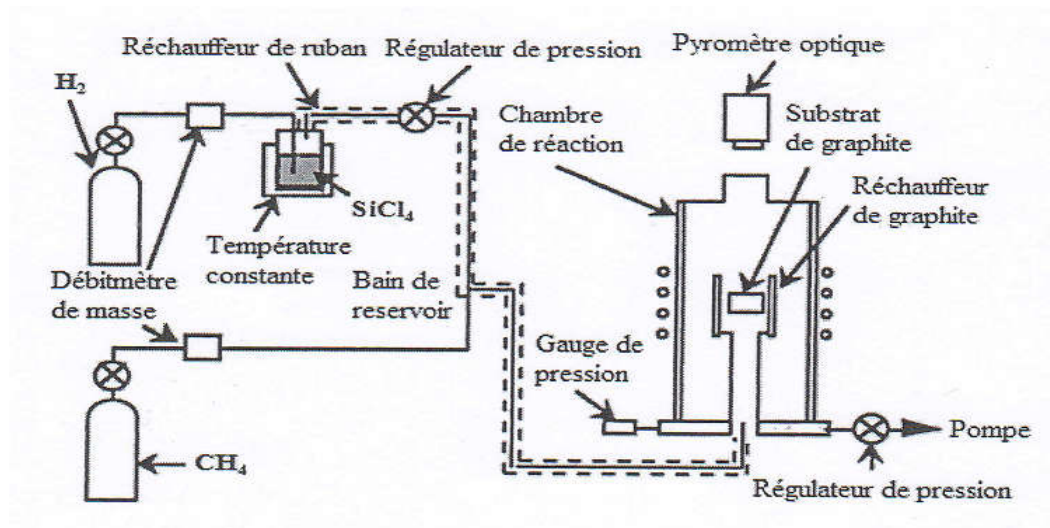


Figure I.9 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - $SiCl_4$ - H_2) sont

employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

I.11.8 Frittage En Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi 1990]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

I.11.9 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure I.10, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé. [Yuki et al, 1990].

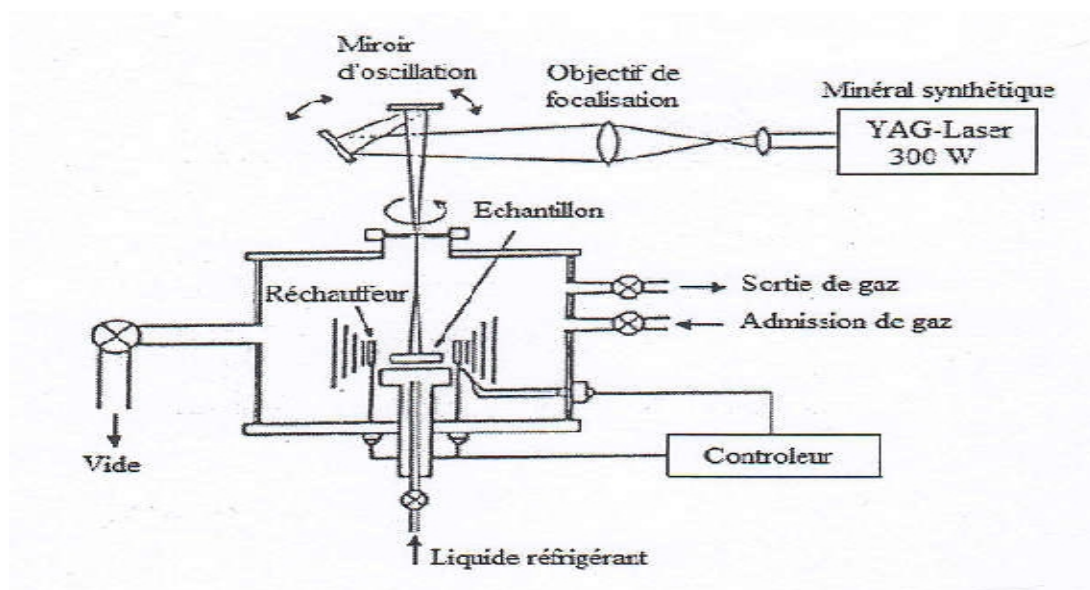


Figure I.10 Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.11.10 Implantation ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdi 1997].

I.12 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

I.12.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (\text{I-1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z) \cdot E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (\text{I-2})$$

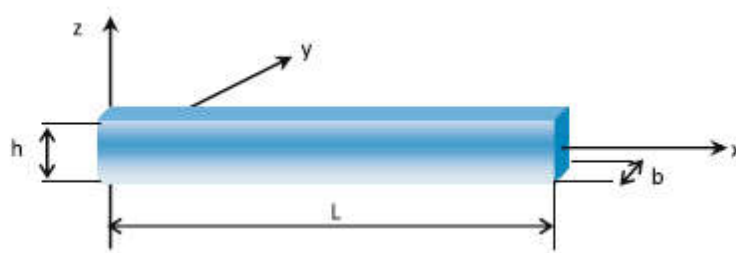


Figure. I.11 Les dimensions de la poutre FGM

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z=h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure (I.12), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (I-3)$$

Là où le E_j et le g_j sont les propriétés matérielles

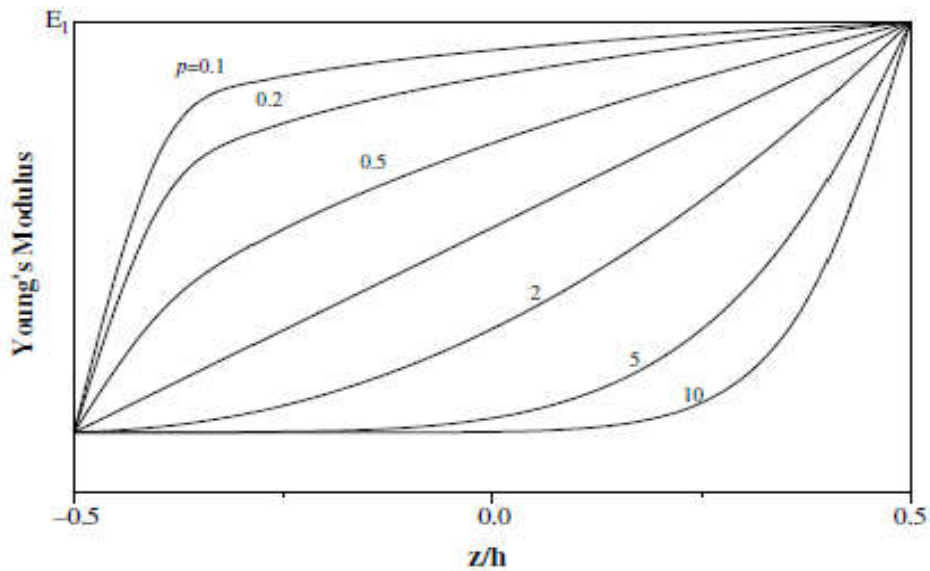


Figure I.12 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM

I.12.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I-4})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I-5})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I-6})$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

La figure I.13 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

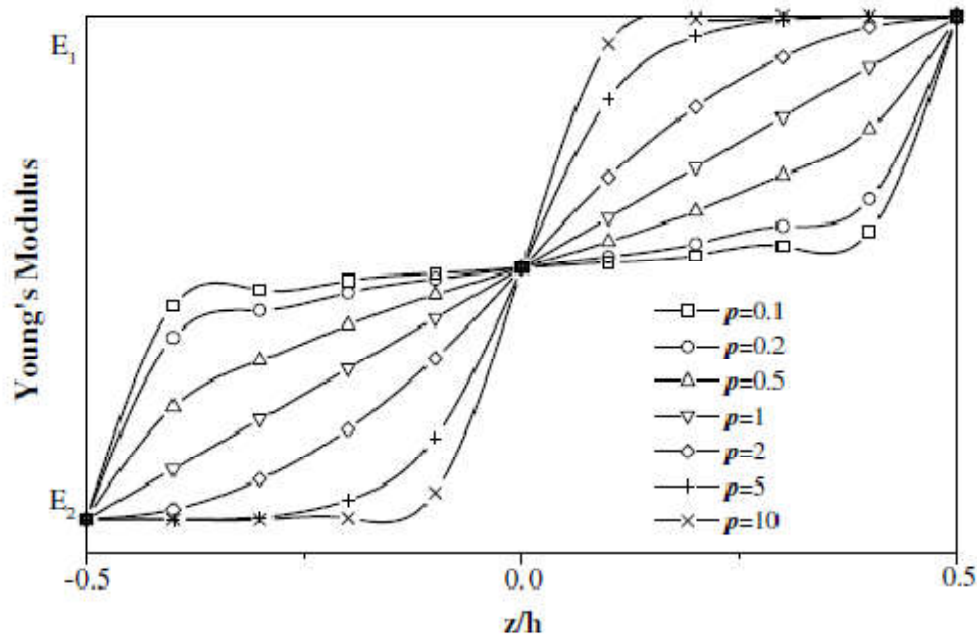


Figure .I.13 La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

I.12.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale 1983] :

$$E(z) = A e^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad \text{Avec } A=E_2 \quad \text{et } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (I-7)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure (I.14).

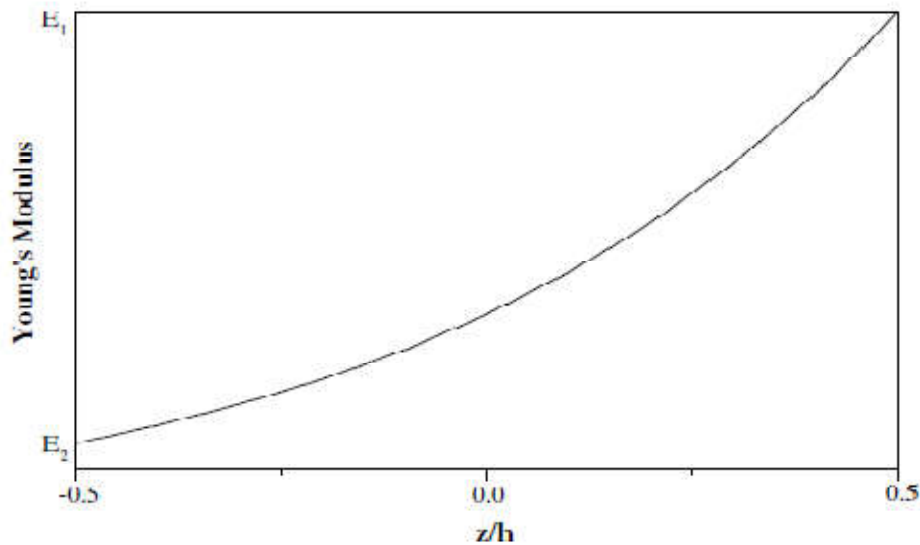


Figure. I.14 La variation du module de Young de la poutre E-FGM

I.13. Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre un brève aperçu sur les matériaux composite et les matériaux à gradient de propriété FGM, où on a parlé sur leurs historiques ; leurs développements, leurs méthodes d'élaboration et leur propriété,

Ensuite on s'est intéresser aux domaine d'application des matériaux à gradient de propriété FGM et l'intérêt de leur utilisation et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une poutre ; dans le prochaine chapitre nous allons entamer les différentes théories des poutres.

Chapitre II

LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

II.1 Introduction

Dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans Le terme de «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparé à la largeur. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

II.2 Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il n'a pas pu finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques pussent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle. [Jean-Louis Fanchon 2001].

II.3 Equations de base de la théorie d'élasticité :

II.3.1 Définition :

- **Force extérieure:** Les forces extérieures aux quelles peut être soumis un corps peuvent être classées en deux catégories.
- **Forces volumiques:** Ce sont des forces à distance associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume .Elles s'expriment en force par unité de volume $[N/m^3]$. (Les forces de gravitation, les forces magnétiques et les forces d'inerties)

- **Forces surfaciques:** Ce sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact .Elles s'expriment en force par unité de surface [N/m²].
- **Contrainte:** Un système de forces extérieures appliqué à un corps engendre des forces intérieures résultant de l'interaction des particules élémentaires et à chaque force élémentaire correspond une contrainte.

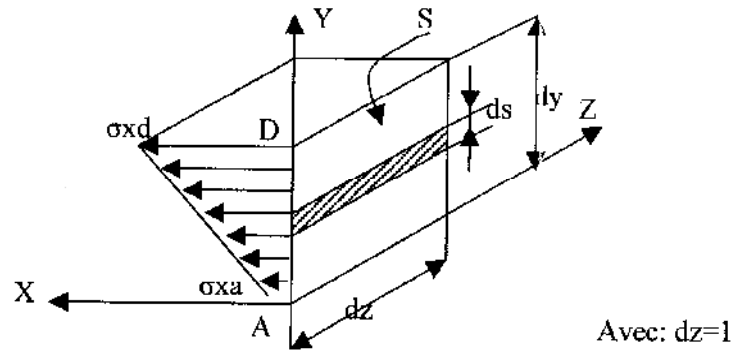


Figure II.1. présentation tridimensionnelle des contraintes sur une surface gauche.

b-1-Etat de contrainte en un point matériel : Dans le cas général un point matériel est soumis à neuf (09) composantes de contraintes comme l'indique la figure (II-2)

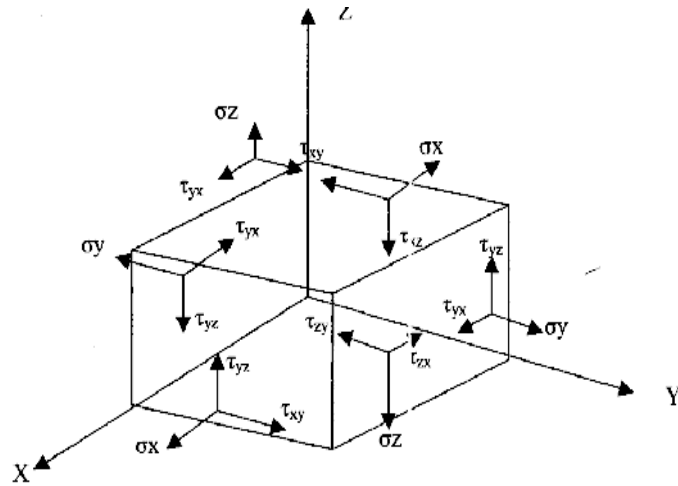


Figure 11.2 état de contrainte pour un élément tridimensionnel infiniment petit.

