



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique



## THESE

Pour l'obtention du diplôme de

### Doctorat en Sciences

Spécialité: Génie Mécanique

Option: Sciences des Matériaux

Présentée par Monsieur

**BENDOUBA Mostefa**

## Etude de la fatigue des structures sous l'effet d'un état de contraintes multiaxiales

Soutenue le : 03/02/2013 devant le jury composé de :

**Président:**

M. MAZARI Mohamed

Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

**Examineurs:**

M. BOUCHETARA Mostefa

Professeur, Université des Sciences et Technologie d'Oran

M. BOUCHOUICHA Benattou

Maître de Conférences Classe A, Université de Sidi Bel Abbès

M. OULD CHIKH EL Bahri

Maître de Conférences Classe A, Université de Mascara.

**Directeur de Thèse:**

M. AID Abdelkrim

Maître de Conférences, Université de Mascara.

**Co- Directeur de Thèse:**

M. BENGUEDIAB Mohammed

Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

2012-2013

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b> .....	01
Chapitre I	
<b>Introduction à la fatigue des matériaux</b> .....	03
I.1. Introduction .....	03
I.3. Les différentes phases de fatigue.....	04
I.3.1. Période d'amorçage .....	04
I.3.2. Période de propagation .....	05
I.4. Mode de chargements .....	05
I.5. Glossaire des termes utilisés en fatigue .....	07
I.6. Courbe de Wöhler .....	07
I.6.1. Différents domaines d'endurance .....	08
I.7. Modélisation des courbes d'endurance .....	09
I.8. Les facteurs influençant sur la durée de vie des structures.....	09
I.8.1. Effet d'une contrainte moyenne non nulle .....	09
I.8.1.1. Diagramme de HAIGH .....	10
I.8.2. L'effet d'entaille .....	11
I.8.3. Effet de l'état de surface .....	13
I.8.4. Effet de l'environnement .....	14
I.9. Méthodes de comptage des cycles.....	15
I.10. Méthode RAINFLOW de comptage des cycles .....	16
I.10.1. Définition pratique de la méthode Rainflow .....	17
I.11. Conclusion .....	19
Chapitre II	
Critères d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale .....	20
II.1. Introduction .....	20
II.2. Les essais expérimentaux classiques de fatigue multiaxiale .....	20
II.3. Généralités et définitions des termes liés à la fatigue multiaxiale .....	21
II.4. Classification des critères de fatigue multiaxiale.....	23
II.5. Critères empirique .....	26
II.5.1. Critère de Hohenemser & Prager .....	26

## Table des matières

---

II.5.2 Critère de Gough et Pollard .....	26
II.5.3. Critère de Nishihara & Kawamoto .....	26
II.5.6. Critères de Soon Book Lee 1 et 2.....	27
II.6. Critères globale .....	27
II.6.1. Critère de Sines .....	27
II.6.2. Critère de Crossland .....	28
II.6.3. Critère de Marin .....	28
II.6.4. Critère de Hashin .....	28
II.6.5. Critère de Kinasoshvili .....	29
II.6.6. Critère de Fogue .....	29
II.6.7. Critère de Kakuno & Kawada .....	31
II.6.8. Critère de Papadopoulos I .....	31
II.6.9. Critère de Papadopoulos II .....	31
II.7. Critères énergétiques .....	33
II.7.1. Critère de Froustey & Lasserre .....	33
II.7.2. Critère de Palin Luc .....	34
II.7.3. Critère d'Ellyin .....	34
II.7.4. Critère de Garud .....	35
II.7.5. Critère de Glinka .....	35
II.7.6. Critère de Macha .....	35
II.8. Critère de plan critique .....	36
II.8.1.Critère de Findley .....	36
II.8.2. Critère de Yokobori .....	37
II.8.3. Critère de McDiamid I .....	37
II.8.4. Critère de McDiamid II .....	37
II.8.5. Critère de Robert .....	38
II.8.6. Critère de Dang Van I .....	39
II.8.7. Critère de Dang Van II .....	41
II.9. Conclusion .....	41

# Table des matières

---

## Chapitre III

<b>Les Lois de cumul d'endommagement</b> .....	43
III.1. Introduction .....	43
III.2. Théorie du cumul linéaire - Loi de Palmgren-Miner .....	43
III.3. Loi de Marco et Starkey .....	44
III.3.1. Méthode des nombres de cycles équivalents .....	45
III.4. La loi de Henry .....	46
III.5 - La loi de Gatts .....	47
III.6 - La loi de Manson, Freche et Ensign.....	50
III.7. La théorie unifiée de Bui-Quoc, Bazergui et Biron .....	53
III.8. La loi de Lemaitre et Chaboche .....	57
III.9. La loi d'Ellyin.....	61
III.10. Loi de la contrainte endommagée (Model DSM) .....	65
III.11. Conclusion .....	66

## Chapitre IV

<b>Modélisation et validation</b> .....	68
IV.1. Introduction .....	68
IV.2. Modèle proposé .....	68
IV.2.1 Cas de la fatigue oligocyclique.....	69
IV.2.2 Cas de la fatigue polycyclique .....	70
IV.2.3 Cas de la fatigue multiaxiale .....	70
IV.2.4 Variable d'endommagement .....	71
IV.2.5. Exemple d'un chargement à deux blocs .....	72
IV.3. Critères d'évaluation des performances des lois .....	74
IV.4. Application et validation de modèle proposé .....	74
IV.4.1 Validation pour le domaine de la fatigue oligocyclique .....	74
IV.4.2. Validation pour le domaine de la fatigue polycyclique .....	81
IV.4.2.1 Résultats de Pavlou .....	81
IV.4.2.2. Chargement par Blocs croissants .....	83
IV.4.3. Chargement d'amplitude variable à trois blocs .....	84
IV.4.4. Chargement d'amplitude variable à 80 blocs .....	86

# Table des matières

---

IV.4.4.1. Présentation du matériau .....	86
IV.4.4.2. Type de chargements .....	86
IV.4.4.3. Résultats et discussions .....	87
IV.5. Investigation numérique .....	89
IV.5.1. Analyse statique .....	89
IV.5.2. Matériau étudié .....	89
IV.5.3. Modèle par élément finis .....	91
IV.5.4. Etat de contrainte .....	92
IV.6. Analyse de fatigue .....	92
IV.6.1 Les propriétés du matériau .....	93
IV.6.2. Chargement à quatre blocs croissants .....	94
IV.6.3. Résultats et analyses .....	95
IV.7. Chargement uniaxial aléatoire .....	96
IV.7.1. Résultat de simulation .....	98
IV.8. Confrontation des lois de cumul et de la simulation à l'expérience .....	99
VI.9. Validation pour un état de contrainte multiaxiale (Essais de flexion plane et de torsion combinées (R=-1) à fréquences différentes sur la fonte GS61 .....	102
VI.10. Application sur les structures fissurée et réparées par la méthode de l'expansion a roid .....	105
VI.10.1. Matériaux et spécimens.....	105
VI.10.2.Modélisation 3D de l'expansion.....	107
V.10.3. Résultats et analyse.....	110
VI.10. Conclusion.....	112
<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>114</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>115</b>
<b>liste des figures.....</b>	<b>125</b>
<b>liste des tableaux.....</b>	<b>128</b>
<b>Notations</b>	
<b>Resumé</b>	
<b>Abstract</b>	
<b>ملخص</b>	

# Remerciement

---

Ce travail de thèse à été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Quantique et de Modélisation Mathématique de la Matière (LPQ3M) de l'Université de Mascara)

Je tiens à remercier chaleureusement mes encadreurs, Dr AID Abdelkrim, directeur de thèse, ainsi que le Pr BENGUEDIAB Med, co-directeur, pour leur soutien, leurs encouragements et surtout leur disponibilité pendant ces quatre années.

Je remercie également très sincèrement Pr MAZARI Mohamed pour accepter de présider le jury de soutenance, son assistance est un honneur pour moi.

J'exprime mes plus vifs remerciements et ma gratitude à Monsieur le Pr BOUCHETARA Mostefa, Dr BOUCHOUICHA Benattou et Dr OULD CHIKH EL Bahri qui ont aimablement accepté de faire partie de mon jury.

J'adresse mes respects et ma profonde reconnaissance à mes enseignants de magistère sans exception.

Je tiens à remercier sincèrement tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et plus particulièrement Monsieur DJEBLI Aek, ZENGAH Sahnoun et SALEM Med.

Je ne saurais oublier ici les responsables et le personnel de la faculté des sciences de l'ingénieur de l'Université Djillalli Liabes, dont la disponibilité et la courtoisie ont été constantes à mon égard.

Merci à toi, mon épouse, qui as pu supporter mes longs moments d'absence et s'occuper toute seule de nos enfants et aussi pour l'aide quelle m'a apporté.

A tous les membres de ma famille qui ont su m'apporter le soutien moral indispensable à la réalisation de ce modeste travail, qu'ils en soient ici remerciés.

# Introduction générale

# Introduction générale

---

Ce travail de thèse présente une continuité et va compléter notre étude dans le cadre de mémoire de magistère, qui avait un objectif essentiel la mise en place d'un modèle d'endommagement basé sur l'énergie de déformation qui calcule la durée de vie pour le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles. Limité dans l'étude des cas de sollicitation uniaxiale.

La sécurité et la durabilité des structures en service sont devenues plus importantes qu'auparavant parce que la rupture soudaine de systèmes complexes tels que les centrales nucléaires, automobiles, avions et réservoirs sous pression peut causer beaucoup de dommages, des pertes financières et même des dommages environnementaux. Comme beaucoup de ces structures sont soumises à des chargements multiaxiaux répétés, l'étude de la fatigue multiaxiale devient l'un des enjeux majeurs dans la conception de ces structures. En général, les charges appliquées sont souvent complexes, ce qui, correspond à des contraintes principales non-proportionnelles où dont les directions changent au cours d'un cycle de tels chargements. Il est très difficile de définir le comportement en fatigue des matériaux et des structures sous de tels chargements.

On peut définir, l'endommagement d'un matériau comme une modification de ses propriétés physiques et mécaniques, c'est-à-dire la dégradation qui accompagne une sollicitation soit monotone, ou variable au cours du temps (chargement responsable de la majorité des cas de défaillance des systèmes mécaniques). Nous ne nous intéressons dans ce travail à la catégorie de ces sollicitations dans leur forme complexe (cas de sollicitations multiaxiale) qui conduit au dommage par fatigue.

La complexité géométrique et/ou les différentes combinaisons de chargement des nombreux composants et des structures se traduisent souvent par un état de contrainte multiaxiale. La prédiction de la durée de vie en fatigue de ces composants et structures a constitué un grand challenge. La fatigue multiaxiale a fait l'objet des recherches intensives au cours de plus d'un demi-siècle, néanmoins aucune théorie de la fatigue multiaxiale n'est universellement acceptée.

Ce rapport de thèse est structuré en quatre chapitres. **Le premier chapitre** est consacré à un rappel de quelques notions sur le phénomène la fatigue des matériaux. Dans ce contexte, nous choisissons quatre points clés : les mécanismes d'endommagement, les



# Introduction générale

---

modèles mathématiques des courbes d'endurance, les principaux facteurs influençant sur la durée de vie des structures et les Méthodes de comptage.

Ainsi, **le second chapitre** propose un inventaire des critères de la fatigue multiaxial rencontrés dans la littérature, ces critères sont utilisé pour l'estimation de la durée de vie des structures sous un chargement complexe et permet de prévoir la tenue en fatigue des métaux selon deux approches distinctes : locale (macroscopique ou mésoscopique) et non locale.

L'essentiel des lois de cumul d'endommagement est présentés dans **le troisième chapitre**. Ces lois ont pour point commun de déterminer une valeur de dommage à partir de l'évolution au cours du temps d'une composante scalaire caractérisant, pour le calcul du dommage, l'amplitude de contraintes ou de déformations de la structure. Dans ce chapitre, nous avons porté des améliorations sur notre modèle de cumul d'endommagement basé sur énergie de déformation pour qu'il soit applicable dans la fatigue oligocyclique ainsi que la fatigue multiaxiale.

Dans **le quatrième chapitre** nous avons utilisé les résultats expérimentaux de la bibliographie pour la validation de notre proposition dans le cas de la fatigue polycyclique, oligocyclique et multiaxiale. Cette proposition est validée sur plusieurs cas de chargements.

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet de l'expansion du trou sur les contraintes résiduelles et les déformations plastiques au bord du trou par une modélisation numérique, l'application de modèle proposé est envisagée pour l'estimation des éprouvettes fissurées et réparées par la technique de l'expansion à froid.

Enfin, dans la conclusion générale de cette étude nous ouvrons quelques perspectives qui sont présentées à la fin de ce document.

# Chapitre I

## Introduction à la fatigue des matériaux

## I.1. Introduction

La fatigue des matériaux est un champ de recherche très large, quoique les chercheurs ainsi que les industriels dans ce domaine n'ont pas arrêté de l'exploiter depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle, ils tendent toujours à élaborer des outils fiables dans le calcul des structures réelles. La bonne connaissance des mécanismes de l'endommagement par fatigue des matériaux, est fondamentale pour prévoir la durée de vie d'une structure et pour éviter un drame causé par la rupture brutale et soudaine de cette structure même si elle est soumise à un chargement inférieur à sa limite élastique. La fatigue demeure même de nos jours à être un problème majeur en ingénierie.

Les contraintes économiques et la sécurité des utilisateurs des structures (moyens de transports, machines, etc.) poussent de plus en plus les industriels à optimiser le coût de fabrication des structures mécaniques. Dans ce contexte, les bureaux d'études qui conçoivent les mécanismes ne peuvent pas ignorer le dimensionnement des pièces vis à vis de leur tenue en fatigue.

Bien que beaucoup de définitions puissent être appliquées au mot «fatigue» d'une pièce, cette dernière peut avoir lieu sous une charge répétée ou variable qui n'atteint jamais un niveau suffisant pour causer la rupture dans une application simple. La fatigue peut être également considérée comme le déclenchement et la croissance d'une microfissure, ou croissance d'un défaut préexistant, jusqu'à ce qu'il atteigne une taille critique, telle que la séparation dans deux parts ou plus.

Les défaillances des structures métalliques causées par la fatigue sont des phénomènes bien connus. Les premières investigations ont été déjà observées en 19<sup>ème</sup> siècle par August Wöhler. Ce savant allemand est l'un des chercheurs le plus célèbre dans le domaine de la fatigue, c'est le père de la fatigue autant quant le connaît probablement. Il est responsable de l'invention de la courbe contrainte-durée de vie ou de la méthode S-N de prévision de la vie de fatigue [1]. Il a identifié qu'une application simple d'une contrainte sur une structure strictement inférieure à la limite élastique, n'a fait aucun dommage à celle-ci. Cependant, si la même contrainte était répétée plusieurs fois elle pourrait induire un endommagement et conduit à la rupture brutale de la structure.

### I.3. Les différentes phases de fatigue

Les observations microscopiques ont montré que la nucléation des microfissures se produit généralement très tôt dans les structures. On a obtenu des indications qui peuvent avoir lieu presque immédiatement si un effort cyclique au-dessus de la limite élastique est appliqué [2].

Après la nucléation des microfissures, leur progressions de peut encore être un processus lent, dû aux effets de la microstructure, par exemple les joins de grains. Cependant, après que de la croissance de microfissure soit produite loin de l'emplacement de naissance, on observe une croissance plus régulière. C'est le début de la vraie période de progression de la fissure. Les diverses étapes qui gouvernent le phénomène de la fatigue sont indiquées sur la figure I.1.

Le point le plus important est que la fatigue jusqu'à la rupture se compose de deux périodes, la première est l'initiation ou l'amorçage de la fissure, la deuxième et la propagation de cette dernière.

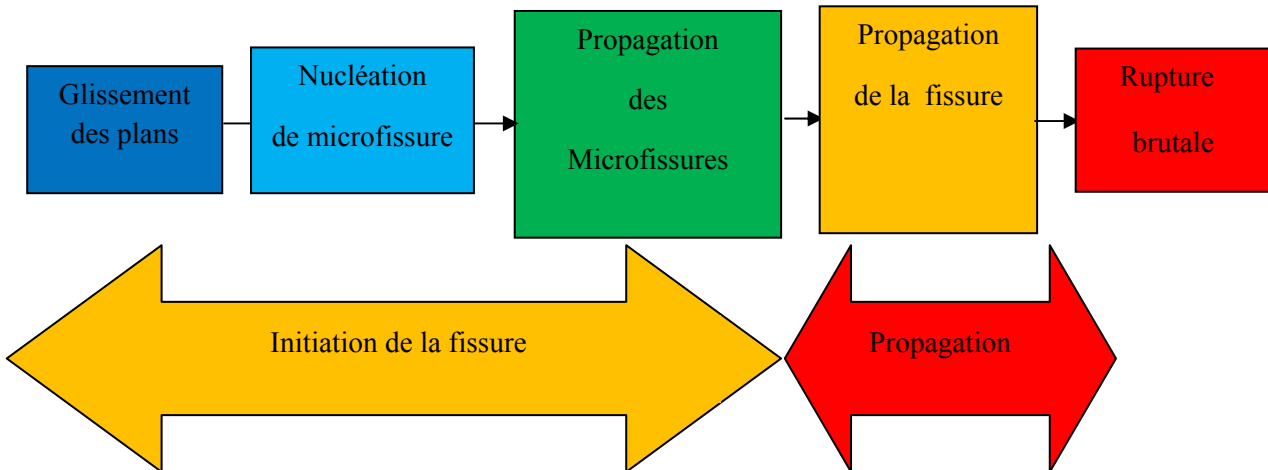


Figure I.1 : Les différentes phases de fatigue

#### I.3.1. Période d'amorçage :

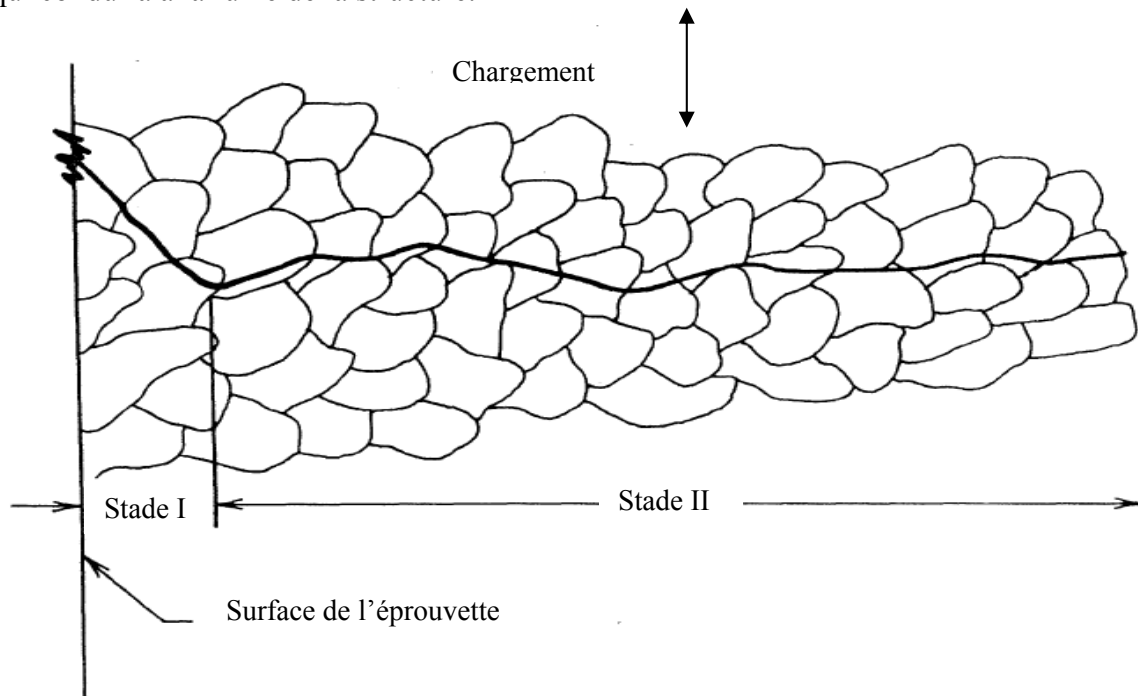
Les phénomènes mis en jeu de cette période sont de très grande finesse et seuls des moyens puissants de laboratoire sont capables de mettre en évidence les signes annonciateurs d'un endommagement. En effet, jusqu'à un certain seuil de ce dernier il est possible, par de judicieux traitements mécaniques et (ou) thermiques, de faire disparaître celui-ci et donc de revenir à un état initial non endommagé.

Lorsque cette opération reste infructueuse, la structure subit un endommagement irréversible et commence d'entrée dans la période de propagation à partir des microfissures formées.

### I.3.2. Période de propagation

Cette période peut, elle même, être partager en deux phases distinctes montrée dans la figure I.2 [3] :

- Stade I ou stade de propagation interne des microfissures.
- Stade II ou stade de propagation d'une des microfissures qui devient alors la fissure de fatigue qui conduira à la ruine de la structure.



**Figure I.2 :** Les stades de propagation de la microfissure

### I.4. Mode de chargements

Les structures mécaniques sont soumises à des sollicitations simples tel que (traction, torsion, ou flexion), parfois ces sollicitations sont combinés (traction - torsion, flexion – torsion), mais en générale les sollicitations sont complexe (thermomécaniques, frottement...).

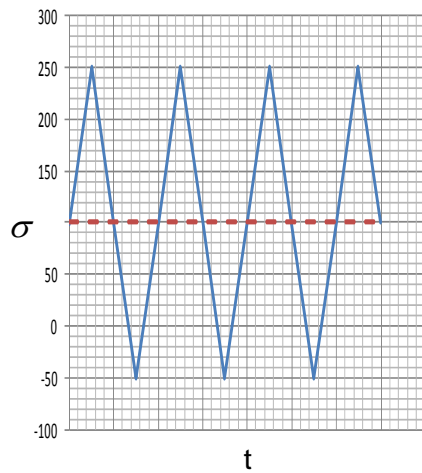
Quelque soit le mode de sollicitation, simple ou combiné, les composantes du tenseur des contraintes développées dans les structures varient suivant une fonction de temps et correspondent à des signaux de types différents. On classe ces signaux suivant quatre groupes illustrée dans la figure I.3

1. Signal simple d'amplitude constante. On en distingue les signaux périodiques, sinusoïdaux,

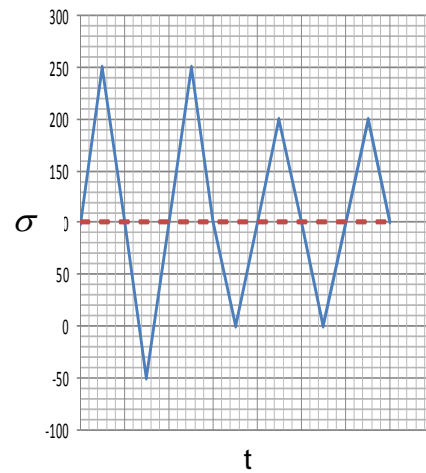
# Chapitre I : introduction à la fatigue des matériaux

Triangles et carrés

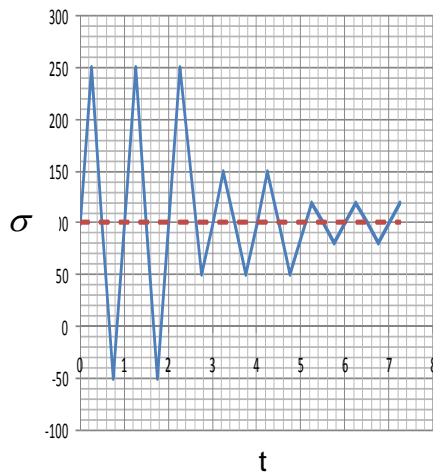
2. Signal constitué de deux blocs de charge d'amplitude constante. Le deuxième bloc est appliqué jusqu'à rupture. De ce type, on peut étudier les effets de séquences Haut-Bas ou Bas-Haut.
3. Signal constitué de plusieurs blocs d'amplitude constante.
4. Signal d'amplitude variable. Il s'agit de signaux réels relevés en service. Les plus souvent trouvés dans la pratique.



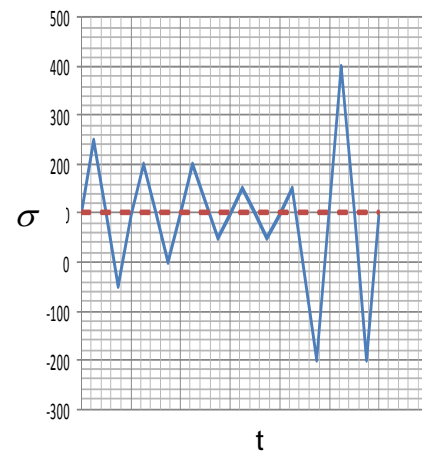
(a) Signal d'amplitude constante



(b) Signal à deux blocs



(c) Signal à plusieurs blocs de chargement



(d) Signal d'amplitude variable

**Figure I.3 :** Les différents types de signaux

## I.5. Glossaire des termes utilisés en fatigue

### Types de cycles de contrainte

**a) Contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  :**

Valeur maximale algébrique de la contrainte au cours d'un cycle

**b) Contrainte minimale  $\sigma_{\min}$  :**

Valeur minimale algébrique de la contrainte au cours d'un cycle

**c) Contrainte moyenne  $\sigma_m$  :**

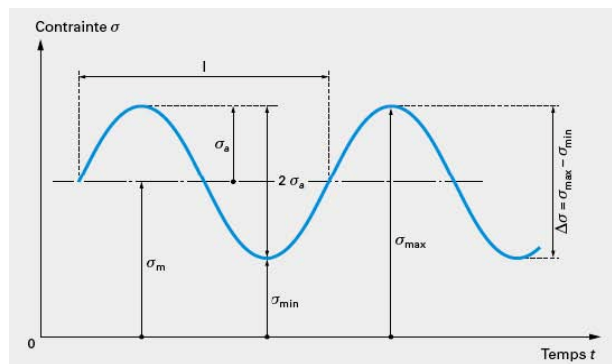
Définie par la valeur algébrique : 
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\min} + \sigma_{\max}}{2}$$

**d) Amplitude  $\sigma_a$  :**

L'amplitude est la moitié de la gamme d'un cycle définie par : 
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

**e) Rapport de contrainte ( $R_\sigma$ )**

Défini par le rapport algébrique : 
$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$



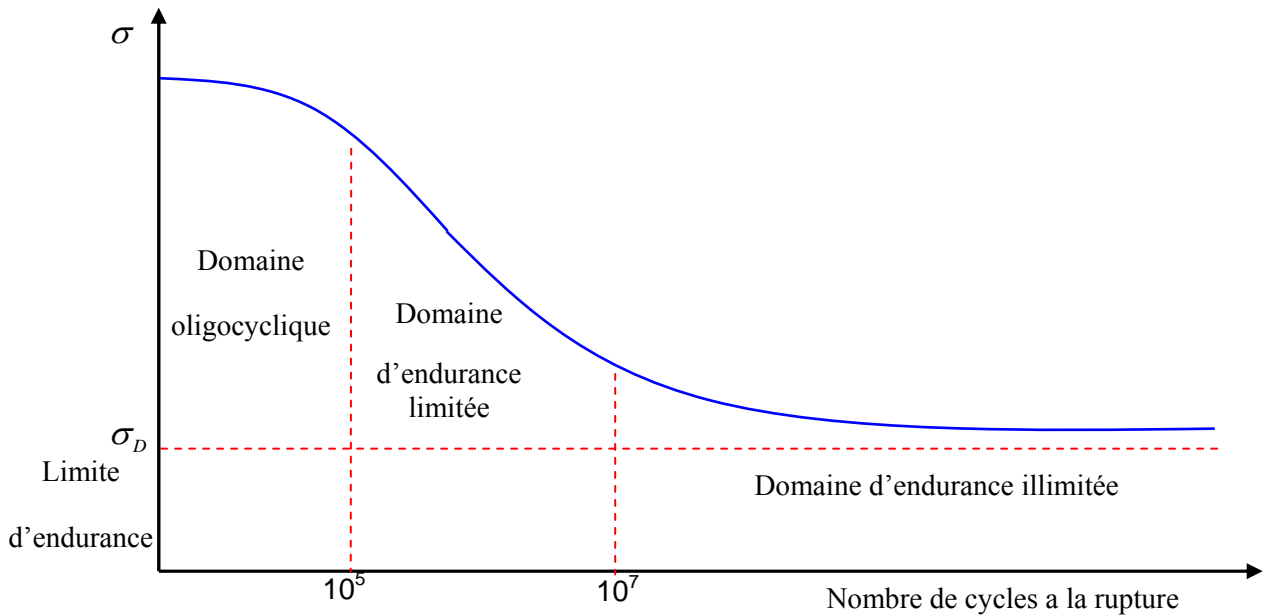
**Figure I.4 :** Types de Cycles de contraintes

## I.6. Courbe de Wöhler

La courbe de Wohler (dite aussi la courbe S-N) représente la relation observée expérimentalement entre la durée de vie N, reportée conventionnellement en abscisse et l'amplitude du cycle contrainte  $\sigma_a$  (ou S), reportée en ordonnée.

Son tracé est issu d'une analyse statistique d'essais de fatigue. Les essais sont conduits à une valeur donnée de la contrainte moyenne sur un nombre aussi élevé que possible et suivant une méthode appropriée. Ainsi la courbe S-N représente, pour une probabilité de non rupture (en général 50%), la contrainte en fonction du nombre de cycles (à rupture).

La courbe de Wohler a l'allure représentée dans la figure I.5.



**Figure I.5 :** Exemple de la courbe de Wohler et les trois domaines d'endurance

### I.6.1. Différents domaines d'endurance

Sur la courbe S-N, on peut distinguer trois domaines :

- Le premier se caractérise par le fait que les contraintes dépassent ou avoisinent le niveau de la limite d'élasticité; ce domaine correspond à la fatigue oligocyclique (faible nombre de cycles inférieur à  $10^4$ ).
- Le second traduit le domaine d'endurance limitée, la rupture qui intervient apparaît après l'application d'un nombre limité de cycles compris approximativement entre  $10^4$  et  $10^6$  selon le matériau; c'est le domaine dans lequel travaillent les structures qui, pour diverses raisons, doivent avoir des masses et des volumes impérativement réduits.
- Le troisième est le domaine d'endurance illimitée; au-dessous d'un certain niveau de contrainte (appelé limite d'endurance) et quel que soit le nombre de cycles effectués, la structure ne peut pas être rompue.



**I.7. Modélisation des courbes d'endurance**

Il existe, dans la littérature scientifique, plusieurs modélisations pour représenter les courbes de Wöhler comportant un nombre plus ou moins grand de paramètres, et traduisant une partie ou la totalité des trois domaines d'endurance.

Les plus connues sont représentées dans le tableau I.1 [4].

<b>Formule</b>	<b>Auteur</b>
$\log(N) = a - b \sigma$	<b>WOHLER (1850)</b>
$\log(N) = a - b \log(\sigma)$	<b>BASQUIN (1910)</b>
$\log(N) = a - b \log(\sigma - E)$ ou $\sigma = E + (A/N)^C$ Avec $A = e^a$ et $C = 1/b$	<b>STROMEYER (1914)</b>
$\sigma_a = \sigma_D + \left( \frac{C}{A + N_r} \right)^{\frac{1}{b}}$	<b>PALMGREEN (1924)</b>
$\frac{\sigma_a - \sigma_D}{\sigma_u - \sigma_D} = \left( \frac{C}{A + N_r} \right)^{\frac{1}{b}}$	<b>WEIBULL (1949)</b>
$N = \frac{A}{\sigma - E} \exp[-C \cdot (\sigma - E)]$	<b>CORSON (1955)</b>
$N = \frac{A}{\sigma - E} \exp\left[-\left(\frac{\sigma - E}{B}\right)^c\right]$	<b>BASTENAIRE (1974)</b>

**Tableau I.1 :** Quelques modèles mathématiques de la courbe S-N.

A, B, C, E, a et b son des constantes déterminé par des essais expérimentales.

**I.8. Les facteurs influençant sur la durée de vie des structures**

Outre la contrainte moyenne  $\sigma_m$  prise en compte par les diagrammes d'endurance, les facteurs qui influencent la résistance à la fatigue sont nombreux. Les plus importants sont l'effet d'entaille, l'état de surface, l'effet d'échelle, les contraintes résiduelles.

**I.8.1. Effet d'une contrainte moyenne non nulle**

Les observations expérimentales ont mis en évidence que lorsqu' une contrainte statique positive  $\sigma_m$  est superposée au chargement cyclique d'amplitude  $\sigma_a$ , la durée de vie de l'éprouvette

ou de la pièce diminue. L'effet inverse est observé en présence d'une contrainte moyenne de compression. Afin de prendre en compte ce phénomène, des essais complémentaires peuvent être réalisés afin d'établir un diagramme de Haigh donnant, pour une durée de vie fixée  $N$ , la contrainte alternée admissible  $\sigma_a$  en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .

Là encore, plusieurs modélisations mathématiques de ce diagramme ont été formulées (comme par exemple le modèle de Goodman, la parabole de Gerber etc.). Ces différents modèles sont décrits dans la littérature [5].

### I.8.1.1 Diagramme de HAIGH

Sur ce diagramme, l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est portée en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  à laquelle a été réalisé l'essai de fatigue (Figure I.6). Deux points particuliers sont à considérer :

- le point A qui représente la limite d'endurance  $\sigma_D$  en sollicitation purement alternée
- le point B qui représente le comportement limite du matériau pour une contrainte alternée nulle. Ce point correspond donc à la contrainte de rupture du matériau au cours d'un essai statique.

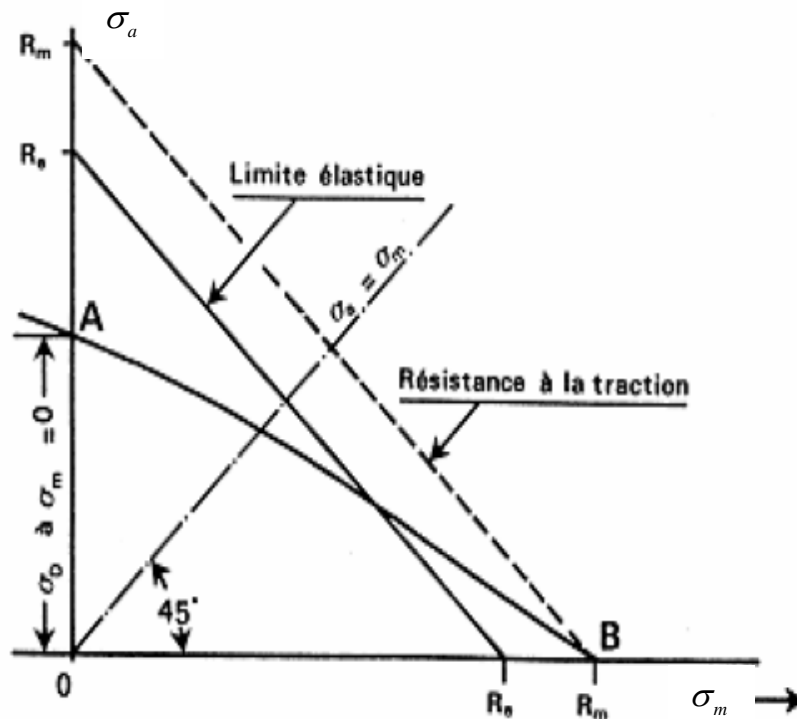
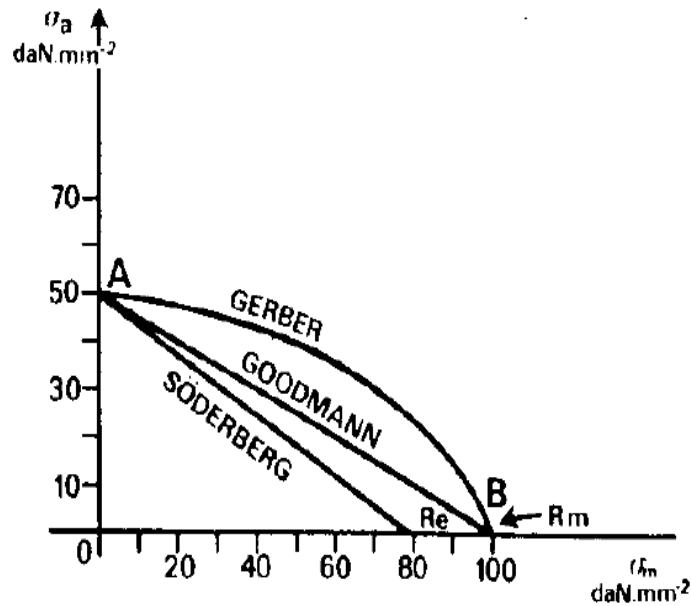


Figure I.6 : Diagramme de Haigh

Différentes représentations de la courbe AB sont possibles (Figure I.7) :



**Figure I.7 :** Diagramme de Haig. Représentation de Gerber, Goodman et Söderberg

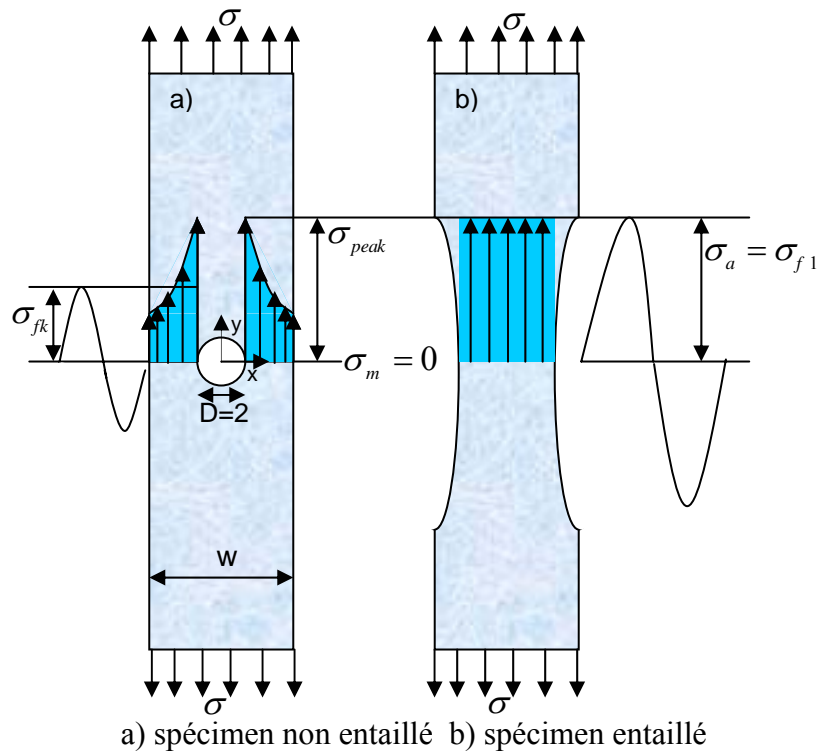
**La droite de GOODMAN-SMITH :**  $\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)$

**La parabole de GERBER :**  $\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 \right)$

**La droite de SODERBERG :**  $\sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_y} \right)$

### I.8.2. Effet d'entaille

L'effet d'entaille résulte dans la modification du flux de contrainte dû à la présence d'une discontinuité géométrique (Figure I.8). Près du fond d'une entaille, les lignes de contrainte sont relativement proches et cela conduit à une concentration de champ des contraintes locales avec un maximum en fond d'entaille.



**Figure I.8 :** Principe de similitude avec la même valeur de  $\sigma_{\max}$  [2]

Afin de comprendre et prévoir l'effet d'entaille et l'effet de la géométrie sur la limite de fatigue, la définition de la limite de fatigue doit être rappelée. C'est la plus basse amplitude d'effort qui donne naissance à une microfissure qui peut se propager jusqu' à la rupture,

Le principe de similitude peut être appliqué pour comparer la fatigue dans un spécimen entaillé à la fatigue dans un spécimen non entaillé, présenté dans la figure I.8. Si un cycle avec amplitude  $\sigma_a$  peut créer une microfissure dans le spécimen sans entaille, le même cycle de l'effort maximal dans le spécimen entaillé,  $\sigma_{pic}$  devrait également être capable de créer une microfissure à la racine de l'entaille, si  $\sigma_a$  dans le spécimen sans entaille est la limite de fatigue, alors lorsqu'on parle de spécimen entaillé, il devrait correspondre à la limite de fatigue du spécimen entaillé ( $\sigma_{fk}$ ).

Le principe de similitude est défini par :

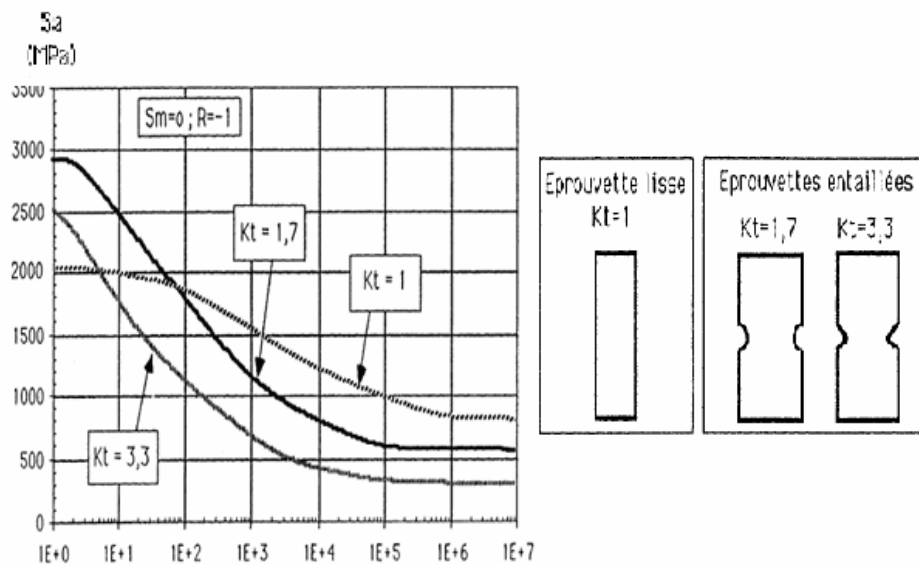
$$\sigma_{pic} = K_t \sigma_{fk} \quad \text{ou} \quad \sigma_{fk} = \frac{\sigma_{fl}}{K_t}$$

Ce qui implique que la limite de fatigue d'un spécimen sans entaille devrait être divisé par  $K_t$  pour obtenir la limite de fatigue du spécimen entaillé. Cependant, de nombreux essais de

fatigue ont montré que le facteur de réduction est plus petit que le  $K_t$ . Le facteur de réduction obtenu par des expériences est dénoté par le symbole  $K_f$ .

Il y a bien longtemps qu'on a souvent observé que  $K_f < K_t$ , particulièrement pour de petits spécimens avec de grandes valeurs de  $K_t$ , et à plus forte raison pour les matériaux à faible ténacité, tels que l'acier à faible teneur en carbone [6].

L'influence de l'effet d'entaille sur la durée de vie des structures est clairement observée sur la figure I.9 [7].



**Figure I.9 :** Courbes de S-N correspondant à des éprouvettes de même section nette mais de  $K_t$  différents.

### I.8.3. Effet de l'état de la surface

On sait depuis longtemps que l'état de surface d'une pièce mécanique conditionne sa résistance à la fatigue. Plus cet état sera grossier, plus la limite d'endurance sera abaissée d'un facteur  $K_s$  du fait de la présence des défauts superficiels. Ce phénomène est d'autant plus sensible que le matériau est plus résistant. Sur une pièce soumise à un chargement de fatigue, on a donc intérêt à soigner d'autant plus l'état de surface final que le matériau qui la constitue. La qualité de l'état de surface est un facteur prépondérant de la tenue des pièces en fatigue. Et doit donc être

spécifiée dans le dimensionnement de ces pièces. Actuellement cet état de surface est décrit par un critère de rugosité géométrique ( $R_a$ : rugosité moyenne).

### **I.8.4. Effet de l'environnement**

Un environnement agressif peut être nocif pendant la résistance à la fatigue d'une structure, et la protection contre la corrosion est nécessaire. Les concepteurs doivent considérer la corrosion en service, non seulement en raison de la fatigue. La corrosion est indésirable pour des raisons liées à une utilisation sûre et économique d'une structure pendant le service.

La corrosion peut également être inacceptable en raison de l'aspect d'une structure, c.-à-d. pour des raisons cosmétiques. Habituellement, l'empêchement de la corrosion est considéré comme une question de choisir un matériau résistant à la corrosion ou d'appliquer une protection extérieure appropriée, telle que le cadmiage de peinture.

La fatigue par corrosion comme problème de structure en service est caractérisée par les variables qui peuvent être très différentes du matériau et du système de l'environnement. Ces différences ont été discutées par Schütz [8]. Il a souligné la différence entre les essais dans le laboratoire et l'exposition d'une structure sous chargement d'amplitude variable en service. Les essais en laboratoire devraient être accomplis dans une période de temps acceptable tandis qu'une structure en service est exposée à un environnement non commandé.

Gough, H.J .et Sopwith, D.G [9] ont montré l'effet de l'environnement liquide (eaux salées) sur la courbe S-N illustrée dans la figure I.10

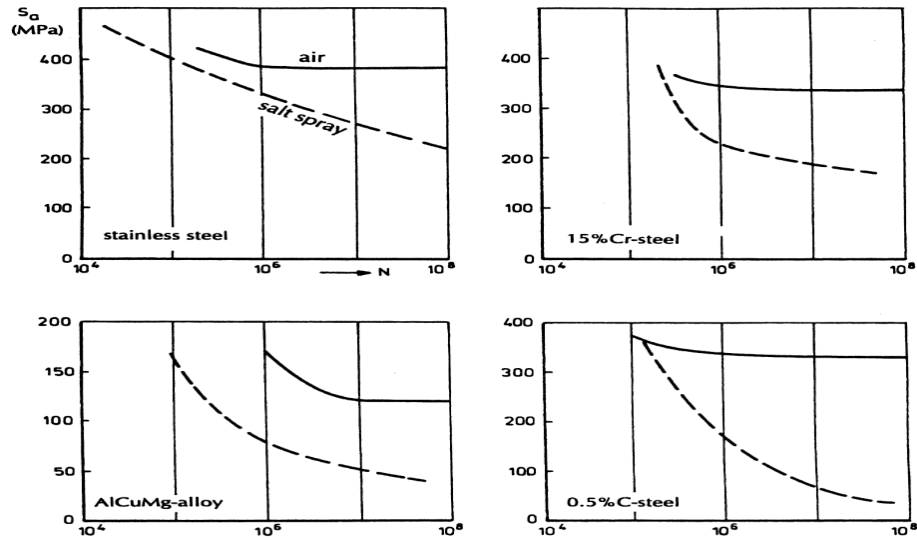


Figure I.10 : L'effet de l'eau salée sur la courbe S-N

### I.9. Méthodes de comptage de cycles

Au cours de leur vie, les structures industrielles sont généralement soumises à des chargements complexes dont les niveaux de sollicitations sont variables.

Les méthodes de comptage ont pour objectif de définir le spectre de contrainte mesuré. Le volume souvent important des données impose de faire appel à des techniques digitales et de procéder à une réduction des données par élimination des temps morts, d'utilisation et des chargements a priori non endommageant.

Il en résulte une suite d'extremums, constituée de maximum et minimum consécutifs qui est soumise à l'analyse après avoir réparti les amplitudes en classes. Les méthodes de comptage de cycles aléatoires consistent à extraire de cette suite les caractéristiques qui permettent d'adapter la méthode de simulation au cas particulier étudié, soit par calcul, soit par essai [10].

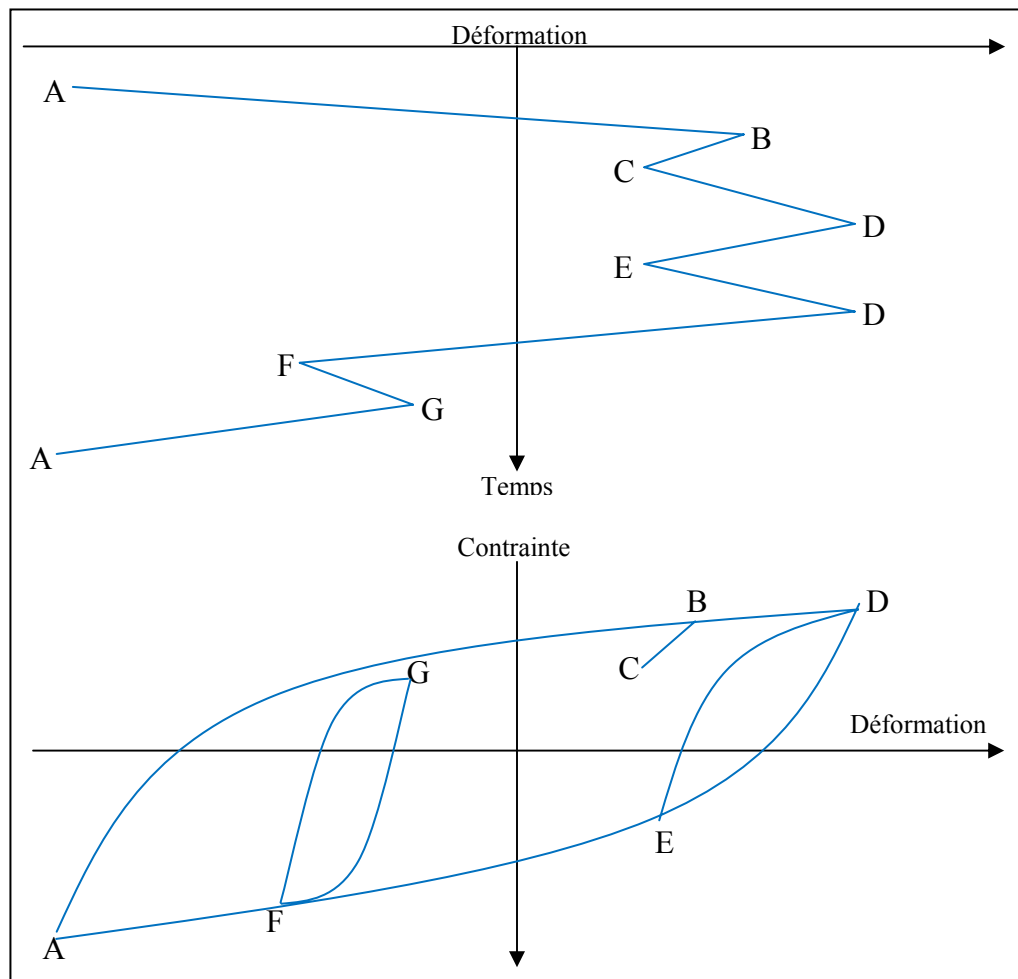
Elles diffèrent entre elles par le critère définissant l'événement statistique qu'elles prennent en compte. Parmi les nombreuses méthodes qui existent, on distingue en particulier :

- 1- le comptage des temps de maintien,
- 2- le comptage des extrema,
- 3- le comptage des dépassements de niveaux,
- 4- le comptage des étendues,
- 5- le comptage des étendues appariées,
- 6- le comptage de cycles Rainflow

Cette dernière (méthode Rainflow), est la plus utilisée par les auteurs des méthodes de calcul, est présentée dans le prochain paragraphe.

### I.10. Méthode RAINFLOW de comptage de cycles

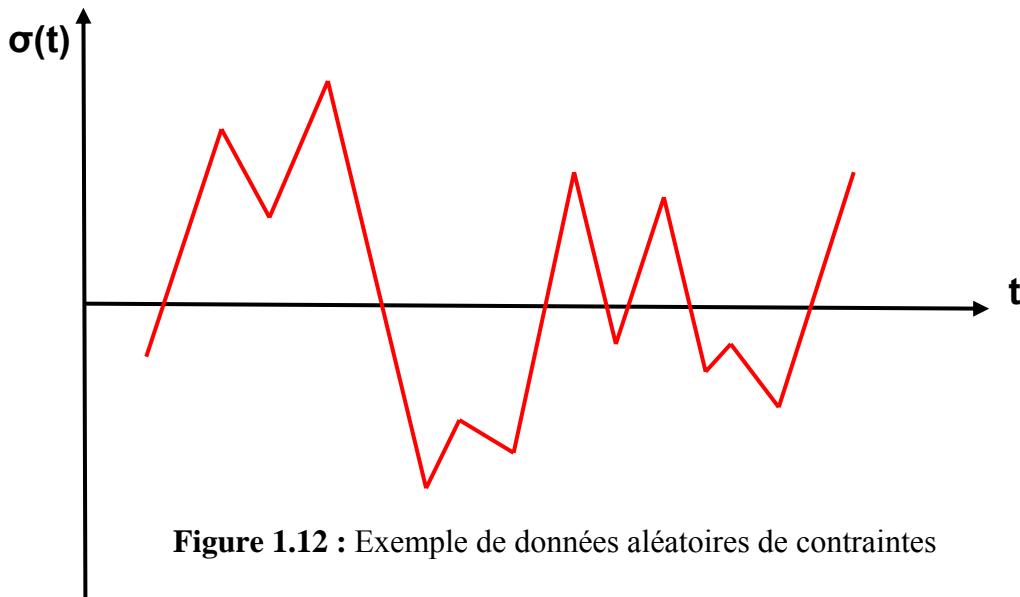
La méthode de comptage des étendues en cascade plus souvent appelée méthode de Rainflow a été proposée par M. Matsuiski et T. Endo pour compter les cycles ou les demi-cycles d'un signal de déformation-temps. [11]. le comptage est effectué sur la base du comportement contrainte-déformation du matériau. Ceci est illustré dans la figure 1.11. Comme le matériau se déforme à partir du point A au point B, il suit un chemin décrit par le cyclique de la courbe contrainte-déformation. Au point B, la charge est inversée et le matériau subit un déchargement au point C; Quand la charge est de nouveau à partir de C à D, le matériau se déforme au point B, et la déformation se poursuit le long chemin de A à D, comme si le chargement B-C n'a jamais eu lieu.



**Figure 1.11** : Cycles de contrainte-déformation



Le signal mesuré, en général, est un chargement aléatoire  $\sigma(t)$  n'est pas seulement composé d'un seul sommet entre deux passages par zéro, mais également plusieurs pics apparaissent, ce qui rend difficile la détermination du nombre de cycles absorbés par la structure. Un exemple pour les données aléatoires de contrainte est illustré à la figure 1.12.



**Figure 1.12 :** Exemple de données aléatoires de contraintes

### I.10.1. Définition pratique de la méthode Rainflow

Une définition pratique de la méthode de comptage de cycles Rainflow peut être expliquée à partir de la norme ASTM E-1049, l'analyse pratique de comptages de cycles en fatigue est montrée sur la figure

Les Règles de la méthode de Rainflow sont données comme suit [12]:

Soit X désigne la gamme en cours de construction, Y la gamme précédente et adjacente de X et S le point de départ de l'histoire de chargement.

- 1- Lire le pic suivant, si hors de données, passez à l'étape 6.
- 2- S'il y a moins de trois points, passez à l'étape 1. Formulaire de gammes X et Y en utilisant les trois derniers sommets et les pics qui ne l'ont pas été écartée.

- 3- Comparer les valeurs absolues des gammes X et Y.
  - (a) Si  $X < Y$ , passez à l'étape 1.
  - (b) Si  $Y \geq X$ , passez à l'étape 4.
- 4- Si la gamme Y contient le point de départ S, passez à l'étape 5, sinon, compter la gamme Y comme un cycle et passez à l'étape 2.
- 5- Compter la gamme Y comme un demi cycle, le premier point de pic dans la gamme Y; déplacer le point de départ pour le deuxième point dans la gamme Y; passer à l'étape 2.
- 6- Compter chaque gamme qui n'a pas été considéré comme un demi-cycle.

La figure 1.13 est utilisée pour illustrer le processus de comptage. Les détails sur le cycle de comptage sont les suivants:

1-  $S = A$  ;  $Y = |A-B|$  ;  $X = |B-C|$  ;  $X > Y$ . Y contient S, qui est, point A. On compte  $|A-B|$  comme un demi cycle et on élimine le point A,  $S = B$ . (Figure b).

2-  $Y = |B-C|$  ;  $X = |C-D|$  ;  $X > Y$ . Y contient S, qui est le point B. On compte  $|B-C|$  comme un demi cycle et on élimine le point B;  $S = C$ . (Figure c)

3-  $Y = |C-D|$ ;  $X = |D-E|$ ;  $X < Y$ .

4-  $Y = |D-E|$ ;  $X = |E-F|$ ;  $X < Y$ .

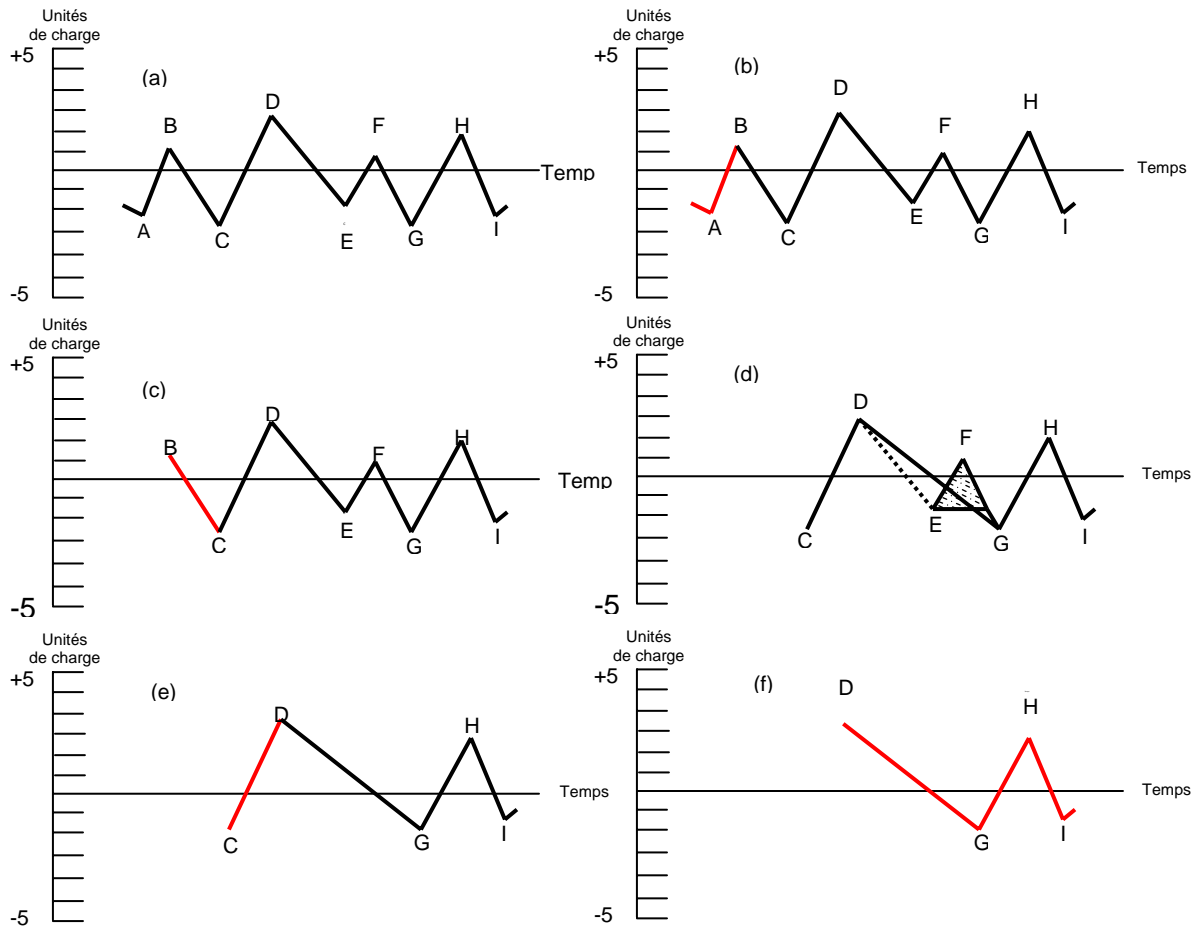
5-  $Y = |E-F|$ ;  $X = |F-G|$ ;  $X > Y$ . on compte  $|E-F|$  comme un cycle et défaire les points E et F. (Figure d. Un cycle est constitué par la gamme E-F et une partie de la gamme F-G)

6-  $Y = |C-D|$ ;  $X = |D-G|$ ;  $X > Y$ . Y contient S, qui est le point C. On compte  $|C-D|$  comme un demi cycle et on élimine le point C.  $S = D$ . (Figure e)

7-  $Y = |D-G|$ ;  $X = |G-H|$ ;  $X < Y$ .

9- on compte  $|D-G|$  comme un demi cycle,  $|G-H|$  comme un demi cycle, et  $|H-I|$  comme un demi cycle. (Figure f)

10- fin de comptage de cycles.



**Figure I.13 :** Définition pratique de la méthode de Rainflow

## I.11. Conclusion

La fatigue des matériaux est un sujet largement étudié, les concepts de base nécessaires à la compréhension de sa littérature sont plutôt simples, ils sont décrits dans ce chapitre. Les descriptions peuvent être divisées en deux groupes, métallurgiques et mécaniques. Les descriptions métallurgiques concernent l'état du matériau avant, pendant et après l'application d'une charge de fatigue, et sont généralement prises pour inclure l'étude des mécanismes de fatigue. Les descriptions mécaniques sont concernées par l'étude des réponses d'une structure à un ensemble donné de conditions de chargement, par exemple le nombre de cycles de sollicitation nécessaire pour causer l'endommagement et la ruine d'une pièce ou d'une structure (durée de vie de fatigue). Les descriptions mécaniques sont plus utiles et plus importantes du point de vue technique, où le comportement du service de l'organe qui est sujet à des chargements doit être prévu, d'une autre manière en parle de la nature et le type de chargement. Ce qui va être bien enrichie dans cette étude.

## Chapitre II

# Critères d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale

### II.1. Introduction

La connaissance et la maîtrise du phénomène de la fatigue multiaxiale tant sur le plan microscopique, angle sciences des matériaux, que sur le plan macroscopique, angle mécanique, s'avèrent donc de plus en plus indispensables lors de la conception. Notre travail dans ce chapitre vise à participer à cet objectif sous l'aspect mécanique.

Dans le cas de sollicitations uniaxiales et homogènes la modélisation de ces premiers stades est performante, le cas des chargements de structures réelles reste difficile à traiter pour deux raisons : le phénomène de fatigue est sensible à la multiaxialité des contraintes et très sensible aux hétérogénéités. Or une pièce réelle est dans la très grande majorité des cas soumise à un chargement multiaxiale.

La littérature comporte de nombreuses propositions de critères. Certains ont été appliqués à l'origine à des cas très particuliers de sollicitations. Il s'agissait au début de modéliser un comportement qui n'est pas général mais lié à un type de sollicitation donné et donc souvent restreint à ce dernier. Dans ce chapitre nous présentons les méthodes de prévision de durée de vie les plus couramment utilisées. Une attention particulière est portée sur les critères de fatigue qui sont basées sur les approches en énergie.

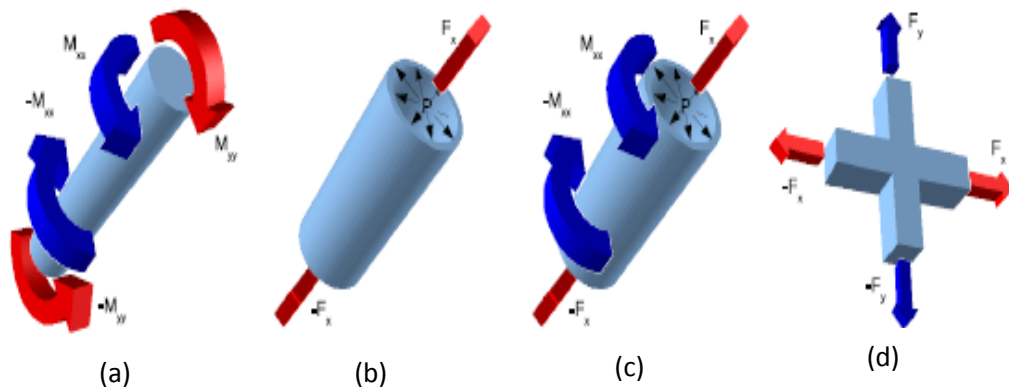
### II.2. Les essais expérimentaux classiques de fatigue multiaxiale

Les campagnes d'essais de fatigue à grand nombre de cycles sous chargements multiaxiales voient le jour très tôt mais ne se généraliseront qu'au milieu des années 30. La figure II.1 résume schématiquement les différents types de sollicitation : les dispositifs expérimentaux utilisés ont tout d'abord sollicité des arbres en torsion-flexion combinées, principe qui est encore utilisé aujourd'hui [13-14], puis des éprouvettes tubulaires en traction avec pression interne [15] et/ou torsion et plus récemment des éprouvettes cruciformes grâce à deux ou quatre vérins [16].

Les campagnes de fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles restent, malgré leur rapide apparition, relativement rares par rapport au nombre de campagnes uniaxiales. Différentes raisons expliquent cette différence, on peut citer :

- ✓ La difficulté de la conception et la réalisation des éprouvettes.
- ✓ La rareté des machines d'essais multiaxiale.
- ✓ La difficile maîtrise des conditions d'essais.

- ✓ Le nombre élevé d'essais nécessaires et la durée des essais



**Figure II.1** : Types de sollicitation utilisée en fatigue multiaxiale (a) Torsion-flexion.(b) Traction-pression interne. (c) Traction-torsion-pression interne.  
(d) traction biaxiale.

### II.3. Généralités et définitions des termes liés à la fatigue multiaxiale

Un critère de fatigue est un seuil, défini par un formalisme mathématique pour une durée de vie fixée et un matériau donné, séparant l'état où la pièce est non fissurée de l'état où elle est fissurée par fatigue. Il s'applique en tout point  $P$  de la pièce considérée. Si dans l'espace du critère le point  $P$  a pour image un point  $M$  sous le seuil, il n'y a fissuration par fatigue. Un critère met en relation des grandeurs liées au chargement appliqué (composantes du tenseur des contraintes et/ou du tenseur des déformations) et des limites d'endurance (ou limites de fatigue à  $N$  cycles).

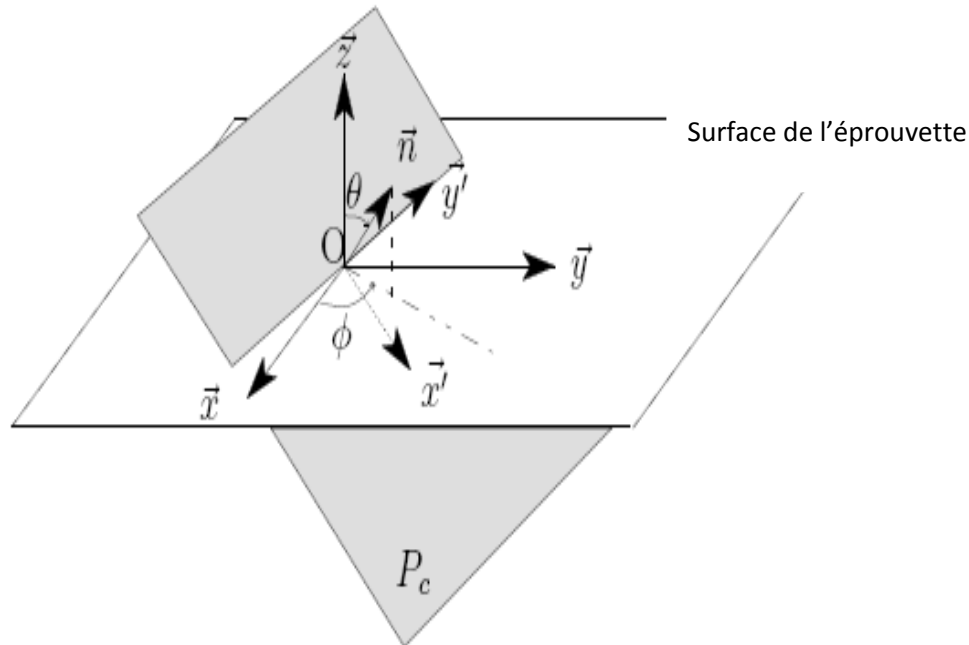
Avant de traiter en détail des différentes approches, quelques termes utilisés par les auteurs des critères utilisant des variables calculées sur un plan critique, vont être définis.

La figure II.2 illustre les notations adoptées dans la suite de ce travail. La normale  $\vec{n}$  au plan critique  $P_c$  est définie par les angles  $\theta$  et  $\phi$  par rapport à un repère fixe lié à la matière. Le vecteur contrainte  $\vec{S}_n$  en tout point  $(O)$  relativement à la direction  $\vec{n}$  se définit suivant la relation :

$$\vec{S}_n(O) = \sum_{\underline{\underline{(O)}}} \vec{n} \quad (\text{II.01})$$

La composante normale  $\overline{\sigma}_n$  du vecteur contrainte  $\overline{S}_n$  s'écrit :

$$\overline{\sigma}_n = \left( \underline{\underline{\vec{n}}} \cdot \sum \underline{\underline{\vec{n}}} \right) \underline{\underline{\vec{n}}} \quad (\text{II.02})$$



**Figure II.2 :** Orientation du plan critique  $P_c$  au point  $O$  considéré

Sur un cycle de chargement (de période  $T$ ), on définit alors :

- la contrainte normale maximum :  $\sigma_n^{\max} = \max_{t \in T} (\sigma_n(t))$
- la contrainte normale minimum :  $\sigma_n^{\min} = \min_{t \in T} (\sigma_n(t))$
- la contrainte normale moyenne :  $\overline{\sigma}_n = \frac{1}{T} \int_T (\sigma_n(t)) dt$
- l'amplitude de la contrainte normale :  $\sigma_{n,a} = \frac{|\sigma_n^{\max} - \sigma_n^{\min}|}{2}$

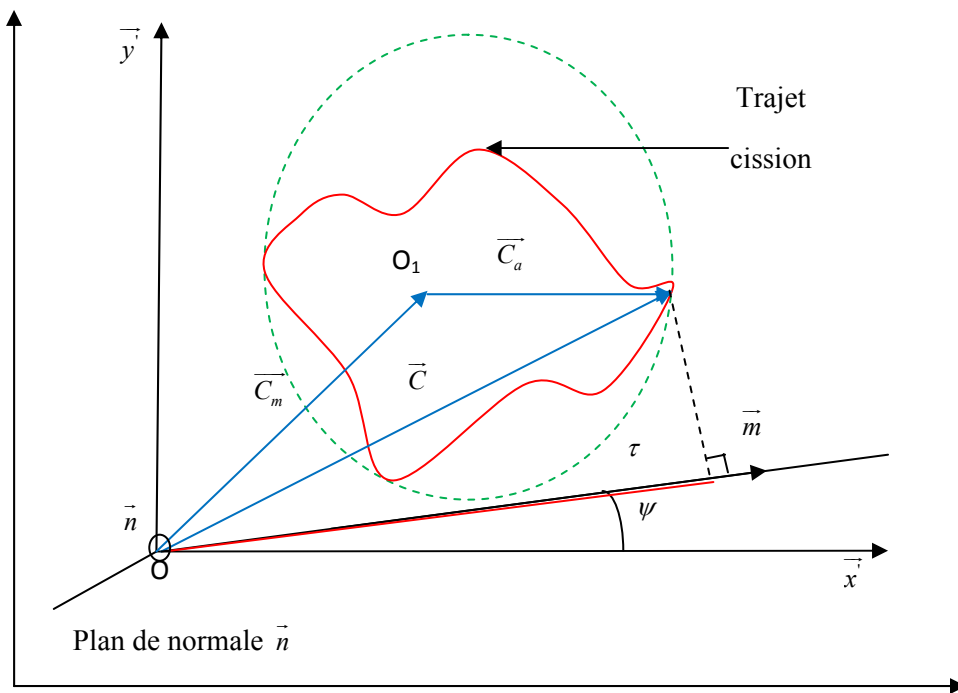
Le vecteur cisail  $\overline{C}_n$  associé au vecteur contrainte  $\overline{S}_n$  est :

$$\overline{C}_n(t) = \underline{\underline{\vec{n}}} - \left( \underline{\underline{\vec{n}}} \cdot \sum \underline{\underline{\vec{n}}} \right) \underline{\underline{\vec{n}}} \quad (\text{II.03})$$

Sur un cycle de chargement, l'extrémité du vecteur cisaillement décrit une courbe fermée comme on peut le constater sur la figure II.3. L'amplitude  $C_a$  du vecteur cisaillement, est le

rayon du plus petit cercle circonscrit à ce trajet [17]. Le cisaillement moyen  $C_m$  durant ce trajet est la distance au centre de ce cercle (distance  $OO_1$ ). Avec ces notations on peut également définir la partie alternée du cisaillement à l'instant  $t$ ,  $\overline{C}_a(t) = \overline{C}(t) - \overline{C}_m(t)$  encore appelée partie dynamique du cisaillement.

On appelle cisssion résolue  $\tau(t)$  la projection du vecteur cisaillement  $\overline{C}(t)$  sur une droite  $\mathfrak{S} = O\overline{m}(\varphi)$  du plan matériel considéré.  $\overline{m}(\varphi)$  est le vecteur unitaire orientant la droite  $\mathfrak{S}$ , faisant un angle  $\psi$  avec l'axe  $Ox'$  du repère  $(o, \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$  contenu dans le plan  $P_c$ .



**Figure II.3** : Définition des termes relatifs à la contrainte de cisssion.

Enfin, rappelons qu'on distingue deux types de trajet de chargement : proportionnel ou non proportionnel. Le trajet de chargement est la courbe décrite dans le repère principal des contraintes par le point  $P$

### II.4. Classification des critères de fatigue multiaxiale

La bibliographie recense plus de 40 critères de fatigue multiaxiale. Au début des années 50, un nombre important de ces critères sont développés et sont basés sur une fonction, généralement noté par  $E$ , cette fonction établit un paramètre, qui est en fonction de type de sollicitation et les propriétés de fatigue de matériaux étudiés. La durée de vie  $N$  pour un état de chargement multiaxiale  $[\sigma_{ij}(t)]$  est estimée lorsque la fonction de fatigue du critère  $E$  égale à l'unité ( $E=1$ ).



## Chapitre II : Critères d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale

---

L'ensemble des critères sont répartis en trois approches distinctes qui se différencient par leur concept. Les plus utilisés de ces critères sont représentés dans la figure II.4.

La première approche, dite empirique, où les premières études relatives à la formulation des critères de fatigue multiaxiale étaient purement empiriques. Cette approche regroupe les critères issus des résultats expérimentaux pour des matériaux donnés et des cas de chargements bien déterminés (traction-torsion ou flexion-torsion).