En examinant la figure, on remarque trois(03) composantes normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Et six (06) composantes de contraintes tangentielles $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Pour satisfaire l'équilibre des moments autour des axes z, y et x de l'élément respectivement. On doit avoir:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \tag{II.1}$$

Ainsi qu'il on résulte six (06) composantes indépendantes en un point.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{II-2}$$

b-2-Vecteur contrainte en point pour une direction \vec{n} : Soit un point A d'un solide et une direction repérée par un vecteur \vec{n} (normale extérieure à la surface) :

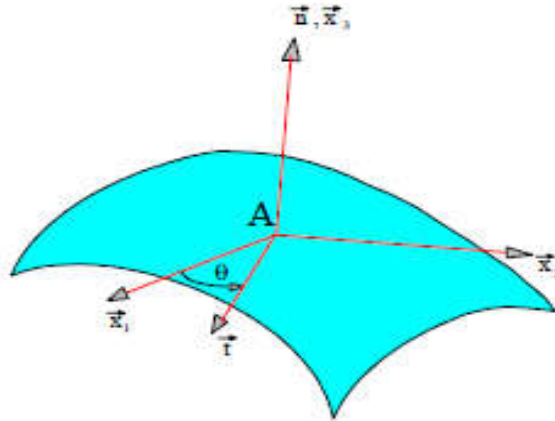


Figure II.3 Point A sur la surface d'un solide

Soit une facette infiniment petite d'aire dS de normale \vec{n} . Le vecteur contrainte au point A pour la direction \vec{n} s'écrit :

$$\vec{T} = (A, \vec{n}) = \sigma(A) \vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

b-3-Contrainte normale et tangentielle : Le vecteur contrainte en un point A et pour la direction \vec{n} peut être projeté :

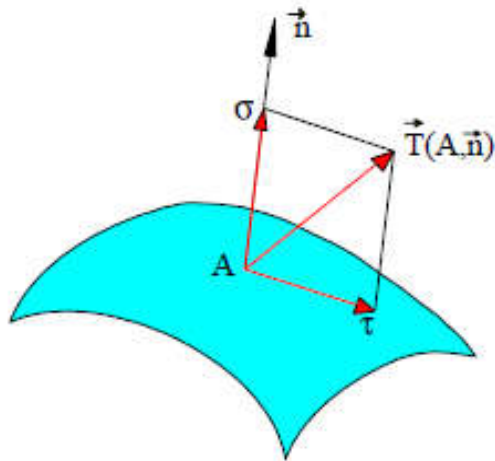


Figure II.4 contrainte principale et direction principale

Les contraintes principales sont déterminées en écrivant que le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II-4})$$

On aboutit à l'équation caractéristique : $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$ (II.5)

Dans cette équation I_1, I_2, I_3 sont les trois invariants du tenseur des contraintes quantités indépendantes de la base dans la quelles est exprimé le tenseur .Dans une base quelconque ils ont pour expression :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace de } \sigma(A) \quad (\text{II.6})$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) \quad (\text{II.7})$$

$$I_3 = \det [\sigma(A)] \quad (\text{II.8})$$

Et dans la base principale :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace de } \sigma(A) \quad (\text{II.9})$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (\text{II.10})$$

$$I_3 = \det [\sigma(A)] \quad (\text{II.11})$$

La direction principale \vec{x} correspondant à la contrainte principale σ est déterminée en écrivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

- **Notion de déformation :** On dit un corps solide est déformable si sous l'action de certaine sollicitation (interne ou externe). Les distances internes particulières les distances peuvent varier et de ce la une déformation correspond un déplacement relatif des points à l'intérieur d'un corps solide par rapport à un point bien fixé.

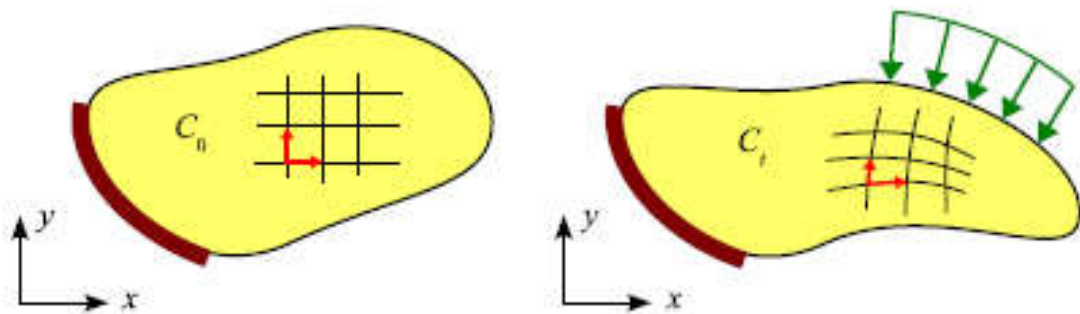


Figure II.5 Déformations dans un solide

II.3.2 Relation déformations-déplacements

Champ de déplacement : Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) appartenant à la structure se déplace sous le chargement. le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position

initiale de sa position finale. Son déplacement est caractérisé par le vecteur de déplacement :

$$\vec{U}(M) = U_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_1 + U_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_2 + U_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_3 \quad (\text{II.13})$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes U_1, U_2 et U_3 sont petites.

Etat des déformations au voisinage d'un point : On se place ici dans le cas des petites déformations on démontre que l'état de déformation au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations.

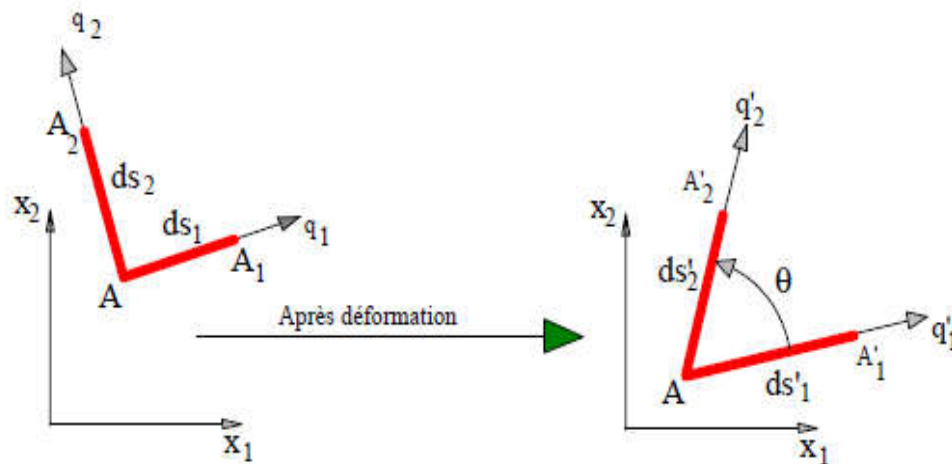


Figure II.6 : déformation au voisinage d'un point A

C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ du déplacement par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.14})$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Déformations linéaires : La déformation linéaire dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de la longueur par la largeur d'une fibre Originellement orientée dans cette direction (normales) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont définie en chaque Point ou:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Représentent les déformations linéaires suivant les directions x, y et z respectivement.

Déformations de cisaillements : La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droite formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformations de cisaillements γ_{xy}, γ_{xz} et γ_{yz} sont définies en chaque point.

Les déformations s'expriment par:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

$$\text{Déformations linéaires:} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{Déformation de cisaillement :} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

II.3.3 Relation contraintes-déformations :

Sous l'action d'une contrainte normale unie axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation suivante: $\sigma = \varepsilon \cdot E$

Cette relation est connue sous le nom de "loi de HOOK". La constante E est appelée module d'élasticité ou module de "YOUNG".

Soit un élément tridimensionnel soumis à une contrainte uni axiale.

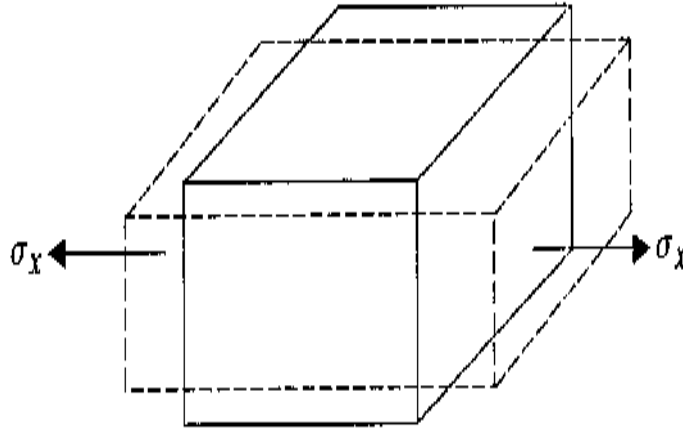


Figure II.7 : prolongement linéaire d'un élément prismatique.

La déformation ε_x est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{II.19})$$

L'élément aura des contractions suivant les directions Y et Z de ces contractions en résulte des déformations $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ qui sont :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) \quad (\text{II.20})$$

ν : est appelée coefficient de "POISSON".

Considérons maintenant un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel.

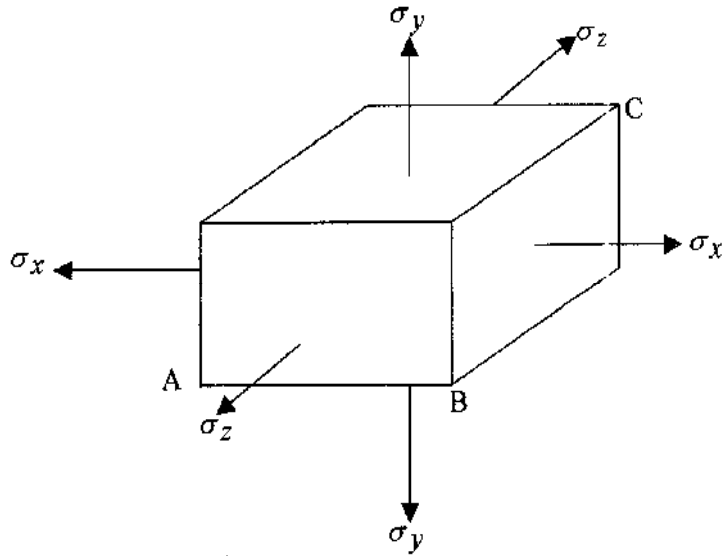


Figure II.8 : les contraintes normales sur les différentes faces d'un élément.

Nous prenons la longueur initiale de AB égale à l'unité. Supposons que la contrainte est appliquée en premier lieu, ce qui va entraîner une variation de longueur AB d'une valeur égale à : $\frac{\sigma_x}{E}$

En second lieu, la contrainte est appliquée ; ainsi que la variation de AB est égale à

$$\left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_y\left(1+\frac{\sigma_x}{E}\right) \quad (\text{II.21})$$

Mais comme $\frac{\sigma_x}{E}$ est une déformation élastique, elle est négligeable devant l'unité.

En dernier la contrainte σ_z est appliquée et la longueur AB varie d'une quantité égale à

$$\left(\frac{-\nu}{E}\sigma_z\right)$$

De même, les déformations totales dans les directions Y et Z seront:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (\text{II.22})$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déformations pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pure bidimensionnel, a été trouvée expérimentalement sous la forme suivante : $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$ (II.23)

De même pour le cas tridimensionnel, les deux autres composantes de déformation de cisaillement seront :

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}\end{aligned}\quad (\text{II.24})$$

Avec : G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.25})$$

Si nous voulons réécrire les équations précédentes sous une forme matricielle, elles seront comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} X \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

En exprimant la relation contraintes- déformations (loi de Hooke inverse) suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_y &= 2G \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_z &= 2G \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\
 \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

$$\text{avec : } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Et encore:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{II.28}$$

II.3.4 Equations d'équilibre

En général dans un corps les contraintes varient d'un point à l'autre.

Soit (σ_x) la composante de la contrainte totale .Considérons la variation de cette composante.

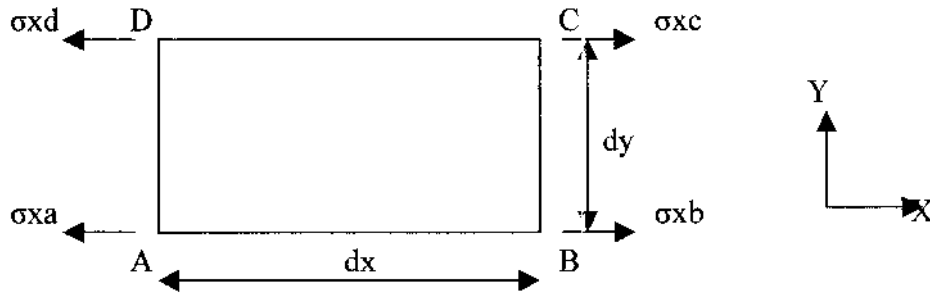


Figure II-9: variation des contraintes pour un élément infinitésimal.

Si la contrainte au point 'A' est σ_x , en 'B' la contrainte varie de $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)$

Où: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ est le taux de variation de σ_x .

σ_x : étant la fonction de x, y dans le cas bidimensionnel (et de z dans la cas général).

La dérivation partielle est nécessaire.