La deuxième approche est appelée approche globale. Elle réunit entre autres les critères où interviennent des invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur. Ces quantités représentant l'ensemble des contraintes sous un scalaire aux critères qui les mettent en œuvre un caractère global. Certains critères définissent des grandeurs liées à l'ensemble des plans physiques possibles passant par le point où l'étude en fatigue est conduite pour ensuite en faire une moyenne, quadratique en général. Cette dernière assure aussi aux critères basés sur ce principe un aspect global. Une dernière sous-catégorie peut être citée. Il s'agit des formalismes basés sur des énergies.

La troisième approche, de type plan critique, où l'analyse de la fatigue qui utilise la notion de plan critique est très efficace, car le concept du plan critique est basé sur le mode de rupture ou le mécanisme d'initiation de fissures. Dans ce concept, après détermination de la déformation maximale de cisaillement (ou contrainte) dans le plan critique, de nombreux chercheurs ont défini le paramètre comme la combinaison de la contrainte maximale de cisaillement et la normale de la déformation dans ce plan pour expliquer le comportement en fatigue multiaxiale.

Parmi ces trois approches, des sous-groupes différencient les formalismes des critères. On distingue les critères macroscopiques faisant intervenir des contraintes évaluées à l'échelle macroscopique. Le choix des termes de contraintes intervenant dans la définition de tels critères est justifié par leurs auteurs. D'autres critères sont basés sur le comportement de la matière à l'échelle microscopique. Ils sont dits microscopiques bien que leur formalisme final utilise des grandeurs macroscopiques.

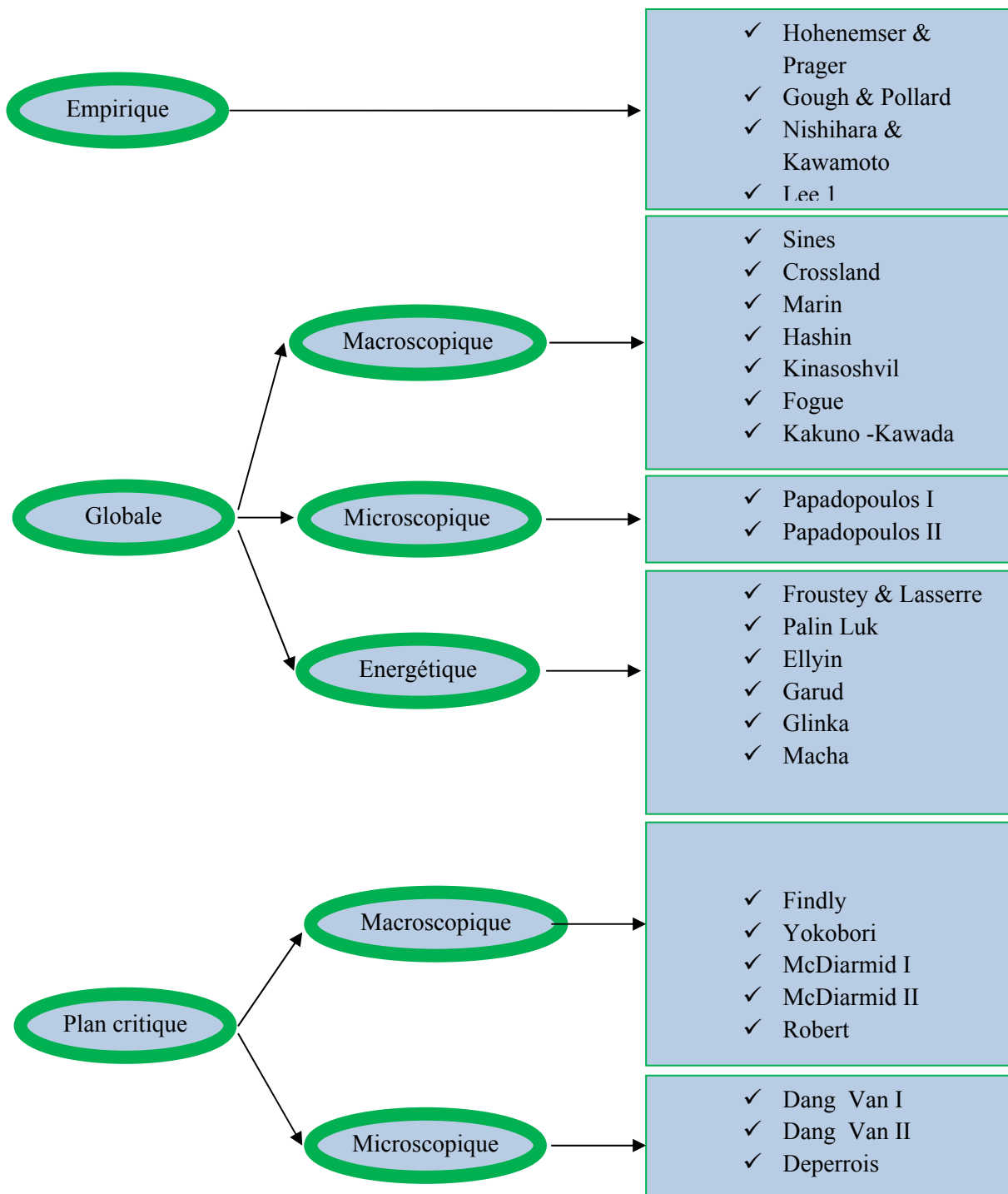


Figure II.4. : Classification des critères multiaxiaux de fatigue.

## II.5. Critères empirique

### II.5.1. Critère de Hohenemser & Prager [18]

Le critère de Hohenemser & Prager est établi en 1933, il a été obtenu à partir d'essais de traction-torsion où le cisaillement est variable et la contrainte normale de traction  $\sigma_m$  est statique.

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{II.04})$$

### II.5.2. Critère de Gough et Pollard [19]

A partir de nombreux essais de torsion-torsion combinées alternées symétriques sur différents aciers et deux fontes, Gough et Pollard ont déduit une relation empirique qui corrélait au mieux leurs résultats expérimentaux. Ils distinguent les matériaux ductiles des matériaux fragiles en proposant deux formulations décrivant des courbes de résistance à la fatigue dans le diagramme  $(\sigma_a - \tau_a)$  pour une durée de vie donnée.

- Pour les matériaux ductiles :

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{II.05})$$

ou  $\sigma_a$  et  $\tau_a$  sont respectivement les amplitudes des contraintes de flexion et de torsion,  $\sigma_{F_{p-1}}^D$  et  $\tau_{-1}^D$  désignent les limites de fatigue respectivement en flexion plane et en torsion alternée symétriques. L'équation II.05 est l'équation d'une ellipse.

- Pour les matériaux fragiles

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right) \times \left(2 - \frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D}\right) + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D} - 1\right) \leq 1 \quad (\text{II.06})$$

Cette équation est un arc elliptique. Les deux formulations coïncident pour  $\left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D}\right) = 2$ .

### II.5.3. Critère de Nishihara & Kawamoto [20]

Nishihara & Kawamoto proposent un critère basé sur leurs constatations expérimentales dépendant de la valeur du rapport des limites de fatigue en distinguant entre

les matériaux ductiles pour  $\left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D} \geq \sqrt{3}\right)$  écrit par l'équation (II.07) et les matériaux fragiles

pour  $\left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D} \leq \sqrt{3}\right)$  représenter par l'équation (II.08).

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{II.07})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right)^2 \times \left[ \left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D}\right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{F_{p-1}}^D}\right) \times \left[ 3 - \left(\frac{\sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D}\right)^2 \right] \leq 1 \quad (\text{II.08})$$

### II.5.3. Critères de Soon Book Lee 1 et 2 [21-22]

En 1980, Soon Book Lee a inspiré sont premier critère [21] (issue d'essais de flexion torsion hors phase) à partir du travail de Gough et Pollard. Il introduit un exposant  $\alpha$  dépendant du déphasage  $\phi$  entre les deux sollicitations.

$$\sigma_a \left[ 1 + \left( \frac{\tau_a \sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D \sigma_a} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 \quad (\text{II.09})$$

Ou  $\alpha = 2(1 + \beta \sin(\phi))$  et  $\beta$  est une constante liée au matériau.

Soon Book Lee a modifié son deuxième critère empirique en 1989 [22]. Il introduit un exposant  $n$  compris entre 1 et 2, cet exposant représente une constante empirique, ce dernier critère s'écrit :

$$\frac{\sigma_a \left[ 1 + \left( \frac{\tau_a \sigma_{F_{p-1}}^D}{\tau_{-1}^D \sigma_a} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}}{\left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^n \right]} \leq 1 \quad (\text{II.10})$$

## II.6. Critères globale

### II.6.1. Critère de Sines [23]

Sines a étudié l'influence des valeurs moyennes de la contrainte de cisaillement et de

contrainte normale. L'indicateur d'endommagement est une fonction de  $J_{2a}$  et  $I_{1m}$  donnée par :

$$\frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha I_{1m}}{A} \leq 1 \quad (\text{II.11})$$

Les constantes  $\alpha$  et  $A$  s'expriment par  $A = \tau_{-1}^D$  et  $\alpha = 2 \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{-1}^D} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ou :

- ✓  $J_{2a}$  : amplitude de deuxième invariant du déviateur du tenseur de contrainte.
- ✓  $I_{1m}$  : valeur moyenne du premier invariant du tenseur de contrainte.

### II.6.2. Critère de Crossland [24]

Le critère de Crossland figure parmi les critères les plus utilisés en fatigue à grand nombre de cycles. Crossland propose une combinaison linéaire de l'amplitude de la racine carrée de  $J_2$  et de la contrainte hydrostatique maximale  $\sum_{H, \max}$  :

$$\frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha \sum_{H, \max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II.12})$$

La racine carrée de  $J_2$  est définie par :

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}} \quad (\text{II.13})$$

O  $\underline{\underline{S}}$  est le déviateur des contraintes.

### II.6.3. Critère de Marin [25]

En 1956, Marin propose un critère d'approche globale où il compare  $\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}$  (contrainte équivalente des parties alternées des contraintes au sens de Von Mises) à  $\sigma_{-1}^D$  (limite de fatigue en traction alternée symétrique) et  $\sqrt{3}\sqrt{J_{2m}}$  (contrainte équivalente des contraintes moyennes) à  $R_m$  (résistance maximale à la traction).

$$\left( \frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{\sigma_{-1}^D} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2m}}}{R_m} \right)^2 \leq 1 \quad (\text{II.14})$$

### II.6.4. Critère de Hashin [26]

Dans le cadre de sollicitations alternées symétriques, Hashin propose en 1981 une formulation à partir des premier et deuxième invariants ( $I_1', I_2'$ ) du tenseur des contraintes

calculés sur les amplitudes des contraintes du cycle :

$$\left( \frac{I_1'}{\sigma_{-1}^D} \right)^2 - \frac{I_2'}{(\tau_{-1}^D)^2} \leq 1 \quad (\text{II.15})$$

Avec :

$$I_1' = \sigma_{11a} + \sigma_{22a} + \sigma_{33a}$$

$$I_2' = \sigma_{11a}\sigma_{22a} - \sigma_{12a}^2 + \sigma_{22a}\sigma_{33a} - \sigma_{23a}^2 + \sigma_{33a}\sigma_{11a} - \sigma_{13a}^2$$

Il compare ces valeurs des premier et deuxième invariants aux limites de fatigue en flexion et en torsion alternées symétriques respectivement.

### II.6.5. Critère de Kinasoshvili [27]

Kinasoshvili modélise le comportement en fatigue à l'aide du deuxième invariant des parties moyennes  $J_{2m}$  et alternées  $J_{2a}$  du tenseur déviateur des contraintes. Il combine linéairement ces deux quantités avec des coefficients dépendant des limites de fatigue obtenues en traction répétée ( $\sigma_0$ ) et alternée symétrique ( $\sigma_{-1}$ ). L'expression du critère établi en 1976 est la suivante :

$$\left( \frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{\sigma_{-1}^D} \right) - \left( \frac{\sigma_{-1}^D - \sigma_0^D}{\sigma_{-1}^D \sigma_0^D} \right) \sqrt{J_{2m}} \leq 1 \quad (\text{II.16})$$

### II.6.6. Critère de Fogue [28]

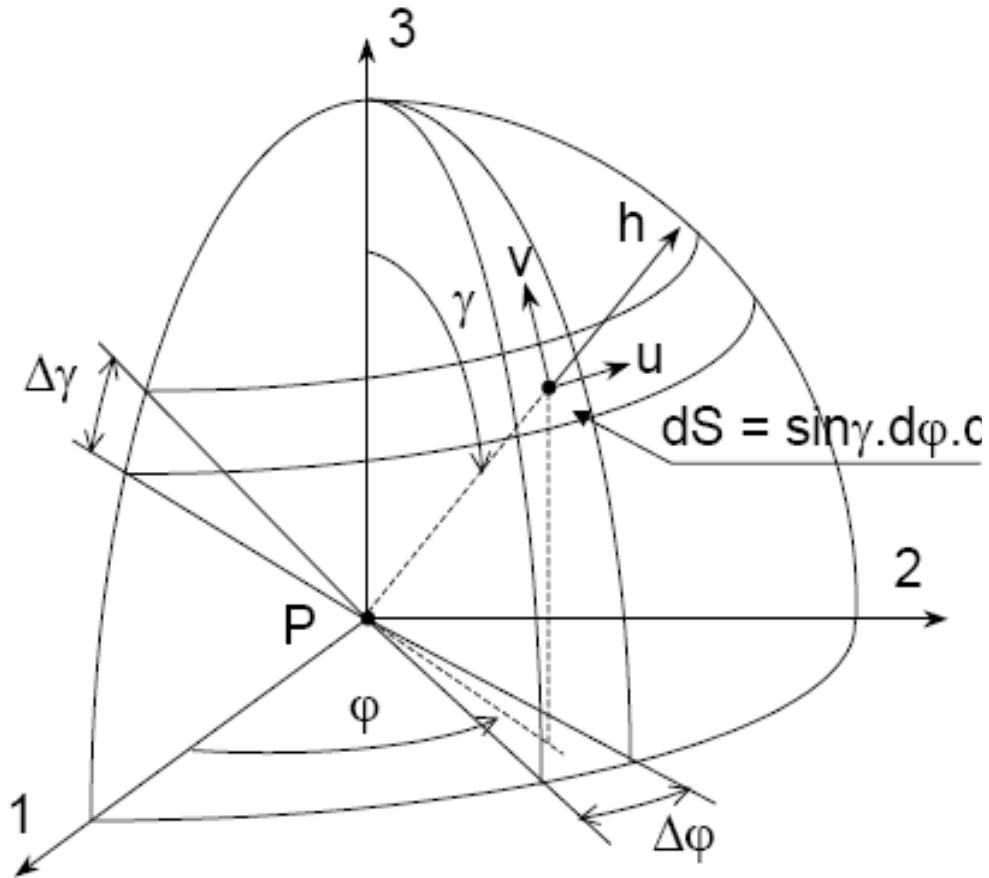
Fogue a cherché de distinguer son critère suivant le trajet de chargement (proportionnel ou non proportionnel). Ce critère est basé sur le moyen quadratique de l'indicateur d'endommagement  $E_h$ . Il introduit dans cet indicateur les influences relatives de l'amplitude et de la valeur moyenne de la contrainte normale au plan ainsi que de l'amplitude du cisaillement. La fonction de fatigue du critère s'écrit ainsi :

$$\sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_h ds} \leq 1 \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$E_h = \frac{a\tau_{ha} + b\sigma_{hha} + d\sigma_{hhm}}{\sigma_{-1}^D}$$

Le critère réalise ensuite la moyenne quadratique des indicateurs de tous les plans physiques en utilisant la sphère de rayon unité (d'aire  $S=4\pi$ ) illustré dans la figure II.5.



**Figure II.5** : Principe de représentation de l'ensemble des plans physiques passant par un point P à l'aide d'une sphère de rayon unité.

Le calage du critère, effectué avec les trois limites de fatigue  $\tau_{-1}^D$ ,  $\sigma_{-1}^D$  et  $\sigma_0$ , conduit aux constantes et domaine de validité suivants :

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{\frac{15 - \sqrt{9 \left[ 25 - 8 \left( \left( \frac{\sigma_{-1}^D}{\tau_{-1}^D} \right)^2 - 3 \right) \right]}}{2}} \\
 a &= \sqrt{\frac{12 \left( \frac{\sigma_{-1}^D}{\tau_{-1}^D} \right)^2 - 21 + b^2}{2}} \\
 d &= \frac{1}{3} \left\{ -(2a + 3b) + \sqrt{(2a + 3b) + 45 \left( 4 \left( \frac{\sigma_{-1}^D}{\tau_{-1}^D} \right)^2 - 1 \right)} \right\}
 \end{aligned} \tag{II.18}$$

### II.6.7. Critère de Kakuno & Kawada [29]

En 1979, Kakuno et Kawada proposent un critère de fatigue multiaxiale construit à partir des composantes alternées et moyennes du tenseur des contraintes il est destiné à rendre compte des sollicitations particulières de flexion-torsion ou traction-torsion. Il suggère que la contribution de  $J_{1m}$  et  $J_{1a}$  devrait être différente.

$$\frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha J_{1m} + \beta J_{1a}}{\gamma} \leq 1 \quad (\text{II.19})$$

Où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes du matériau, qui sont généralement différentes pour les différents modèles.

### II.6.8. Critère de Papadopoulos I [30]

Papadopoulos propose son premier critère en 1987, faisant partie des critères microscopiques, ce critère basé sur une intégration des amplitudes de cisailure sur un volume élémentaire, l'auteur propose la formulation suivante :

$$\frac{\max \sqrt{J_{2a}(t)} + \alpha P_{H \max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II.20})$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes de matériau peuvent être identifiées à l'aide de deux limites de fatigue, par exemple, en torsion alternée  $\tau_{-1}$  et en flexion alternée  $\sigma_{-1}$ .

### II.6.9. Critère de Papadopoulos II [31]

En 1993, Papadopoulos propose son deuxième critère en distinguant entre les métaux doux et durs (la distinction est faite en fonction du rapport  $\tau_{-1}/\sigma_{-1}$  des deux limites d'endurance propres au matériau).

$$-1) \text{ Pour les métaux doux } \left( 0.5 < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 0.6 \right)$$

Dans ce premier cas, le critère s'écrit :

$$\frac{\max [T_{\sigma}(\varphi, \gamma)] + \alpha_1 \sum_{H, \max}}{\beta_1} \leq 1 \quad (\text{II.21})$$



Avec :

$$T_{\sigma}(\varphi, \gamma) = \sqrt{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \tau_a^2(\psi, \varphi, \gamma) d\varphi} \quad (\text{II.22})$$

Le calcul de l'amplitude de la contrainte tangentielle  $\tau_a$  est effectué par l'utilisation d'un plan défini en coordonnées sphériques en considérant une droite faisant un angle  $\psi$  sur le plan dont la normale est définie par  $\varphi$  et  $\varphi$  en coordonnées sphériques.

Les expressions des constantes  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont suivantes:

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi} \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\frac{\sigma_{-1}}{3}} \quad (\text{II.23})$$

$$\beta_1 = \sqrt{\pi} \tau_{-1}$$

-2) Pour les métaux durs  $\left( 0.6 \leq \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 0.8 \right)$

Dans le cas des métaux durs, le critère s'écrit :

$$\frac{M_{\sigma} + \alpha_2 P_{H \max}}{\beta_2} \leq 1 \quad (\text{II.24})$$

Les expressions des constantes  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  sont :

$$\alpha_2 = \pi \sqrt{\frac{8}{5} \frac{\tau_{-1} \sqrt{3} - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}} \quad (\text{II.25})$$

$$\beta_2 = \pi \sqrt{\frac{8}{15}} \tau_{-1}$$

L'application de ce critère est limitée aux métaux doux et durs.

## II.7. Critères énergétiques

Le concept de l'énergie de déformation plastique a été utilisé pour corréler la résistance à la fatigue multiaxiale, en particulier dans le domaine oligocyclique [32-35]. Il ya également eu un certain nombre de recherches [36-37], dans laquelle l'énergie de déformation élastique est ajouté à l'énergie de déformation plastique afin de faire face à la fatigue multiaxiale du polycyclique. Dans section nous allons citer les Critères énergétiques les plus utilisé.

### II.7.1. Critère de Froustey & Lasserre [38]

Le critère développé par Froustey et Lasserre est une approche énergétique ponctuelle permettant de prendre en compte le peu d'influence du déphasage en flexion et torsion combinées sur la résistance à la fatigue à grande durée de vie. Deux paramètres ont été proposes :

- la valeur moyenne sur un cycle de l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement alternée,  $W_a$ .

- l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement moyen,  $W_m$ .

De plus ce critère tient compte de la sensibilité du matériau au degré de triaxialité de l'état de contraint. Le critère s'écrit :

$$\sqrt{\frac{C_{1a}}{\alpha} + \frac{C_{2a}}{\beta}} \leq 1 \quad (\text{II.26})$$

Avec :

$$C_{1a} = \frac{W_m}{\left(\frac{\gamma}{1-e^{-\gamma}}\right) \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+dT_m(e^\gamma - 1))\right]} \quad (\text{II.27})$$

$$C_{2a} = \frac{W_a}{\left(\frac{\gamma}{1-dT_a}\right) \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+dT_a(e^\gamma - 1))\right]}$$

Les trois constantes à déterminer sont  $\alpha$  ,  $\beta$  et  $\gamma$  . Elles sont obtenues à l'aide des trois limites de fatigue  $\sigma_{-1}$  ,  $\sigma_0$  et  $\tau_{-1}$  .

### II.7.2. Critère de Palin Luc [39]

Palin luc propose un critère sur la base des travaux de Froustey et Lasserre, l'auteur définit deux quantités qu'il compare pour situer le cycle multiaxial par rapport à la limite de fatigue du matériau. La première correspond à l'énergie  $w_a$  relative à l'endommagement du volume critique  $V^*$  de matière et développée par le cycle multiaxial de contraintes considéré. La seconde quantité, notée  $w_a^D$ , est analogue à la première mais elle est déterminée à la limite de fatigue du matériau. Ces deux grandeurs sont définies par :

$$w_a^D = w_a^D \frac{F(dT_a, \beta)}{F(dT_a, \beta)} \quad (\text{II.28})$$

Avec :

$$w_a^D = \frac{\sigma_{-1}^2 - f_{-1}^2}{4E} \quad (\text{II.29})$$

La détermination de  $\beta$  se fait par la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{\beta} \ln \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{3} (e^\beta - 1) \right] + \frac{f_{-1}^2}{3\tau_{-1}^2} - 1 = 0 \quad (\text{II.30})$$

Le critère proposé par cet auteur s'écrit :

$$\sqrt{\frac{w_a}{w_a^D}} \leq 1 \quad (\text{II.31})$$

### II.7.3. Critère d'Ellyin [40]

Ellyin a supposé comme point de départ que l'endommagement d'un matériau est le résultat de l'énergie de déformation plastique sur un cycle de chargement. L'auteur a proposé ce critère en premier lieu pour le domaine oligocyclique, en suite il a fait une extension à la fatigue à grand nombre de cycles. Ellyin propose de relier la densité d'énergie de déformation à la durée de vie des métaux en fatigue multiaxiale, équation (II-32).

$$\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_e = kN^\alpha + c \quad (\text{II.32})$$

Où  $\Delta W$  correspond à la densité d'énergie de déformation et  $k$ ,  $\alpha$  et  $c$  sont des coefficients de matériau. D'autres travaux reprennent ce critère dans sa forme initiale [41-44], ces travaux sont basés sur l'hypothèse que la déformation plastique est nulle pour les sollicitations en fatigue à grand nombre de cycles [45-46]. Ainsi, le terme de  $\Delta W_p$  devient nul.

### II.7.4. Critère de Garud [47]

Garud propose un critère de fatigue multiaxiale dans le domaine oligocyclique. L'auteur suppose dans son proposition que l'énergie de déformation plastique est le paramètre d'endommagement le plus influençant sur l'initiation et la propagation de fissuration par chargement de fatigue. Le critère de Garud s'écrit suivant la relation (II.33)

$$\Delta W_{ij}^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \alpha N_f^\beta \quad (\text{II.33})$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes de matériau

### II.7.5. Critère de Glinka [48]

Contrairement à ce que Garud suppose, Glinka considère que les deux paramètres énergétiques (élastique et plastique) respectivement associée aux déformations normales et de cisaillement sur le plan critique sont responsable de la fissure par fatigue.

$$W = \frac{\Delta\sigma_{12}\Delta\gamma_{12}}{4} + \frac{\Delta\sigma_{22}\Delta\varepsilon_{22}}{4} \quad (\text{II.34})$$

En prenant en compte de l'effet de la contrainte moyenne, Glinka et al [49] modifient l'équation (II.34) sous la forme suivante :

$$W = \frac{\Delta\sigma_{12}\Delta\gamma_{12}}{4} \left( \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{12}^{\max}}{\tau_f}} + \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{22}^{\max}}{\sigma_f}} \right) \quad (\text{II.35})$$

### II.7.6. Critère de Macha [50]

En 1999, Macha propose un critère de fatigue multiaxiale valable dans le domaine polycyclique, ce critère est basé sur le paramètre énergie de déformation de cisaillement  $W_c(t)$  calculée sur un plan critique, il suppose que cette énergie est la cause de la fissuration par fatigue.

$$W_c(t) = \frac{1}{2} s_{aij}(t) e_{aij}(t) \quad (\text{II.36})$$

Ou  $s_{aij}(t)$  et  $e_{aij}(t)$  représentent respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations déviatoriques alternés.

$$\begin{aligned} s_{aij} &= \sigma_{aij} - \frac{1}{3} \sigma_{akk} \delta_{ij} \\ e_{aij} &= \varepsilon_{aij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{akk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

### II.8. Critère de plan critique

Les critères multiaxiaux de fatigue de type plan critique, se singularisent par leur choix du plan critique. En effet, ils définissent le plan dit critique comme celui où la contrainte tangentielle est maximale, ou comme celui où l'amplitude de la contrainte tangentielle est maximale. Le plan critique défini, le calcul de la fonction de fatigue représentative de l'endommagement de la matière au point considéré.

La base physique sur laquelle s'appuient ces critères est plus forte car à travers la notion de plan critique, on trouve la notion de plan de glissement préférentiel. Le plan critique sur lequel est calculé le critère de fatigue multiaxiale est souvent associé au plan sur lequel la fissure est supposée apparaître (plan de glissement préférentiel sur lequel apparaisse les bandes de glissement persistantes).

Il faut noter qu'on trouve parmi les critères énergétiques, des critères qui utilisent la notion de plan critique

#### II.8.1. Critère de Findley [51]

L'origine du critère de Findley remonte aux années cinquante, l'auteur définit le plan critique en recherchant celui où la fonction de fatigue atteint son maximum, c'est-à-dire où la combinaison linéaire  $\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hh \max}$  est maximale. Le critère s'écrit :

$$\frac{\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hh \max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II.38})$$

Ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes de matériau

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1 \\ \beta &= \tau_{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

### II.8.2 Critère de Yokobori [52]

En 1966, Yokobori propose une formulation où la définition du plan critique est directement liée à l'expression du critère dont la maximisation par rapport à  $h$  (normale au plan physique) constitue la recherche du plan critique. Le critère s'écrit :

$$\frac{\max(\tau_h(t)) + \alpha \sigma_{hh \max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II.40})$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  du matériau sont identiques à celles de critère de Findley [51].

### II.8.3 Critère de McDiamid I [53]

Dans son premier critère élaboré en 1966, McDiamid suppose que le plan critique est défini comme celui où l'amplitude du cisaillement  $\tau_{ha}$  est maximale. Sur ce plan, la fonction du critère est donnée par :

$$\frac{\tau_{ha} + A (\sigma_{hha})^{\frac{3}{2}}}{B} \leq 1 \quad (\text{II.41})$$

Les deux constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées à partir des deux limites de fatigue du matériau en traction et en torsion alternées symétriques ( $\sigma_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ ).

$$A = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{II.42})$$

$$B = \tau_{-1}$$

### II.8.4 Critère de McDiarmid II [54]

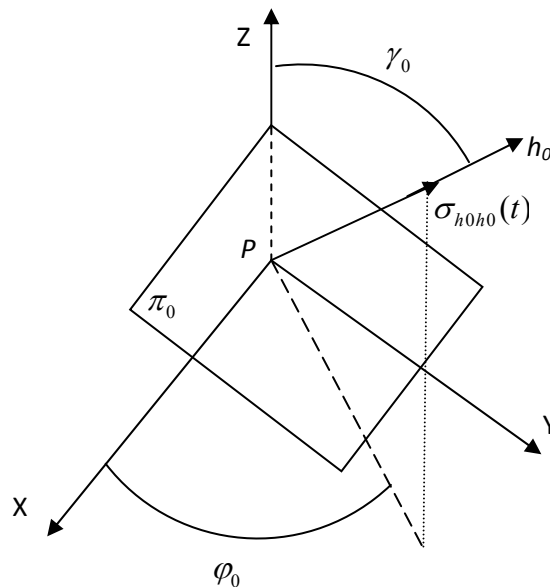
McDiarmid modifie son premier critère en 1974, dans laquelle il introduit l'influence de la contrainte normale moyenne dans un facteur de l'amplitude du cisaillement du plan critique, ce critère est largement utilisé. Il est implémenté dans les codes de calculs dédiés à l'étude de la fatigue (MSC Fatigue, FE-fatigue et Fe-Safe). Le critère s'écrit :

$$\frac{\left(1 - 2 \frac{\sigma_{hhm}}{R_m}\right)^{-\frac{1}{2}} \tau_{ha} + A (\sigma_{hha})^{\frac{3}{2}}}{B} \leq 1 \quad (\text{II.43})$$

ou  $R_m$  et la résistance maximale à la traction du matériau. Les constantes A et B sont identiques à celles de la première version

### II.8.5 Critère de Robert [55]

En 1992, Robert propose une méthode d'estimation de durée de vie, qui fait appel au concept du dommage par plan. Ce concept a pour objectif de ne pas décrire le dommage de façon globale au point de la structure où est réalisé le calcul en fatigue, mais de se placer à l'échelle du plan où le dommage devient directionnel. L'auteur dissocie les influences respectives des parties moyenne et alternée de la contrainte normale et les combine avec la partie alternée de la contrainte tangentielle. Pour extraire et identifier des cycles multiaxiaux, il choisit une variable de comptage particulière [56] : la contrainte normale  $\sigma_{h_0h_0}(t)$  au plan fixe  $\pi_0$  défini par les angles  $\varphi_0 = \pi/\sqrt{7}$  et  $\gamma_0 = \pi/\sqrt{19}$  (Figure. II.6). Ces angles ont été choisis, selon l'auteur, de façon à présenter une partie décimale illimitée non périodique afin de dissocier facilement deux tenseurs consécutifs conduisant à des valeurs voisines de la contrainte normale.



**Figure II.6 :** Contrainte normale choisie comme variable de comptage.

Le critère de Robert est défini comme suit :

$$\max_t \left( \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha(N_r)\sigma_{h_0h_0}(t) + \beta(N_r)\sigma_{hhm}}{\gamma(N_r)} \right) \leq 1 \quad (\text{II.44})$$

Se critère à subi plusieurs évolutions depuis sa première formulation [57-58].

### II.8.6. Critère de Dang Van I [59]

Le critère de Dang Van est basé sur la constatation que l'amorçage est un phénomène local prenant naissance à l'échelle du grain. Il formule l'hypothèse que si le chargement est suffisamment faible, la totalité des grains atteint un comportement élastique (on dit qu'il y a adaptation du matériau) et par conséquent la structure a une durée de vie infinie. Lorsque le chargement est élevée, le matériau s'adapte à l'échelle macroscopique mais certains grains subissent une déformation plastique cyclique stabilisée qui conduit au bout d'un certain nombre de cycles à l'amorçage de fissure. Dang Van propose alors un critère de fatigue à l'échelle du grain dont la première définition est la suivante :

$$\frac{\tau_m(\vec{n}, t) + \alpha \sigma_m^h(t)}{b} \leq 1 \quad (\text{II.45})$$

ou  $\tau_m(\vec{n}, t)$  est la contrainte microscopique de cisaillement du plan de normale  $\vec{n}$  à l'instant  $t$ ,  $\sigma_m^h(t)$  est la pression hydrostatique à l'instant  $t$ , et  $b$  une constante matériau.

Les contraintes locales dans le grain peuvent être reliées aux contraintes macroscopiques par la relation :

$$\underline{\sigma} = \underline{\Sigma} + \underline{\rho} \quad (\text{II.46})$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes microscopiques,  $\underline{\Sigma}$  le tenseur de contraintes macroscopiques, et  $\underline{\rho}$  un champ de contraintes résiduelles.

En considérant que la contrainte hydrostatique est la même à l'échelle microscopique qu'à l'échelle macroscopique, on a :

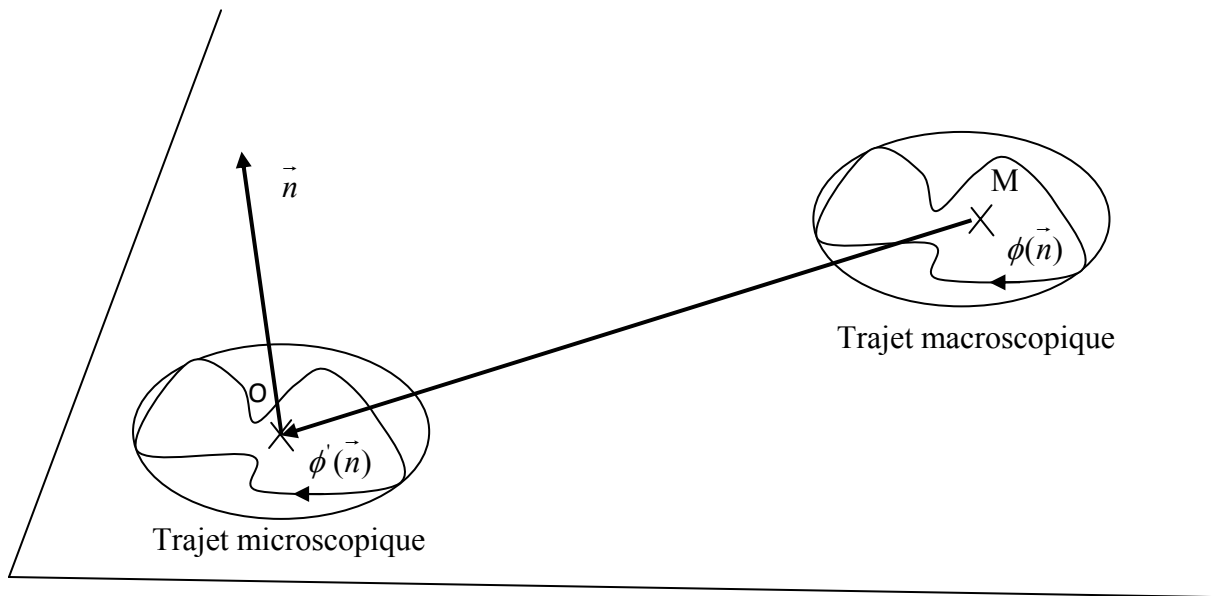
$$\underline{s} = \underline{S} + \underline{\rho} \quad (\text{II.47})$$

Avec  $\underline{s}$  et  $\underline{S}$  les déviateurs de contraintes à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique respectivement.

Pour estimer  $\underline{\rho}$ , Dang Van considère un plan de normale  $\vec{n}$  donné, dans lequel le trajet de scission macroscopique décrit une courbe fermée  $\phi(\vec{n})$ . On recherche ensuite le tenseur  $\underline{\rho}$  tel que pour le cycle adapté,  $\underline{\sigma}$  respecte à tout instant le critère de plasticité, ce qui se traduit



graphiquement par un trajet de chargement  $\phi'(\vec{n})$  qui admet comme plus petit cercle circonscrit, le cercle circonscrit centré à l'origine.  $\underline{\rho}$  est défini alors comme étant le vecteur  $\vec{MO}$  du plan de normale  $\vec{n}$  tel que  $M$  soit le centre du plus petit cercle circonscrit au trajet  $\phi(\vec{n})$  conformément à l'illustration de la figure II-7.



**Figure II-7** : Illustration de l'estimation du champ de contraintes résiduelles  $\underline{\rho}$ .

Le critère de Dang Van est formulé comme une combinaison linéaire de la scission mesoscopique et de la pression hydrostatique globale. Ce critère s'écrit :

$$\frac{\max_t [\tau(t) + aP(t)]}{b} \leq 1 \quad (\text{II.48})$$

$P(t)$  est la pression hydrostatique instantanée.

Pour un essai de torsion alternée symétrique et un essai de traction-compression alterné symétrique, on obtient :

$$a = 3 \frac{\left( \tau_0 - \frac{\sigma_0}{2} \right)}{\sigma_0} \quad (\text{II.49})$$

$$b = \tau_0$$

### II.8.7. Critère de Dang Van II [60]

Les auteurs de ce critère proposent une nouvelle version en 1989. L'objectif de cette version est d'accélérer les calculs en évitant de balayer l'ensemble des plans physiques pour la détermination du plan critique.

$$\frac{\max_n \{ \max_t [ \tau(t) + aP(t) ] \}}{b} \leq 1 \quad (\text{II.50})$$

Où  $P(t)$  est la pression hydrostatique ( $P(t) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}(t)$ ), Les deux constantes  $a$  et  $b$  ainsi que le domaine de validité ( $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$ ) restent inchangés pour le critère, par rapport au critère Dang

Van I. Parmi les approches de plan critique, le critère de Dang Van II donne des résultats meilleurs [61].