La contrainte au point "B" est donnée par: $\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ (II.29)

Egalement les contraintes en C et D sont:

$$\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \dots\dots\dots(1)$$

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \dots\dots\dots(2)$$

x étant constant de B à C, en remplaçant σ_{xB} par sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra:

$$\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \tag{II.30}$$

$$\text{D'où : } \sigma_{xc} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$$

(Où le terme du second ordre est négligé)

En négligeant les petites quantités du second ordre. Les taux de variation sont constants, ainsi que les contraintes sur la surface d'un élément infinitésimal varient linéairement d'où on aura:

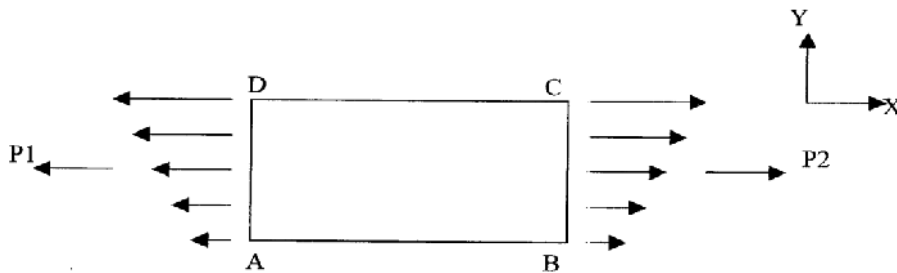


Figure II.10 : La variation des contraintes sur les facettes d'un élément.

Avec P_1 , P_2 les forces exercées respectivement sur les surfaces latérales de gauche et de droite. Considérons la surface latérale de gauche:

$$\text{La force exercée sur cette surface est : } P_1 = \int \sigma ds \quad (\text{II.31})$$

$$P_1 = \int_s \sigma(1 dy) \Rightarrow P_1 : \text{ est la surface du trapèze:}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{x_0})dy$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) dy$$

$$\text{D'où: } P_1 = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2 \quad (\text{II.32})$$

De même la force sur la facette droite est :

$$P_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{xB} + \sigma_{xC})dy$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx + \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy$$

$$D'où : P_2 = \sigma_x dy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dy dx + \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy^2 \quad (II.33)$$

$$La\ résultante\ sur\ le\ corps\ dans\ la\ direction\ x\ sera : P_2 - P_1 = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy dx \quad (II.34)$$

Si on considère que la répartition des contraintes sur les facettes considérées est constante, alors les contraintes appliquées au centre de gravité des facettes seront :

$$\sigma_x, \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \quad (II.35)$$

Ainsi que la résultante des forces sera la même, d'où on aura:

$$P_2 - P_1 = \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) \cdot 1 dy - 1 dy \quad (II.36)$$

$$D'où: P_2 - P_1 = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx dy$$

Cette représentation est simplifiée de l'état de contrainte pourra être utilisée pour l'établissement des équations d'équilibre en état de contrainte plane:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

Avec: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et τ_{yx} étant supposées indépendantes de z, le modèle d'équilibre de l'élément sera:

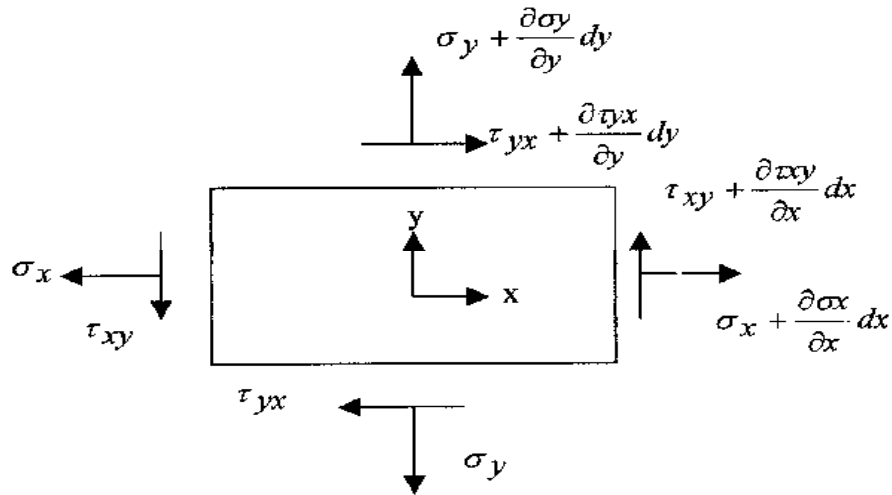


Figure II.11 : présentation des contraintes agissant sur un élément.

Avec x , y et z les composantes de la force volumique suivant les directions X , Y et Z respectivement.

Vu que l'élément est en équilibre la somme des forces projetées sur l'axe X est nulle.

$$\text{D'où: } \sum F_x = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\sum F_x = x \, dx \, dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x \, dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} \, dx \quad (\text{II.38})$$

(L'épaisseur de l'élément suivant la direction Z étant égale à l'unité).

$$\text{Après la simplification on obtiendra: } \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \bar{x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{II.39})$$

(dx , dy) sont différents de zéro, ainsi qu'on aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \bar{x} = 0 \quad (\text{II.40})$$

De même l'équilibre des forces dans la direction Y donne:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \bar{y} = 0 \quad (\text{II.41})$$

Où \bar{x}, \bar{y} sont les forces surfaciques de l'élément.

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction X seulement. Les autres directions Y et Z peuvent être traitées de la même façon

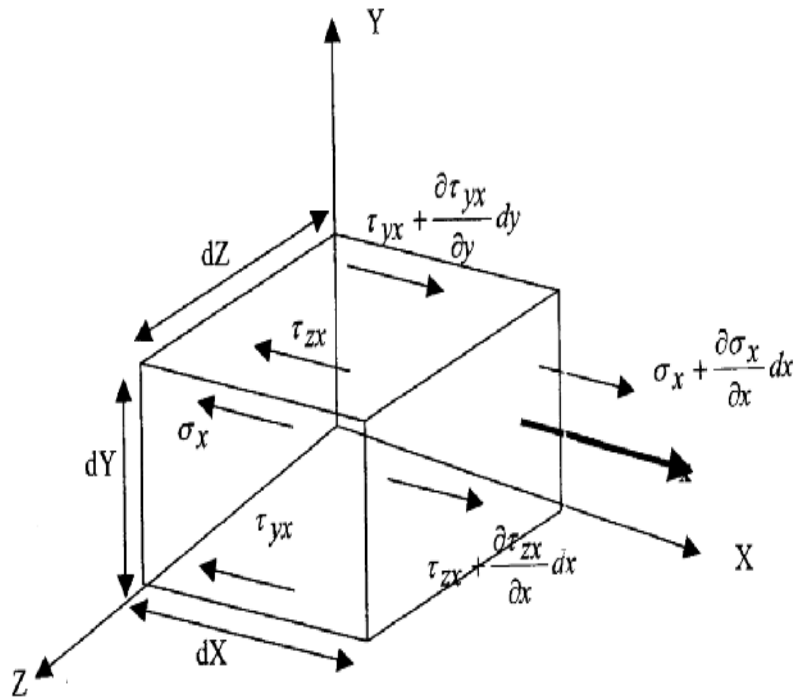


Figure II. 12 : configuration tridimensionnelle des contraintes.

L'équilibre des forces dans la direction X donne:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \bar{x} dx dy dz$$

Après la simplification on obtiendra:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} \right) dx \, dy \, dz = 0 \quad (\text{II.42})$$

$dx \, dy \, dz$ étant différents de zéro, l'équation précédente se simplifie à:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} = 0$$

De même on obtiendra pour les directions Y et Z:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{y} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \bar{z} = 0 \quad (\text{II.44})$$

Etant donnée que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\text{II.45})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Les équations d'équilibre pour le cas général tridimensionnel peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \bar{z} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Où; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ::$ sont les forces de volume.

II.4 La théorie d'élasticité plane

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs.

II.4.1 Etat plan de contrainte:

On a affaire à un état plan de contraintes parallèlement au plan (x, y) si :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

C'est le cas des plaques planes chargées dans leur plan.

Le tenseur des contraintes s'écrit alors dans une base quelconque :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'axe : Z est donc direction principale et la contrainte principale correspondante est nulle.

$$\text{Dans la base principale : } \sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Les équations d'équilibres deviennent : } \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

D'autre part les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

$$\text{Et : } \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

II.4.2 Etat plan de déformation

Considérons un tunnel ou un puits de mine de très grande étendue selon la direction z . Si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identiques. Sur la figure b est présentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction (DT) il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre le cylindre du laminoir et la tôle. Les deux exemples rentrent dans le cadre des déformations planes.

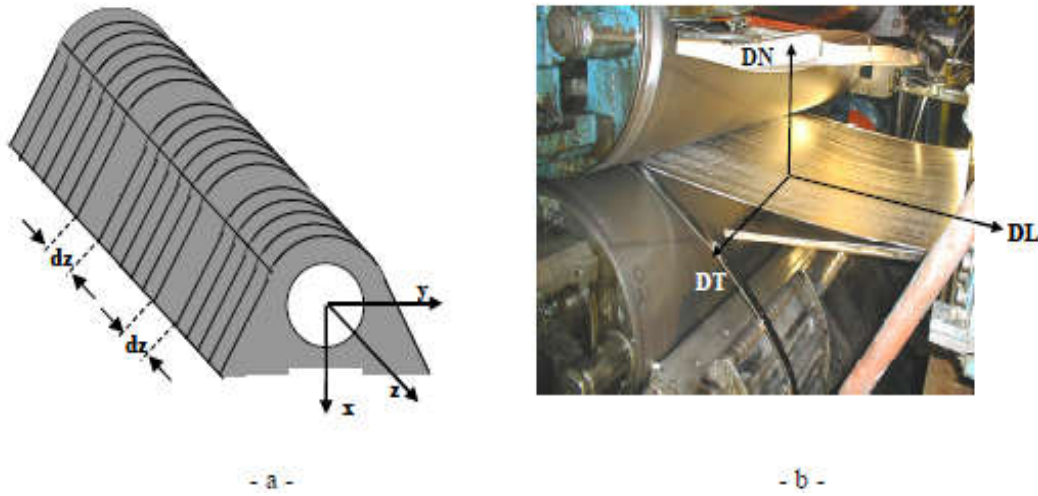


Figure II.13 : Exemple de structures en déformation plane :

Puits de mine (a) et tôle en laminage (b)

La composante non nulle σ_{zz} du tenseur des contraintes s'obtient par la loi de HOOK .Dans un matériau isotrope élastique σ_{zz} vaut :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.52})$$

Donc on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] ; \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Les relations entre la déformation et le déplacement sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.55})$$

Les contraintes agissant sur un tel corps soient obtenues à partir équations suivantes:

$$\text{Et les équations d'équilibres seront : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.56})$$

Pour passer de contrainte planes en déformations planes : $E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)}$; $Y \rightarrow \frac{Y}{(1-\nu)}$

Et pour passer de déformations planes aux contraintes planes : $E \rightarrow \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)^2}$; $Y \rightarrow \frac{Y}{(1+\nu)}$

II.5 Les équations fondamentales de l'élasticité plane

II.5.1 Les équations d'équilibre :

- a- **Les équations différentielles d'équilibre** : en annulant $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ et en adoptant X et Y pour les forces volumiques dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.57})$$

b- Les équations de conditions aux limites :

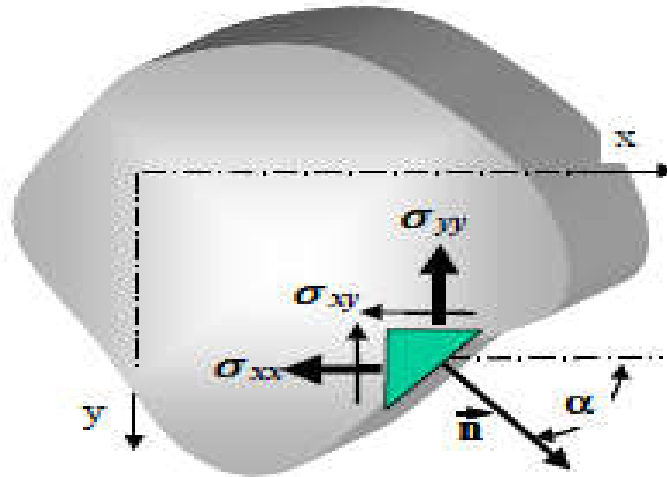


Figure II.14: Les conditions de contour en contrainte plane

Soient $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient T_x et T_y les tractions superficielles imposées sur le contour. La déformation du tenseur de contrainte permet d'écrire:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = T_x \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = T_y \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux coordonnées du prisme élémentaire sur la figure.

II.6 Loi de comportement des matériaux élastiques :

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations. Soit en notation indicelle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.59})$$

Dans cette relation: δ_{ij} est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{Si } (i = j) \quad , \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } (i \neq j) \quad (\text{II.60})$$

Dans certain manuels on note $G = \mu$

λ Et G sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ Est le premier invariant du tenseur des déformations

Inversement, on peut exprimer le tenseur de la déformation à partir de celui des contraintes à partir de celui des contraintes : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E} \sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ (II.61)

E : est le module de Young et γ le coefficient de Poisson, constantes pour un matériau donné.

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Et le premier invariant du tenseur des contraintes les relations entre les différents coefficients

d'élasticité sont les suivantes : $\lambda = \frac{E\gamma}{(1-2)(1+\gamma)}$, $G = \frac{E}{2(1+\gamma)}$

G est le module de Coulomb. Si $\gamma = 0.25$ alors $G = \frac{E}{2.5}$, c'est le cas pour les matériaux ductiles.

On décomposant sur les axes on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\gamma}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\gamma}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\gamma}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{array} \right. \quad (\text{II.62})$$

II.7 L'équations de compatibilité et le potentiel des contraintes :

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0 \quad (\text{II.63})$$

Si les déformations, ε_{xz} , ε_{yz} sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de z , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.64})$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'AIRY.

II.8 La loi de Hooke :

La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. De la loi de comportement deux aspects sont importants: la linéarité et l'élasticité.

C'est en quelque sorte une analogie avec l'allongement $l - l_0$ d'un ressort de constante de raideur k soumis à une force F :

l : longueur du ressort étiré ou comprimé ;

l_0 : longueur du ressort à vide.