### II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une analyse détaillée de différents critères de fatigue multiaxiale pour la prévision de durée de vie dans les différents domaines. Ces critères sont apparus durant les dernières décades; elles constituent les principaux axes de recherche dans le domaine de fatigue multiaxiale. Ces méthodes sont présentées en trois catégories à la base des principes fondamentaux sur lesquels ils sont basés (empirique, globale et plan critique).

Pour la première catégorie c'est à dire les critères empiriques, ils sont issus des résultats expérimentaux obtenus généralement pour un type de sollicitations multiaxiales données. Ce qui limite leur utilisation uniquement pour les modes de sollicitations pour lesquels ils ont été élaborés.

La deuxième catégorie rassemble les critères basés sur les approches globales, ces critères utilisent une grandeur globale (invariants du tenseur des contraintes, moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement ou une grandeur énergétique) caractéristique du chargement limite. Sous cette catégorie, on trouve les critères énergétiques, ces critères basant sur le fait que l'énergie transmise au système est emmagasinée d'une part sous forme d'énergie élastique et est dissipée d'autre part sous forme de déformations plastiques ou de dissipations thermiques.

## Chapitre II : Critères d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale

---

Les approches de type plan critique sont les plus utilisées. Ces approches recherchent le plan où l'endommagement causé par fatigue est maximum. L'approche plan critique est justifiée expérimentalement pour des chargements en phase, où l'existence de directions critiques propices à la formation de fissures est démontrée. En chaque point où est défini le tenseur des contraintes, l'endommagement est évalué par la décomposition et la projection du tenseur des contraintes sur l'ensemble des plans physiques étudiés. Ainsi, ces critères déterminent la durée de vie de la structure et la direction critique d'amorçage de fissure, ils utilisent souvent une combinaison de la contrainte de cisaillement et la contrainte normale sur le plan considéré.

# Chapitre III

## Les lois de cumul d'endommagement

# Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

## III.1. Introduction

Les théories de cumul d'endommagement ont pour objet de décrire l'évolution du phénomène entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures à l'échelle macroscopique) et l'état d'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément de volume, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (environ 0.1mm).

De nombreux auteurs se sont penchés sur la modélisation cumul de l'endommagement depuis des années. Ces lois permettant la prévision du nombre de cycles à la rupture (duré de vie) en évaluant l'endommagement du matériau pour tous les cycles de contraintes rencontrés et de cumuler leurs effets sur le comportement du matériau.

Les lois d'endommagement permettent, une fois déterminée la durée de vie du matériau relative à chaque cycle extrait, de calculer le dommage correspondant et d'en faire le cumul. Lorsque la séquence de chargement est traitée, le dommage cumulé conduit à l'estimation de la durée de vie du matériau en termes de nombre de répétitions de la séquence à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude chronologique des lois d'endommagement les plus connues et les plus représentatives,

## III.2. Théorie du cumul linéaire - Loi de Palmgren-Miner (1945) [62]

Cette théorie initialement proposée par Palmgren en 1924 a été ensuite développée par Miner en 1945. Cette loi est d'une utilisation très répandue dans les bureaux d'études en raison de sa simplicité et de sa facilité de mise en oeuvre afin de traiter le cas des séquences de charge d'amplitude variable. Elle repose sur les hypothèses suivantes :

- le chargement est une fonction sinusoïdale du temps ;
- la somme totale du travail absorbé par le matériau qui engendre sa rupture par fatigue, donc l'adoucissement et le durcissement du matériau, n'influence pas la rupture du matériau
- le diagramme de Goodman modifié et la modélisation du diagramme de Haigh qui représente le plus fidèlement le comportement expérimental des matériaux [63].
- l'amorçage d'une fissure macroscopique est l'indicateur de ruine du matériau et cela se produit lorsque le paramètre  $D = 1$

Miner suppose que l'endommagement, représenté par la variable  $D_i$ , engendré par  $n_i$  cycles de niveau  $\sigma_i$  est tel que :

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

$$D_i = \frac{U_i}{W_i} = \frac{n_i}{Nr_i} \quad (\text{III.01})$$

Avec :

$W_i$  : le travail total transmis à l'éprouvette au moment de sa rupture par fatigue.

$U_i$  : le travail transmis à l'éprouvette pour une sollicitation d'amplitude  $\sigma_i$  appliquée pendant  $n_i$  cycles.

$Nr_i$  : le nombre de cycles à la rupture sous le niveau  $\sigma_i$ .

Ainsi pour un chargement comprenant  $p$  niveaux de contraintes ( $p > 0$ ), Miner suppose d'après la deuxième hypothèse que la rupture intervient quand :

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{U_i}{W} = 1 \quad \text{Soit} \quad \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{Nr_i} = 1 \quad (\text{III.02})$$

Cette hypothèse revient à supposer que pour un matériau donné, il existe un travail maximum  $W$  que le matériau peut absorber quel que soient les niveaux de sollicitation et l'histoire de chargement qu'il a subie.

### III.3. Loi de Marco et Starkey (1954) [64]

Les auteurs de cette loi se sont basés sur les théories d'endommagement, qui jusqu'à la date de 1954 étaient des modèles linéaires, pour présenter une théorie non linéaire. Ils ont effectué des essais sur des éprouvettes en alliage d'aluminium (76S-T61) et en acier (SAE4340) sollicitées en flexion rotative par des séquences de chargement d'amplitude variable par blocs.

Cette loi est l'une des premières lois non linéaires de cumul d'endommagement, elle reprend la loi de Miner en la modifiant par un exposant dépendant des contraintes appliquées et repose sur les hypothèses suivantes :

- les sollicitations sont alternées symétriques.
- Les courbes d'endommagement pour chaque niveau de contraintes sont définies par l'équation :

$$D_i = \left( \frac{n_i}{Nr_i} \right)^{m_i} \quad \text{Avec } m_i > 1 \quad (\text{III.03})$$

Où  $m_i$  est un exposant qui dépend du niveau de sollicitation  $\sigma_i$  ;  $m_i$  est une fonction décroissante de la contrainte.

- pour  $p$  niveaux de contraintes ( $p > 0$ ), la rupture intervient quand  $\sum_{i=1}^{i=p} D_i = 1$ .

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

Pour des chargements à plusieurs blocs cette loi utilise la méthode des nombres de cycles équivalents.

### III.3.1. Méthode de nombres de cycles équivalents

Cette méthode consiste à calculer le nombre de cycles  $n_{eq2}$  qu'il aurait fallu appliquer au niveau 2 pour produire le même dommage  $D_1$  que les  $n_1$  cycles appliqués au niveau 1. Par suite, le nombre de cycles  $n_{2t}$  au niveau 2 à la fin du second bloc ( $n_1$  cycles au niveau 1 et  $n_2$  cycles au niveau 2) comme c'est illustré dans la figure III.1

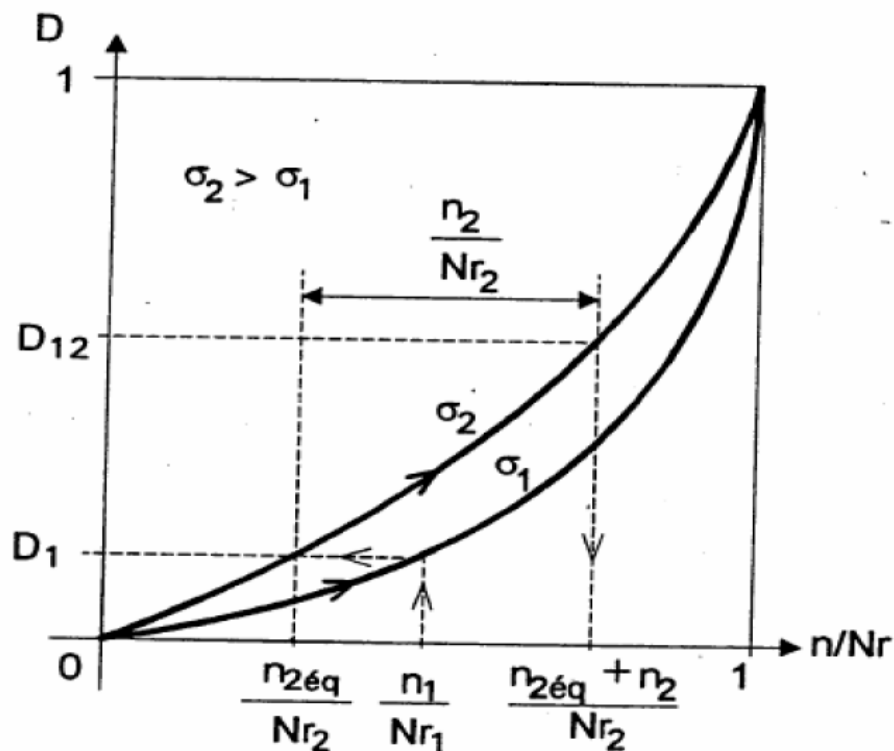


Figure III.1 : Présentation de la méthode des nombres de cycles équivalents

- L'endommagement créé au cours du premier bloc est :

$$D_1 = \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1} \quad (\text{III.04})$$

D'où :  $n_{2eq} = N_2 \cdot D_1^{1/m_2}$  et  $n_{2t} = n_{2eq} + n_2$

L'endommagement total à la fin du second bloc s'exprime selon :

$$D_{12} = \left( \frac{n_{2t}}{N_2} \right)^{m_2} = \left( \frac{n_{2eq} + n_2}{N_2} \right)^{m_2} = \left[ \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1/m_2} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{m_2} \quad (\text{III.05})$$

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

Cette relation permet d'obtenir la durée de vie sous un chargement à deux niveaux  
 - Dans le cas général de  $p$  niveaux successifs, l'endommagement aura lieu si :

$$\left\{ \left\{ \left[ \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1/m_2} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{m_2/m_3} + \dots + \frac{n_i}{N_i} \right\}^{m_i/m_{i+1}} + \dots + \frac{n_{p-1}}{N_{p-1}} \right\}^{m_{p-1}/m_p} + \frac{n_p}{N_p} \right\}^{m_p} = 1 \quad (\text{III.06})$$

### III.4. La loi de Henry (1955) [65]

La loi de Henry lie l'évolution du dommage du matériau à la variation de sa limite d'endurance. Le dommage par fatigue est ainsi directement relié à une caractéristique de fatigue du matériau. Cette loi est fondée sur les trois hypothèses suivantes :

- la courbe de Wöhler du matériau étudié est représentée par l'équation :

$$N = \frac{K}{\sigma - \sigma_D} \quad \text{Si } \sigma > \sigma_D \quad (\text{III.07})$$

Où  $\sigma_D$  est la limite de fatigue du matériau et  $k$  un coefficient empirique dépendant du matériau, de l'état de surface et de la géométrie de la pièce.

- $\sigma_D$  et  $k$  varient avec l'endommagement, à tous les niveaux de contrainte situés au dessus de la limite de fatigue.
- le point critique de la pièce où se produit un endommagement peut être considéré comme une entaille de coefficient de concentration de contrainte  $k_t$ , l'équation empirique de Henry devient :

$$N = \frac{k}{k_t (\sigma - \sigma_{D0})} = \frac{K}{\sigma - \sigma_D} \quad (\text{III.08})$$

Henry a défini le coefficient de concentration de contrainte par :

$$K = \frac{k}{k_t} = \frac{\sigma_{D0}}{\sigma_D}$$

$\sigma_{D0}$  est la limite de fatigue du matériau vierge.

Le dommage  $D$  se traduit par la variation relative de la limite d'endurance du matériau au cours de sa durée de vie par :

$$D = \frac{\sigma_{D0} - \sigma_D}{\sigma_{D0}} \quad (\text{III.09})$$

L'expression de la limite d'endurance instantanée, proposée par Henry, est donnée par:

$$\sigma_D = \frac{\sigma(1-r)}{\left( \frac{\sigma - \sigma_{D0}}{\sigma_{D0}} \right) + (1-r)} = \frac{\sigma(1-r)}{\gamma - r} \quad (\text{III.10})$$



## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

Où  $r = \frac{n}{N_r}$  est la fraction de vie sous le niveau de contrainte  $\sigma$ ,

$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_{D0}}$  est le facteur de surcharge sous le niveau contrainte  $\sigma$ .

En insérant l'équation (III.10) dans la relation (III.9), l'expression du dommage créé par  $n_i$  cycles de niveau  $\sigma_i$  s'écrit :

$$D_i = \frac{r_i(\gamma_i - 1)}{\gamma_i - r_i} \quad (\text{III.11})$$

A la rupture de l'éprouvette, le dommage total vaut l'unité.

### III.5 - La loi de Gatts (1961)

La description faite ici du dommage en fatigue diffère de la plupart des autres lois. L'auteur définit le dommage en fonction de la limite instantanée de résistance ou résistance maximale du matériau en traction monotone. Il explique que les chargements répétés causent des dommages au matériau qui se traduisent par la diminution de sa résistance. Cela permet donc d'établir le fait que le dommage s'accumule de façon plus ou moins continue par application de charge. Gatts a proposée les hypothèses suivantes pour la fonction d'endommagement, le premier cycle de la contrainte de rupture, et le rapport de la résistance d'endurance à la résistance de rupture brutale [66] :

- La contrainte qui va entraîner la rupture sur le premier cycle dans un chargement cyclique est supposée la résistance ultime,  $R_u$ , par approximation,
- Le rapport de la limite d'endurance  $\sigma_D$  à la résistance maximale de rupture (résistance à la traction) est supposée constant par approximation,
- L'endommagement est relié à la variation de résistance en traction monotone du matériau par une relation de type  $\frac{dR_m}{dn} = \lambda D(\sigma)$  où  $\lambda$  indique seulement qu'il y a proportionnalité.  $R_m$  est la valeur instantanée de la résistance maximale de traction,
- Pour respecter l'existence d'une limite de fatigue, la valeur de la contrainte au-dessous de laquelle le matériau peut supporter un nombre infini de cycles de sollicitations, l'auteur propose la relation suivante :

$$\frac{dR_m}{dn} = -\lambda(\sigma - \sigma_D)^p \text{ Soit } D(\sigma) = (\sigma - \sigma_D)^p$$

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

$\lambda$  et  $\rho$  sont des constantes empiriques.

On rappelle que  $(\sigma - \sigma_D) = 0$  si  $\sigma < \sigma_D$

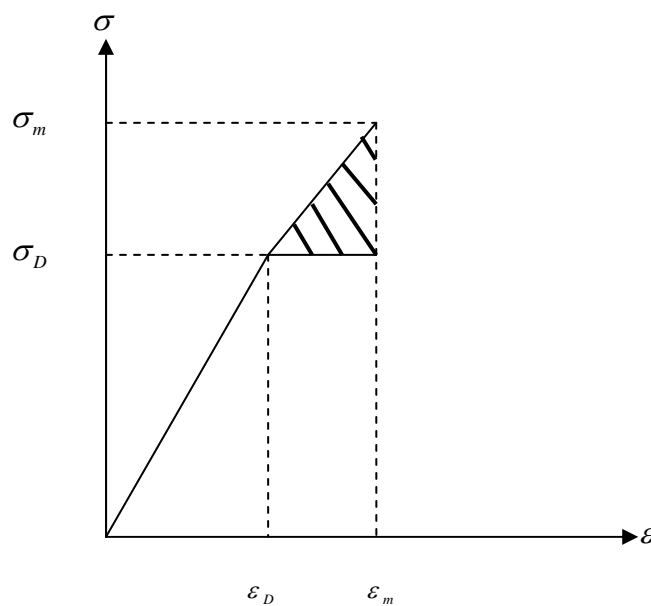
-Il y a proportionnalité entre la valeur instantanée de la résistance à la traction

$R_{m,n}$  et la valeur instantanée de la limite d'endurance  $\sigma_{D,n}$  :

$$\sigma_{D,n} = C.R_{m,n} \quad (\text{III.12})$$

En ce qui concerne les sollicitations symétriques pures (à contrainte moyenne nulle), les hypothèses suivantes sont proposées pour la fonction d'endommagement :

- La figure III.2 représente la modélisation retenue de la réponse  $(\sigma, \varepsilon)$  du matériau lors du  $n^{\text{me}}$  cycle de la sollicitation.



**Figure III.2** : Modélisation de la loi de comportement  $\sigma, \varepsilon$  lors du  $n^{\text{eme}}$  cycle de sollicitation

La surface hachurée sur la figure III.2 représente l'énergie relative de la part de la contrainte au-dessus de la limite d'endurance et de la déformation en excès par rapport à la déformation correspondante à cette limite d'endurance d'où:

$$\frac{dR_m}{dn} = -\lambda \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_m} (\sigma - \sigma_{D,n}) d\varepsilon \quad (\text{III.13})$$

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

En admettant l'approximation linéaire de la courbe, l'intégrale (III.13) est aussi proportionnelle à :

$$\frac{dR_m}{dn} = \int_{\sigma_n}^{\sigma} (\sigma - \sigma_{D,n}) d\sigma \quad (\text{III.14})$$

Pendant le n<sup>ème</sup> cycle, la limite d'endurance peut être supposée constante.

L'intégration de la relation (III.13) donne alors :

$$\frac{dR_m}{dn} = -k (\sigma - \sigma_D)^2 \quad (\text{III.15})$$

En utilisant la relation (III.12), il vient :

$$\frac{dR_m}{dn} = -k (\sigma - C \cdot R_{m,n})^2 \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Ou} \quad \frac{d\sigma_{D,n}}{dn} = -k \cdot C \cdot (\sigma - \sigma_{D,n})^2 \quad (\text{III.17})$$

N.B :  $\sigma - \sigma_{D,n} = 0$  quand  $\sigma < \sigma_{D,n}$

si  $C = 0$  (pas de limite d'endurance), l'équation (III.12) s'applique avec les conditions au limites suivantes :

$$R_{m,n} = R_u \text{ quand } n = 0$$

$$R_{m,n} = \sigma \text{ quand } n = \text{Nr}$$

Si  $C > 0$ , l'équation est applicable avec :  $\sigma = \sigma_D$  quand  $n = 0$

$$\sigma_D = C \sigma / R_u \text{ si } n = \text{Nr}$$

Nr est le nombre de cycles à rupture.

Dans le cas où l'amplitude des contraintes est constante, l'auteur propose la solution de l'équation (III.17) comme suit :

$$k \cdot n = \frac{1}{\sigma - \sigma_{D0}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_{D,n}} \quad (\text{III.18})$$

Dans laquelle la limite d'endurance est exprimée comme une fonction de l'amplitude des contraintes et du nombre de cycles appliqués.

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

On obtient une équation de la courbe de Wöhler avec les conditions suivantes :

$$\sigma_D = C \cdot \sigma$$

$$\text{pour } n=N_r : k \cdot N_r = \frac{1}{\sigma - \sigma_{D0}} - \frac{1}{\sigma(1-C)} \quad (\text{III.19})$$

L'expression suivante permet le calcul de la limite de fatigue instantanée :

$$\gamma_{D,n} = \gamma \left[ 1 - \frac{1}{\frac{\beta}{1-C} + \frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\beta)} \right] \quad (\text{III.20})$$

avec :  $\gamma_{D,n} = \frac{\sigma_{D,n}}{\sigma_{D0}}$  est le rapport d'amplitude de contrainte,

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_{D0}} ;$$

$$C = \frac{\sigma_{D0}}{Ru} ;$$

$$\beta = \frac{n}{N_r} , \text{ la fraction de vie.}$$

En supposant nulle la limite d'endurance  $\sigma_{D,Nr}$  au moment de la rupture plutôt que

$$\sigma_{D,Nr} = C \cdot \sigma , \text{ la relation (III.20) devient : } \gamma_D = \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$$

### III.6 - La loi de Manson, Freche et Ensign (1967)

Cette nouvelle méthode, proposée par Manson et al. en 1967 [67], a pour but de remplacer la règle de dommage linéaire par une conception plus exacte tout en gardant sa simplicité. Les auteurs énoncent que l'évaluation de la durée de vie totale consiste à considérer deux phases importantes : une phase pour l'amorçage de la fissure et une autre pour sa propagation ; le principe est d'appliquer une règle linéaire de cumul du dommage à chacune des deux phases : c'est la règle de double linéarité du dommage. Elle a pour objectif de

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

corriger l'insuffisance de la règle linéaire de Miner vis-à-vis de l'ordre d'application des charges (effet de séquence).

L'expression analytique proposée s'exprime en terme de durée de vie totale  $Nr_i$  pour chaque niveau de contrainte  $\sigma_i$ .

$$\text{Période de propagation de fissure : } (\Delta Nr)_i = P.Nr_i^{0,6} \quad (\text{III.21})$$

$$\text{Période d'amorçage de fissure : } N_{0i} = Nr_i - P.Nr_i^{0,6} \quad (\text{III.22})$$

Où :  $P$  est un coefficient empirique, défini expérimentalement (valeur retenue :  $P=14$ ),  
 $N_{0i}$  est le nombre de cycles requis pour créer une fissure effective à un niveau de contrainte donné ( $\sigma_i$ ),  
 $(\Delta Nr)_i$  est le nombre de cycles pour propager une fissure depuis l'amorçage jusqu'à la rupture à un niveau de contrainte  $\sigma_i$ .

### a) Cumul de dommage

Les équations exprimant le dommage cumulé par la règle de double linéarité pour un chargement de  $p$  blocs distincts sont :

$$\text{-Phase d'amorçage de fissure : } \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{N_{0i}} = 1 \quad (\text{III.23})$$

avec les conditions : si  $Nr_i > 730$  cycles, alors  $N_{0i} = Nr_i - 14Nr_i^{0,6}$

si  $Nr_i < 730$  cycles, alors  $N_{0i} \approx 0$

$$\text{-Phase de propagation de fissure : } \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{(\Delta N)_i} = 1 \quad (\text{III.24})$$

avec les conditions: si  $Nr_i > 730$  cycles, alors  $(\Delta N)_i = Nr_i - 14Nr_i^{0,6}$

si  $Nr_i < 730$  cycles, alors  $(\Delta N)_i = Nr_i$

$n_i$  : nombre de cycles appliqués à chaque niveau de contrainte

### b) Application pour un cas de chargement à deux niveaux de contrainte [68]

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

Nous disposons de deux niveaux de contrainte,  $\sigma_1$  de nombre de cycles à rupture  $Nr_1$  et  $\sigma_2$ , de nombre de cycles à rupture  $Nr_2$ . Il s'agit de calculer le nombre de cycle  $n_2$  qui peut être appliqué au second niveau après l'application de  $n_1$  cycles au niveau  $\sigma_1$ , soit une fraction de vie  $n_1/Nr_1$  en préalable. On calcule les valeurs de  $(\Delta Nr)_1$  et  $(\Delta Nr)_2$  à l'aide de l'équation (III.21) et celles de  $N_{01}$  et  $N_{02}$  avec l'équation (III.22).

-Pour  $Nr_1 > 730$  cycles

si  $n_1 \geq N_{01}$ , la durée de vie résiduelle en cycles de niveau 2 est :

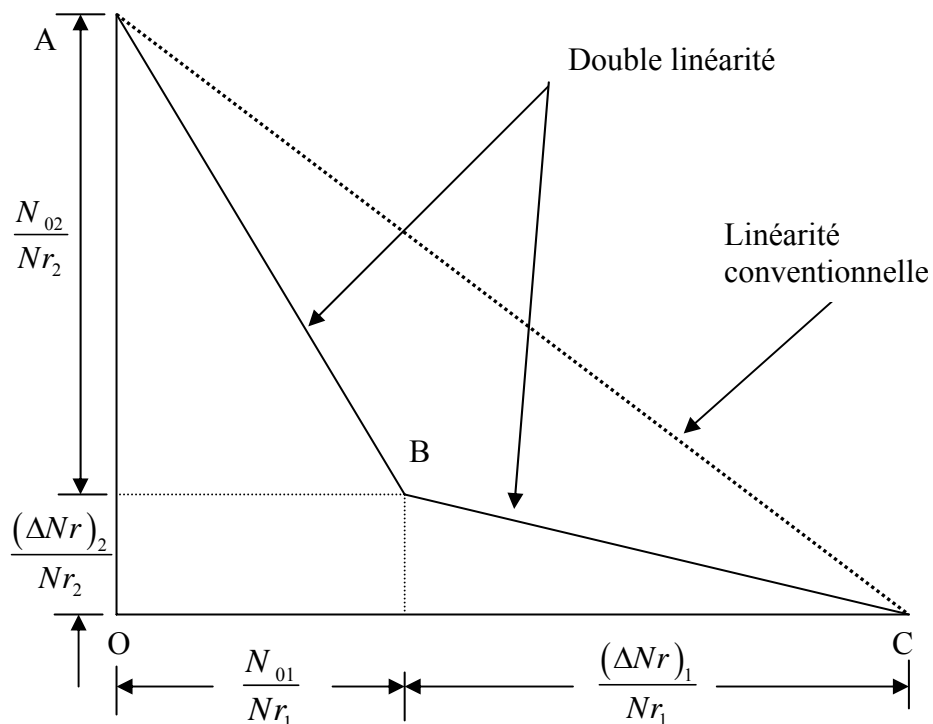
$$n_2 = \left[ 1 - \frac{n_1 - N_{01}}{(\Delta Nr)_1} \right] (\Delta Nr)_2 \quad (\text{III.25})$$

si  $n_1 < N_{01}$ , la phase d'amorçage de fissure n'est pas complète. Le nombre de cycles de niveau 2 est donc :

$$n_2 = \left[ 1 - \frac{n_1}{N_{01}} \right] N_{02} + (\Delta Nr)_2 \quad (\text{III.26})$$

-Pour  $Nr_1 < 730$  cycles, il est supposé qu'il n'y a pas de période d'amorçage de fissure.

### c) Représentation graphique de la fraction de vie restante $n_2/(Nr_2)$



**Figure III.3 :** Interprétation du dommage en fatigue à deux niveaux de contrainte par la règle de Maison et al [39].

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

Sur l'exemple de la figure III.3, la contrainte  $\sigma_1$  du niveau 1 est supérieure à  $\sigma_2$ , appliquée au second niveau jusqu'à la rupture. Si  $\sigma_1$  était inférieure à  $\sigma_2$ , AB et BC se trouveraient de l'autre côté de la droite à 45° AC de la loi linéaire conventionnelle. Le point B de coordonnées  $N_{01} / Nr_1$  et  $(\Delta Nr)_2 / Nr_2$  représente la fraction de vie suffisante pour amorcer effectivement une fissure au niveau 1 et permettre également une phase de propagation totale. Les points A et C étant fixes, pour établir le positionnement des droites AB et BC, et par conséquent celui du point B, idéalement deux tests bien choisis sont nécessaires.

### III.7. La théorie unifiée de Bui-Quoc, Bazergui et Biron (1971) [69]

Les auteurs exploitent les différentes théories d'endommagement de fatigue disponibles dans la littérature à l'époque, pour suggérer une nouvelle approche de calcul. C'est la théorie unifiée, applicable aux expérimentations effectuées dans des conditions de contrôle de contrainte ou de déformation (c'est à dire à contrainte ou à déformation imposée). Les considérations suivantes constituent la base de cette théorie:

-L'éprouvette endommagée présente une réduction de sa limite d'endurance originale  $\sigma_{D0}$  ainsi que de sa résistance ultime en traction  $R_u$ . De là, les conséquences suivantes :

- la réduction de la limite d'endurance convient particulièrement pour exprimer l'effet d'endommagement de fatigue, cet effet étant plus prononcé dans la région des bas niveaux de contraintes que dans celle des hauts niveaux.
- Il existe une relation entre la valeur instantanée de la limite d'endurance et celle de la résistance en traction comme suggéré par Gatts :

$$\gamma_{D,n} = \left( \frac{\gamma_t}{\gamma_u} \right)^m \quad (\text{III.27})$$

avec les notations suivantes :  $\gamma_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_{D0}}$  ;  $\gamma_u = \frac{R_u}{\sigma_{D0}}$  ;  $\gamma_{D0} = \frac{\sigma_{D,n}}{\sigma_{D0}}$

où :  $\gamma_{D,n}$  est la limite d'endurance adimensionnelle (réduite) instantanée,  
 $\sigma_{D0}$  est la limite d'endurance du matériau vierge,  
 $\sigma_{D,n}$  est la limite d'endurance instantanée du matériau après n cycles,  
 $\sigma_t$  est la valeur instantanée de la résistance en traction monotone du matériau,  
 $R_u$  est la résistance ultime en traction monotone du matériau,  
m est une constante empirique.

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

- De façon semblable à la loi de Henry, les auteurs relient la variation d'endommagement et la limite d'endurance réduite ;

$$\Delta D = -\mu \cdot \gamma_{D,n} \quad (\text{III.28})$$

$\gamma_{D,n}$  varie de la valeur 1, pour le matériau vierge, jusqu'à la valeur critique,  $\gamma_{D,c}$  pour l'état ultime à la rupture,

Le coefficient  $\mu$  qui permet d'obtenir la valeur unité pour le dommage à la rupture, dépend uniquement de la contrainte appliquée.

-Le processus d'endommagement peut être supposé continu. Sa vitesse de croissance est représentée par la forme différentielle suivante :

$$\frac{dD}{dn} = -\mu \cdot \left( \frac{d\gamma_{D,n}}{dn} \right) \quad (\text{III.29})$$

Celle-ci est valide pour des niveaux de contrainte correspondant à un nombre de cycles à rupture pas trop faible, de l'ordre de  $Nr = 50$ .

La fonction d'endommagement prend en considération la suggestion de Gatts concernant la relation entre le dommage par fatigue et la valeur instantanée de la limite d'endurance :

$$\frac{d\gamma_{D,n}}{dn} = \frac{1}{k} \left( \frac{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}{\gamma_{\max}} \right) \cdot \gamma_{\max}^b \cdot (\gamma_{\max} - \gamma_{D,n})^2 \quad \text{avec } \gamma_{\max} > \gamma_{D,n} \quad (\text{III.30})$$

Avec comme conditions aux limites : si  $n = 0$  alors  $\gamma_{D,n} = \gamma_{D0} = 1$

si  $n = Nr$  alors  $\gamma_{D,n} = \gamma_{D0}$

$k$  et  $b$  sont des constants matériaux,

$\gamma_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{D0}}$  ,  $\gamma_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{D0}}$  : sont les contraintes cycliques adimensionnelles maximale et

minimale respectivement sur un cycle de sollicitation.



## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

$$\gamma_{Dc} = \left( \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u} \right)^m \quad (\text{III.31})$$

Pour la seconde condition aux limites, la limite d'endurance critique n'est donc pas nulle. Les auteurs observent que cette valeur est proche de zéro pour les bas niveaux de contrainte, pourvu que la constante  $m$  soit suffisamment grande ( $m \geq 6$ ). Il est raisonnable dans ces conditions de supposer que l'équation (III.30) est valable jusqu'à rupture.

Dans les conditions notifiées ci-dessus, les auteurs donnent comme solution de l'équation (III.30), l'expression suivante:

$$n = \frac{k_\sigma}{1 - R_\sigma} \cdot \frac{1}{\gamma_{\max}^b} \left[ \frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - \gamma_{Dc}} \right] \quad (\text{III.32})$$

Où  $k_\sigma$  est la valeur de la constante  $K$  pour les sollicitations à contraintes imposées.

L'équation (III.30) permet aussi d'évaluer la réduction de la limite d'endurance après un nombre de cycles appliqués et un chargement cyclique donné.

### **a) Courbe de fatigue**

Le nombre de cycles à rupture  $Nr$ , obtenu en utilisant les équations (III.31) et (III.32) est donné par :

$$Nr = \frac{k_\sigma}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{\max}^b} \left[ \frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - \left( \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u} \right)^m} \right] \quad (\text{III.33})$$

Cette équation décrit la courbe S-N du matériau. La courbe de référence est celle obtenue pour  $R_\sigma = -1$ , c'est-à-dire dans les conditions de sollicitation purement alternée.

$$Nr = \frac{k_\sigma}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{\max}^{b^*}} \left[ \frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - \left( \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u} \right)^m} \right] \quad (\text{III.34})$$

$b^*$  est la valeur de  $b$  pour des sollicitations purement alternées. Une relation empirique a été déterminée entre  $b$  et  $b^*$  :

$$\frac{b}{b^*} = \frac{\gamma_u^* - 1}{\gamma_u - 1} \left[ \frac{\gamma_u}{\gamma_u^*} \right]^{1/2} \quad (\text{III.35})$$

$$\text{ou: } \gamma_u^* = \frac{Ru}{\sigma_{e0}^*}$$

### **b) Réduction de la limite d'endurance**

En divisant l'équation (III.32) par (III.33) et en posant  $\beta = n / Nr$ , on obtient :

$$\gamma_{D,n} = \gamma_{\max} - \frac{1}{\frac{1-\beta}{\gamma_{\max} - 1} + \frac{\beta}{\gamma_{\max} - \left( \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u} \right)^m}} \quad (\text{III.36})$$

Une valeur de  $m$  égale à 8 a été retenue comme adéquate par les auteurs à partir de leurs résultats expérimentaux, pour les aciers doux et les alliages d'aluminium.

### **c) Résistance résiduelle $\sigma_r$ en traction**

C'est la résistance en traction d'une éprouvette après interruption d'un essai de fatigue sur la dite éprouvette.  $\sigma_r$  est la valeur de  $\sigma_t$  (valeur instantanée de la résistance en traction monotone du matériau) à l'instant où l'essai est stoppé. En combinant les relations (III.27), (III.36) et en utilisant

$$\gamma_t = \frac{\sigma_r}{\sigma_{D0}} : \quad (\text{III.37})$$

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

la relation de la résistance résiduelle en fonction de la fraction de vie s'écrit :

$$\frac{\sigma_r}{Ru} = \left[ \gamma_{\max} - \frac{1}{\frac{1-\beta}{\gamma_{\max}-1} + \frac{\beta}{\gamma_{\max} - \left(\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u}\right)^m}} \right]^{1/m} \quad (\text{III.38})$$

### **d) Variable d'endommagement**

La variable d'endommagement proposée par les auteurs est donnée par :

$$D = \frac{1 - \gamma_{D,n}}{1 - \gamma_{Dc}} \quad (\text{III.39})$$

En introduisant (III.31) et (III.36) dans (III.39), on obtient :

$$D = \frac{\beta}{\beta + (1-\beta) \cdot \frac{\left[ \gamma_{\max} - \left(\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u}\right)^m \right]}{\gamma_{\max} - 1}} \quad (\text{III.40})$$

D est une fonction de la fraction de vie  $\beta$  avec  $\gamma_{\max}$  comme paramètre.

### **III.8. La loi de Lemaitre et Chaboche**

J.L. Chaboche et J. Lemaitre proposent en 1974 une loi différentielle, dans le but de permettre la prévision des effets de cumul non linéaire de l'endommagement et de manière assez simple pour être utilisable dans des cas complexes. Cette loi présentée en 1974 [70], 1978 [71], 1986 [72] et 1988 [73] est désignée sous le nom de loi de Lemaitre et Chaboche. Le paramètre d'endommagement est introduit par référence à un essai de fatigue en traction-compression et son évolution est mesurée expérimentalement. Nous présentons ci-dessous sa formulation uniaxiale, basée sur la présentation originale.

#### **a) Mesure de l'endommagement**

Pour des essais de fatigue à amplitude constante et dans le domaine des faibles nombres de cycle à rupture (inférieurs  $10^4$  cycles), les auteurs supposent :

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

- L'existence d'une loi cyclique reliant les paramètres mécaniques aux cycles stabilisés. On a en particulier :

$$\Delta \varepsilon_p = f(\sigma_a) \quad (\text{III.41})$$

où  $\Delta \varepsilon_p$  est l'amplitude de déformation plastique au cycle stabilisé et  $\sigma_a$  est l'amplitude des contraintes,

- La relation (III.41) reste valable au cours de l'essai de fatigue tout entier, à condition de remplacer l'amplitude des contraintes nominales  $\sigma_a$  par une amplitude effective  $\sigma_{\text{aeff}}$ .

Dans la pratique, la loi cyclique est modélisée par une fonction puissance telle que :

$$\Delta \varepsilon_p = \left[ \frac{\sigma_a}{k_c (1-D)^{m_c}} \right] \quad (\text{III.42})$$

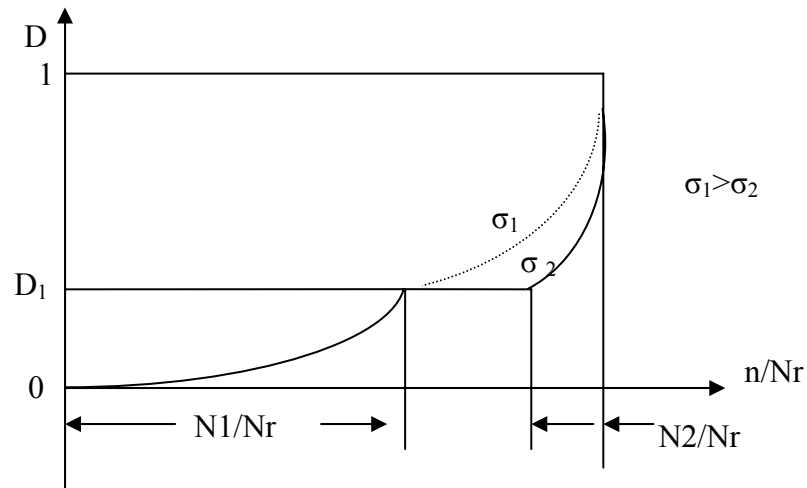
où  $m_c$  et  $k_c$  sont des coefficients qui dépendent du matériau.