Pour un ressort on a $F = k \cdot (l - l_0)$.

Afin de s'abstraire de la forme de la pièce, et notamment de ses dimensions, on divise la force par l'aire de la section de la pièce, grandeur que l'on appelle contrainte σ (exprimée en Pa), et on divise l'allongement par la longueur initiale, grandeur que l'on appelle déformation ou allongement relatif ε (sans dimension).

On note l'allongement relatif ε :

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$$

On note la contrainte σ (similaire à une pression) :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

L'analogie de la constante de raideur du ressort est donc le module de Young E .

La loi de Hooke s'exprime alors sous la forme: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (II.65)

Où E est le module de Young, une caractéristique du matériau, loi valable pour l'étirement ou la compression d'une pièce, les autres dimensions étant libres de s'étendre.

La linéarité provient du fait que l'on est en faible déformation, on peut donc faire une approximation linéaire de la loi réelle (développement limité au premier ordre). Il s'agit en fait d'approcher le potentiel interatomique par une parabole.

Dans le cas d'une pièce de forme complexe, la loi de déformation globale n'a aucune raison d'être linéaire, mais par contre, chaque élément infinitésimal de matière se déforme lui de manière linéaire.

II. 8.1 Loi de Hooke généralisée

Dans le cas d'un matériau isotrope, si l'on reprend en compte le **coefficient de Poisson** ν , la loi de Hooke devient :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^k \sigma_{ij} \right) \quad (\text{II.66})$$

Avec : δ_{ij} le symbole de Kronecker et ε_{kk} est une notation abrégé de la trace du tenseur des déformations (somme des termes diagonaux du tenseur).

On peut aussi l'écrire sous forme matricielle :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\varepsilon) I \right) \quad (\text{II.67})$$

Les relations ci-dessus peuvent être inversées pour donner

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_k^k \delta_{ij}] \quad (\text{II.68})$$

ou, sous forme matricielle (en appliquant la trace à la relation plus haut):

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma - \nu \text{Tr}(\sigma)I] \quad (\text{II.69})$$

La forme explicite très simple de ces relations (donnant les déformations en fonction des contraintes) montre bien la signification physique du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{array} \right. \quad (\text{II.70})$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, on définit la contrainte et la déformation localement par un tenseur 3×3 , le tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}]$ et le tenseur des déformations $[\varepsilon_{ij}]$.

Le comportement élastique du matériau est alors modélisé par un tenseur d'ordre 4 $[C_{ijkl}]$ contenant 81 coefficients élastiques. Le nombre de coefficients indépendants est réduit à 21

en tenant compte de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, et de la stabilité énergétique du tenseur.

$$\text{On a: } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.71})$$

En appliquant la sommation sur les indices (Convention de sommation d'Einstein).

Du fait de ces propriétés de symétrie, le tenseur C_{ijkl} peut être représenté sous la forme d'une matrice 6x6, où les directions représentent les directions de la déformation.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.72})$$

II.9 Milieux solides

Le comportement des milieux solides peut être très varié. Nous étudierons plus particulièrement les solides à comportement linéaire, c'est-à-dire les milieux élastiques.

II.9.1 solide élastique linéaires

On dit qu'un milieu solide est élastique linéaire, s'il existe un opérateur linéaire qui relie les contraintes et les déformations, et on écrit :

$$\sigma = d : \varepsilon$$

Où : σ : Est le tenseur des contraintes.

ε : Celui des déformations.

d : est un tenseur du quatrième ordre encore appelé opérateur d'élasticité.

Les $(:)$ représentent le produit doublement contracté entre les tenseurs. En notation indicielle on écrit encore: $\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

a- Milieux anisotropes : Un milieu est dit anisotrope si ses propriétés varient dans l'espace.

Dans ce cas la matrice élasticité est pleine et peut se résumer à :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{56} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} & d_{46} & d_{56} & d_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

Les 21 coefficients sont indépendants et il faut 21 mesures indépendantes pour les déterminer. Ce type de matériau est très rare, car bien souvent des symétries matérielles existent et diminuent encore le nombre de coefficients d'élasticité.

b- Milieux orthotropes : Un milieu est dit orthotrope s'il possède deux plans de symétrie perpendiculaires, par exemple 1-3 et 2-3. En écrivant l'invariance des coefficients d'élasticité par rapport à ces plans, on peut montrer qu'il ne reste que (09) coefficients indépendants et que la matrice d'élasticité a la forme suivante :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Un milieu est dit orthotrope et isotrope dans un plan (on dit encore isotrope transverse) si ses propriétés matérielles sont de plus invariante par rotation autour d'un axe de symétrie, par exemple l'axe 3. Dans ce cas, en écrivant que les coefficients d'élasticité sont invariants par une rotation d'angle quelconque autour de 3, on peut montrer qu'il ne reste que 5 coefficients indépendants et que la matrice s'écrit :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{11} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

Avec : $2d_{44} = d_{11} - d_{12}$

Ce type de matériau est assez courant (composite à fibre dirigées suivant l'axe 3, ou encore tronc d'arbre).

c-Milieux isotropes : Un milieu est dit isotrope si ses propriétés matérielles sont identiques dans les trois directions de l'espace. On particularise alors le matériau orthotrope en écrivant

L'invariance des coefficients d'élasticité par rapport aux trois axes, et on peut montrer qu'il ne reste cette fois que 2 coefficients indépendants car on obtient les relations :

$$d_{33} = d_{11} \quad ; \quad d_{13} = d_{12} \quad ; \quad d_{55} = d_{44}$$

Posons : $\lambda = d_{12}$ et $\mu = d_{44}$. Les coefficients λ et μ sont appelés coefficients de Lamé et la matrice D devient :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

Cette loi de comportement d'élasticité s'appelle encore la loi de Hooke. On peut la résumer sous la forme : $\sigma = \lambda \text{ trace } \varepsilon I + 2\mu \varepsilon$

Ou encore en écriture indicielle $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ (II.77)

En inversant la loi de comportement, ce qui est toujours possible car la loi d'élasticité est définie positive, on obtient les relations entre déformations et contraintes, c'est-à-dire l'opérateur de flexibilité $c = d^{-1}$ (ou de souplesse ou de complaisance) que l'on caractérisera soit par sa matrice C : $C = D^{-1}$

Soit par les relations entre déformations et contraintes :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \sigma - \frac{\lambda \text{ trace } \sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I \quad \text{Ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \quad (\text{II.78})$$

Pour exprimer plus simplement cette loi en souplesse, on utilise un autre couple de coefficients (E, ν) au lieu du couple (λ, μ):

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{trace } \sigma I \quad \text{Ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.79})$$

E est le module d'Young (homogène à une pression) et ν est le coefficient de Poisson (sans dimension). Ces divers coefficients sont reliés par les relations suivantes :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{II.80})$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

On peut enfin utiliser le fait que l'opérateur d'élasticité est défini positif pour obtenir des relations d'inégalité sur les coefficients qui viennent d'être introduits :

$$3\lambda + 2\mu > 0 \quad \mu > 0$$

$$E > 0 \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Donnons, à titre indicatif les modules d'Young et coefficients de Poisson de certains matériaux usuels:

Matériaux	E (Mpa)	ν
Acier	200 000	0,25
Aluminium	80 000	0,33
Cuivre	120 000	0,35
Béton	28 000	0,20
Plexiglas	3 000	0,30

Tableau II.1 : indicatif les modules d'Young et coefficients de Poisson de certains matériaux usuels

II.10 Les différentes théories des poutres [Sallai 2011]:

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

II.10.1 Modèle d'Euler Bernoulli (classical laminated beam theory- CLBT):

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. L'hypothèse dans cette théorie:

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),
- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.

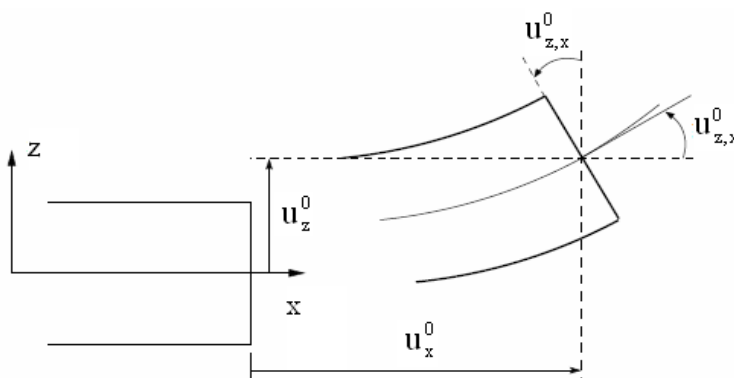


Figure II. 15 : Cinématique d'Euler Bernoulli [Dufort, 2000]

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-81})$$

$u(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w'_{,x}(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \quad (\text{II-82})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

II.10.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT):

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toute fois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.16). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko et al, 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\psi(z)$ est égale à

Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w',_x(x) + z \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-83})$$

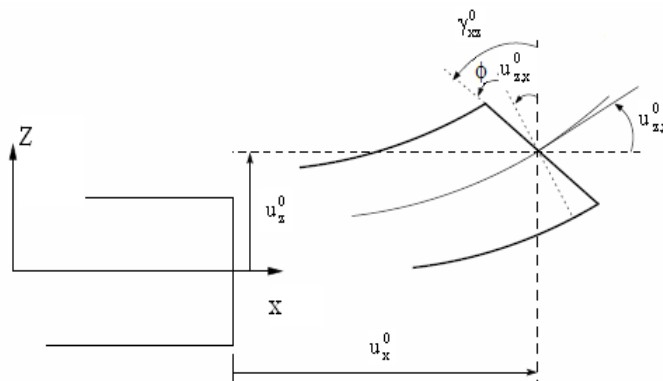


Figure II-16: Cinématique de Timoshenko [Timoshenko.et al, 1972]

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w',_x(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w',_x(x) \quad (\text{II.84})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.85})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0$$

G_{xz} ; est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le

cisaillement. Cette contradiction mène à introduire des coefficients de correction pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.10.3 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.17). La fonction $\psi(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\psi'(z)$ le cisaillement.

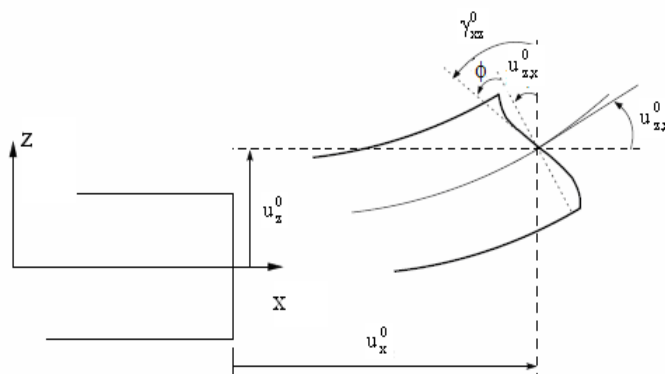


Figure II-17 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) + (z^3) \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \psi'(z) \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \quad (\text{II.87})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

1-) **Le modèle Euler-Bernoulli** (la théorie des poutres classiques) (CLBT):

$$\psi(z) = 0 \quad (\text{II.88})$$

2-) **Le modèle de Timoshenko** ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\psi(z) = z \quad (\text{II.89})$$

3-) Le modèle d'ordre élevé, avec l'approche de [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984]:

$$\psi(z) = z(1 - (4z^2)/(3h^2)) \quad (\text{II.90})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par [Afaq et al, 2003]:

$$\psi(z) = z e^{-z(\frac{\pi}{h})^2} \quad (\text{II.91})$$

5-) Le modèle trigonométrique :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II.92})$$

Avec, h : étant l'épaisseur de la poutre

II.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'historique des théories des poutres. Après nous sommes attaché à présenter les différentes équations de base de la théorie d'élasticité nous avons terminé par une démonstration des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

Chapitre III

*ETUDE ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT STATIQUE ET
DYNAMIQUE DES POUTRES FGM EN SE BASANT SUR LE
CONCEPT DE L'AXE NEUTRE*

III.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent de nombreux avantages pour une utilisation dans des composants structuraux d'ingénierie contrairement aux composites stratifiés à matrice fibrées, les FGM n'ont pas de problèmes de décollement et de délaminage qui résultent de fortes concentrations des contraintes inter-laminaires. Le concept de FGM a été initialement introduit au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais. Macroscopiquement, Ce sont des matériaux composites hétérogènes qui sont généralement composées de deux matériaux différents comme le céramique-métal. La composition du matériau change progressivement suivant la direction de l'épaisseur. En conséquence, les propriétés mécaniques sont supposées variables de manière continue à partir de la surface supérieure à la partie inférieure.

En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la température et la bonne résistance à la corrosion ainsi que la ténacité du métal, la combinaison de la céramique et du métal peut aboutir à d'excellents matériaux.

Les FGM sont largement utilisés en génie mécanique, aéronautique, nucléaire et génie civil. Par conséquent, des études consacrées à comprendre les comportements statiques et dynamiques des poutres et les plaques FGM ont été trop lancés ces dernières années.

Sankar [Sankar 2001], a étudié, par une solution élastique, la flexion des poutres FGM ; cette étude est basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. [ZhongYu 2007] a développé une solution analytique pour les poutres encastées soumises à différents types de sollicitations mécaniques en utilisant la fonction de contrainte d'Airy. Li et al [Li 2008] a étudié la flexion et la vibration de la poutre de Timoshenko en matériau FGM de, dans laquelle, il a introduit une nouvelle fonction, les équations de flexion et de vibration des poutres FGM ont été découplés et la flèche et l'angle de rotation et la force résultante et le moment sont exprimés uniquement en terme de cette nouvelle fonction. Sallai et al [Sallai 2009] ont étudié les réponses statiques d'une poutre FGM sigmoïde épaisse à l'aide de différentes théories des poutres. Hsu-Tai et al [Hsu-Tai 2012] a étudié la flexion et la vibration libre des poutres FGM utilisant les différentes théories de cisaillement d'ordre élevé.