Les résultats d'essais expérimentaux montrent que :

- L'évolution du dommage en fonction du nombre de cycles est fortement non linéaire,
- La courbe de dommage dépend de l'amplitude de la sollicitation. Un endommagement important est décelable plus tôt en terme de fraction de durée de vie dans les essais à haut niveau de contrainte que dans les essais à faible niveau. La courbe d'endommagement n'étant pas unique, le cumul de l'endommagement ne peut être linéaire comme l'illustre la figure III.4. En appliquant les hypothèses précédentes, lorsque le dommage  $D$  est non-nul, une expression permet de le calculer en fonction du nombre de cycles appliqués, à partir de la mesure de  $\Delta \varepsilon_p$  :

$$D = 1 - \left( \frac{\Delta \varepsilon_p^*}{\Delta \varepsilon_p} \right)^{\frac{1}{m_c}} \quad (\text{III.43})$$

où  $\Delta \varepsilon_p^*$  est l'amplitude de déformation plastique au cycle stabilisé pour lequel on suppose  $D = 0$ .

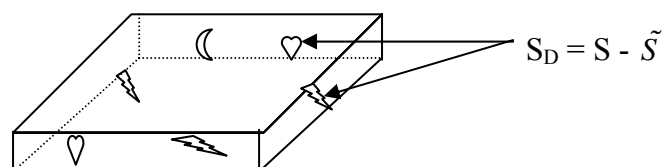


**Figure III.4 :** Cumul de dommage pour des essais à deux niveaux de contrainte.

La déformation totale et la déformation plastique sont difficiles à mesurer en fatigue à grand nombre de cycles. Chaboche choisit alors la contrainte  $\sigma$  comme variable d'état. Elle est considérée comme étant la cause de l'endommagement.

### **b) Notion de surface et de contrainte effectives**

On isole un élément de volume fini de taille relativement grande par rapport aux hétérogénéités du milieu (figure III.5).



**Figure III.5 :** Élément de volume fini isolé.

Notations :

$S$  : aire d'une section de l'élément de volume.

$\tilde{S}$  : aire résistante effective.

$S_D$  : aire totale de l'ensemble des traces laissées par le dommage (microfissures et cavités), corrigée des effets de concentration de contraintes et d'interactions :

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D) \quad (\text{III.44})$$

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

La variable d'endommagement d'un élément de volume rompu en deux parties selon un plan normal à  $\vec{n}$  est :  $D_n = S_D / S$  d'où  $0 < D_n < 1$ . On a  $D_n = D$  quel que soit  $\vec{n}$  pour un endommagement isotrope.

On considère que seule la surface effective  $\tilde{S}$  (d'aire inférieure à celle de  $S$ ) est résistante. La contrainte effective s'écrit alors, dans le cas d'un endommagement isotrope :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (\text{III.45})$$

### **c) Modèle de Chaboche**

Une loi d'endommagement est établie sous sa forme différentielle, qui permet de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes, en particulier des effets de cumul non linéaire du dommage:

$$\frac{dD}{dn} = f(\sigma_a, \sigma_m, h, F_r, T, D) \quad (\text{III.46})$$

Avec :  $\sigma_a$  : amplitude du cycle de contraintes,

$\sigma_m$  : contrainte moyenne du cycle,

$h$  : paramètre d'histoire qui peut rendre en compte des modifications des propriétés du matériau par une sollicitation mécanique préalable,

$F_r$  : fréquence de la sollicitation,

$T$  : température.

$h$ ,  $F_r$  et  $T$  sont supposés constants et connus. Ils définissent les conditions initiales et les conditions de l'essai de fatigue.

Les paramètres considérés du chargement sont la contrainte maximale et la contrainte moyenne de chaque cycle. La loi de dommage s'exprime ainsi :

$$dD = f(\sigma_{\max}, \sigma_m, D) dn \quad (\text{III.47})$$

Cette fonction  $f$  a des variables inséparables  $\sigma_{\max}$  et  $D$  dans le but de décrire le cumul de dommage non linéaire.

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

L'analyse des résultats expérimentaux menée par les auteurs [70] suggère qu'une loi de dommage telle que la vitesse d'endommagement soit nulle à l'origine, infinie à la rupture et serait proche de la réalité.

Les remarques précédentes est le souci de simplification des intégrations élémentaires conduisent au choix du modèle comme suit :

$$\frac{dD}{dn} = \left[ 1 - (1-D)^{\alpha(\sigma_a)} \right] \left[ \frac{\sigma_a}{M(1-D)} \right]^\beta \quad (\text{III.48})$$

où :  $\beta$  est un exposant positif,

$\alpha(\sigma_a)$  est une fonction de l'amplitude de la contrainte nominale, à valeurs comprises entre 0 et 1,

M est une constante qui dépend de la contrainte moyenne selon :

$$M = M_0 (1 - b \sigma_m) \quad (\text{III.49})$$

b est un coefficient dépendant du matériau ; il est lié à la pente du diagramme de Haigh en traction, modélisé linéairement par la relation suivante [74] :

$$\sigma_a = \sigma_{-1} (1 - b \sigma_m) \quad (\text{III.50})$$

La forme spécifique choisie pour la relation (III.47) est :

$$dD^* = D^{\alpha(\sigma_{\max} - \sigma_m)} \left( \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_m)}{M} \right)^\beta dn \quad (\text{III.51})$$

Le coefficient  $\alpha$  est défini comme suit :

$$\alpha = 1 - a \left( \frac{\sigma_{\max} - \sigma_1}{Ru - \sigma_{\max}} \right) \quad (\text{III.52})$$

### 11.9. La loi d'Ellyin

Ellyin et al. ont développé une loi ayant pour objectif de relier l'endommagement à l'énergie de déformation plastique durant le chargement cyclique, de considérer le cas où l'amplitude de déformation à une composante plastique tendant vers zéro afin de cerner les cycles de bas niveaux, de pouvoir distinguer également la phase d'amorçage de celle de propagation de fissure. Cette loi dénommée "loi de Ellyin" est en fait le résultat des travaux publiés par Kujawaki et Ellyin en 1984 [75], par Golos et Ellyin en 1987 [76] et en 1988 [36].

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

### a) Hypothèses

- Pour le stade d'amorçage de fissure, la limite de fatigue du matériau est définie par l'énergie de déformation plastique  $\Delta W_D$  ou par  $\Delta \varepsilon_D (p) \cdot \Delta \sigma_D$  et une durée de vie  $N_D$ .
- Pour le stade de propagation, le matériau a une limite de fatigue apparente définie par  $\Delta W_D^*$  ou par  $\Delta \varepsilon_D^* (p) \cdot \Delta \sigma_D^*$  et une durée de vie  $N_D^*$ .  $\Delta W_D^*$  et  $N_D^*$  sont obtenues à partir de l'extrapolation de la courbe originale  $(\Delta W, N) \cdot \Delta \sigma_D^*$ ,  $N_D^*$  étendue de variation de limite de fatigue apparente, est donnée par l'équation :

$$\Delta \sigma_D^* = \frac{\Delta k_{Th}}{\sqrt{\pi \cdot l}} \quad (\text{III.53})$$

$\Delta k_{Th}$ , amplitude du facteur d'intensité de contrainte et  $l$ , longueur de fissure. La courbe de durée de vie (en fait courbe de Wöhler)  $\Delta W (t) = k \cdot N r^\alpha + C$  et les courbes d'isodommage sont des droites dans le repère  $(\log(\Delta W), \log(N_r))$  et elles convergent toutes vers la limite de fatigue de durée de vie  $N_D$  pour le stade d'amorçage et  $N_D^*$  pour le stade de propagation.

-L'endommagement résultant d'un chargement cyclique est une fonction de l'énergie mécanique totale transmise au matériau.

La densité volumique d'énergie mécanique totale de déformation (par cycle),  $\Delta W (t)$  est la somme de la densité volumique d'énergie de déformation plastique  $\Delta W (p)$  et de la densité volumique d'énergie de déformation élastique  $\Delta W (e)$ .

$$\Delta W (t) = \Delta W (p) + \Delta W (e) \quad (\text{III.54})$$

#### **1<sup>er</sup> cas : pour un matériau de type Masing**

- Le domaine d'élasticité est constant quand la déformation plastique augmente,
- La densité d'énergie de déformation plastique est donnée par :

$$\Delta W (p) = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon (p) \quad (\text{III.55})$$

où :  $\Delta \sigma$  est l'amplitude de variation de contrainte ( $\Delta \sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ) sur un cycle de sollicitation.



## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

$\Delta\varepsilon(p)$  est l'amplitude de déformation plastique sur un cycle de sollicitation,  
 $n'$  est un exposant constant caractérisant le durcissement cyclique du matériau.

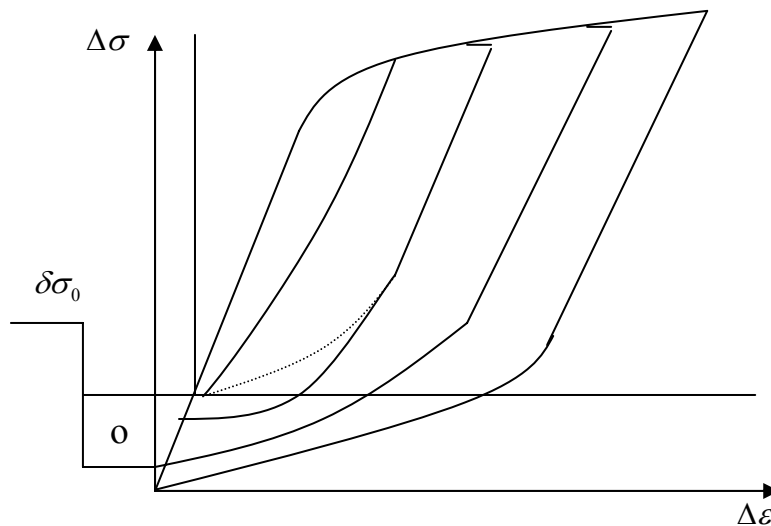
### 2<sup>ème</sup> cas : pour un matériau qui n'est pas du type Masing

- le domaine d'élasticité n'est pas constant quand la déformation plastique varie.
- la densité volumique d'énergie de déformation linéaire élastique est :

$$\Delta W(e) = \frac{1}{2E} \left( \frac{1}{2} \Delta\sigma + \sigma_m \right)^2 \quad (\text{III.56})$$

Où  $\sigma_m$  est la contrainte moyenne du cycle considéré.

- quant au calcul de l'énergie de déformation plastique, les auteurs passent par l'établissement d'une courbe "maîtresse". Elle s'obtient en joignant les sommets des boucles d'hystérésis, leur point le plus bas étant maintenu sur la partie linéaire de la toute première boucle (figure III.6).



**Figure III.6 :** Courbe maîtresse des boucles d'hystérésis d'un matériau de type non Masing

L'expression (III.57) donne l'équation de la dite courbe ayant pour origine 0, le point le plus bas des boucles proportionnelles.

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

$$\Delta \varepsilon^* = \frac{\Delta \sigma^*}{E} + 2 \left( \frac{\Delta \sigma^*}{2E_0^*} \right)^{1/n^*} \quad (\text{III.57})$$

Où  $n^*$  caractérise le durcissement du matériau dans l'équation de la courbe maîtresse,

$E_0^*$  est une constante homogène à un module d'élasticité.

$\Delta \sigma^*$  est l'amplitude de variation de contrainte sur un cycle de sollicitation avec origine en 0

$\Delta \varepsilon^*$  est l'amplitude de déformation sur un cycle de sollicitation

On obtient alors :

$$\Delta W(p) = \frac{1-n^*}{1+n^*} (\Delta \sigma - \delta \sigma_0) \cdot \Delta \varepsilon(p) + \delta \sigma_0 \Delta \varepsilon(p) \quad (\text{III.58})$$

$$\text{avec :} \quad \delta \sigma_0 = \Delta \sigma - \Delta \sigma^* = \Delta \sigma - 2E^* \cdot \left( \frac{\Delta \varepsilon(p)}{2} \right)^{n^*}$$

**Remarque [77]:** un matériau a un comportement de type Masing lorsque l'étendue de son domaine d'élasticité demeure constant quand l'étendue de déformation plastique imposée augmente. Sa réponse cyclique est alors décrite par :

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + 2 \left( \frac{\Delta \sigma}{2k'} \right)^{1/n'} \quad (\text{III.59})$$

Le comportement n'est pas de type Masing lorsque, à l'inverse, le domaine d'élasticité varie avec l'étendue de la déformation plastique.

### **b) Cumul de dommage**

#### **1<sup>er</sup> cas : chargement cyclique à deux niveaux**

Soit  $\Delta W_1(t)$  la densité d'énergie de déformation appliquée pendant  $n_i$  cycles.

L'équation de la courbe d'endommagement est :

$$\frac{\Delta W_1(t)}{\Delta W^*} = \left( \frac{n_i}{N^*} \right)^\xi \quad (\text{III.60})$$

Où  $\xi$  est un paramètre propre à chaque courbe d'endommagement :

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

$$\xi = \frac{\log(\Delta W_1(t) / \Delta W^*(t))}{\log(n_1 / N^*)} \quad (\text{III.61})$$

On applique ensuite une densité d'énergie de déformation  $\Delta W_2(t)$  jusqu'à rupture. Le nombre de cycles équivalents au second niveau de chargement, causant le même endommagement que les  $n_1$  cycles du premier niveau est donnée par:

$$n_{2eq} = N^* \left( \frac{n_1}{N^*} \right)^{\frac{\log(\Delta W_2(t) / \Delta W^*)}{\log(\Delta W_1(t) / \Delta W^*)}} \quad (\text{III.62})$$

On obtient la loi de cumul à deux niveaux de chargement ; le nombre de cycles restants (ou durée de vie résiduelle)  $n_2$  est tel que :  $n_2 = Nr_2 - n_{2eq}$  ; d'où :

$$\left( \frac{n_1}{N^*} \right)^{\frac{\log(\Delta W_2(t) / \Delta W^*)}{\log(\Delta W_1(t) / \Delta W^*)}} + \frac{n_2}{N_{r_2}} = 1 \quad (\text{III.63})$$

### 2<sup>ème</sup> cas : chargement comportant plusieurs niveaux successifs

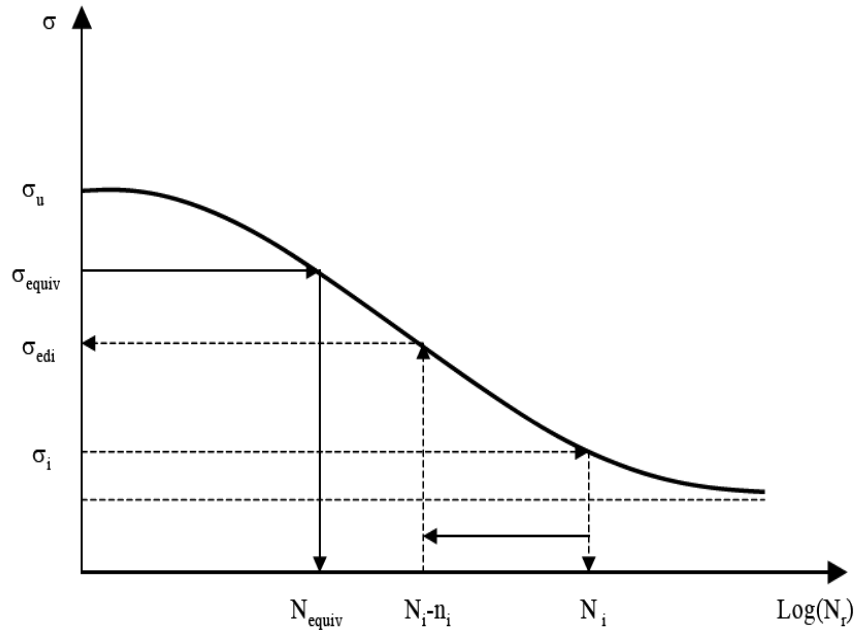
En général on procède pour un chargement à  $j$  niveaux successifs de façon similaire au cas de deux niveaux. Le résultat de la démarche est donnée par:

$$\left[ \left( \frac{n_1}{N^*} \right)^{\frac{\log(\Delta W_2(t) / \Delta W^*)}{\log(\Delta W_1(t) / \Delta W^*)}} + \frac{n_2}{N_{r_2}} \right]^{\frac{\log(N_{r_3} / N^*)}{\log(N_{r_2} / N^*)}} + \dots + \frac{n_{j-1}}{N_{r_{j-1}}} = 1 \quad (\text{III.64})$$

La rupture intervient au  $j^{\text{ème}}$  bloc si le membre de gauche est supérieur ou égal à 1.

### III.10. Loi de la contrainte endommagée (Modèle DSM) [78-80]

Cette loi de cumul d'endommagement par fatigue est basée sur la courbe de Wöhler expérimentale, elle lie l'endommagement à une nouvelle grandeur dite contrainte endommagée. Pour une succession de cycles de chargements ( $n_i$  cycles) d'amplitude  $\sigma_i$ , la contrainte endommagée  $\sigma_{edi}$  est la contrainte qui correspondant à la durée de vie ( $N_i - n_i$ ) sur la courbe de Wöhler (Figure III.7)



**Figure III.7 :** Définition des paramètres utilisés dans la loi de la contrainte endommagée

L'endommagement est calculé à partir de la variable  $D$  donné par l'expression :

$$D = \frac{\sigma_{edi} - \sigma_i}{\sigma_u - \sigma_i} \quad (\text{III.65})$$

Avec :  $\sigma_{edi}$  : contrainte endommagée

$\sigma_i$  : contrainte appliquée

$\sigma_u$  : contrainte ultime du matériau

Au premier cycle ( $D_i = 0$ ), la contrainte endommagée est bien égale à la contrainte appliquée et au dernier cycle ( $D_i = 1$ ) la contrainte endommagée est égale à la contrainte ultime  $\sigma_u$ .

Dans le cas d'un chargement composé de plusieurs blocs d'amplitude de contrainte ou dans le cas aléatoire, le dommage se transpose de niveau  $i$  au niveau  $i + 1$  par la relation :

$$D_i = \frac{\sigma_{edi} - \sigma_i}{\sigma_u - \sigma_i} = \frac{\sigma_{equiv} - \sigma_{i+1}}{\sigma_u - \sigma_{i+1}} \quad (\text{III.66})$$

Avec :  $\sigma_{equiv}$  contrainte endommagée équivalente

Cette loi à été étudiée pour le chargement multiaxial par Aid [81].

### III.11. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié quelque lois de cumul d'endommagement, ces lois nécessitent la connaissance de certaines caractéristiques des matériaux (chaque loi a ces

## Chapitre III: Les lois de cumul d'endommagement

---

propres paramètres de matériau à identifier). L'application de ces lois dépend de la nature des chargements imposés qu'ils soient simples ou combinées de plusieurs sollicitations.

A nos jours, il n'existe pas une loi d'endommagement satisfaisante qui permet de prévoir exactement la durée de vie d'une structure, quel que soit le matériau utilisé, et quel que soit le type de sollicitation, c'est-à-dire une loi universelle pour l'endommagement par fatigue proche des durées de vie expérimentales sous chargement réel.

# Chapitre IV

## Modélisation et validation

## Chapitre IV : Modélisation et validation

---

### IV.1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif principal, la proposition et la validation d'un modèle d'endommagement applicable pour différents domaines de fatigue (polycyclique et oligocyclique) ainsi pour différents types de chargement (chargements par blocs, chargements uniaxial d'amplitudes variables, chargement multiaxial), et pour différents types de matériaux. La validation est basée sur la confrontation des prédictions du modèle à des résultats expérimentaux récoltés de la bibliographie.

Nous avons tracé un deuxième objectif, il s'agit de la simulation numérique de l'essai de fatigue et le processus de l'expansion à froid en utilisant la série de logiciels de la famille MSC Software. Les résultats tirés par la simulation sont à leur tour confrontés à l'expérience et comparés à la loi de Miner, modèle DSM [78-80], et notre modèle proposé.

### IV.1. Modèle proposé

La variation de l'énergie de déformation est largement répandue dans la théorie de plasticité, elle est également proposée comme modèle d'analyse uniaxial de fatigue. La convenance de ce modèle pour la description des processus de fatigue semble être prometteuse, particulièrement dans les matériaux soumis au chargement thermomécanique aléatoire. Le modèle n'inclut pas une division de densité d'énergie de déformation dans les parties élastiques et plastique, comme en cas des paramètres proposés par Smith-Watson-Topper (SWT) [82], Hoffman et Seeger [83], Bergman et Seeger [84].

L'énergie de déformation peut être calculée à partir :

$$w = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (\text{IV.01})$$

En fonction de temps, l'énergie de déformation est exprimée par :

$$w(t) = \frac{1}{2} \sigma(t) \varepsilon(t) \quad (\text{IV.02})$$

Si les contraintes et les déformations atteignent leur valeur maximum,  $\sigma_a$  et  $\varepsilon_a$  respectivement, l'énergie de déformation s'écrit par :

$$w_a = \frac{1}{2} \sigma_a \varepsilon_a \quad (\text{IV.03})$$

## Chapitre IV : Modélisation et validation

L'utilisation de l'équation de Manson-Coffin-Basquin

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^e + \varepsilon_a^p = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c \quad (\text{IV.04})$$

Substituant (IV.04) dans (IV.03) on obtiens :

$$w_a = \frac{1}{2} \sigma_a \left[ \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c \right] \quad (\text{IV.05})$$

La loi de Basquin est donné par :

$$\sigma_a = \sigma_f^e (2N_f)^b \quad (\text{IV.06})$$

Substituant (IV.06) dans (IV.05) on obtient :

$$w_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \varepsilon_f^e (2N_f)^{b+c} \right] \quad (\text{IV.07})$$

### IV.1.1 Cas de la fatigue oligocyclique

Le domaine de fatigue oligocyclique correspond aux contraintes les plus grandes, supérieures à la limite élastique. La rupture est généralement précédée d'une déformation plastique notable. Le comportement non-linéaire des matériaux sous chargement uniaxial cyclique (boucle d'hystérésis) peut être représenté par l'équation de Ramberg-Osgood [85].

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (\text{IV.08})$$

Ou  $n'$  et  $K$  sont les constantes du matériau de la courbe de consolidation cyclique. Si on considère l'équation IV.08, ces constantes peuvent être calculées par les équations [86-87] :

$$\begin{aligned} n' &= \frac{b}{c} \\ K &= \frac{\sigma_f'}{(\varepsilon_f')^{\frac{1}{n'}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.09})$$

Plusieurs méthodes sont présentées dans la littérature pour calculer l'énergie de déformation due à une contrainte supérieure à la limite élastique. On peut citer le critère proposé par Molski et Glinka [88-90].



$$W_t = W_e + W_p = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{2\sigma}{n'+1} \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (\text{IV.10})$$

### IV.1.2 Cas de la fatigue polycyclique

Si nous avons des chargements à grands nombre et si on néglige les déformations plastique cycles l'équation (IV.07) devient :

$$w_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} \right] \quad (\text{IV.11})$$

en posant :  $k = \frac{\sigma'_f{}^2}{2E}$  et  $c' = 2b$  .

L'équation (IV.11) devient :

$$w_a = k (2N_f)^{c'} \quad (\text{IV.12})$$

### IV.1.3 Cas de la fatigue multiaxiale

L'analyse dans le cas multiaxiale est basé sur l'analyse des contraintes et les déformations correspondantes dans un plan critique, prenant en compte leurs signes. L'adaptation de notre modèle au cas multiaxiale est formulée sur la base des considérations des auteurs [91-93].

La fissuration par fatigue est causée par la partie de densité d'énergie de déformation correspondant à la contrainte de travail normale  $\sigma_n(t)$  sur la déformation normale  $\varepsilon_n(t)$  ( $W_n(t)$ ) et le travail de la contrainte de cisaillement  $\tau_n(t)$  sur la déformation de cisaillement  $\varepsilon_{ns}(t) = \frac{1}{2} \gamma_{ns}$  dans la direction  $\bar{s}$  sur le plan avec la normale  $\bar{n}$ , ( $W_{ns}(t)$ ) [94], le modèle dans le cas multiaxial est formulée sur les hypothèses suivantes :

- La direction  $\bar{s}$  sur le plan critique coïncide avec la direction moyenne de cisaillement maximum de densité d'énergie de déformation  $W_{ns,\max}(t)$  .
- À l'état limite, l'effort dans le matériau est défini par la valeur maximale de combinaison linéaire des paramètres d'énergie  $W_n(t)$  et  $W_{ns}(t)$ , où l'énergie de déformation satisfait l'équation suivante sous un chargement multiaxial :

$$\frac{\max_t [\alpha W_{ns}(t) + \beta W_n(t)]}{\gamma} = 1 \quad (\text{IV.13})$$

Avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des constantes de matériau déterminées à partir des essais de fatigue uniaxiale. A partir de l'équation (IV.13) la densité d'énergie de déformation équivalente  $W_{eq}(t)$  peut être dérivée :

$$W_{eq}(t) = \alpha W_{ns}(t) + \beta W_n(t) \quad (\text{IV.14})$$

Où :

$$\begin{aligned} W_{ns}(t) &= \frac{1}{2} \tau_{ns}(t) \varepsilon_{ns}(t) \operatorname{sgn}[\tau_{ns}(t), \varepsilon_{ns}(t)] \\ W_n(t) &= \frac{1}{2} \sigma_n(t) \varepsilon_n(t) \operatorname{sgn}[\sigma_n(t), \varepsilon_n(t)] \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Avec  $\operatorname{sgn}[X, Y]$  est donné par :

$$\operatorname{sgn}[X, Y] = \frac{\operatorname{sgn}(X) + \operatorname{sgn}(Y)}{2} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \operatorname{sgn}(X) = \operatorname{sgn}(Y) = 1 \\ 0 & \text{pour } \operatorname{sgn}(X) = -\operatorname{sgn}(Y) \\ -1 & \text{pour } \operatorname{sgn}(X) = \operatorname{sgn}(Y) = -1 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

### IV.1.4 Variable d'endommagement

Si on note, l'endommagement par la variable  $D$ , on peut définir un état vierge du matériau (la pièce est dépourvu de fissures, c'est-à-dire  $D = 0$ ) et un état rompu lorsque  $D = 1$ . Après  $n_i$  cycles de chargement, la variable  $D$  est donnée par l'expression :

$$D_i = \frac{W_{edi} - W_i}{W_u - W_i} \quad (\text{IV.17})$$

avec  $W_{edi}$  : l'énergie de déformation due à la contrainte endommagée.

$W_i$  : L'énergie de déformation due à la contrainte appliquée.

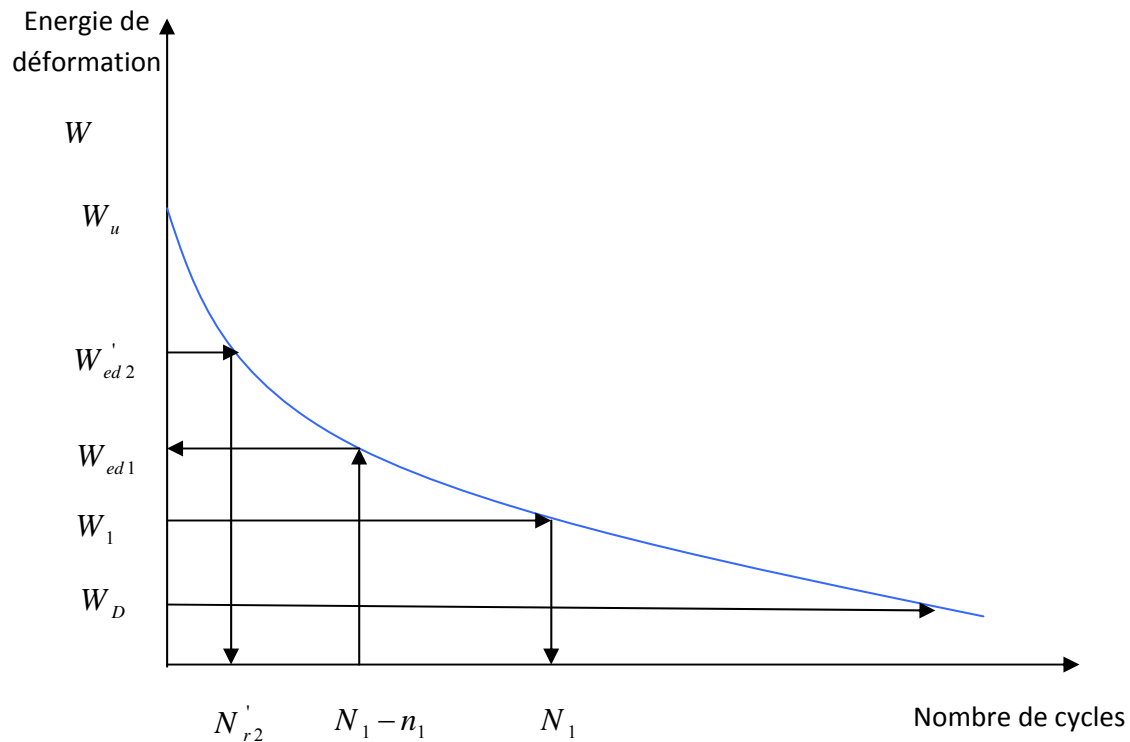
$W_u$  : L'énergie de déformation due à la contrainte ultime de matériau.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

### IV1.5. Exemple d'un chargement à deux blocs

Après le premier bloc de niveau  $W_1$  appliqué pendant  $n_1$  cycles le dommage est transposé au niveau  $W_2$  comme suit :

- On détermine le nombre résiduel de cycles  $Nr$  :  $Nr_1 = N_1 - n_1$
- Sur la courbe  $W - N$  (figure IV.01), on cherche l'énergie de déformation correspondant à  $Nr$ , c'est l'énergie  $W_{ed1}$ .



**Figure IV.01 :** Représentation de la courbe  $W - N$  et la loi d'énergie.

- Le dommage  $D_1$  créé par  $W_1$  avec  $n_1$  cycles appliqués est calculé par:

$$D_1 = \frac{W_{ed1} - W_1}{W_u - W_1} \quad (\text{IV.18})$$

Au deuxième niveau, le dommage est transposée par :

$$D_1 = D'_2 = \frac{W'_{ed2} - W_2}{W_u - W_2} \Rightarrow W'_{ed2} = (D'_2)(W_u - W_2) + W_2 \quad (\text{IV.19})$$

## Chapitre IV : Modélisation et validation

- sur la courbe  $W - N$ , la valeur de  $W'_{eq2}$  nous permet de déterminer le nombre de cycles  $N'_{r2}$ .
- Le nombre de cycles à ce niveau est :  $Nr_2 = N'_{r2} - n_2$
- Pour que  $D_2$  soit égal à l'unité, il faut que :  $N'_{r2} - n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = N'_{r2}$

Dans le cas d'un chargement composé de plusieurs blocs ou dans le cas de chargement aléatoire, on continue la transposition de l'endommagement d'un cycle à un autre, et la rupture aura lieu quand  $D = 1$ . La figure IV.02 représente l'algorithme pour estimer la durée de vie en utilisant le modèle proposé.

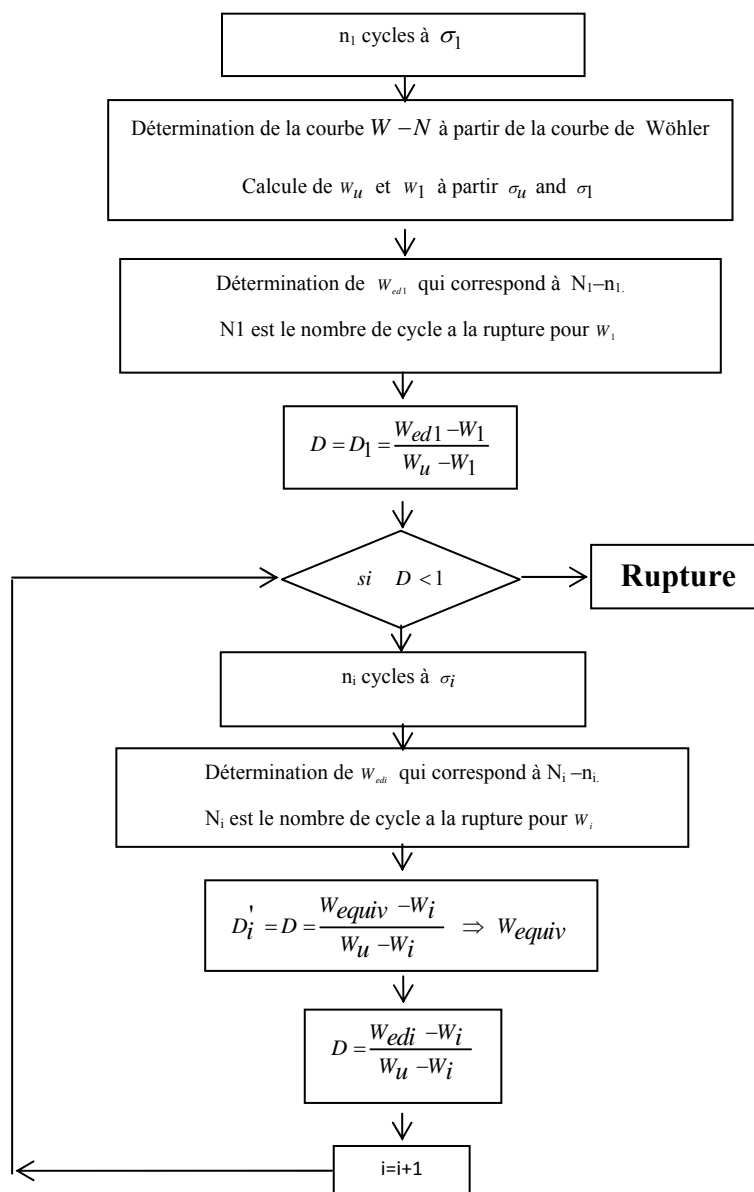


Figure IV.02 : Algorithme de cumul de dommage et estimation de la durée de vie.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

---

L'utilisation de cette loi de cumul d'endommagement est simple, elle n'a aucun paramètre à déterminer, elle nécessite, tous simplement la connaissance de la courbe  $W - N$  qui est à son tour déduite à partir de la courbe expérimentale de Wöhler.

### IV.2. Critères d'évaluation des performances des lois

Nous utiliserons l'erreur relative de prévision (ERP) de la durée de vie totale par rapport aux résultats expérimentaux pour l'évaluation des performances des lois. On définit cette erreur par l'expression :

$$ERP (\%) = \frac{\text{Valeur Expérimentale} - \text{Valeur du Modèle}}{\text{Valeur Expérimentale}} \times 100 \quad (\text{IV.20})$$

Une loi d'endommagement pourrait être considérée comme une bonne précision si l'erreur relative ERP de sa prévision reste inférieure à 20% en valeur absolue. Cette valeur de 20% tient compte des erreurs systématiques ou accidentelles pouvant provenir des mesures de certains paramètres à partir des courbes.

Une loi est dite :

1 : Conservatif si  $(ERP \%) > 0$  : les valeurs de ses prévisions sont inférieures aux valeurs expérimentales. La loi assure une certaine sécurité

2 : Non conservatif si  $(ERP \%) < 0$  : les valeurs des prévisions sont supérieures aux valeurs expérimentales. Dans ce cas, la loi ne garantit pas la sécurité.

### IV.3. Application et validation de modèle proposé

#### IV.3.1 Validation pour le domaine de la fatigue oligocyclique

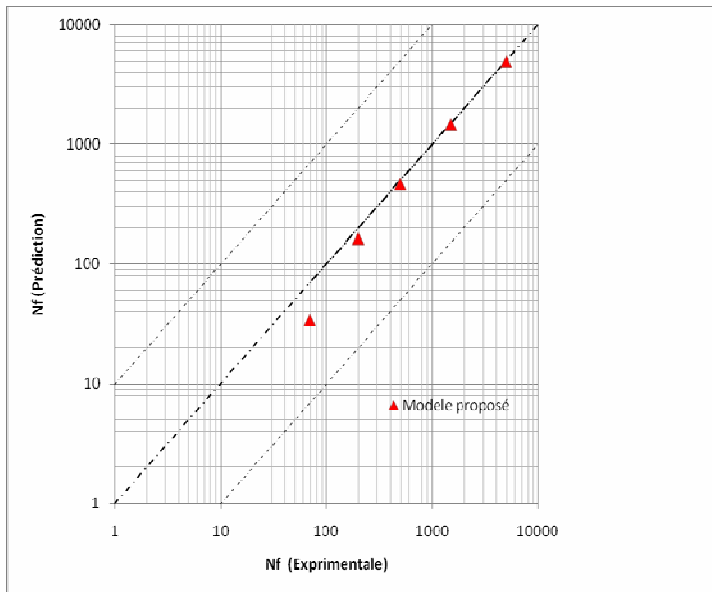
Le modèle proposé est vérifiée dans la fatigue oligocyclique en utilisant les résultats expérimentaux de la bibliographie. Leese et al [95] ont effectués des essais de fatigue pour deux types de sollicitation, il s'agit d'un essai de fatigue de traction-compression et un essai de fatigue de torsion sur des éprouvettes fabriqués à partir d'un acier SAE 1045.

Le tableau IV.1 représente les résultats expérimentaux de la durée de vie et ceux estimés par notre proposition ainsi l'erreur relative de prévision. A partir de ce tableau ont peu constaté que 60% des résultats sont inférieurs à 20%, ces premières constatations nous permis de dire que notre proposition donne une bonne précision.

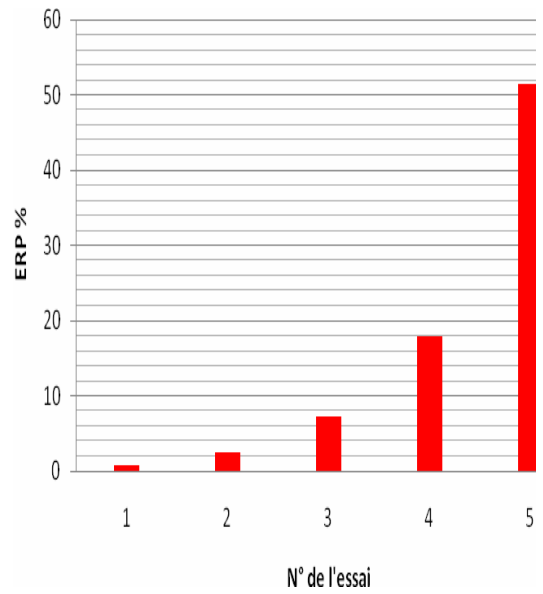
$\sigma_a$ MPa	Nf Expérimentale [93]	Nf Modèle proposé	ERP(%)
a)			
405	5000	4964	0.72
453	1500	1464	2.4
500	500	464	7.2
546	200	164	18
600	70	34	51.43
b)			
405	1400	1355	3.21
453	480	435	9.38
500	160	115	28.13
546	70	25	64.29
600	26	34	-30.77

**Tableau V.I.1** : Résultats des essais expérimentaux et prédiction pour l'acier SAE 1045 sous : a) chargement uniaxial de traction-compression ; b) Torsion.

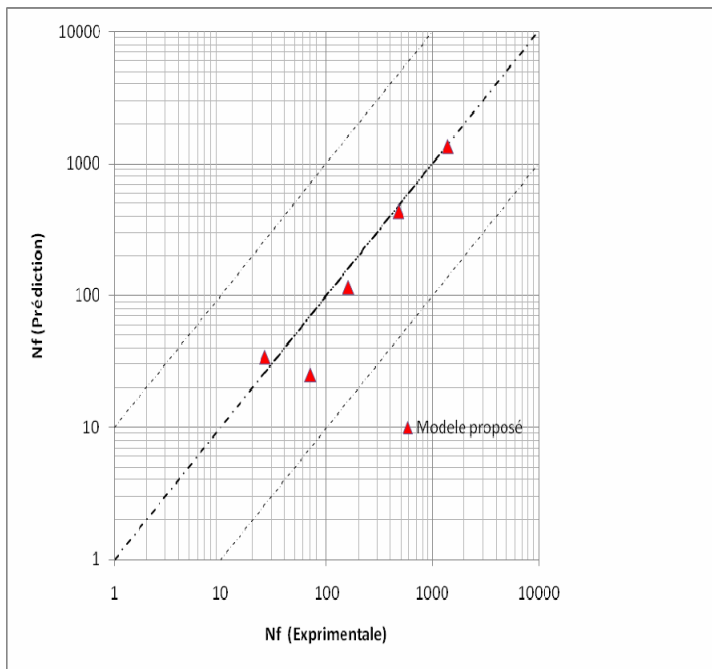
La figure VI.03, montre les résultats des essais de fatigue traction-compression (figure VI.03.a1) et torsion (figure VI.03.b1). La prévision de durée de durée de vie est donnée par le modèle proposé (modèle basé sur l'énergie de déformation plastique) par rapport aux résultats expérimentaux. Le modèle sous-estime la durée de vie résiduelle dans la majorité totale des résultats et présente un aspect conservatif comme le montre les figure VI. a2 et b2. Nous remarquons que les prévisions de modèle pour ces chargements sont en bonne accord avec les résultats expérimentaux.



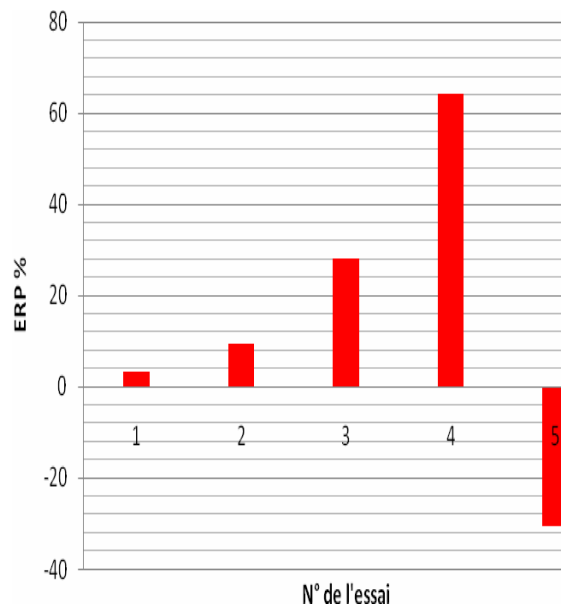
a1)



a2)



b1)



b2)

**Figure VI.03** : Comparaison entre la prévision théorique du modèle proposé et les résultats expérimentaux [95] : a) chargement uniaxial de traction-compression, b) Torsion est les erreurs relative de prévision (ERP %) correspondantes.

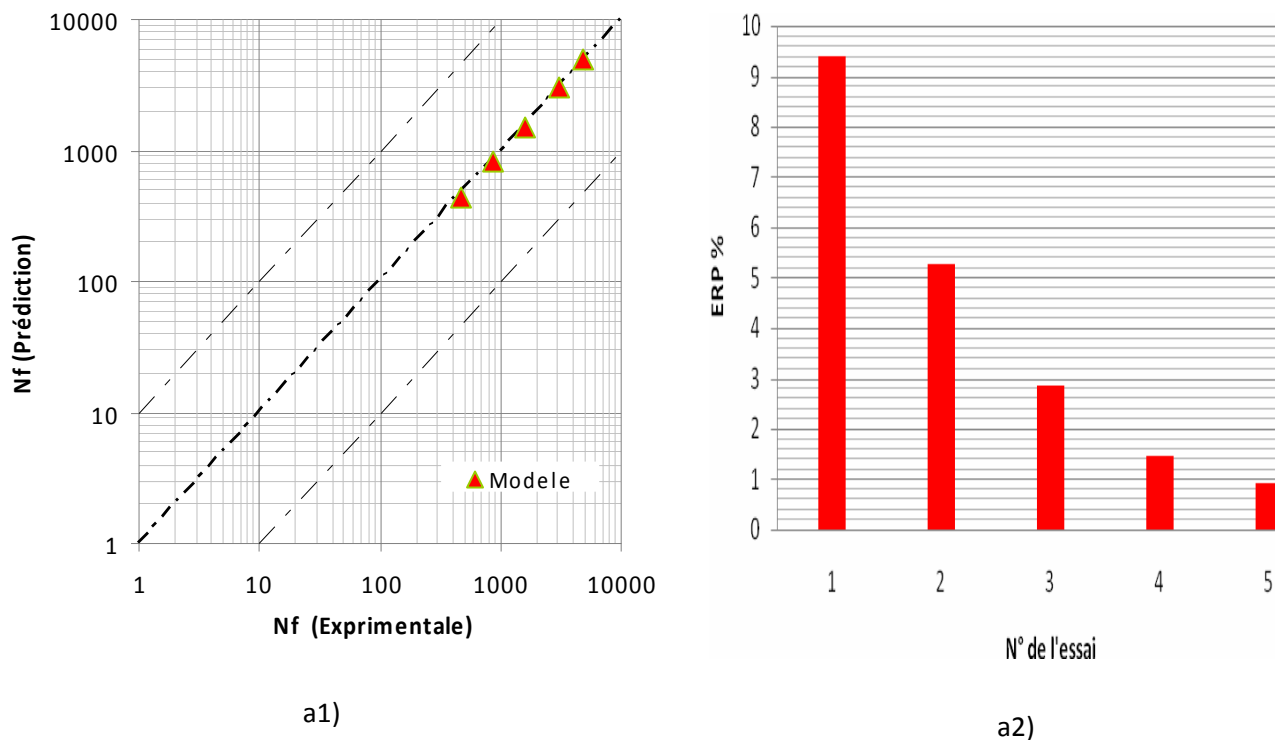
Le matériau étudié par Baum et al [96] est un acier L290GA utilisé dans la fabrication des pipelines, les auteurs ont réalisé des essais de fatigue pour un chargement de traction-compression, ses résultats obtenus sont regroupés dans le tableau VI.2. Les valeurs calculées

## Chapitre IV : Modélisation et validation

des ERPs et la figure VI.04 (a et b) montrent que le modèle présente un aspect conservatif, pour ce cas étudié les résultats obtenus sont très satisfaisantes.

$\sigma_a$ MPa	Nf Expérimentale [94]	Nf Modèle proposé	ERP(%)
546	478	433	9.41
490	855	810	5.26
450	1569	1524	2.87
420	3109	3064	1.45
406	4918	4873	0.92

**Tableau V.I.2 :** Résultats des essais expérimentaux et prédiction pour l'acier L290GA.



**Figure VI.04 :** a) Comparaison entre la prévision théorique du modèle proposé et les résultats expérimentaux, b) les erreurs relative de prévision (ERP %) correspondantes.



## Chapitre IV : Modélisation et validation

J. Szusta et al [97] réalisent des essais de fatigue (traction-compressions et de torsion) sur un alliage d'aluminium EN AW-2007, qui est un matériau d'usinage pour machines automatiques et les pièces de tournage ainsi dans le domaine optique, les propriétés mécaniques de ce matériau et ces paramètres de fatigue sont présentés dans le tableau VI.3.

$\sigma'_f$ : coefficient de résistance à la fatigue	271.10 MPa
$b$ : exposant de résistance à la fatigue	-0.0690
$\varepsilon'_f$ : coefficient de ductilité de fatigue	0.6447
$c$ : exposant de ductilité de fatigue	-0.7206
$\tau'_f$ : coefficient de résistance à la fatigue en torsion	158.23
$b_0$ : exposant de résistance à la fatigue en torsion	-0.0992
$\gamma'_f$ : Coefficient de ductilité en cisaillement cyclique	0.3779
$c_0$ : exposant de ductilité de fatigue en torsion	-0.5547
E : Module de Young	74.6 GPa
$\nu$ : coefficient de Poisson	0.34
$R_{0.2}$ : Limite d'élasticité à 0.2 %	120 MPa
$R_m$ : Résistance à la traction	260 MPa
$R_u$ : résistance ultime	203 MPa

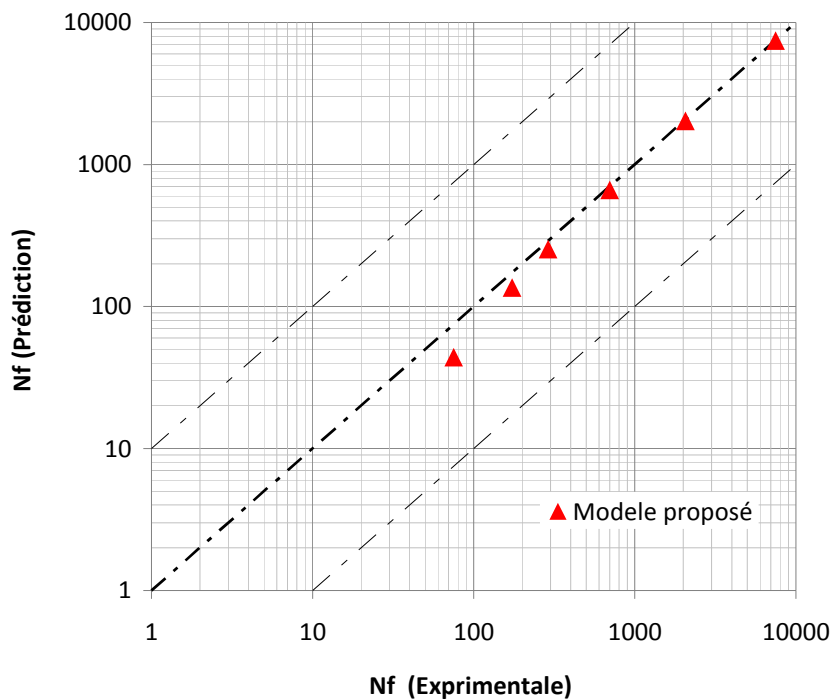
**Tableau V.I.3:** propriétés mécaniques et paramètres de fatigue de l'alliage d'aluminium EN AW-2007 [97]

Les données expérimentales [97] en traction-compression, relatives à l'alliage d'aluminium EN AW-2007 sont utilisées comme références pour la comparaison (tableau VI.04). Tous ces chargements sont purement alternés ( $R=-1$ ) avec une fréquence  $f = 0.2$  Hz. Dans le tableau VI.4 et VI.5, nous présentons une comparaison des résultats expérimentaux et les résultats estimés par le modèle proposé. Sur les figures VI.5 et VI.6 on remarque que tout les résultats pour les deux types de sollicitation sont conservatifs.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

N de spécimen	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_a^e$	$\varepsilon_a^p$	$\sigma_a$	$\sigma_a$ (moyenne)	Nf	NF (moyenne)	Modèle proposé
1	0.0025	0.001867	0.000632	140	139	7940	7487	7443
2				139		7100		
3				139		7420		
4	0.0035	0.002073	0.001427	153	155	1910	2066	2029
5				155		2050		
6				156		2237		
7	0.005	0.002171	0.002828	164	162	823	699	662
8				161		585		
9				161		688		
10	0.008	0.00235	0.00565	175	175	266	290	253
11				176		285		
12				175		318		
13	0.01	0.002395	0.007605	177	179	150	173	136
14				181		180		
15				178		190		
16	0.02	0.002569	0.017431	194	192	76	75	44
17				193		68		
18				188		81		

**Tableau VI.4 :** Résultats expérimentaux (essai de fatigue traction-compression) et théoriques obtenus avec le modèle proposé.

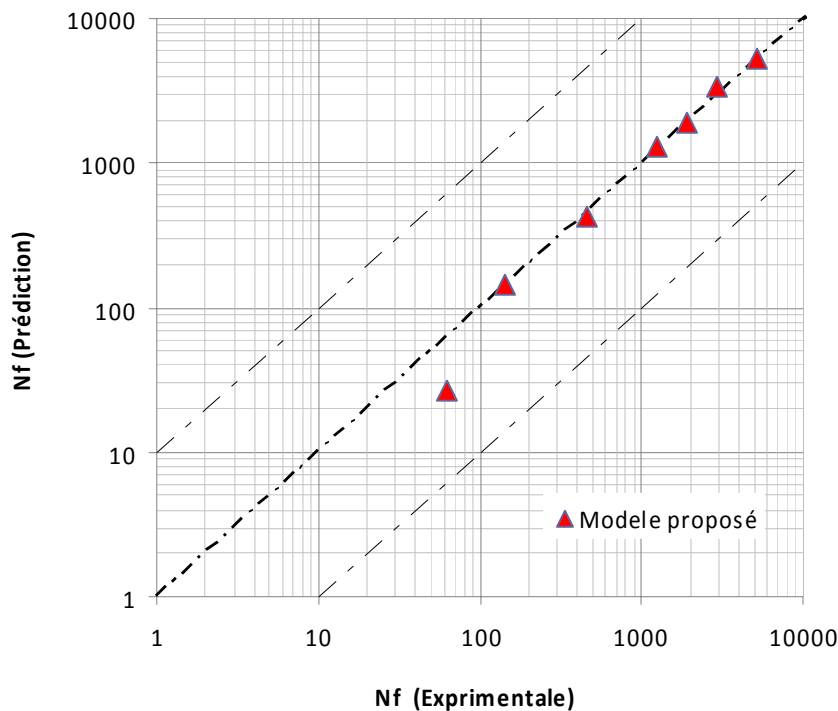


**Figure VI.5 :** Comparaison des durées de vie calculées (par la méthode classique) et de celles obtenues expérimentalement

## Chapitre IV : Modélisation et validation

N de spécimen	$\gamma_a$	$\gamma_a^e$	$\gamma_a^p$	$\tau_a$	$\tau_a$ (moyenne)	Nf	NF (moyenne)	Modèle proposé
1	0.029	0.0029	0.0261	93.96	97.93	67	63	37
2				99.24		64		
3				100.59		57		
4	0.02	0.0027	0.0173	99.78	91.2	180	168	142
5				92.07		153		
6				91.75		172		
7	0.0135	0.0025	0.011	80.34	84.37	463	455	429
8				85.15		454		
9				87.62		449		
10	0.009	0.0024	0.0066	79.85	81.36	1308	1253	1282
11				82.23		1206		
12				82		1244		
13	0.0075	0.0023	0.0052	78.77	78.12	1923	1905	1879
14				78.78		1850		
15				76.81		1942		
16	0.006	0.0021	0.0039	71.19	72.74	3373	2964	3347
17				74.26		2600		
18				72.77		2919		
19	0.0045	0.0019	0.0026	64.53	63.93	4745	5232	5206
20				63.57		5751		
21				63.69		5201		
22	0.0035	0.0017	0.0018	61.14	59.43	8843	9679	9653
23				58.76		9706		
24				58.39		10488		

**Tableau VI.5 :** Résultats expérimentaux (essai de fatigue torsion) et théoriques obtenus avec le modèle proposé.



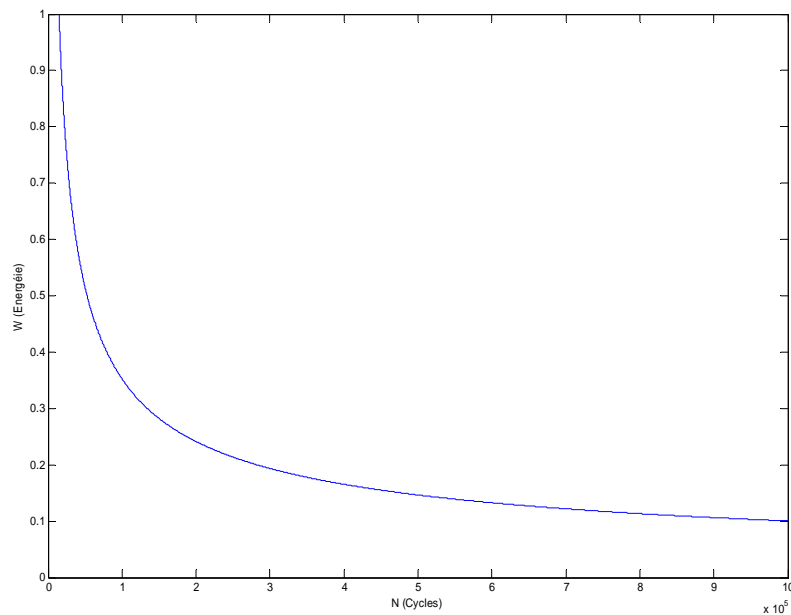
**Figure VI.6 :** Comparaison des durées de vie calculées et de celles obtenues expérimentalement

### VI.4. Validation pour le domaine de la fatigue polycyclique

#### IV.4.1 Résultats de Pavlou

Le matériau étudié par Pavlou [98] est un alliage d'aluminium Al-2024. La courbe de Wöhler est modélisée par l'équation de Basquin  $\sigma(N) = a N^b$ , avec  $b = -0,273$  et  $a = 5187,39$ . La contrainte ultime du matériau est  $\sigma_u = 470$  MPa. Les durées de vie correspondantes à des niveaux de contraintes de  $\sigma_1 = 150$  MPa et de  $\sigma_2 = 200$  MPa sont respectivement  $N_1 = 430000$  et  $N_2 = 150000$  cycles. La figure IV.7 montre la variation de l'énergie de déformation en fonction de nombre de cycles, cette courbe est modélisée par l'équation  $W = k \cdot N^c$ . Les coefficients  $k$  et  $c$  sont déterminés à partir des coefficients  $a$  et  $b$  de l'équation de Basquin.

## Chapitre IV : Modélisation et validation



**Figure IV.7** : Courbe  $W - N$  de l'alliage l'aluminium Al-2024.

Le tableau IV.5 récapitule les résultats expérimentaux de Pavlou ainsi que des prévisions de durée de vie des lois d'endommagement pour le chargement Haut- -Bas et Bas- Haut.

Blocs croissants					Blocs décroissants				
$\sigma_1 = 150 \text{ MPa}$	$\sigma_2 = 200 \text{ Mpa}$				$\sigma_1 = 200 \text{ MPa}$	$\sigma_1 = 150 \text{ MPa}$			
	$n_2$					$n_2$			
$n_1$	Résultats expérimentaux	Résultats Miner	Résultats Modèle DSM	Résultats Modèle Energétique	$n_1$	Résultats expérimentaux	Résultats Miner	Résultats Modèle DSM	Résultats Modèle Energétique
86000	138000	120000	123485	131019	30000	259100	344000	297557	210419
	147000					233400			
	148500					193500			
172000	138000	90000	101187	121206	60000	90300	258000	191065	84588
	139500					98250			
	123000					114600			
258000	89000	60000	75275	83265	90000	86000	172000	104020	54527
	81000					42300			
	75000					99800			

**Tableau IV.5** : Récapitulatif des résultats de Pavlou et les différents résultats obtenus par les lois d'endommagement.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

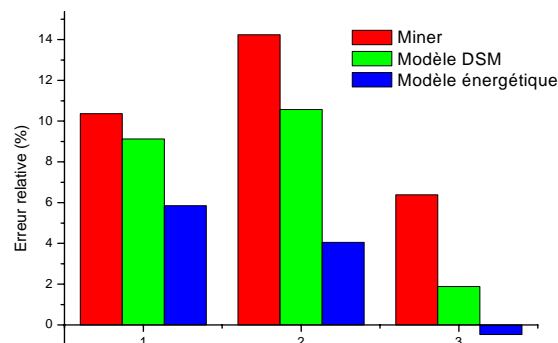
### IV.4.2.1. Chargement par Blocs croissants

Les différentes informations relatives aux prévisions de durée de vie totale des lois d'endommagement ainsi les résultats expérimentaux de Pavlou concernant le chargement par blocs croissants sont regroupés dans le tableau IV.6

Expérimentale		Miner		Modèle DSM		Modèle proposé	
		durée de vie	ERP(%)	Durée de vie	ERP(%)	durée de vie	ERP(%)
Chargement 01	230500	206000	10.36	209485	9.12	217019	5.85
Chargement 02	305500	262000	14.24	273187	10.57	293106	4.05
Chargement 03	339667	318000	6.38	333275	1.88	341265	-0.47

**Tableau IV.6** : Durée de vie des lois et erreurs relatives correspondantes.

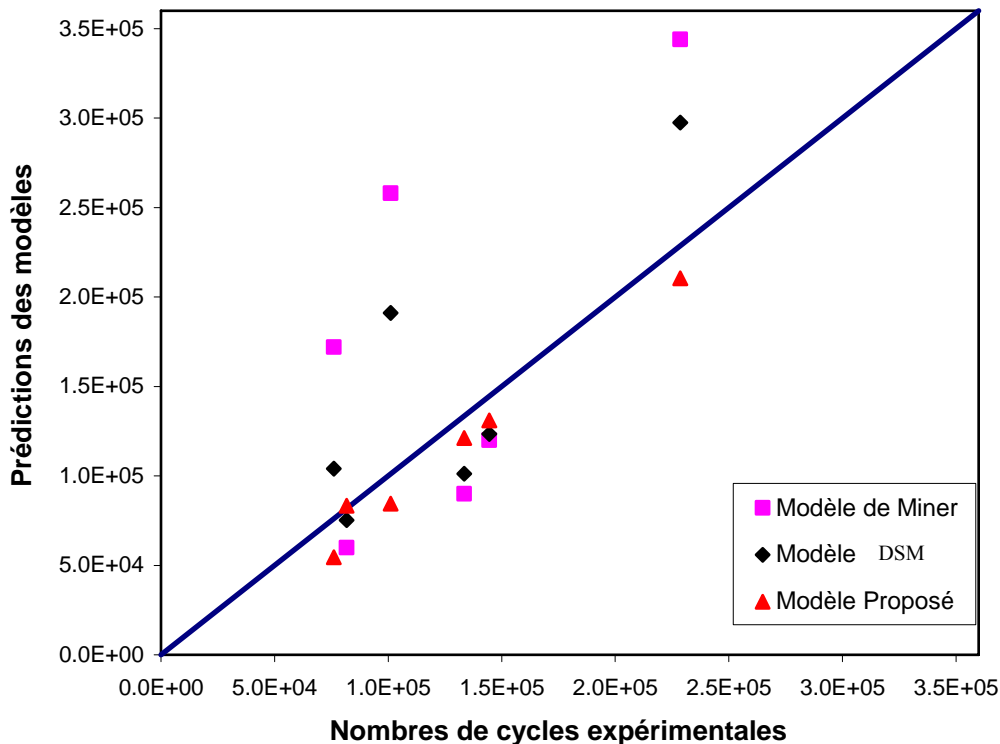
La confrontation des lois d'endommagement à l'expérience montre que le modèle proposé présente une amélioration des prévisions du modèle DSM (Modèle de la contrainte endommagé). on peut observer sur la figure IV.8 que les trois lois d'endommagements donnent des erreurs relatives en valeurs absolues inférieure à 20%, ce qui nous permet de dire qu'ils ont une bonne précision, la loi de Miner et le modèle DSM sont conservatifs, le modèle énergétique est aussi conservatif dans le premier et le deuxième chargement mais avec des erreurs relatives inférieures aux autres lois d'endommagements, dans le troisième chargement, le modèle énergétique est non conservatif.



**Figure IV.8** : Erreurs relatives de prévision de durée de vie totale pour les chargements Bas-Haut appliqués à l'alliage d'aluminium Al-2024.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

On peut constater sur la figure IV.9 que les prévisions de durée de vie obtenues par le modèle proposé sont proches des résultats expérimentaux.

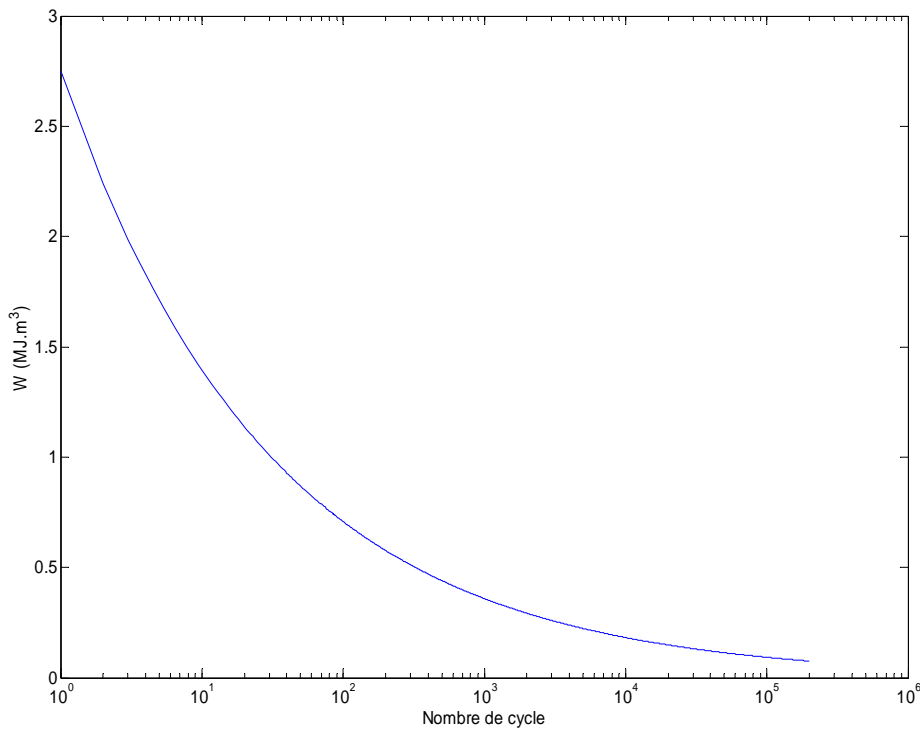


**Figure IV.9 :** Représentation des résultats expérimentaux de Pavlou de premier chargement bas-haut et comparaison avec les prédictions des modèles.

### IV.4.3. Chargement d'amplitude variable à trois blocs [99]

Les résultats expérimentaux sont obtenus à l'aide d'un programme à trois blocs. Les deux premiers ont leurs amplitudes de contraintes et leurs nombres de cycles connus. Dans le troisième bloc, la contrainte est appliquée jusqu'à rupture de l'éprouvette. Le matériau étudié est un alliage d'aluminium Al-5005. La courbe de Wöhler est modélisée par l'équation de Basquin  $\sigma(N) = a N^b$ , avec  $b=-0,1473$  et  $a= 621.0205$ .

La figure IV.10 représente la courbe W-N de l'alliage d'aluminium Al 5005. Cette courbe a été tracée d'après la courbe S-N de traction modélisée selon Basquin.



**Figure IV.10** : Courbe  $W - N$  de l'alliage d'aluminium Al 5005.

Les résultats expérimentaux, la loi de Miner et le modèle énergétique sont présentés dans le tableau IV.7

$\sigma_1$ MPa	$n_1$	$\sigma_2$ MPa	$n_2$	$\sigma_3$ MPa	$n_3$ expérimentale	Miner	Modèle Énergétique
67.5	10000	101.34	10000	157.74	9585	10450	8676

**Tableau IV.7** : Conditions de chargement et durée de vie expérimentale, et prévisions des modèles.

Sur la figure IV.11 l'évolution de l'endommagement en fonction de nombre de cycles pour les résultats expérimentaux, la loi de Miner et le modèle proposé est représentée. Le calcul du dommage expérimental est réalisé par la loi de Miner.

Cette figure montre que le cumul de dommage de la loi de Miner suit un cumul linéaire, cette linéarité ne tient compte, ni de l'histoire du chargement ni de l'interaction entre les différents chargements (l'ordre de bloc n'a aucun effet). Par contre le cumul de dommage



## Chapitre IV : Modélisation et validation

par le modèle proposé a une évolution non linéaire tout au long de la prévision de la durée du vie de matériau étudié. On peut observer aussi sur cette figure que l'endommagement devient important à la fin du deuxième bloc de chargement, ce que signifie que la charge appliquée est importante.

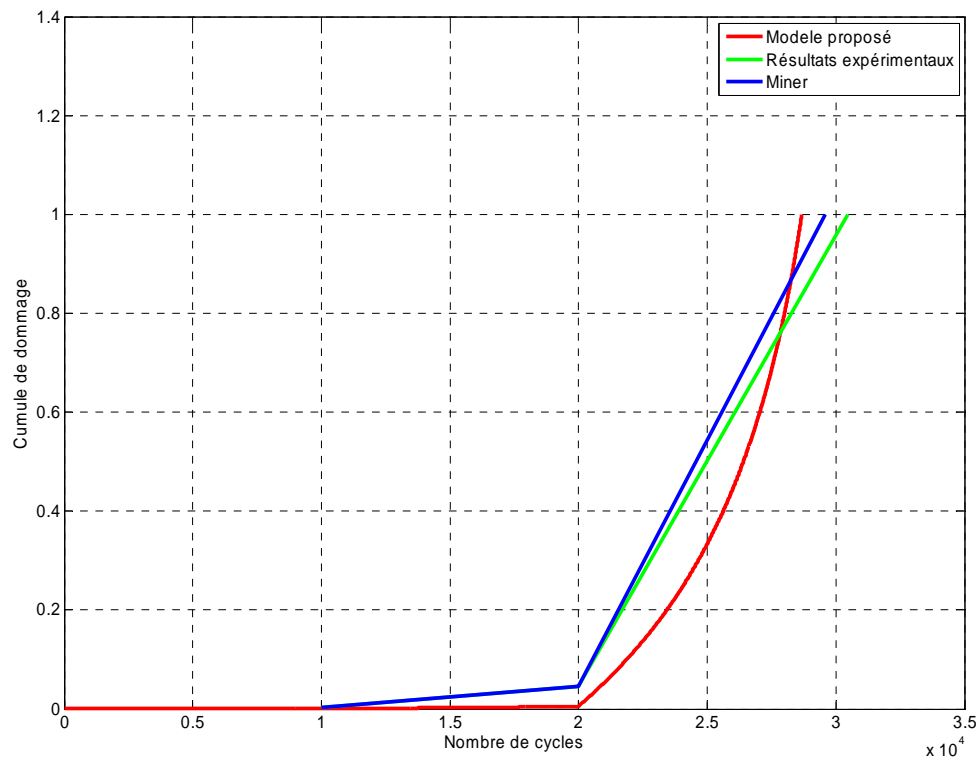


Figure IV.11 : Accumulation de l'endommagement en fonction de nombre de cycles.

### IV.4.4. Chargement d'amplitude variable à 80 blocs

#### IV.4.4.1. Présentation du matériau

Le matériau d'essais est une fonte à graphite sphéroïdal (GS) utilisée par RENAULT dans la fabrication des vilebrequins de certains moteurs à explosion. RENAULT lui attribue la désignation fonte GS61 [39],[79].

#### IV.4.4.2. Type de chargements

Le chargement est constitué de 80 blocs dans un ordre aléatoire, chaque bloc contient 5000 cycles, soit 400000 cycles par spectres, Un exemple est illustré dans la figure IV.12. Les éprouvettes sont sollicitées en flexion plane.



**Figure IV.12** : Exemple de conditions de chargement aléatoire par bloc.

### IV.4.4.3. Résultats et discussions

Le tableau IV.8 récapitule les résultats expérimentaux et de prédictions (Miner, modèle DSM et modèle proposé), et les erreurs relatives de prévisions.

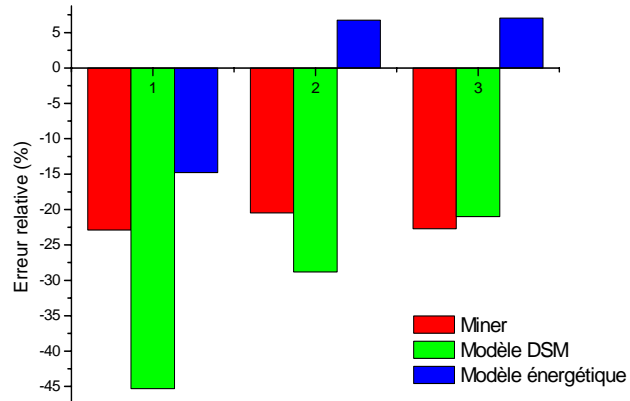
Flexion plane							
n° spectre	Expérimentale	Miner		Modèle DSM		Modèle proposé	
		Nombre De cycles	Erreur relative(%)	Nombre De cycles	Erreur relative(%)	Nombre De cycles	Erreur relative(%)
1	209841	257893	-22.89	304932	-45.31	240862	-14.78
2	218323	263051	-20.48	281211	-28.80	203522	6.77
3	231281	283792	-22.70	279888	-21.01	215021	7.03

**Tableau IV.8** : Conditions de chargement, résultats expérimentaux et les prédictions de durée de vie des lois d'endommagements.

Une analyse des résultats obtenus pour les trois spectres d'essais étudiés indique que les écarts enregistrés entre les prévisions des lois et la réalité expérimentale (erreur relative de prévision) présentés dans la figure IV.13 étaient beaucoup plus prononcés pour la loi de Miner et le modèle DSM, les erreurs relatives de ces lois sont supérieures à 20% en valeurs absolues. Les valeurs de prévisions de ces deux lois dans ce cas sont supérieures aux valeurs expérimentales (non conservatif).

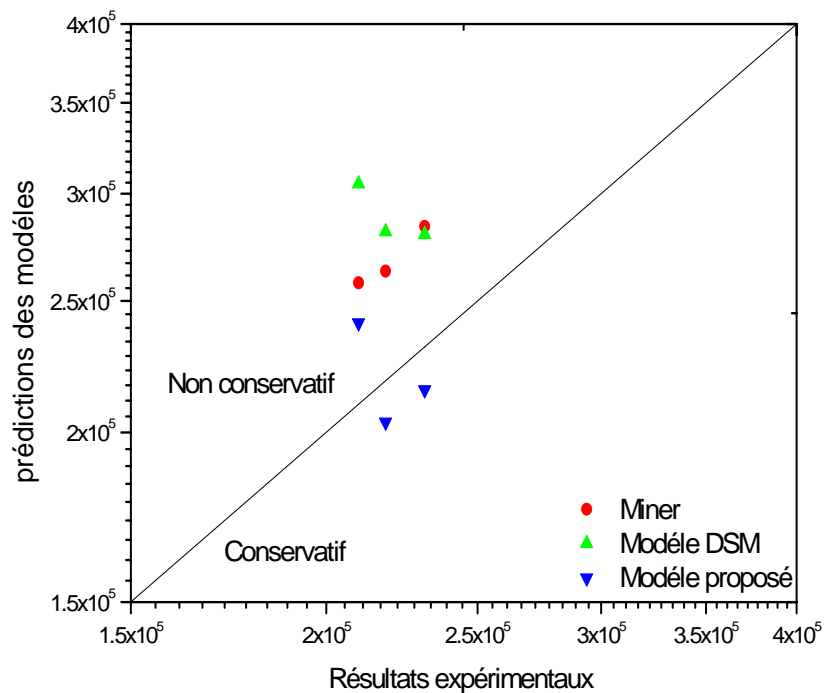
## Chapitre IV : Modélisation et validation

D'autre part, le modèle proposé présente une bonne prévision car les erreurs relatives en valeurs absolues sont inférieures à 20%.