L'objectif visé dans ce chapitre est de développer une théorie de cisaillement raffinée pour analyser le problème de flexion et de la vibration libre des poutres simplement appuyées en matériau FGM. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que le déplacement transverse w

contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement $s w_s$ et prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement.

III.2. Formulation théorique

III.2. 1. Surface physique neutre

Les matériaux à gradient de propriétés est un type particulier de composites dans lesquels leurs propriétés matérielles varient de façon continue en raison des variations progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de l'une des dimensions (généralement dans le sens de l'épaisseur).

Dans cette étude, la poutre FGM est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la poutre. En raison de l'asymétrie des propriétés des matériaux de la poutre FGM par rapport au plan médian, les équations de cisaillement et de flexion sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière appropriée dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM de façon à être la surface neutre, les propriétés de la poutre FGM étant symétrique par rapport à cet axe. Pour indiquer la position de la surface neutre de la poutre FGM, deux plans différents sont à considérés pour la mesure de z , à savoir, z_{ms} et z_{ns} sont mesurées à partir de la surface médiane et la surface neutre de la poutre, respectivement, comme il est montré dans la figure III.1.

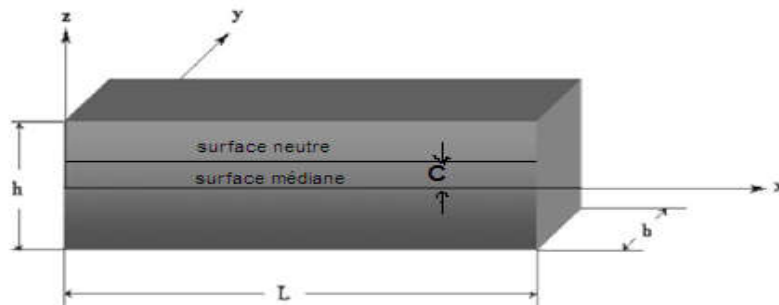


Figure.III.1: Position de la surface médiane et la surface neutre pour une poutre FGM.

La fraction volumique de la céramique V_C est exprimé en se basant sur les coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_C = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho \quad (\text{III.1})$$

Où ρ est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et C est la distance entre la surface neutre et la surface médiane.

Les propriétés matérielles non homogènes de la poutre FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance. En utilisant l'équation. (III.1), Les propriétés matérielles non homogènes de la poutre P-FGM, comme une fonction de coordonnée de l'épaisseur devient :

$$\rho(z) = (\rho_C + \rho_M) \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho + \rho_M, \quad (\text{III.2})$$

Où ρ_M et ρ_C sont les propriétés du métal et de céramique successivement.

Dans ce chapitre, nous supposons que le module d'élasticité E et la densité de masse ρ sont décrits par l'équation. (III.2), tandis que le coefficient de Poisson ν est considéré constant suivant l'épaisseur ((Benachour .2009), (labri chaht.2014)).

La position de la surface neutre de la poutre FGM est déterminée à satisfaire le premier moment par rapport au module d'Young étant nulle comme (Ould Larbi.2013).

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (\text{III.3})$$

La position de la surface neutre peut être déterminée comme :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (\text{III.4})$$

Il est clair que le paramètre C est nul pour les poutres homogènes et isotropes.

III.2.2. Hypothèses de base

- Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la poutre et, en conséquence, les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de Cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction de coordonnée x .

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{III.5})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x .
- Le déplacement u dans la direction x est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad (\text{III.6})$$

- La composante de flexion u_b est supposée le même déplacement donné par la théorie classique des poutres. Donc, l'expression pour u_b peut être donné comme suit :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad (\text{III.7})$$

- À partir de l'état de déplacement de composante u_s se dérivent la composante de déformation γ_{xz} , qui varie paraboliquement à travers l'épaisseur de la poutre, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} , aux surfaces inférieure et supérieure de la poutre. Par conséquent, l'expression pour u_s peut être donné comme :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{III.8})$$

Où

$$f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) - \frac{1}{2}(z_{ns} + C) \left[\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} (z_{ns} + c)^2 \right] \quad (\text{III.9})$$

III.2.3. Equations cinématiques et constitutives

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu on utilisant les équations ci-dessus comme :

$$u(x, z_{ns}, t) = u_0(x, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.10.a})$$

$$w(x, z_{ns}, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{III.10.b})$$

Les déformations associées aux déplacements dans Eq. (III.10) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \quad (\text{III.11.a})$$

$$\gamma_{xz} = g \gamma_{xz}^s \quad (\text{III.11.b})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{III.11.c})$$

$$g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \text{ et } f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \quad (\text{III.11.d})$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\sigma_x = Q_{11}(z_{ns}) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z_{ns}) \gamma_{xz} \quad (\text{III.12.a})$$

Où

$$Q_{11}(z_{ns}) = E(z_{ns}) \text{ et } Q_{55}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.12.b})$$

III.2.4 Équations du mouvement

Les équations de mouvement de la poutre FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Le principe sous la forme analytique suivante [Reddy 2002] :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Ou t est le temps; t_1 et t_2 sont les temps initial et final, respectivement; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation; δV est la variation virtuelle de l'énergie potentielle; et δK est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz_{ns} dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{d\delta u_0}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx\end{aligned}\quad (III.14)$$

Ou N , M_b , M_s et Q sont les forces et moments résultants donnés comme suit :

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (1, z_{ns}, f) \sigma_x dz_{ns} \quad \text{et} \quad Q = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} g \tau_{xz} dz_{ns}\quad (III.15)$$

La variation de l'énergie potentielle par l'application de la charge transversale q peut être écrite comme suit :

$$\delta V = - \int_0^L q (\delta w_b + \delta w_s) dx\quad (III.16)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}\delta T &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \rho(z_{ns}) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz_{ns} dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad + I_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) + K_2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) \\ &\quad \left. + J_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx\end{aligned}\quad (III.17)$$

Ou le point « . » indique la dérivation par rapport au variable de temps t ; $\rho(z_{ns})$ est la densité de masse, et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} (1, z_{ns}, f, z_{ns}^2, z_{ns} f, f^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant les expressions de δU , δV , et δK des équations (III.14), (III.16), et (III.17) dans l'équation (III.13) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la poutre et le temps, et en rassemblant les coefficients δu_0 , δw_b , et δw_s , les équations de mouvement pour la poutre FGM sont obtenues:

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{III.19.a})$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III.19.b})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III.19.c})$$

Les équations (III.19) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, w_b, w_s) en utilisant les équations (III.10), (III.11), (III.12) et (III.15) comme suit:

$$(\text{III.20.a})$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III.20.b})$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III.20.c})$$

Ou A_{11}, D_{11} , etc., sont les composantes de rigidité de la poutre définies par

$$(A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} Q_{11} (1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) dz_{ns} \quad (\text{III.21.a})$$

et

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} Q_{55} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{III.21.b})$$

III.3. Solution analytique

Les équations de mouvement admettent les solutions de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables u_0 , w_b , w_s peuvent être écrit en supposant les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Ou U_m , W_{bm} , et W_{sm} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée au (m) ième mode propre, et $\lambda = m\pi/L$. La charge transversale q est développée en séries de Fourier comme suit

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\lambda x) \quad (\text{III.23})$$

Ou Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de la relation suivante :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (\text{III.24})$$

Le coefficient Q_m est donné ci-dessous pour certains types de chargement. Dans le cas d'une charge sinusoïdale, nous avons :

$$m = 1 \text{ et } Q_1 = q_0 \quad (\text{III.25a})$$

Et pour le cas d'une charge uniformément répartie nous avons

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, (m = 1,3,5\dots 0) \quad (\text{III.25b})$$

Substituant les expansions de u_0 , w_b , w_s de l'équation (III.22) et (III.23) dans les équations de mouvement (III.20), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \end{pmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Ou

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2, \quad a_{13} = -B_{11}^s\lambda^3, \quad a_{22} = D_{11}\lambda^4, \quad a_{23} = D_{11}^s\lambda^4, \quad a_{33} = H_{11}^s\lambda^4 + A_{55}^s\lambda^2 \quad (\text{III.27a}) \quad m_{11} = I_0,$$

$$m_{12} = -I_1\lambda, \quad m_{13} = -J_1\lambda, \quad m_{22} = I_0 + I_2\lambda^2, \quad m_{23} = I_0 + J_2\lambda^2, \quad m_{33} = I_0 + K_2\lambda^2 \quad (\text{III.27b})$$

III.4. Analyse du comportement statique et dynamique des poutres FGM utilisant un nouveau modèle de cisaillement :

III.4.1. Cinématique et équations constitutives

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu comme suite :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x \quad (\text{III 28a})$$

$$W(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{III28b})$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements soit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda_x} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (\text{III29a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{\lambda_x} \left[\frac{3}{2h} - \frac{6z^2}{h^3} \right] Q_x \quad (\text{III29b})$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (\text{III30a})$$

$$Q_{11}(z) = E(z) \quad \text{et} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III30b})$$

III.4.2.Équations du mouvement

Les équations **Équations du mouvement** de la poutre FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie de Hamilton. Les équations de mouvement d'Hamilton. Le principe sous la forme analytique suivante [Reddy 2002] :principe d'énergie d'Hami

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt = 0 \quad (III.31)$$

Ou t est le temps; t_1 et t_2 sont les temps initial et final, respectivement; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation; δV est la variation virtuelle de l'énergie potentielle; et δT est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u &= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dz \\ &= \\ &= \int_0^l \left(\frac{dN_x}{dx} \delta u_0 + \frac{d^2 M_x}{dx^2} \delta w_0 - \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{dM_x}{dx} \delta Q_x - \frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{dP_x}{dx} \delta Q_x + \frac{3}{2h\lambda_x} Q_x \delta Q_x - \right. \\ &\quad \left. 6h\lambda_x R_x \delta Q_x \right) dx \quad (III.32) \end{aligned}$$

Ou N_x, M_x, P_x et R_x sont les forces et moments résultants donnés comme suit :

$$(N_x, M_x, P_x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x (1, z, z^3) dz \text{ et } R_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \tau_{xz} dz \quad (III.33)$$

La variation de l'énergie potentielle par l'application de la charge transversale q peut être écrite comme suit :

$$\delta v = - \int_0^l (q \delta w_0) dx \quad (III.34)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \partial T &= \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\ddot{u} \partial u - \ddot{w} \partial w) dx dz \\ &= \int_0^l \left[-I_0 (\ddot{u}_0 \partial u_0 + \ddot{w}_0 \partial w_0) - I_1 \left(\frac{d\ddot{u}_0}{dx} \partial w_0 + \frac{3}{2h\lambda_x} \ddot{u}_0 \partial Q_x + \frac{d\ddot{w}_0}{dx} \partial u_0 + \frac{3}{2h\lambda_x} \ddot{Q}_x \partial u_0 \right) \right. \\ &\quad + I_2 \left(-\frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} \partial w_0 + \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{d\ddot{w}_0}{dx} \partial Q_x + \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{d\ddot{Q}_x}{dx} \partial w_0 - \frac{9}{4h^2 \lambda_x^2} \ddot{Q}_x \partial Q_x \right) \\ &\quad + I_3 \left(\frac{2}{h^3 \lambda_x} \ddot{u}_0 \partial Q_x + \frac{2}{h^3 \lambda_x} \ddot{Q}_x \partial u_0 \right) \\ &\quad + I_4 \left(\frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{d\ddot{w}_0}{dx} \partial Q_x + \frac{6}{2h^4 \lambda_x^2} \ddot{Q}_x \partial Q_x - \frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{d\ddot{Q}_x}{dx} \partial w_0 + \frac{6}{2h^4 \lambda_x^2} \ddot{Q}_x \partial Q_x \right) \\ &\quad \left. + I_6 \left(\frac{4}{h^6 \lambda_x^2} \ddot{Q}_x \partial Q_x \right) \right] dx \end{aligned}$$

Ou le point « . » indique la dérivation par rapport au variable de temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse, et $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$ sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (\text{III.35})$$

$$I_7 = \frac{9}{4h^2} I_2 - \frac{6}{2h^4} I_4 + \frac{4}{h^6} I_6 ; I_8 = \frac{3}{2h} I_1 - \frac{2}{h^3} I_3 ; \text{et } I_9 = \frac{3}{2h} I_2 - \frac{2}{h^3} I_4 \quad (\text{III.36})$$

En remplaçant les expressions de δU , δV , et δT des équations (III.31), (III.32), et (III.33) dans l'équation (III.30) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque et le temps, et en rassemblant les coefficients δu_0 , δw_0 , et δQ_x , les équations de mouvement pour la poutre FGM sont obtenues:

$$\partial u_0 : \frac{dN_x}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + \frac{I_8}{\lambda_x} \ddot{Q}_x \quad (\text{III.37a})$$

$$\partial w_0 : \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -q + I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + \frac{I_9}{\lambda_x} \frac{d\ddot{Q}_x}{dx} \quad (\text{III.37b})$$

$$\partial Q_x : \frac{d}{dx} \left[M_x - \frac{4}{3h^2} P_x \right] - \left[Q_x - \frac{4}{h^2} R_x \right] = \frac{I_8}{\lambda_x} \ddot{u}_0 - \frac{I_9}{\lambda_x} \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + \frac{I_7}{\lambda_x} \ddot{Q}_x \quad (\text{III.37c})$$

Les équations (III.37) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, w_0, Q_x)

comme suit:

$$A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_0}{dx^3} + B_{11} \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{d^2 Q_x}{dx^2} - E_{11} \frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{d^2 Q_x}{dx^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + \frac{I_8}{\lambda_x} \ddot{Q}_x \quad (\text{III.38a})$$

$$B_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + D_{11} \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{d^3 Q_x}{dx^3} - F_{11} \frac{2}{h^3 \lambda_x} = -q + I_1 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + \frac{I_9}{\lambda_x} \frac{d\ddot{Q}_x}{dx} \quad (\text{III.38b})$$

$$B_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_0}{dx^3} + D_{11} \frac{3}{2h\lambda_x} \frac{d^2 Q_x}{dx^2} - F_{11} \frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{d^2 Q_x}{dx^2} - E_{11} \frac{4}{3h^2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + F_{11} \frac{d^3 w_0}{dx^3} - F_{11} \frac{2}{h^3 \lambda_x} \frac{d^3 w_0}{dx^3} - H_{11} \frac{8}{3h^5 \lambda_x} \frac{d^2 Q_x}{dx^2} - A_{55} \frac{3}{2h\lambda_x} Q_x - D_{55} \frac{6}{h^3 \lambda_x} Q_x - D_{55} \frac{6}{h^3 \lambda_x} Q_x + F_{55} \frac{8}{h^5 \lambda_x} Q_x - \frac{I_8}{\lambda_x} \ddot{u}_0 - \frac{I_9}{\lambda_x} \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + \frac{I_7}{\lambda_x^2} \ddot{Q}_x \quad (\text{III.38c})$$

Ou A_{11} , D_{11} , etc., sont les composantes de rigidité de la poutre définies par:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (\text{III.39a})$$

$$(A_{55}, D_{55}, F_{55}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}(z)(1, z^2, z^4) dz \quad (\text{III.39b})$$

IV.3. Solution analytique

Les équations de mouvement admettent les solutions de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables u_0 , w_0 , Q_x peuvent être écrit en supposant les variations suivantes :

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \lambda e^{-i\omega t} \quad (\text{III.40a})$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda e^{-i\omega t} \quad (\text{III.40b})$$

$$Q_x = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{xm} \cos \lambda e^{-i\omega t} \quad (\text{III.40c})$$

Ou U_m , W_m , et Q_{xm} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée au (m) nième mode propre, et $\lambda = m\pi / L$.