**Figure IV.13** : Erreurs relatives de prévision de durée de vie totale pour les chargements appliqués à fonte GS61.

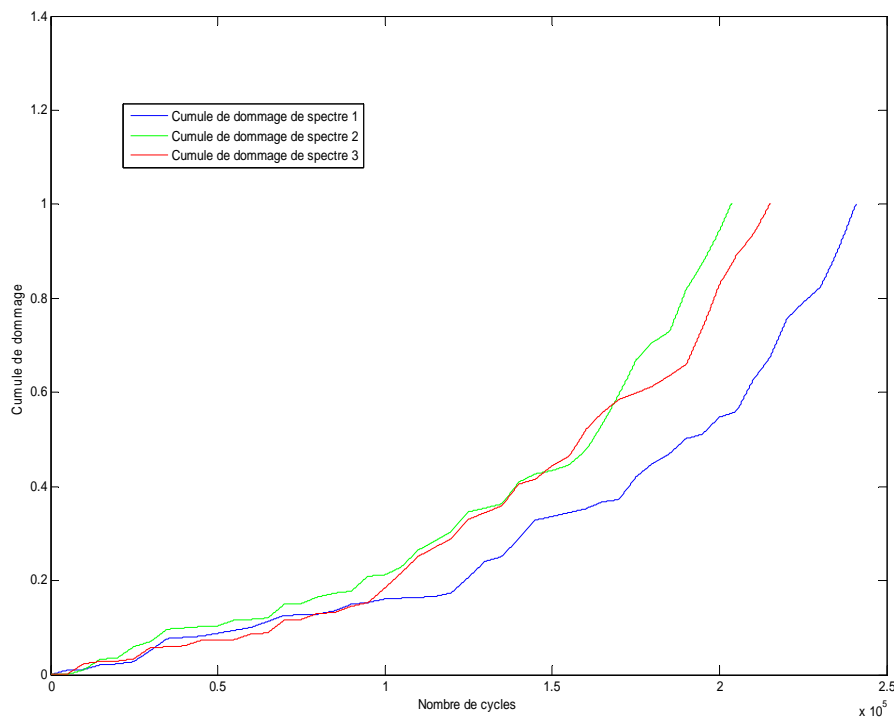
La figure IV.14 met en évidence un bon accord des prévisions de modèle proposé avec l'expérience.



**Figure IV.14** : Comparaison des durées de vie expérimentales et estimées pour les essais sous chargements aléatoires par blocs.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

Sur la figure IV.15, on peut confirmer que le modèle proposé a une évaluation non linéaire, et que l'histoire de chargement est prise en compte. D'autre part les spectres ne présentent pas une grande différence au début de chargement jusqu'aux nombres de cycles égales à cent mille cycles, surtout pour le cumul de dommage de spectre n° 3. La forme désordonnée des courbes est due à la nature de sollicitation aléatoire. Les courbes de cumul du dommage sont formées par des segments, chaque segments représente le cumule du dommage dans un bloc de 4000 cycles



**Figure IV.15 :** Evolution de cumule de l'endommagement des trois spectres appliqués à la fonte GS61.

### IV.5. Investigation numérique

#### IV.5.1. Analyse statique

Avant de commencer l'analyse en fatigue il faut d'abord passer par une analyse statique en déterminant la distribution des contraintes sur le modèle de l'éprouvette montrée dans la figure IV.16.

Cette analyse consiste à déterminer les zones critiques pouvant créer une rupture par fatigue, à évaluer les contraintes à l'intérieur de cette zone et à déterminer l'état de contrainte de surface.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

Deux codes de calcul sont utilisés dans cette partie, le premier est PATRAN 2007 pour la modélisation, le deuxième est MD R2.1 NASTRN pour l'analyse de contrainte.

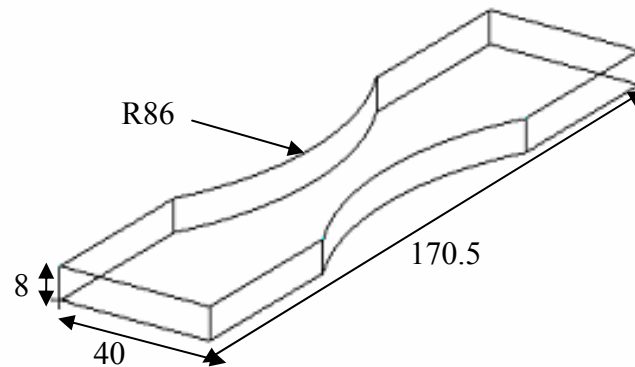


Figure VI.16 : Géométrie et dimensions de modèle.

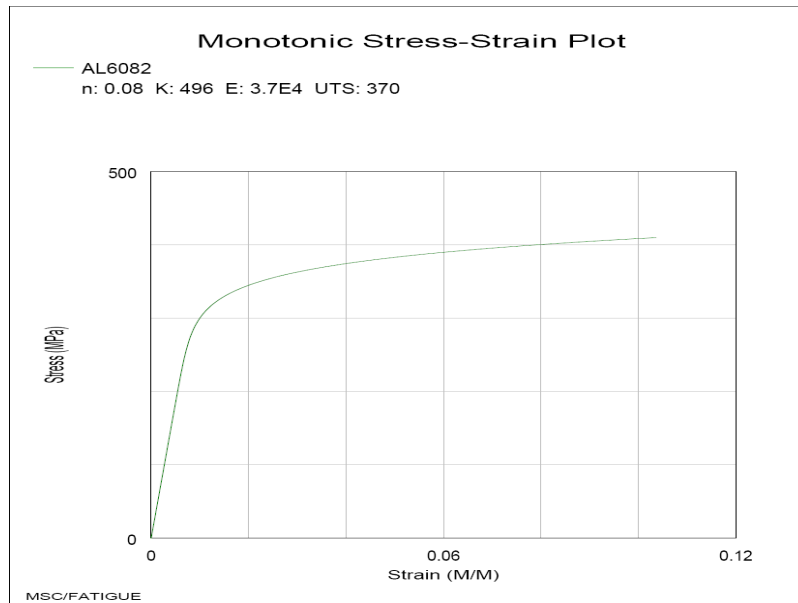
### IV.5.2. Matériau étudié

Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium de la série 6000 (6082), les caractéristiques mécaniques de ce matériau sont montrées dans le tableau IV.9 [79]

<b>Re</b> <b>(MPa)</b>	<b>Rm</b> <b>(MPa)</b>	<b>E</b> <b>(GPa)</b>	<b>K</b> <b>(MPa)</b>	<b>n</b>	<b>HV</b>
347	370	73	496	0.08	110

Tableau IV.9 : Caractéristiques mécaniques de l'alliage d'aluminium 6082.

La courbe rationnelle de traction de ce matériau est donnée par la figure IV.17

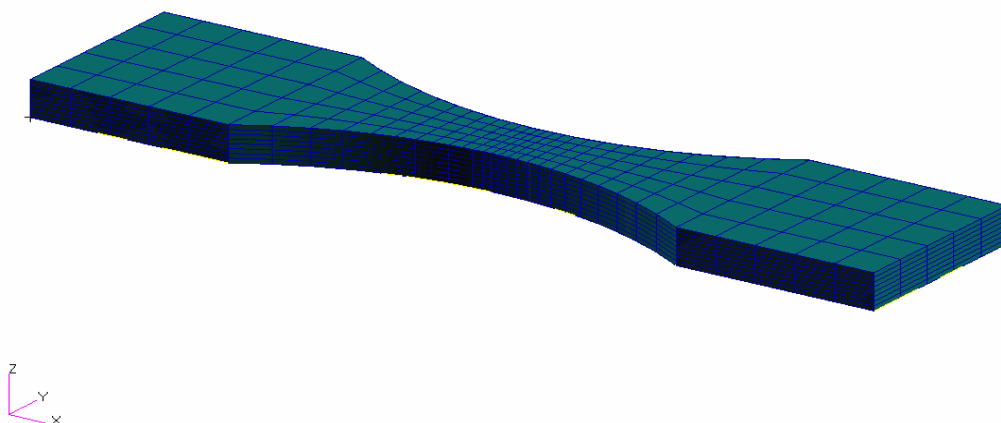


**Figure IV.17** : Courbe contrainte-déformation de l'aluminium 6082.

### IV.5.3. Modèle par élément finis

La création d'un maillage est un processus d'analyse par éléments finis à partir des lignes, des surfaces ou des solides. Dans notre cas, l'élément quadratiques 3D et 8 nœuds pour le maillage et retenu.

Le maillage et fin comme le montre la figure IV.18, le modèle géométrique et discrétisé en 2281 nœuds et 1576 éléments. Les déplacements sont nulle dans les deux parties non utiles de l'éprouvettes suivant la direction de l'axe Y et Z. une contrainte est appliqué dan la direction de l'axe X.



**Figure VI.18** : Maillage de modèle géométrique.

## IV.5.4. Etat de contrainte

La figure IV.19 représente l'état de contrainte équivalente maximum de Von Miss. La visualisation montre que les contraintes sont concentrées au voisinage de la section réduite de l'éprouvette.

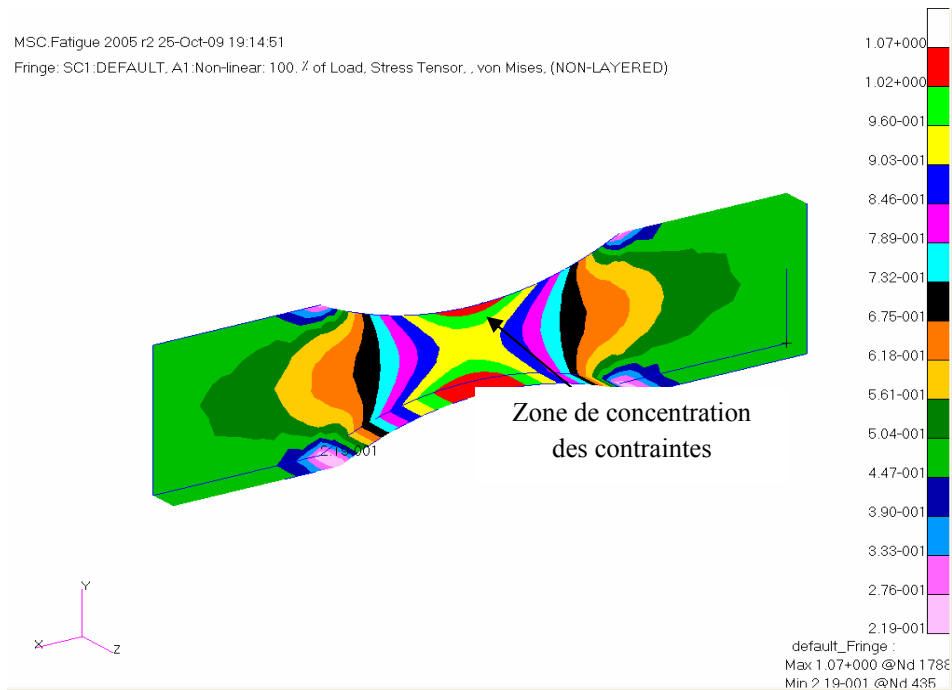


Figure VI.19 : Etat de contrainte de Von Miss.

## IV.6. Analyse de fatigue

L'analyse par fatigue est structurée comme le montre la figure IV.20.

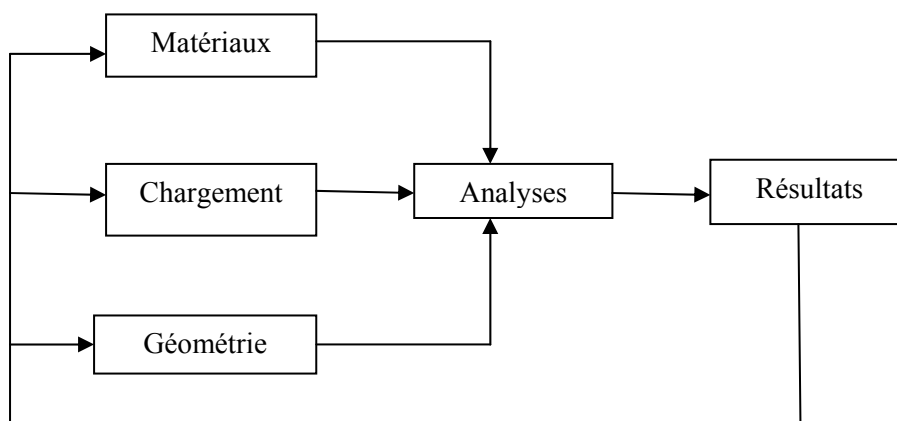


Figure VI.20 : groupes de paramètres pour une analyse de fatigue

Ainsi trois groupes de paramètres doivent être connus afin de procéder à l'analyse précédente. On doit connaître :

## Chapitre IV : Modélisation et validation

- Les propriétés du matériau,
- La géométrie,
- Le chargement appliqué.

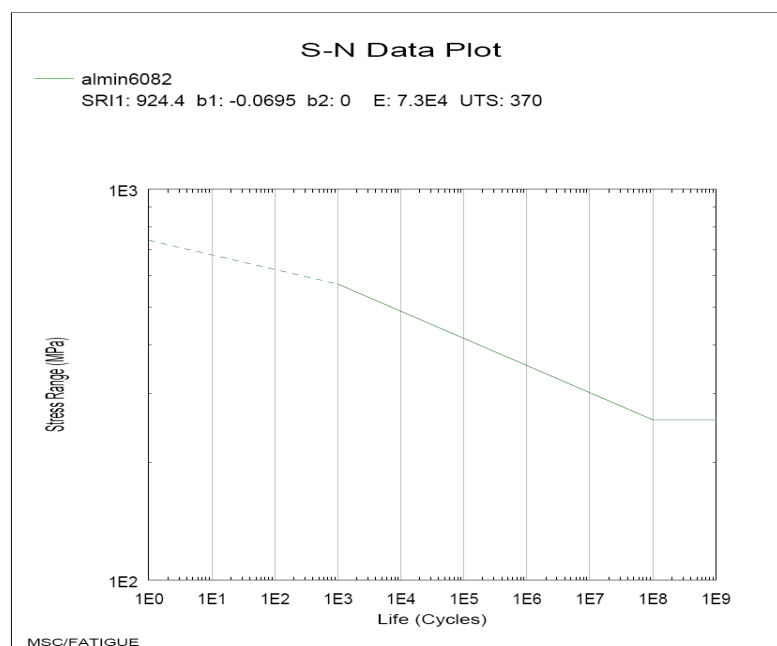
### IV.6.1 Les propriétés du matériau

Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium 6082 dont les propriétés sont regroupées dans le tableau IV.10. Cet alliage a une grande importance dans la technologie de l'industrie spécialement dans la construction des moyens de transport aéronautique cela est due à la haute résistance mécanique et la bonne résistance à la corrosion ainsi que la dureté élevée.

$\sigma_f'$ : coefficient de résistance à la fatigue	485 MPa
$b$ : exposant de résistance à la fatigue	-0.0695
$\varepsilon_f'$ : coefficient de ductilité de fatigue	0.773
$c$ : exposant de ductilité de fatigue	-0.827
$k$ : Coefficient d'écrouissage cyclique	443 Mpa
$n'$ : Exposant de durcissement cyclique	0.064

**Tableau IV.10** : Propriétés de fatigue de l'alliage d'aluminium 6082[100].

Les données de tableau IV.10 sont exploitées, en utilisant MSC FATIGUE pour tracer la courbe S-N du matériau (figure IV.21)



**Figure IV.21** : Courbe S-N de l'alliage d'aluminium 6082.



## Chapitre IV : Modélisation et validation

La représentation de la courbe  $W - N$  du matériau étudié est importante, elle est donnée par la figure IV.22. Cette figure représente la transformation de la courbe de Wöhler S-N en paramètres énergétiques.

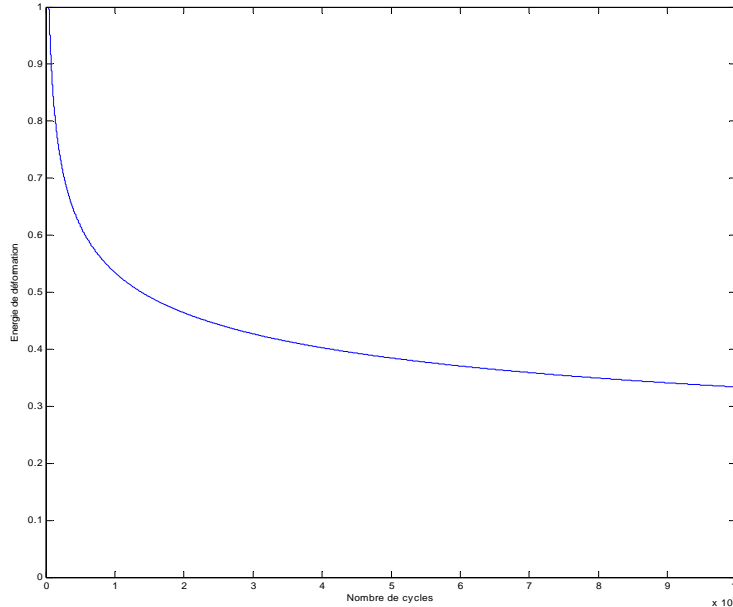


Figure IV.22 : Courbe  $W - N$  de l'alliage d'aluminium 6082

### IV.6.2. Chargement à quatre blocs croissants

Le chargement utilisé, dans notre étude, est identique à celui donné dans [78]. Les contraintes appliquées sont associées aux cycles dans un ordre croissant comme illustrée dans la figure IV.23.

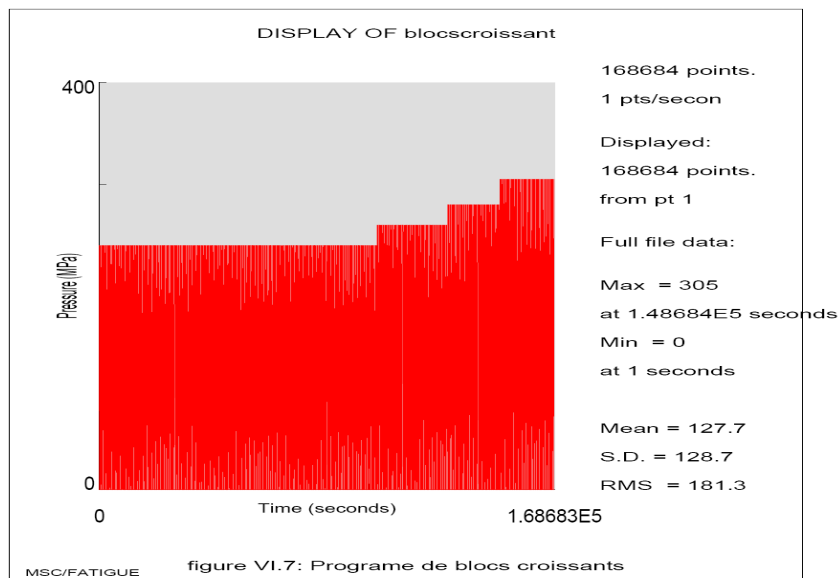


Figure IV.23 : Programme de chargement par blocs croissants.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

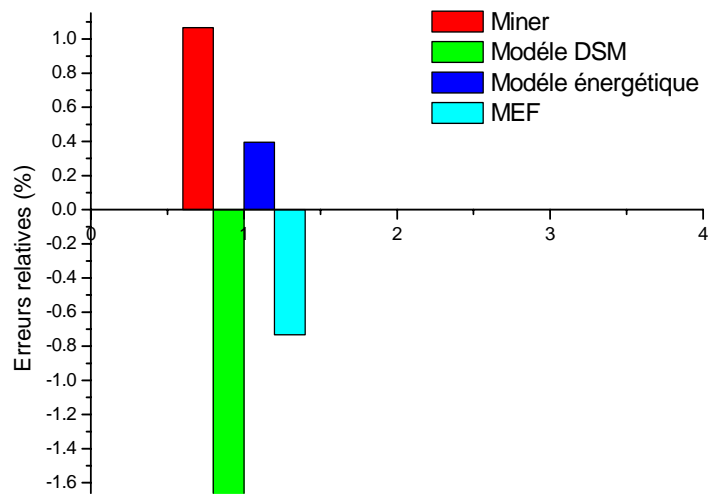
### IV.6.3. Résultats et analyses

Les confrontations des résultats expérimentaux des essais réalisés sur les éprouvettes en aluminium 6082 [79], avec les prévisions des modèles (modèle DSM, modèle proposé, Miner et les résultats obtenus à l'aide de MSC FATIGUE ) sont représentées dans le tableau IV.11 et illustrées dans la figure IV.24.

Nous constatons sur cette dernière figure que le modèle proposé est le plus fiable, et donne une prévision satisfaisante. Les résultats obtenus par simulation (MEF) sans aussi encourageante car ERP en valeur absolu est inférieure à celle du modèle DSM et la lois de Miner.

chargement	240 Mpa	260 Mpa	280 Mpa	305 Mpa				
				Exp	Miner	Modèle DSM	Modèle énergétique	MEF
Nombre de cycles par	103000	26258	19427	16800	14140	19550	16146	18031
Durée de vie totale				165485	162825	168235	164831	166716
Erreur relative de prédiction (%)					1.607	-1.661	0.395	-0.734

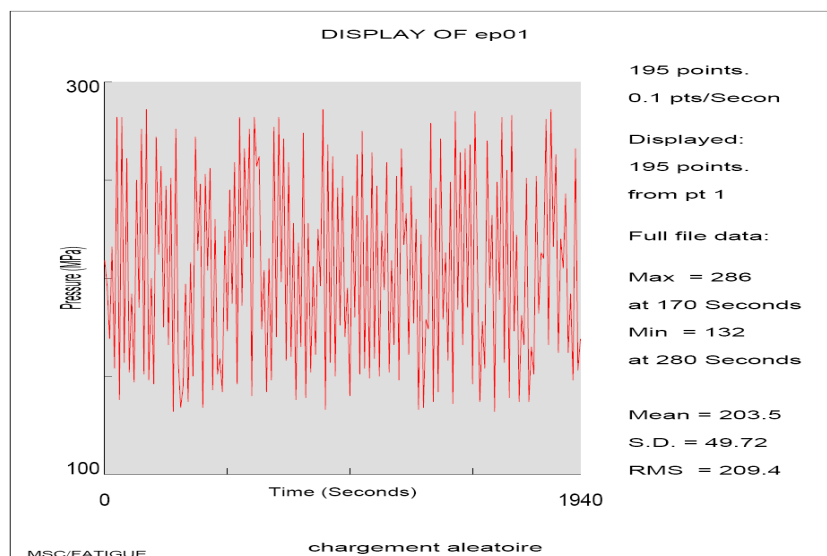
**Tableau IV.11 :** Durées de vie totales, prévus par les modèles d'endommagement et les erreurs relatives correspondantes.



**Figure IV.24** : ERP des modèles de cumul d'endommagement pour un chargement à 4 blocs croissant.

### IV.7. Chargement uniaxiale aléatoire

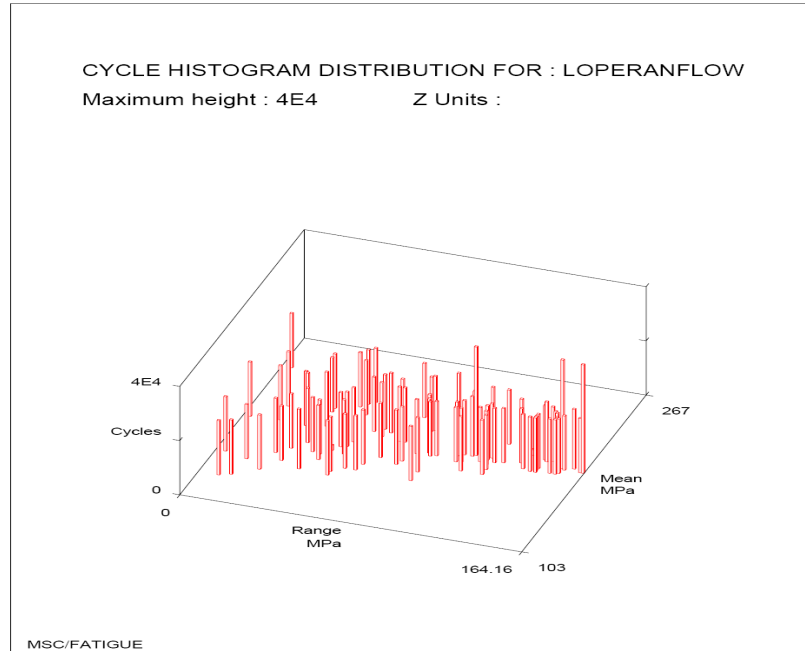
La plupart des pièces industrielles sont soumises à des chargements à amplitude variable, pour cette raison, l'étude de ce type de chargement a une importance primordiale. Dans cette partie nous allons exploiter les résultats expérimentaux [79] ; des essais sous chargement aléatoires ont été réalisés sur les éprouvettes dont la géométrie est donnée par la figure IV.10, un exemple du chargement uniaxial aléatoire est illustré dans la figure IV.25.



**Figure IV.25** : Signal de chargement aléatoire appliqué à l'essai 01.

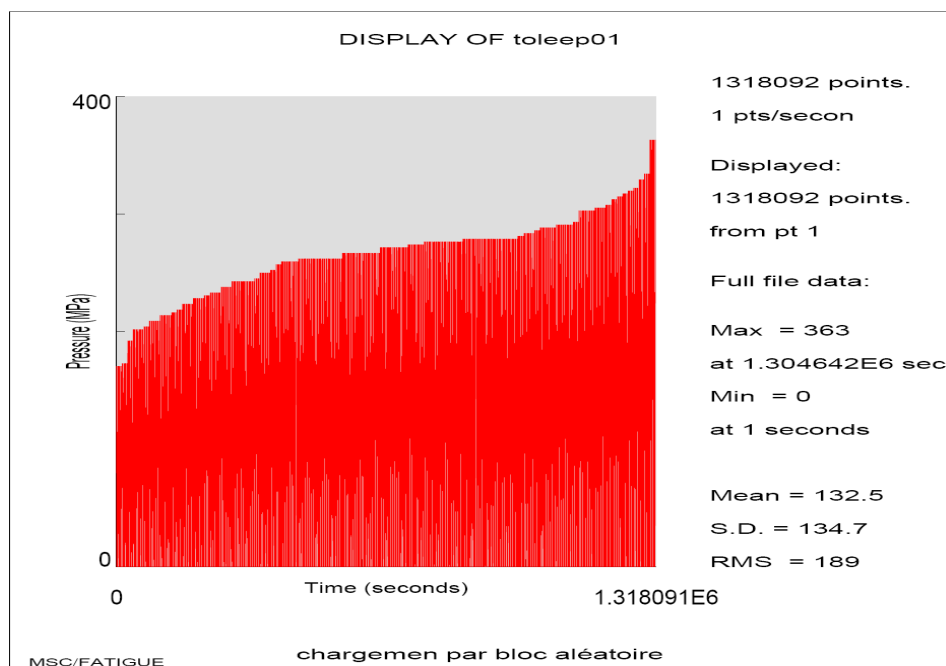
## Chapitre IV : Modélisation et validation

L'utilisation de la méthode Rainflow est nécessaire pour le comptage des cycles dans le spectre de la figure IV.25. Les cycles extraits par la méthode Rainflow sont représentés dans l'espace (amplitude de contrainte, contrainte moyenne, nombre de cycles) (figure IV.26)



**Figure IV.26 :** Résultat du comptage Rainflow appliqué sur le spectre de la figure VI.25.

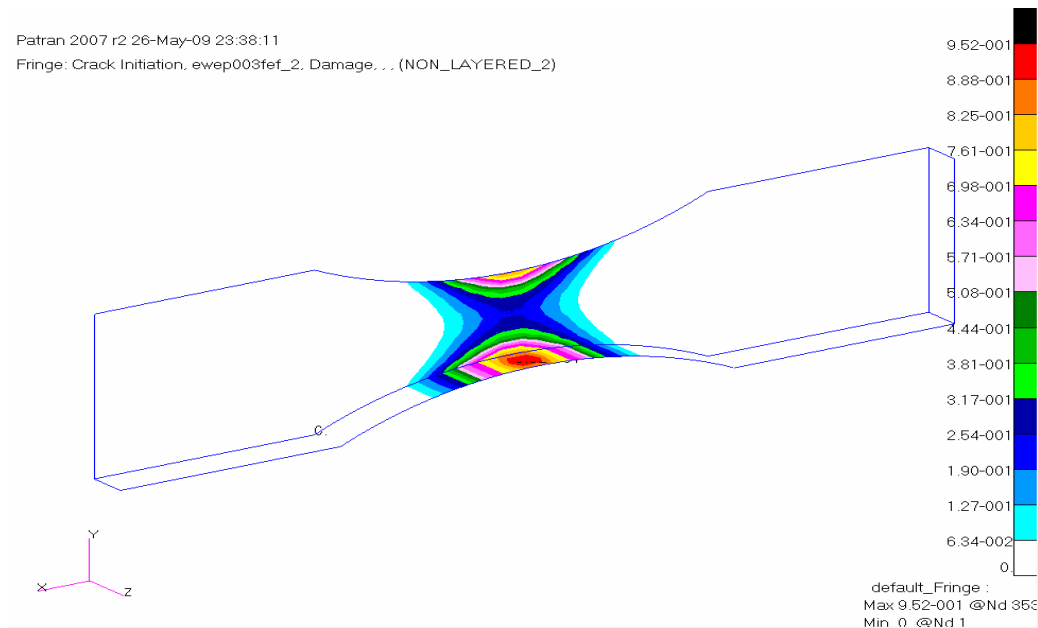
Cette méthode permet la reconstruction du spectre aléatoire (figure IV.25) à un chargement par blocs comme le montre la figure VI.27



**Figure IV.27 :** Programme de chargement par blocs après reconstruction

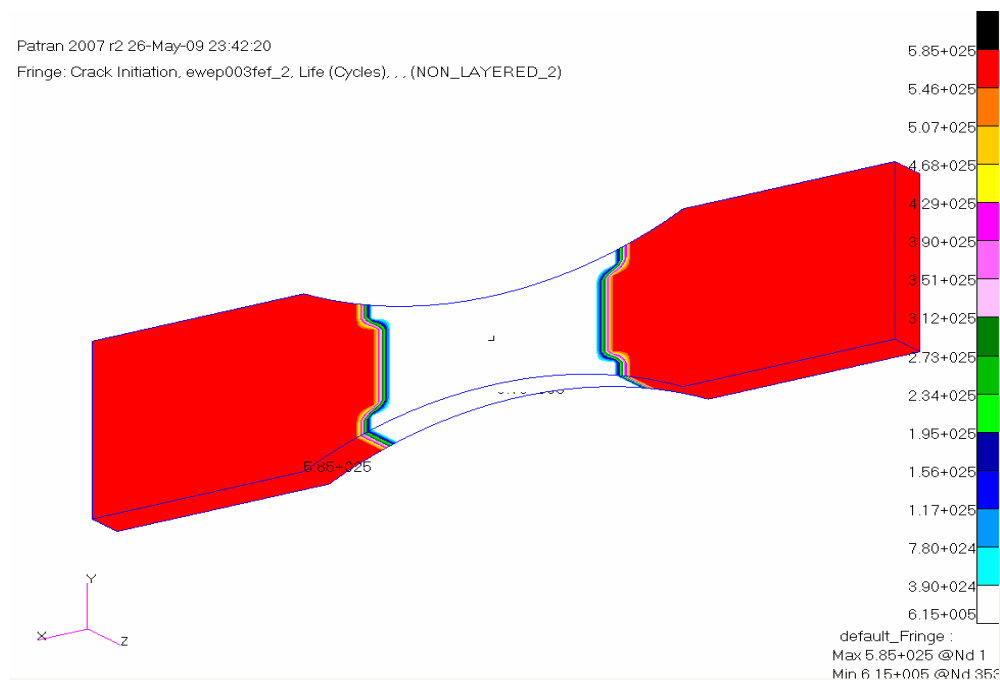
### IV.7.1. Résultat de simulation

Dans cette partie, nous présentons un exemple des résultats des simulations, concernant le calcul de la distribution de l'endommagement ainsi la prévision de la durée de vie. Nous pouvons constater, sur la figure IV.28, que la zone la plus endommagée est la section réduite où se concentre les contraintes. En s'éloignant de cette section l'endommagement se diminue et tend vers zéro dans la section non utile.



**Figure IV.28 :** Distribution de l'endommagement sur le modèle géométrique.

La figure IV.29 montre la durée de vie de chaque région de l'éprouvette obtenu par MSC FATIQUE. A la section non utile où l'endommagement est nulle la durée de vie est presque infinie ( $5.86 \times 10^{26}$ ). La zone la plus endommagée (zone dangereuse) présente une durée de vie minimale ( $6.16 \times 10^5$ ), cette valeur est la durée de vie de l'éprouvette après l'application du spectre de la figure (IV.25).



**Figure IV.29** : Prédiction de durée de vie de l'éprouvette de l'essai 01.

### IV.8. Confrontation des lois de cumul et de la simulation à l'expérience

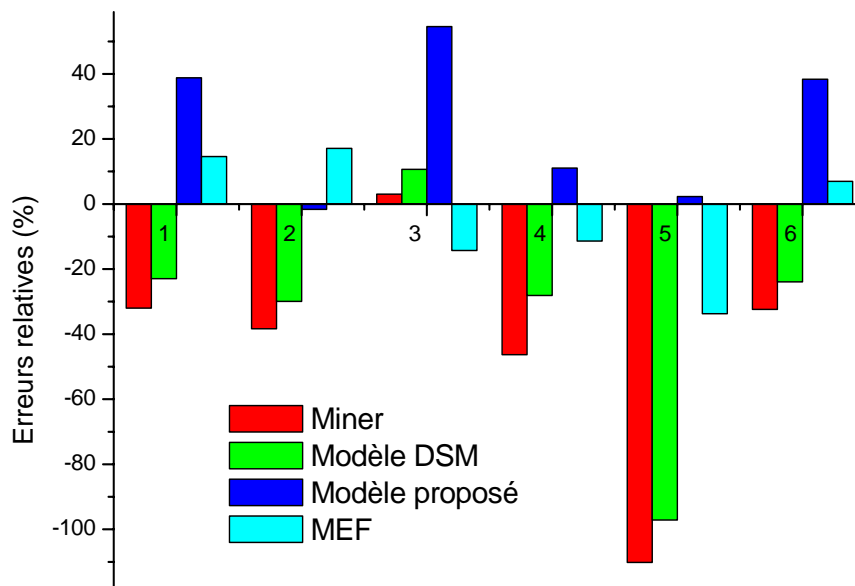
Le tableau IV.12 et la figure IV.30 présentent les erreurs relatives de prédiction de durée de vie totale calculée à partir de la loi de miner, modèle DSM, modèle proposé et les résultats par MEF. Une première analyse des résultats obtenus pour les six séries d'essais étudiés indique que les écarts enregistrés entre les prévisions des lois et la réalité expérimentale (Erreur Relative de Prédiction) sont beaucoup plus prononcés pour le modèle de Miner que pour les autres lois de cumul de dommage.

La loi Miner et le modèle DSM sont non conservatifs, les deux lois prévoient une durée de vie supérieure à celle déterminée ou estimée expérimentalement. Elles ne garantissent pas la sécurité à l'exception de l'essai 03 où les deux lois présentent des durées de vie inférieures à l'expérience; par contre le modèle proposé est conservatif car cinq sur six résultats sont obtenus au-dessus des durées de vie expérimentales même dans le cas du résultat de l'essai 02. On remarque que l'erreur relative en valeur absolue est de l'ordre de 1,6 %, ce qui veut dire qu'il n'y a pas un grand écart entre l'expérience et la prédiction du modèle. Les résultats obtenus par MEF (MSC FATIGUE) sont aussi encourageants, car cinq sur six erreurs relatives en valeurs absolues sont inférieures à 20% se qui nous permet de dire que les prédictions de la simulation peuvent être considérées comme de bonnes prévisions.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

Essais	Expérimentaux	Miner		Modèle DSM		Modèle énergétique		MEF	
		Durée de vie	Erreur relative	Durée de vie	Erreur relative	Durée de vie	Erreur relative	Durée de vie	Erreur relative
Essai 01	499370	659267	-32,01	613931	-22,94	305537	38.81	426579	14.58
Essai 02	754500	1043893	-38,35	980622	-29,96	766682	-1.6	615214	17.13
Essai 03	448753	435045	3,05	400869	10,67	203907	54.56	512861	-14.28
Essai 04	450000	658473	-46,32	576497	-28,11	400176	11.07	501187	-11.37
Essai 05	440320	925528	-110,19	868090	-97,14	430111	2.31	588844	-33.73
Essai 06	646454	855846	-32,39	801250	-23,94	398328	38.38	602559	6.97

**Tableau IV.12 :** Récapitulatif des résultats (durées de vie et les erreurs relatives correspondantes).

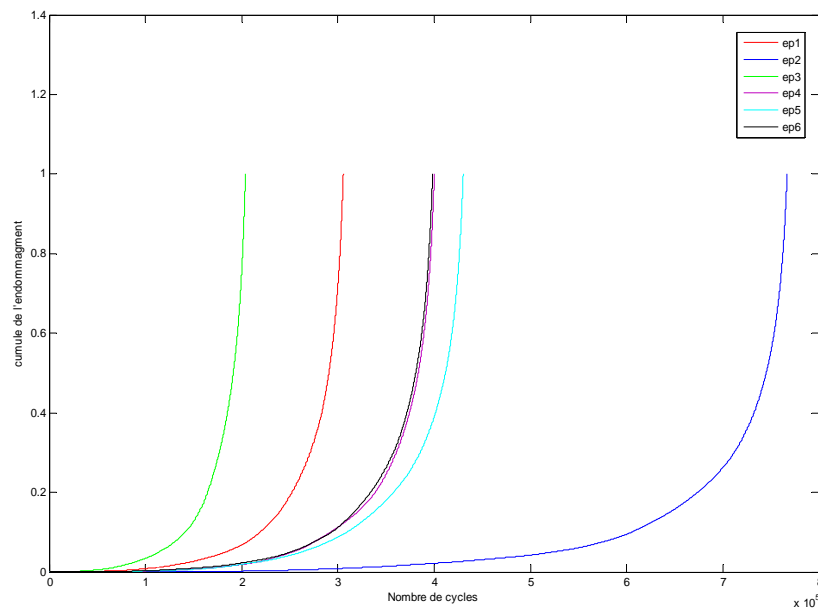


**Figure IV.30 :** Erreurs relatives de prévision de durée de vie pour les chargements aléatoire des essais (1-6).

Sur la figure IV.31, on peut remarquer clairement l'une des avantages principales du modèle proposé il s'agit de la non linéarité du cumul de dommage qui tient compte de

## Chapitre IV : Modélisation et validation

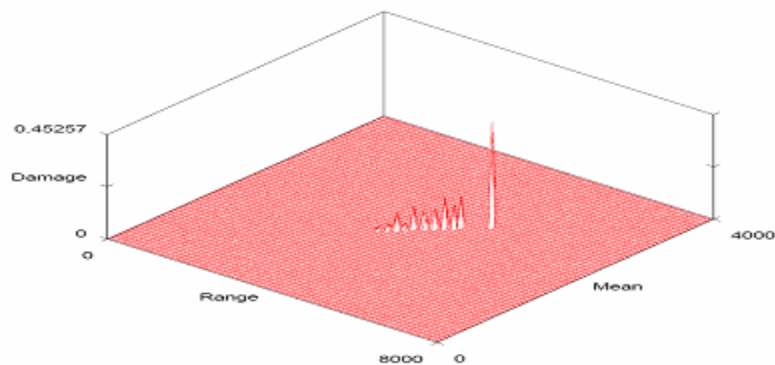
l'histoire de chargement. Pour les six essais, on remarque que le cumul du dommage suit une évolution exponentielle.