La charge transversale q est développée en séries de Fourier comme suit :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\lambda x) \quad (\text{III.41})$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de la relation suivante :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (\text{III.42})$$

Le coefficient Q_m est donné ci-dessous pour certains types de chargement. Dans le cas d'une charge sinusoïdale, nous avons :

$$m = 1 \text{ et } Q_1 = q_0 \quad (\text{III.43a})$$

Et pour le cas d'une charge uniformément répartie nous avons

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (\text{III.43b})$$

Substituant les expansions de u_0 , w_0 , Q_x de l'équation (III.40) et (III.41) dans les équations de mouvement (III.39), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ Q_{xm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Où ;

$$a_{11} = A_{11} \lambda^2 ; a_{12} = -B_{11} \lambda^3 ; a_{13} = \frac{\lambda^3 \left(\frac{3B_{11}}{2h} - \frac{2E_{11}}{h^3} \right)}{\lambda_1} ; a_{11} = D_{11} \lambda^4 ; a_{23} = \frac{\lambda^3 \left(\frac{3D_{11}}{2h} - \frac{2F_{11}}{h^3} \right)}{\lambda_1} ; a_{33} = \frac{\lambda^2 \left(\frac{9}{4} D_{11} - \frac{6F_{11}}{h^2} + \frac{4H_{11}}{h^4} \right) + \frac{9}{4} A_{55} - \frac{18D_{55}}{h^2} + \frac{36F_{55}}{h^4}}{\lambda_1^2 h^2} \quad (\text{III.45a})$$

$$m_{11} = I_0 ; m_{12} = -I_1 \lambda ; m_{13} = \frac{I_8}{\lambda_1} ; m_{22} = I_0 + I_2 \lambda^2 ; m_{23} = -\frac{I_9 \lambda}{\lambda_1} ; m_{33} = \frac{I_7}{\lambda_1^2} \quad (\text{III.45b})$$

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par une nouvelle théorie de cisaillement raffinée des poutres en se basant sur le concept de l'axe neutre et un nouveaumodél de cisaillement,. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM en fonction d'une simple loi de puissance. Les équations de mouvement ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier. Une validation des résultats de cette nouvelle théorie des poutres raffinées ainsi qu'une étude paramétrique serons fait ultérieurement.

Chapitre IV

RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1.Introduction

En sciences des matériaux, un matériau à gradient de propriété FGM est un type de matériau dont la composition est destinée à changer en continu dans le solide. Le concept est de réaliser un matériau composite en faisant varier la microstructure d'un matériau à un autre matériau avec un gradient spécifique. Dans la présente étude, l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres simplement appuyées en FGM en se basant sur le concept de l'axe neutre a été étudiée en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement raffinée. Cette théorie impose la condition de traction nulle et les conditions aux limites libres au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la poutre sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Ensuite, le principe d'Hamilton est utilisée pour former les équations de mouvement de la poutre FGM. Les solutions analytiques pour le comportement statique et dynamique ont été obtenues par la méthode de Navier. Les résultats numériques obtenus par cette nouvelle théorie de cisaillement sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature.

IV.2. Résultats numériques et discussion

IV.2.1.Résulta de la nouvelle théorie de cisaillement

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie de cisaillement pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres simplement appuyées en FGM. Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

Céramique : (Alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380$ GPa ; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 3960$ kg/m³.

Métal : (Aluminium, Al) : $E_m = 70$ GPa ; $\nu = 0.3$; $\rho_m = 2702$ kg/m³.

Les résultats numériques sont présentés en termes des flèches, déplacement, contraintes et des fréquences adimensionnelles :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(\frac{L}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} - C\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0, -C), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

IV.2.1.1 Résultats d'analyse de flexion

Tableaux IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4 montrent les résultats numériques adimensionnels des contraintes de la poutre FGM soumise à un chargement uniforme q_0 pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport L/h . Les résultats obtenus utilisant la nouvelle théorie raffinée sont comparés aux solutions analytiques données par Reddy (Reddy, 1984). Le tableau 1 montre un bon accord entre les résultats de cette théorie raffinée avec celle de la théorie de cisaillement donnée par Reddy.

On peut voir aussi que l'augmentation de l'indice de loi de puissance p conduit à une augmentation de la flèche \bar{w} et de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$, Par contre on remarque une diminution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$.

Tableau IV.1 : Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme ($L/h=5$).

p	Theories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	PSDBT	3.1653	3.8018	0.7321
	Présente	3.1653	3.8018	0.73297
0.5	PSDBT	4.8285	4.9922	0.7493
	Présente	4.8285	4.9476	0.75012
1	PSDBT	6.2594	5.8834	0.7321
	Présente	6.2594	5.8066	0.7329
2	PSDBT	8.0676	6.8823	0.6696
	Présente	8.0676	6.7591	0.6704
5	PSDBT	9.8280	8.11037	0.5896
	Présente	9.8280	7.9252	0.5903
10	PSDBT	10.9381	9.7119	0.6456

	Présente	10.9381	9.5285	0.6465
--	----------	---------	--------	--------

Tableau IV.2 :Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L/h=10$).

p	Theories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	PSDBT	2.9501	7.5258	0.7402
	Présente	3.1653	7.5258	0.7406
0.5	PSDBT	4.5373	9.8769	0.7573
	Présente	4.8285	9.8546	0.7576
1	PSDBT	5.8958	11.6353	0.7402
	Présente	6.2594	11.5970	0.7406
2	PSDBT	7.5672	13.5924	0.6777
	Présente	8.0676	13.5309	0.6780
5	PSDBT	9.0203	15.9691	0.5977
	Présente	9.8280	15.8767	0.5980
10	PSDBT	9.9403	19.1399	0.6546
	Présente	10.938	19.0485	0.6550

Tableau IV.3 :Flèche et contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous chargement uniforme($L/h=20$).

p	Théories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	PSDBT	2.8962	15.0128	0.7435
	Présente	2.8962	15.0128	0.7436
0.5	PSDBT	4.4644	19.7002	0.7604
	Présente	4.4644	19.6891	0.7605
1	PSDBT	5.8049	23.2051	0.7435
	Présente	5.8048	23.1860	0.7436
2	PSDBT	7.4420	27.0989	0.6810
	Présent	7.4421	27.0682	0.6811
5	PSDBT	8.8182	31.8127	0.6011
	Présente	8.8186	31.7667	0.6012
10	PSDBT	9.6905	38.1382	0.6584
	Présente	9.6907	38.0926	0.6585

Tableau IV.4 : Distribution des contraintes adimensionnelles de la poutre FGM sous chargement uniforme ($L=2h$).

p	z/h	Théories	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	
0	0.5	PSDBT	1.6299	0	
		Présente	1.6299	0	
	0.4	PSDBT	1.2103	0.2542	
		Présente	1.2103	0.2549	
	0.2	PSDBT	0.5428	0.5932	
		Présente	0.5428	0.5948	
	0.1	PSDBT	0.2636	0.6779	
		Présente	0.2636	0.6798	
	0.0	PSDBT	0	0.7062	
		Présente	0	0.7082	
	-0.1	PSDBT	-0.2636	0.6779	
		Présente	-0.2636	0.6798	
	-0.2	PSDBT	-0.5428	0.5932	
		Présente	-0.5428	0.5948	
	-0.4	PSDBT	-1.2103	0.2542	
		Présente	-1.2103	0.2549	
	-0.5	PSDBT	-1.6299	0	
		Présente	-1.6299	0	
		0.5	PSDBT	2.5378	0
			Présente	2.3454	0
0.4		PSDBT	1.5925	0.3943	
		Présente	1.5353	0.3954	
0.2		PSDBT	0.3142	0.7566	

1		Présente	0.3760	0.7588	
	0.1	PSDBT	-0.1014	0.7713	
		Présente	-0.3245	0.7735	
	0.0	PSDBT	-0.4091	0.7062	
		Présente	-0.3538	0.7082	
	-0.1	PSDBT	-0.6286	0.5845	
		Présente	-0.5990	0.5862	
	-0.2	PSDBT	-0.7713	0.4297	
		Présente	-0.7715	0.4309	
	-0.4	PSDBT	-0.8282	0.1141	
		Présente	-0.8742	0.1144	
	-0.5	PSDBT	-0.7220	0	
		Présente	-0.7737	0	
	5	0.5	PSDBT	3.5966	0
			Présente	3.1332	0
		0.4	PSDBT	1.4913	0.6450
Présente			1.4409	0.6472	
0.2		PSDBT	0.6009	0.7262	
		Présente	0.1602	0.7287	
0.1		PSDBT	-0.1556	0.6396	
		Présente	-0.6983	0.6418	
0.0		PSDBT	-0.2902	0.5642	
		Présente	-0.2274	0.5661	
-0.1		PSDBT	-0.4119	0.4974	
		Présente	-0.3757	0.4991	
-0.2		PSDBT	-0.5502	0.4208	

		Présente	-0.5446	0.4222
	-0.4	PSDBT	-0.9224	0.1784
		Présente	-0.9878	0.1790
	-0.5	PSDBT	-1.1724	0
		Présente	-1.2730	0

Figures IV.1, IV.2 montrent l'évolution des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ et de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ respectivement à travers l'épaisseur de la poutre FGM sous chargement uniforme. La comparaison avec la théorie d'ordre élevé PSDBT développée par Reddy (Reddy 1984) est aussi présentée dans ces figures pour différentes valeurs d'indice de puissance p .

Généralement on remarque que la présente théorie de cisaillement raffinée et la théorie de cisaillement d'ordre élevé de Reddy est presque identique.

On peut voir que la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ est de traction dans la surface supérieure et de compression dans la surface inférieure.

La poutre homogène en céramique ($p = 0$) donne une contrainte de compression maximale à la surface inférieure et une contrainte de traction minimale sur la surface supérieure de la poutre. La figure IV.2 montre la distribution des contraintes de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre. La distribution des contraintes de cisaillement transversales pour les poutres FGM ne sont pas paraboliques comme dans le cas des poutres homogènes en métal ou en céramique.

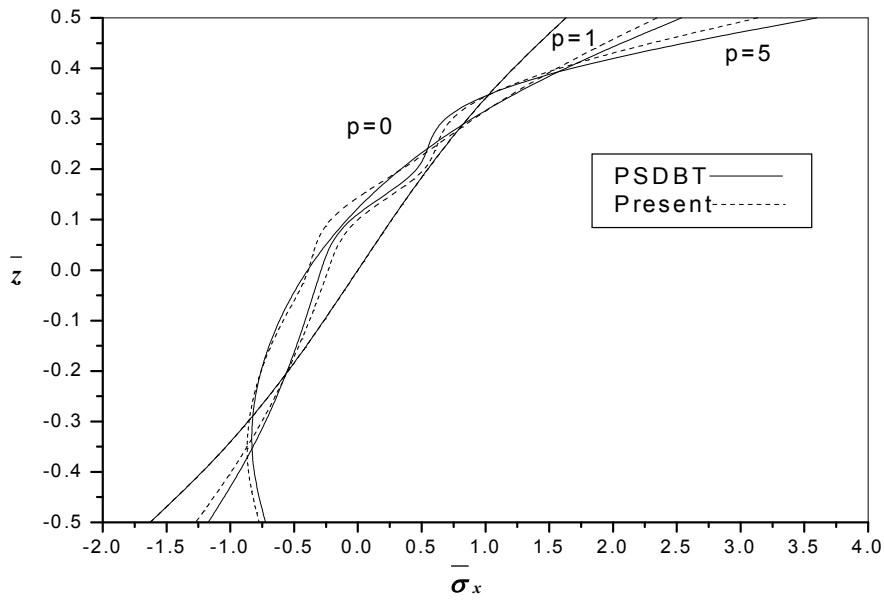


Figure IV.1 : Variation de la contrainte normale axiale σ_x à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).

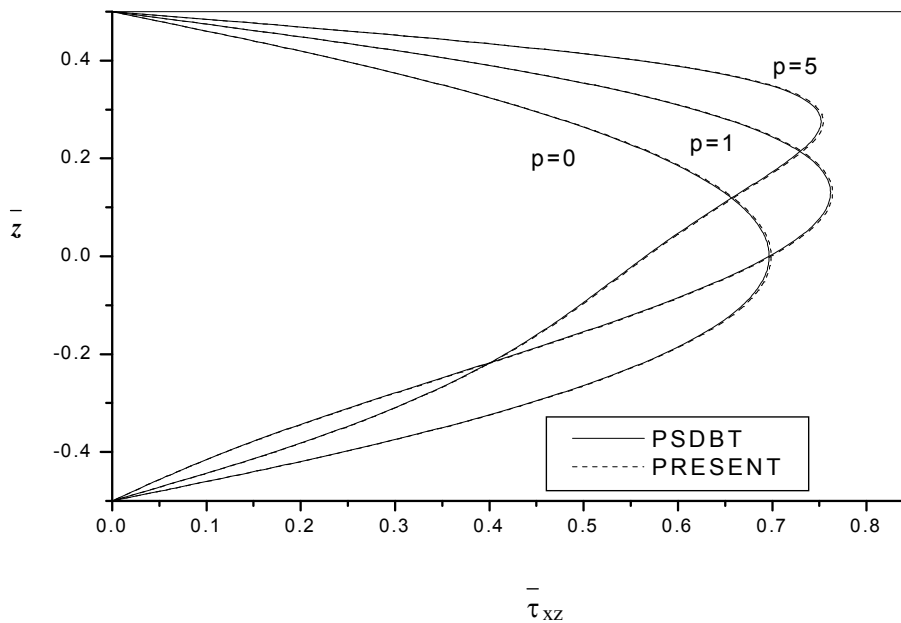


Figure IV.2: Variation de la contrainte du cisaillement transverse τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).

IV.2.2.2 Résultats pour l'analyse de la vibration libre :

Le tableau IV.3 montre les résultats numériques des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p pour différentes valeurs du rapport L/h . Les fréquences calculées sont comparées avec les résultats donnés par Reddy en utilisant la présente théorie de cisaillement raffinée; on peut voir que la théorie utilisée donne des résultats identiques à ceux de Reddy.

La figure IV.5 montre la variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de la poutre FGM pour différentes valeurs d'indice de puissance p en utilisant la présente théorie raffinée et la théorie de Reddy.

On l'observe qu'il ya un bon accord entre la présente théorie et celle de Reddy et que l'augmentation de l'indice de puissance p conduit à une réduction dans les fréquences de vibration. Les fréquences sont supérieures pour les poutres entièrement en céramique ($p = 0$) tandis que les fréquences sont inférieures pour les poutres en métal ($p \rightarrow \infty$). C'est dû à l'influence de la rigidité du matériau c'est à dire l'augmentation dans la valeur de l'indice de puissance conduit à une diminution dans la valeur du module d'élasticité.

Tableau IV.5 Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de puissance pour la poutre FGM ($L/h = 20$).

L/h	Theories	p					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Présente	5.1527	4.4106	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	PSDBT	5.1527	4.4106	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
10	Présente	5.3932	4.5990	4.1585	3.7904	3.5936	3.4815
	PSDBT	5.3933	4.5990	4.1586	3.7904	3.5936	3.4815
20	Présente	5.4605	4.6511	4.2051	3.8362	3.6484	3.5392
	PSDBT	5.4603	4.6511	4.2050	3.8361	3.6484	3.5389

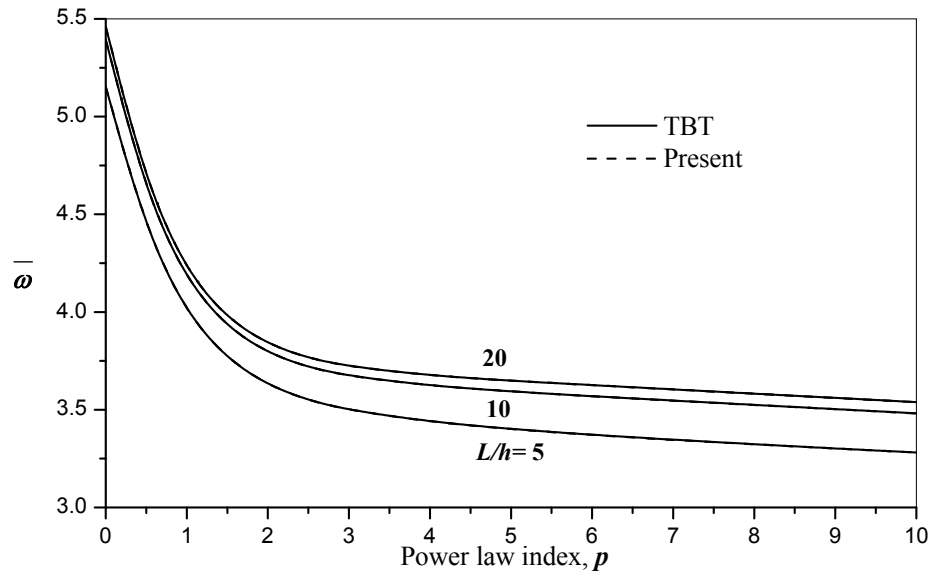


Figure. IV.4 Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de la poutre FGM pour différentes Valeurs d'indice de puissance p et du rapport L/h .

IV.2.2 Résultat du nouveau modèle de cisaillement

Les paramètres adimensionnels utilisés dans cette étude sont :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(\frac{L}{2}\right); \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u\left(0, -\frac{h}{2}\right); \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0,0);$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

IV.2.2.1 Résultats d'analyse de flexion

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des autres théories de cisaillement des poutres. D'après ces résultats présentés, on remarque que le présent model de cisaillement donne presque des résultats identiques avec les autres théories de cisaillement.

Les figures IV.5, IV.6 et IV.7 présentent l'évolution des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$, de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ et le déplacement axial \bar{u} respectivement. Une comparaison avec la théorie de cisaillement présenté par Ould Larbi (2013) est également représentée sur ces figures pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance k . On constate qu'il ya un bon accord entre le présent model et la théorie de cisaillement de Ould Larbi (2013).

D'après la figure IV.5, la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ est de traction dans la surface supérieure et de compression dans la surface inférieure de la poutre. On remarque que la poutre

homogène en céramique donne les contraintes de compression maximales dans la surface inférieure et des contraintes de traction minimale dans la surface supérieure de la poutre.

La distribution des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre FGM sont présentés dans la figure IV.6. Dans cette figure on remarque que la distribution des contraintes de cisaillement est parabolique uniquement dans le cas des poutres homogènes en céramique ou en métal.

Dans la figure IV.7, il est clair que l'augmentation de l'indice de loi de puissance k conduit à une augmentation du déplacement axial et en particulier dans la partie supérieure et inférieure de la poutre FGM.

La figure IV.8 montre la variation du déplacement transversal adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport x / L pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance k . On remarque que le présent model de cisaillement et la théorie de cisaillement présenté par Ould Larbi (2013) sont identiques.

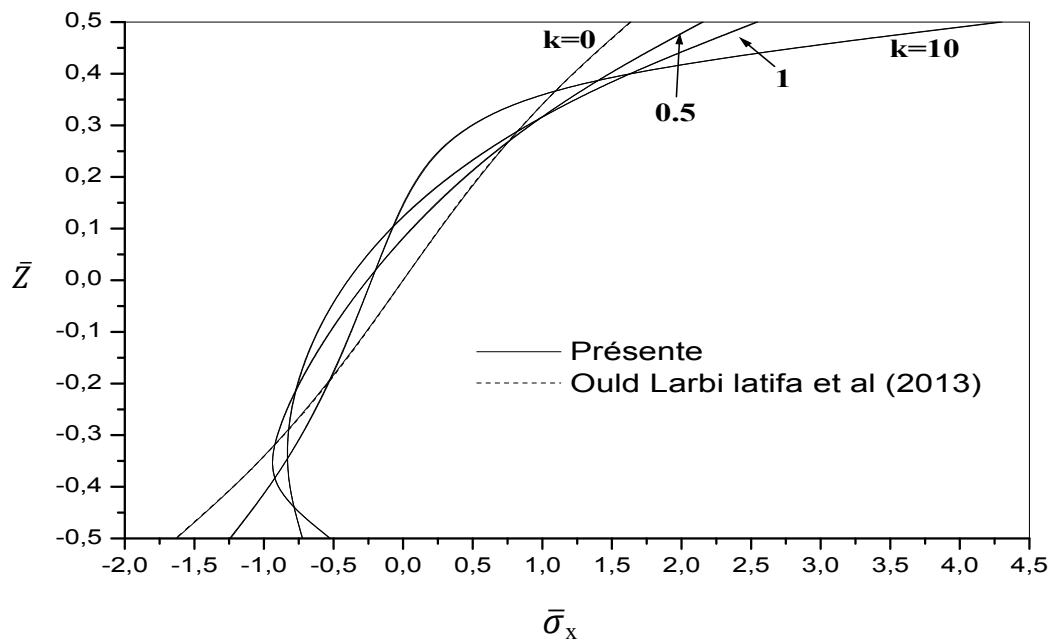
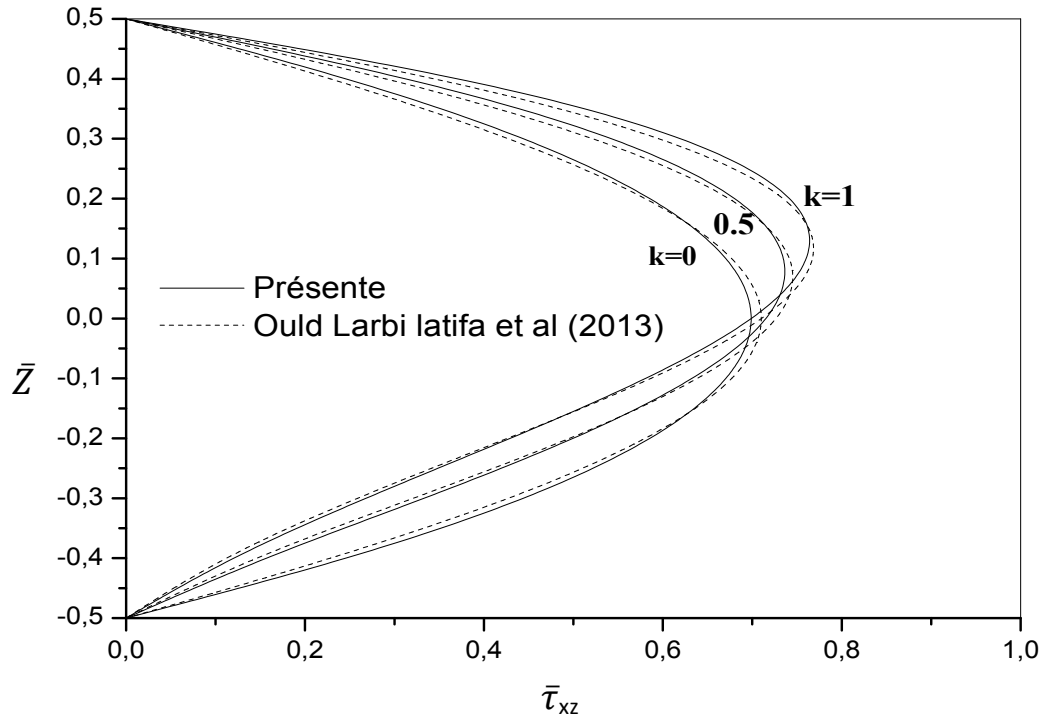


Figure IV.5 : Variation des contraintes normales axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM sous la charge uniforme avec ($L = 2h$).



FigureIV. 6:Variation des contraintes de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM sous la charge uniforme avec ($L = 2h$).

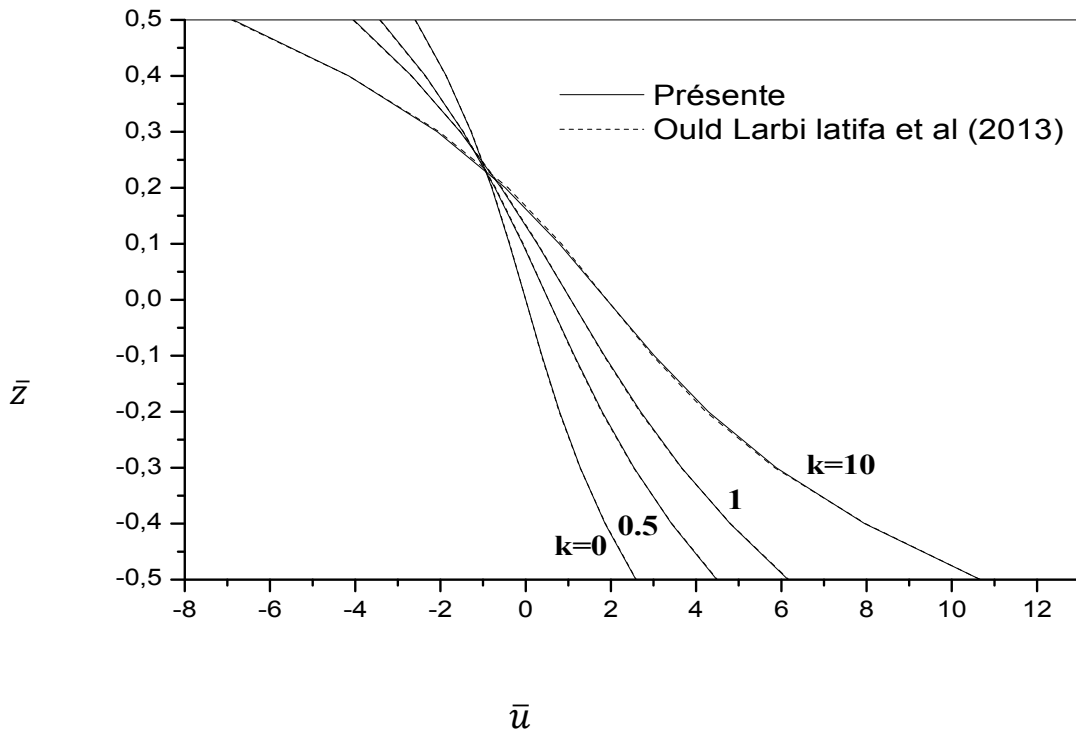


Figure IV.7 : Variation du déplacement axiale \bar{u} à travers l'épaisseur de la poutre FGM sous la charge uniforme avec ($L = 2h$).

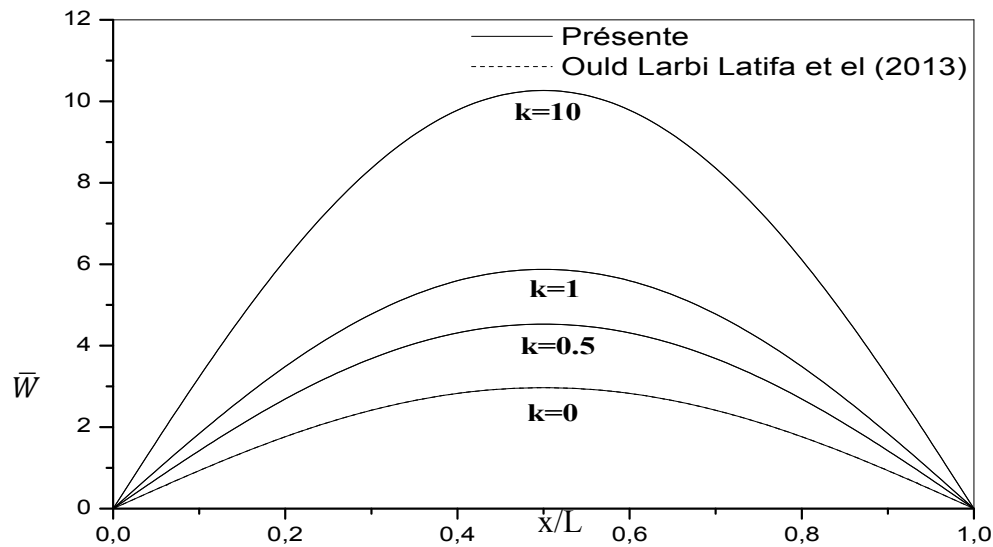


Figure IV.8 : la variation du déplacement transversal adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport x / L

IV.2.2.1 Résultats d'analyse de la vibration libre

Les fréquences fondamentales adimensionnelles de la poutre FGM pour différentes valeurs de puissance indice de loi k et des rapports L/h sont comparés avec les résultats de cisaillement de cisaillement présenté par Ould Larbi (2013)

La figure IV.9 montre la variation de la fréquence naturelle fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport L/h en utilisant à la fois le présent model et la théorie de cisaillement de Ould Larbi. Un excellent accord entre les deux théories est montré dans cette figure. On peut observer que la fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance k . Les poutres entièrement en céramique ($k = 0$) donnent les plus grandes fréquences de vibration. Cela est dû au fait que l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance k conduit à une diminution de la valeur du module d'élasticité de la poutre. Il peut également être vu que le rapport L / h a un effet considérable sur la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ où cette dernière est diminuée avec la diminution de ce rapport L / h . Cette dépendance est liée à l'effet de cisaillement.

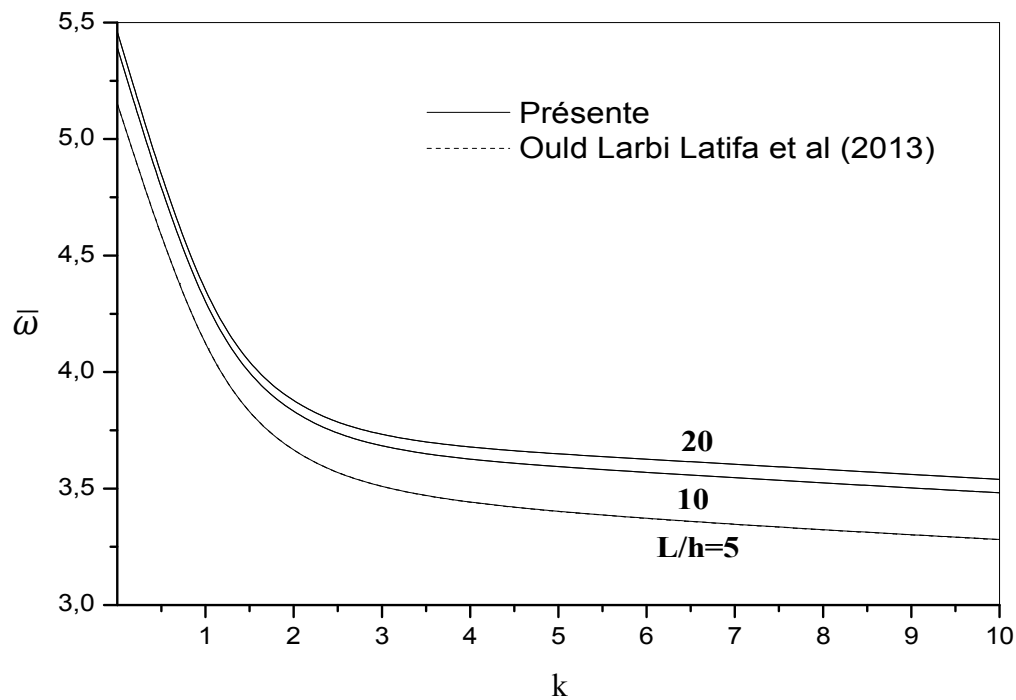


Figure IV. 9 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de la poutre FGM en fonction de l'indice de puissance k et le rapport L/h .

IV.3 Conclusion :

La théorie de cisaillement raffinée des poutres basée sur le concept de l'axe neutre est développée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres simplement appuyées en matériau FGM. Cette nouvelle théorie raffinée prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement.

Les équations de mouvement pour la poutre en FGM sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton. Une étude paramétrique est faite pour démontrer l'efficacité de cette nouvelle théorie raffinée.

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée et le nouveau modèle de cisaillement sont non seulement précis, mais aussi efficaces pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres en matériau FGM.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie de l'Université Djilali Liabess de Sidi Belabess portant sur l'analyse et modélisation de l'influence de cisaillement transverse sur le comportement statique et dynamique des poutres FGM, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les réponses statique et dynamique des poutres FGM.

Une théorie de cisaillement raffinée des poutres a été développée pour étudier le comportement statique et dynamique des poutres simplement appuyées en FGM en se basant sur le concept de l'axe neutre.

Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement.

Pour les poutres en P-FGM, les équations du mouvement et les conditions aux limites associées sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la poutre en FGM avec des conditions aux limites sous forme d'appuis simples. La comparaison des résultats de cette théorie de cisaillement raffinée avec les autres théories de cisaillement, a permis de dégager plusieurs points:

- Un bon accord entre les résultats de cette théorie raffinée avec celle de la théorie de cisaillement donnée par Reddy.
- l'augmentation de l'indice de loi de puissance p conduit à une augmentation de la flèche \bar{w} et de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$, Par contre il y'a une diminution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$.
- La contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ est de traction dans la surface supérieure de la poutre et de compression dans la surface inférieure.

- La poutre homogène en céramique ($p = 0$) donne une contrainte de compression maximale à la surface inférieure et une contrainte de traction minimale sur la surface supérieure de la poutre.
- La distribution des contraintes de cisaillement transversales pour les poutres FGM ne sont pas paraboliques comme dans le cas des poutres homogènes en métal ou en céramique.
- Les fréquences obtenues par la présente théorie donnent des résultats identiques à ceux de Reddy.
- L'augmentation de l'indice de puissance p conduit à une réduction dans les fréquences de vibration.
- Les fréquences sont supérieures pour les poutres entièrement en céramique ($p = 0$) tandis que les fréquences sont inférieures pour les poutres en métal ($p \rightarrow \infty$).

En conclusion, on peut dire que la théorie des poutres raffinées proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flexion et de vibration des poutres en FGM par rapport à l'axe neutre.

En perspective de ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de gauchissement, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la flexion et la vibration;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude des poutres sandwiches en FGM.
- Utilisation de la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Ait atmane2011] Ait Atmane.H, Tounsi.A, Mechab.I, Adda Bedia. E.A, “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory” . Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2), 113-121, 2010.

[Boch1986]Boch.P, Chartier.T, Huttepain, M, “Tape casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites” ;69 (8) ,191-192, 1986

[Bishop 1993]Bishop.A, Lin.C.Y; Navaratnam. M. Rawlings.R.D MC.
« Chane a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters” vol 12;1516-1518;1993.

[Elomari 2011] ELOMARI KAWTHAR « Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. » Thèse de Master de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.

[Hadj 2013] HADJI LAZREG « Contribution à l’étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.

[Delale1983] Delale.F, Erdogan.F. “The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics” vol 50, 609 –614, 1983.

[Ichikawa 2000]Ichikawa.K., “Functionally graded materials in the 21st Century”: A workshop on trends and the non-uniformity in the cross-section forecasts, Japan. Kluwer Academic Publishers 2000

[Kassimi 2011] KASSIMI NORA « Etude des contraintes d’interface d’une poutre FGM renforcée par une plaque en matériaux composites » Thèse de Master de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011

[Reddy2002] Reddy JN, Cheng ZQ. “Frequency correspondence between membranes and Functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform”. Int J MechSci 44(5):967–85. 2002;

[Benatta 2008] Benatta.M.A., Mechab.I., Tounsi, A., Addabedia, E.A. “Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation affects”, Computational Materials Science, 44(2), 765–773.(2008).

[Benatta 2009] Benatta.M.A., Mechab.I., Tounsi, A, Bachirbouiadjra, M. “Mathematical solution for bending of short hybrid composite beams with variable fibers spacing”, Applied Mathematics and Computation, 212(2), 337 – 348 (2009).

[Bresse 1859] BRESSE, J. A. C. «Cours de Mecanique Applique » (Mallet-

Bachelier, Paris). Cowper, G. R. (1966). The Shear coefficients in Timoshenko beam theory, ASME, J. Appl. Mech. **33**(2), 335–340(1859)

[Kadoli 2008] Kadoli, R., Akhtar, K., Ganesan, N. “Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory”, Applied Mathematical Modelling, **32**(12), 2509–2525.(2008).

[Bedjilili 2009] Bedjilili, Y., Tounsi, A., Berrabah, H. M., Mechab, I., Addabedia, E. A., Benaissa, S. “Natural frequencies of composite beams with a variable fiber volume fraction including rotary inertia and shear deformation”, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. **30**(6), 1 – 10.(2009).

[Ouldjarbi 2014] Ouldjarbi, L. “Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM » ; Thèse de doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011

[Karama 2003] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003).

[Li 2008] Li, X.F. “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams”, Journal of Sound and Vibration, **318**(4–5), 1210–1229.(2008).

[Rayleigh 2011] Rayleigh, J. Lord W. S. “The Theory of Sound (Macmillan Publishers London).

.(2011)

[Koochaki 2011] Koochaki, G.R. “Free vibration analysis of functionally graded beams”, World Academy of Science, Engineering and Technology, **74**, 366 – 369.(2011)

[Sallai 2011] SALLAI BEN-OUMRANE « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011

[Sankar 2001] Sankar, B.V., “An elasticity solution for functionally graded beams”. Composites Science and Technology **61**, 689 – 696; 2001.

[Zhong 2007] Zhong, Z., YU, T., “Analytical solution of a cantilever functionally graded beam”. Composites Science and Technology **67**, 481 – 488; 2007.

[Moya et al, 1992] Moya, J. S., Sanchez-Herencia, A. J., Requena, J. & Moreno, R: «Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting», Materials Letters, Volume **14**, 333-335, 1992

[Li 2008] LI, X.-F., “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams”. Journal of Sound and Vibration **318**, 1210 – 1229.2008.

- [**Murthy, 1981**]MurthyM.V.V.. «An Improved Transverse ShearDeformationTheory for LaminatedAnisotropic Plate». Rapport technique, NASA, 1981.
- [**Sallai 2009**] Sallai, B.O., Tounsi, A., Mechab, I., Bachir B.M., Meradjah, M., Addabedia, E.A., A “theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams”. Computational Materials Science 44(4), 1344 – 1350;2009.
- [**Abdi 1997**] ABDIZADEH, H, « Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex: «Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'Alumine», Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon France, 212p..1997
- [**Şimşek 2009**] Şimşek, M., Kocaturk, T., “Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load”. Composite Structures 90(4), 465 – 473. 2009.
- [**Dufort, 2000**] .Dufort. L« Etude de Cisaillement Transverse dans des Poutres Stratifiés et Sandwich : Aspect Théorique et Expérimentaux ».Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal-Clermont II, 2000.
- [**Boch, 1987**] BOCH, P. «Tape Casting of Layered Composites, in processing of Advanced Ceramics».Edited by J. S. Moya and S. de Aza.Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, pages: 103-112, 1987.
- [**Levinson, 1980**]LevinsonM.. «An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates». MechanicsResearch Communication, Volume 7, pages:343-350, 1980
- [**Timoshenko, 1972**] Timoshenko S.P.et J.M.Gere.« Mechanics of Materials ». New York: D.Van Nostrand Company, 1972.
- [**Kieback2003**] KIEBACKB., NEUBRAND, A;FIEDEL H.Riedel«processing techniques for functionallygradedmaterials», materials science and engineering A36281-105; (2003)
- [**Tekahashi 1990**] Takahashi .M.ITOH.Y KASHIWAYA” fabrication and evaluation of w/cu gradient material by sintering and infiltration technique” , in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materialsJapan 1990
- [**Huu, Huu-Tai 2012**] Huu, Huu-Tai Thai, Thuc P., “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”, International Journal of Mechanical Sciences 62, 57–66, 2012.
- [**Benachour2009**]Benachour AEK« Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques composites collées sous précontrainte » thèse de doctoratuniversitéDjillaliLiabès de SidiBelAbbès 2009