**Figure IV.31 :** Evaluation de l'endommagement en fonction de la durée de vie par le modèle proposé pour les essais (essai1 jusqu' a l'essai 6).

La figure IV.32 représente une cartographie du dommage obtenue pour un chargement aléatoire pour l'essai 06. Les onze plans ne sont pas équi-endommagés, la valeur maximale du dommage se localise au niveau du dernier bloc.

DAMAGE HISTOGRAM DISTRIBUTION FOR : gole64428  
Maximum height : 0.45257 Z Units :



**Figure IV.32 :** Distribution du dommage obtenu pour le chargement aléatoire de l'essai 06.



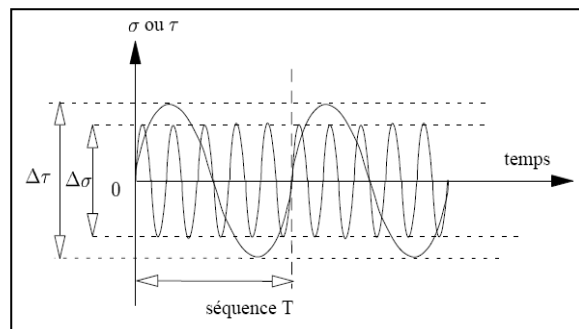
## Chapitre IV : Modélisation et validation

### VI.9. Validation pour un état de contrainte multiaxiale (Essais de flexion plane et de torsion combinées (R=-1) à fréquences différentes sur la fonte GS61)

Banvillet .A [101] a réalisé des essais de flexion plane et de torsion combinées alternées symétriques (R =-1) sur la fonte GS61 (matériaux testé par le modèle proposé dans le cas d'un chargement uniaxiale) à fréquences différentes, La durée de la séquence de chargement est la grande période des 2 sollicitations (ici la torsion). Les essais ont été réalisés à moments imposés. Les conditions de chargement sont rappelées dans le tableau VI.13 et représentées dans la figure IV.33,  $f_{\sigma} / f_{\tau}$  désigne le rapport des fréquences entre la sollicitation de flexion et celle de torsion, fréquence de sollicitation est de 50 Hz

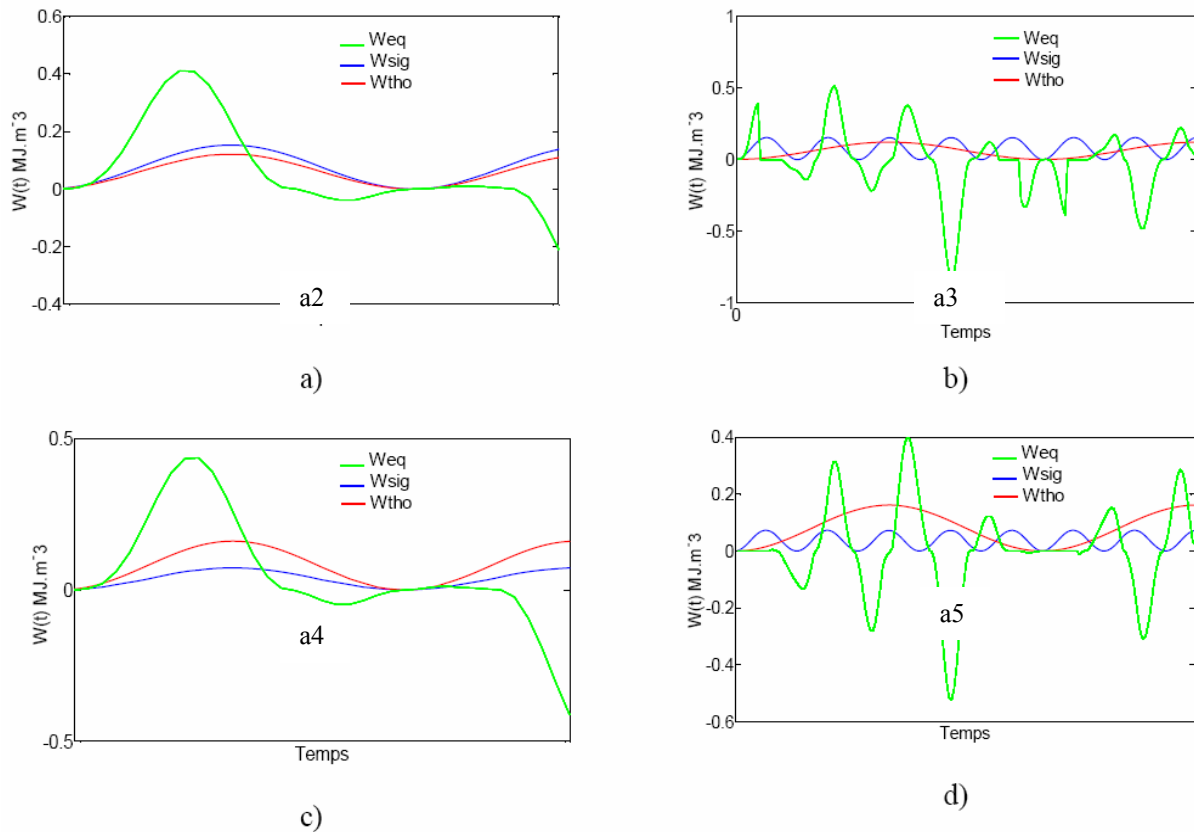
N <sup>o</sup> série	$\sigma$	$\tau$	$f / f$	Nr expérimentale
01	255	177	1	122191
02	225	177	5	49645
03	155	218	1	119911
04	155	218	5	86785

**Tableau VI.13 :** Conditions de chargement et résultats des essais sinusoïdaux de flexion plane et de torsion (R=-1) combinées à même fréquence et à fréquences différentes.



a1

## Chapitre IV : Modélisation et validation



**Figure VI.33:** Chargement de flexion plane et de torsions combinées a1), représentation de l'histoire du chargement en fonction des paramètres de l'énergie de déformation, a2) série N<sup>0</sup>01, a3b) série N<sup>0</sup>02, a4) série N<sup>0</sup>03, a5) série N<sup>0</sup>04.

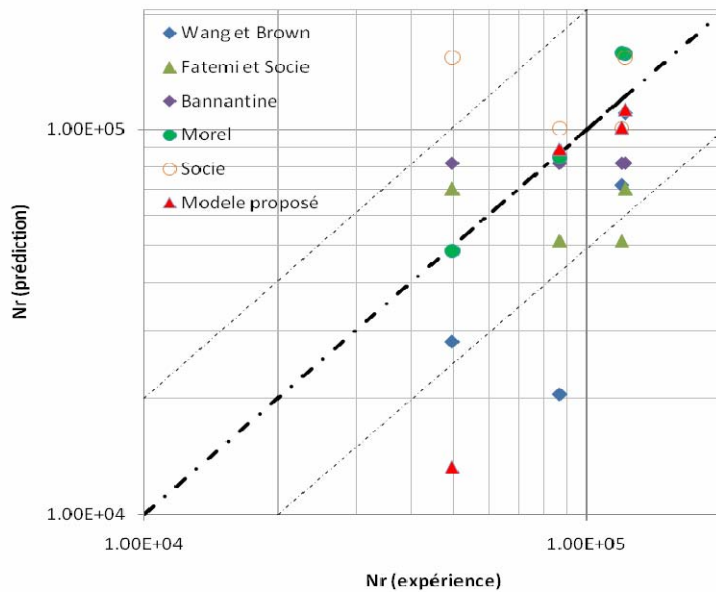
Le Tableau VI.14 permet de comparer les résultats expérimentaux et les prévisions des méthodes de Bannantine [102], Fatemi et Socie [103], Wang et Brown [104], Morel [105], Socie [106] et le modèle proposé. Cette comparaison est illustrée sur la Figure VI.34.

N <sup>0</sup> série	Bannantine	Fatemi et Socie	Wang et Brown	Morel	Socie	Nr expérimentale	Nr Modèle proposé
01	81859	70174	110 13	157312	153889	122191	112905
02	81815	70174	28071	48197	153889	49645	13254
03	81821	51386	71647	158308	100303	119911	101393
04	81821	51386	20497	84551	100303	86785	89059

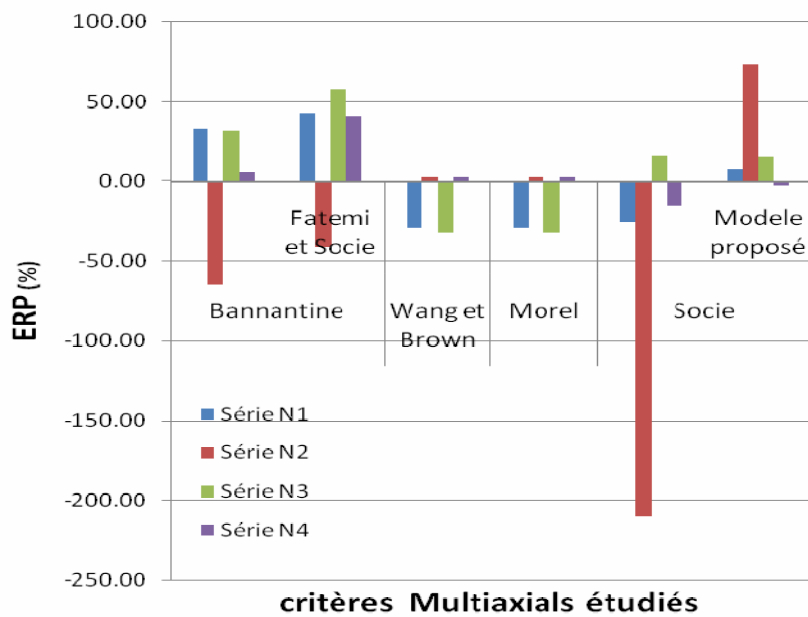
**Tableau VI.14:** Durées de vie prévues par les méthodes de calcul et durées de vie expérimentales Médianes pour les essais combinés de flexion plane et torsion.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

On constate sur les figures VI.34 et VI.35 que l'approche en contrainte de Socie est la méthode menant aux prévisions les moins conservatives. Cette méthode doit donc être utilisée avec précautions. Pour ces essais, les prévisions de Morel et notre proposition sont très bonnes. Contrairement à l'expérience, les méthodes de Fatemi-Socie et Socie ne prévoient pas de différence entre les essais combinés à même fréquence et à des fréquences différentes pour les deux rapports de chargement



**Figure VI.34:** Comparaison des durées de vie prévues et expérimentales pour les essais de flexion plane et torsion combinées.



**Figure VI.35 :** Comparaison des erreurs relatives de prévision des critères étudiés pour les essais de flexion plane et torsion combinées.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

### VI.10. Application sur les structures fissurée et réparées par la méthode de l'expansion a froid

Le processus d'expansion à froid a été couramment utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue des composants contenant des fissures [107]. L'expansion à froid est employée habituellement dans les composants qui sont exposés seulement à des conditions de service à la température ambiante. Le processus d'expansion à froid introduit des contraintes résiduelles circonférentielles bénéfiques dans la région annulaire autour du trou, et la présence de cette contrainte de compression résiduelle empêche la croissance et la propagation des fissures [108]. Dans cette étude, l'expansion à froid est réalisé en insérant une bille surdimensionnée rigide d'un côté (face d'entrée) de la plaque trouée et le retirer de l'autre côté (face de sortie) comme illustré dans la figure IV.36.

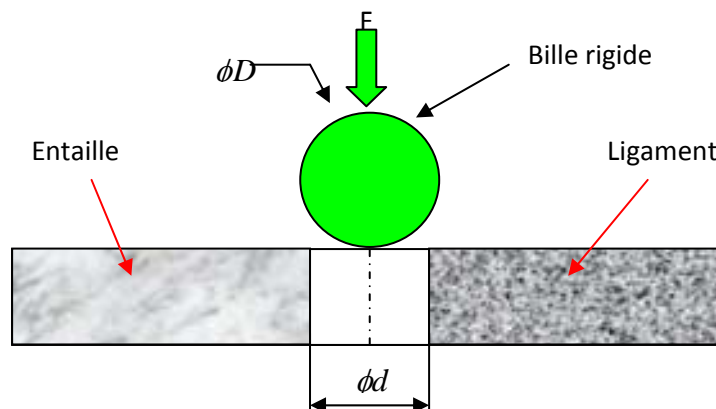


Figure IV.36 : Processus d'expansion du trou percé

Le modèle proposé est appliqué sur les structures pour évaluer le gain de durée de vie due au processus de l'expansion de trous a froid.

#### VI.10.1. Matériaux et spécimens [109]

Le matériau étudié est un alliage d'aluminium 6082 T6, employé souvent en véhicules industriels, composants ferroviaires et construction navale, dont la composition chimique et les propriétés mécaniques sont données dans les tableaux VI.15 et VI.16.

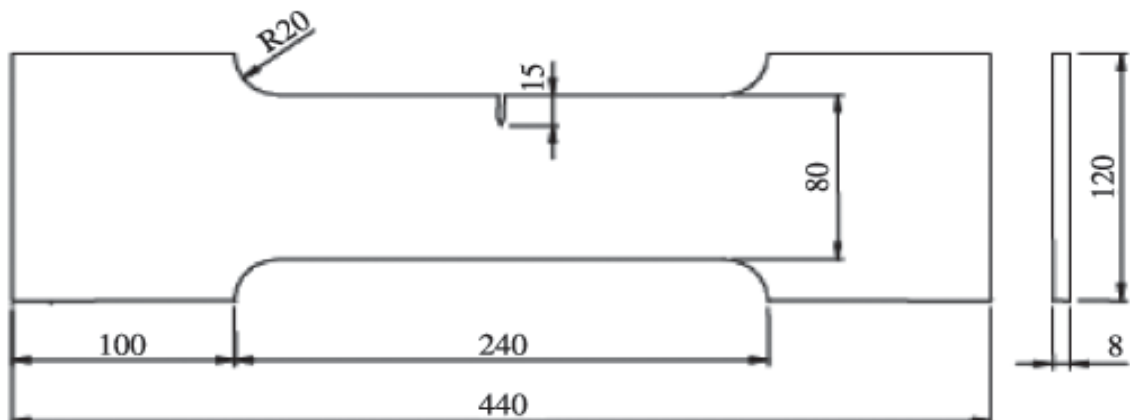
Si	Mg	Fe	Cu	Mn	Cr	Zn	Ti
0.7 %	0.6 %	0.24 %	0.06 %	0.9 %	0.02 %	0.0 6%	0.0 2%

Tableau IV.15: Composition chimique de l'Al 6082-T6.

Limite élastique (MPa)	280
Résistance à la rupture (MPa)	327
coefficient de résistance (MPa)	447
Exposant d'écrouissage	0.095
Module de Young (GaP)	68
Allongement totale %	12
Dureté	95

**Tableau IV.16 :** Propriétés mécaniques de l'alliage d'Al 6082 T6.

Les éprouvettes SENT utilisées [110] dans cette étude sont conforme aux normes standards d'ASTM [109]. La géométrie des éprouvettes utilisées est représentée sur la figure IV.37. Ces éprouvettes ont été coupées dans une plaque d'aluminium suivant la direction transversale LT, et les essais de fatigue ont été effectués sur une machine 100 kN servo-hydraulique commandée par un ordinateur. Tous les essais ont été effectués suivant les procédures sous une amplitude de chargement constante  $\Delta p$  et un rapport de charge de  $R = 0,57$ .



**Figure IV.37 :** Géométrie et les dimensions de l'éprouvette de fatigue.

## Chapitre IV : Modélisation et validation

La figure VI.38, présente l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  en fonction du nombre de cycles au réamorçage  $N$  pour les éprouvettes fissurées sans expansion et les éprouvettes fissurées réparées par expansion. Nous constatons que le nombre de cycles pour les éprouvettes réparées est plus grand par rapport à celle non réparées pour la même condition de chargement, ceci explique l'importance et l'efficacité de la réparation par expansion à froid.

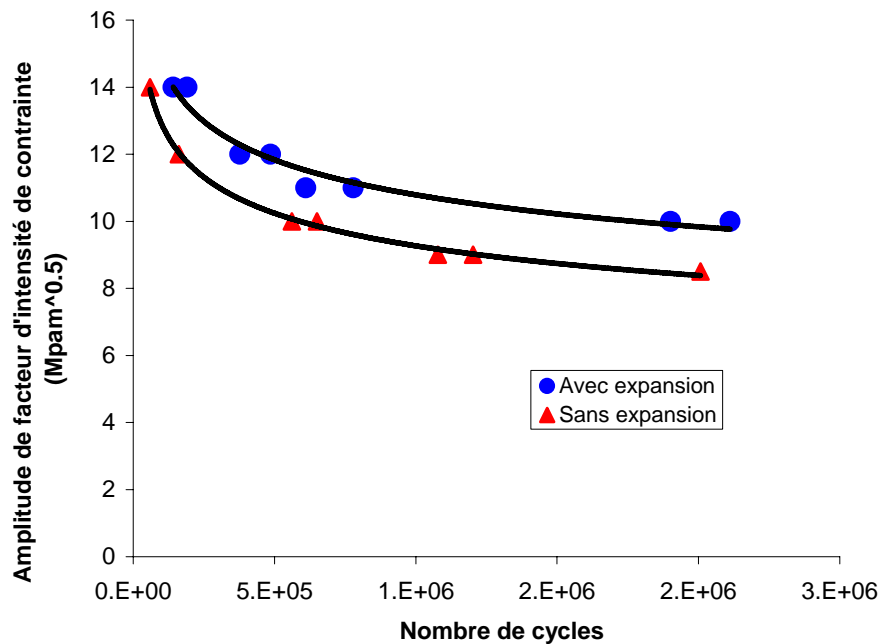


Figure VI.38 : courbe de Wöhler des éprouvettes avec et sans expansion.

### VI.10.2. Modélisation 3D de l'expansion

La simulation numérique est réalisée avec un modèle 3D sur une plaque fissurée comportant un trou en fond de fissure. Nous avons choisi un modèle de comportement élastoplastique. La bille est supposée infiniment rigide avec un diamètre de 6 mm (diamètre de la bille est supérieur au diamètre de trou). En raison de la symétrie par rapport au plan X-Z, la moitié de l'éprouvette est considérée. Le maillage et les conditions aux limites sont illustrés par la figure VI.39. La bille est mise, initialement, en contact avec le trou au-dessus de la face d'entrée de l'éprouvette. Un déplacement dans la direction Z est appliqué à la bille, de la face d'entrée à la face de sortie, pour simuler le processus d'expansion.

Sur la figure VI.40. (a), nous remarquons que les contraintes sont en majorité de traction sauf là où il y a contact. La contrainte maximale circonférentielle de compression est d'environ - 515 MPa. Les contraintes sont de compression (figure VI.40. (b)), la valeur maximale est de

## Chapitre IV : Modélisation et validation

-817.8 MPa et se trouve au milieu de la plaque. Après le passage de la bille (figure IV.40. (c)), sur toute l'épaisseur de l'éprouvette, les contraintes sont de compression, la zone proche du milieu et en face de sortie ont les contraintes les plus importantes (- 418 MPa). A ce stade, la contrainte en face de sortie est de compression.

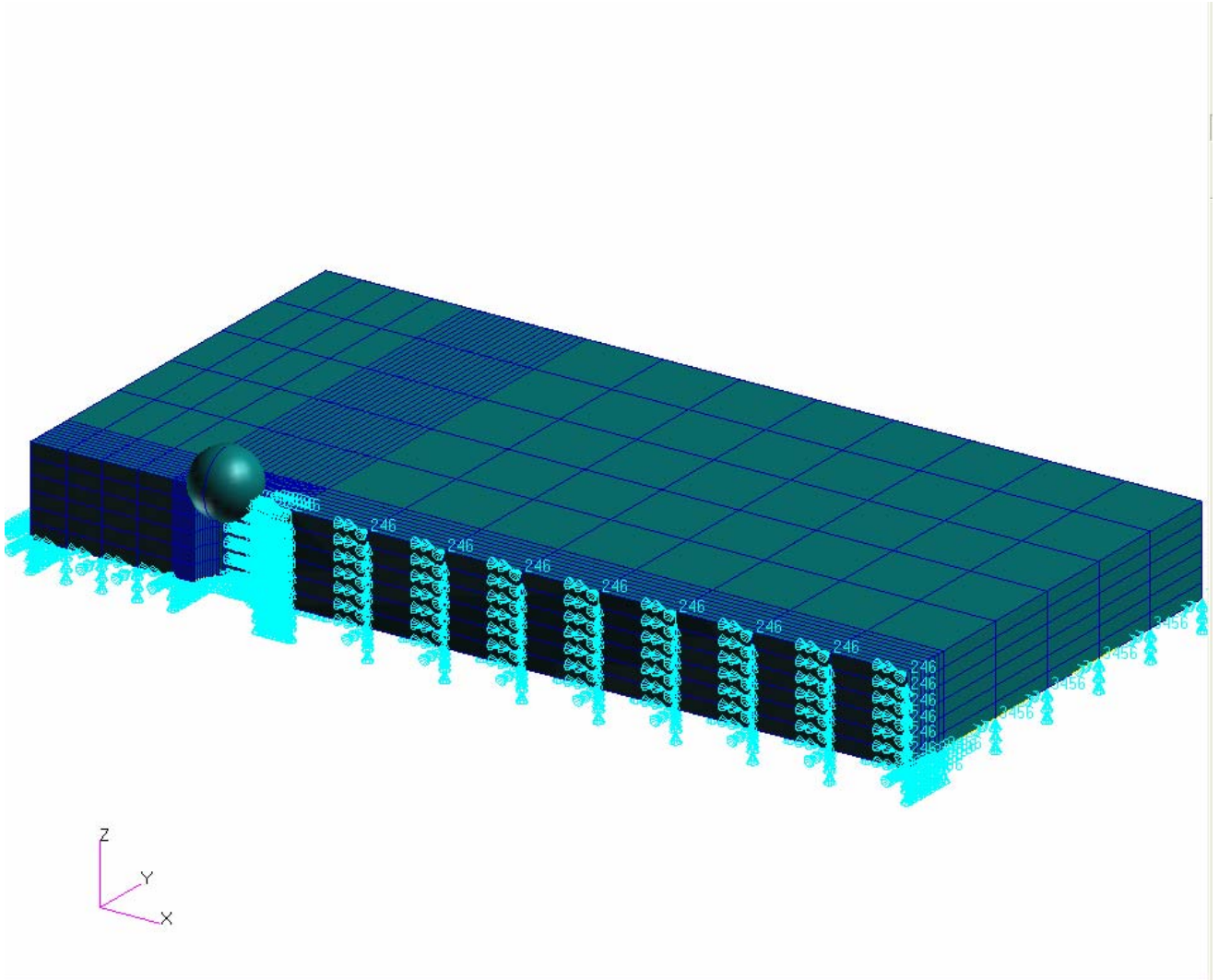
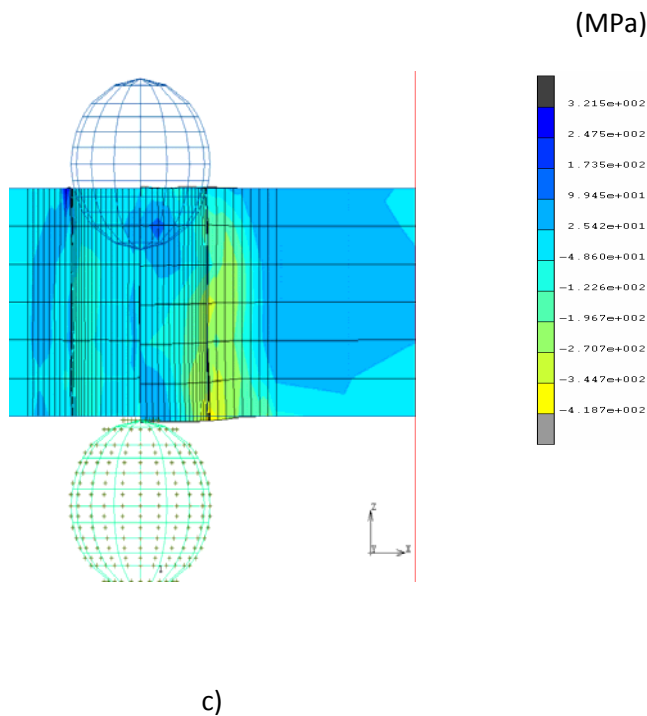
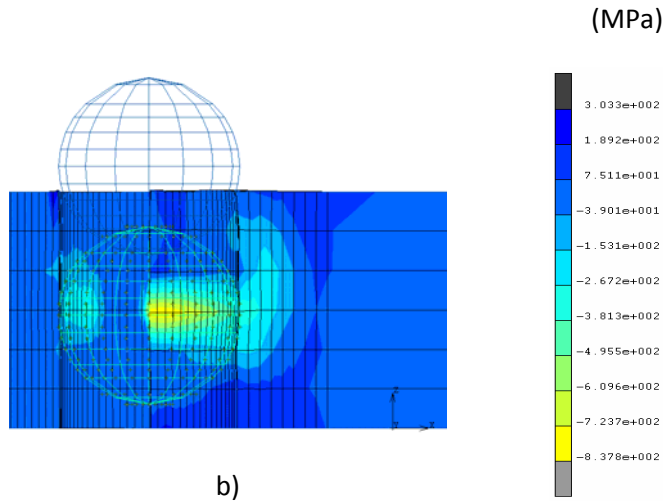
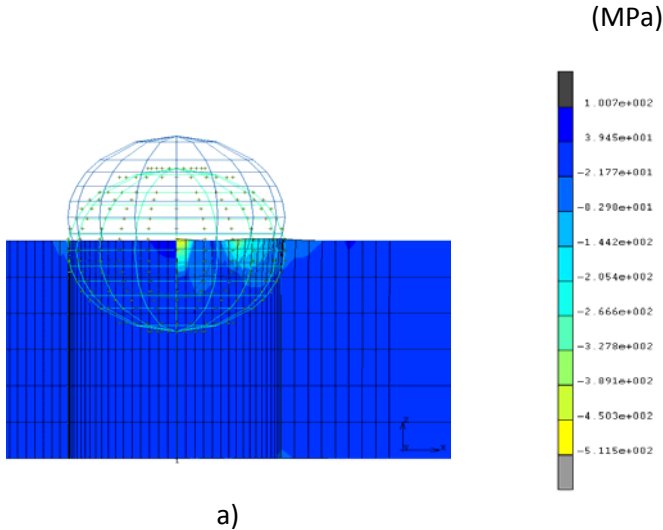


Figure VI.39 : Maillage du modèle et bille rigide.

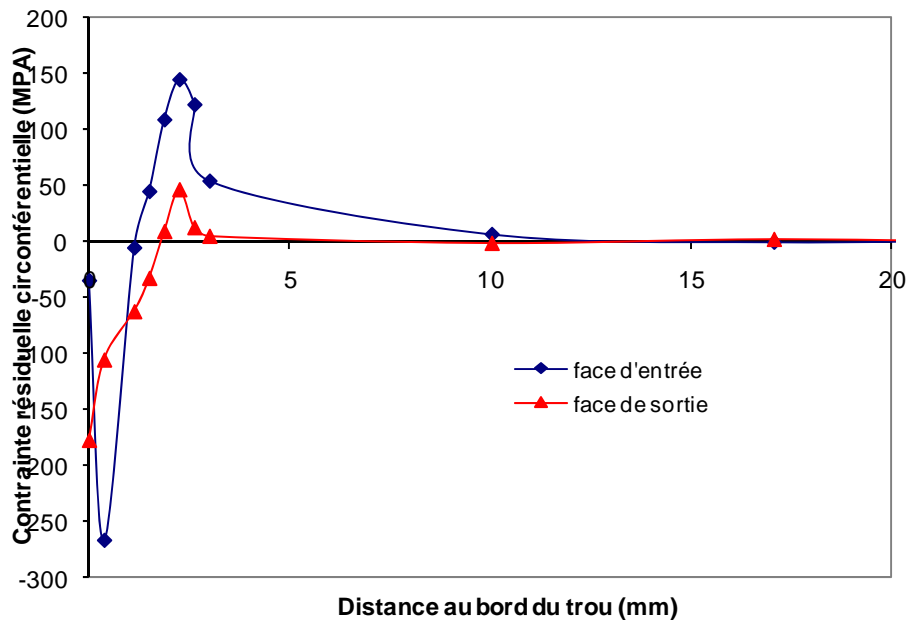




## Chapitre IV : Modélisation et validation

**Figure VI.40 :** Evolution des contraintes résiduelles circonférentielles au cours de l'expansion. a) face d'entre, b) bille au milieu de trou, c) face de sortie.

La figure IV.41 montre la distribution des contraintes résiduelles circonférentielles dans le modèle 3D, au bord du trou ces contraintes sont de compression. On peut remarquer que la contrainte résiduelle circonférentielle de compression maximale est la plus faible en face d'entrée et maximale au centre. Cette conclusion est vérifiée par les résultats de [110] : les contraintes résiduelles



**Figure IV.41 :** Distribution des contraintes résiduelles circonférentielles dans le modèle 3D

### V.10.3. Résultats et analyse

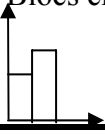
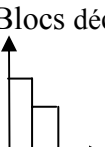
Les conditions expérimentales sont données dans le tableau VI.17. Huit essais ont été effectués pour les conditions de chargement croissant et décroissant pour évaluer l'effet entre ces conditions de charge, la règle de Miner a été pris en considération pour l'accumulation des dommages.

N° block	$\Delta K$ (MPa m <sup>1/2</sup> )	Nombre de cycles à la rupture.
1	11	856.000
2	11.7	528.000
3	12.4	336.000
4	13.1	220.000

**Tableau VI.17 :** Conditions expérimentales.

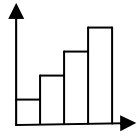
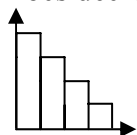
## Chapitre IV : Modélisation et validation

Deux et quatre niveaux de contrainte ont été considérées (tableaux VI.18 et 19) et deux séquences différentes ont été appliquées. L'objectif de cette série de tests est de déterminer l'influence des conditions de charge (chargement croissant et décroissant) sur la durée de vie et d'évaluer le gain en durée de vie et de voir le modèle le plus fiable pour cette opération.

		N° de bloc	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sum \beta_i$
 Blocs croissant	$K_1 = 11(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_2 = 13.1(\text{MPa m}^{1/2})$	1-2bexp.	0.476	0.160	0.636
		2-2bexp.	0.476	0.586	1.062
		2-2bexp.	0.476	0.391	0.867
 Blocs décroissant	$K_2 = 13.1(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_1 = 11(\text{MPa m}^{1/2})$	4-2bexp.	0.452	0.073	0.525
		5-2bexp.	0.452	0.116	0.568
		6-2bexp.	0.452	0.173	0.625

\* $\beta_i = n_i/N_f$

**Tableau VI.18 :** Les résultats expérimentaux pour deux blocs de chargement.

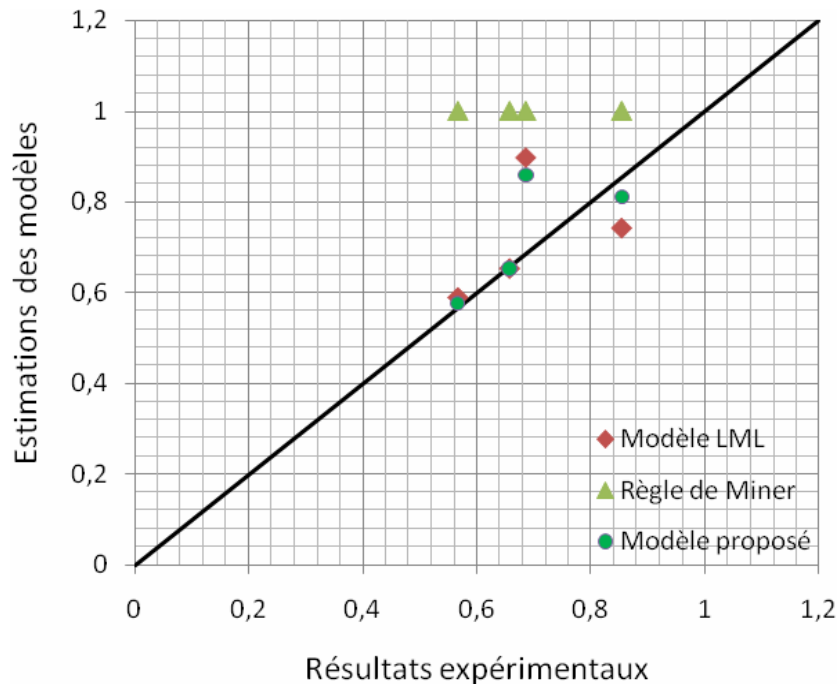
		N° de bloc	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\sum \beta_i$
 Blocs croissant	$K_1 = 11(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_2 = 11.7(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_3 = 12.4(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_4 = 13.1(\text{MPa m}^{1/2})$	1-4bexp.	0.238	0.235	0.233	0.316	1.022
		2-4bexp.	0.238	0.235	0.186	-	0.659
		2-4bexp.	0.238	0.235	0.168	-	0.641
		4-4bexp.	0.238	0.235	0.241	-	0.714
 Blocs décroissant	$K_1 = 13.1(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_2 = 12.4(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_3 = 11.7(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_4 = 11.0(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_5 = 13.1(\text{MPa m}^{1/2})$ $K_6 = 12.4(\text{MPa m}^{1/2})$	5-4bexp.	0.232	0.207	-	-	0.439
		6-4bexp.	0.232	0.116	-	-	0.348
		7-4bexp.	0.232	0.233	0.167	-	0.632
		8-4bexp.	0.232	0.233	0.235	0.457	1.157
		9-4bexp.	0.232	0.233	0.150	-	0.615
		10-4bexp.	0.232	0.233	0.066	-	0.531

**Tableau VI.19 :** Les résultats expérimentaux pour quatre blocs de chargement.

La figure VI.42 montre la comparaison entre la prédiction des modèles (la règle Miner, Modèle DSM et le modèle proposé) et les résultats expérimentaux pour des modes de chargement différents (deux et quatre blocs avec des charges croissantes et décroissantes) pour

## Chapitre IV : Modélisation et validation

les spécimens pré fissurés réparés par la technique de l'expansion à froid. Cette figure confirme que les estimations du modèle DSM et le modèle proposé sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. On peut remarquer aussi sur cette figure que la nouvelle version (modèle proposé) est plus précise et donne des résultats proches de la réalité.



**Figure IV.42 :** Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux pour différentes conditions de chargement.

### VI.11. Conclusion

Un nouveau modèle d'endommagement par fatigue, basé sur l'énergie de déformation, qui prend en compte la dégradation du matériau et la détérioration progressive résultante de l'ouverture, la croissance et la coalescence des microfissures dans un élément de la matière, le modèle a été développé pour répondre à la limitation des lois de dommages classiques de fatigue, l'approche énergétique a été utilisée pour prédire le comportement en fatigue des matériaux. D'autre part, ce modèle est suffisamment simple pour qu'il soit appliqué pour tous les types de chargement (par blocs ou aléatoire) et pour tous les modes de chargement (traction, flexion, torsion ou combinés).

La confrontation des prédictions des modèles de cumul du dommage retenus pour cette étude (Miner et DSM) ainsi que le modèle proposé à l'expérience (essai à deux blocs Bas et Haut et Haut et Bas, essai à trois blocs croissants, essai à quatre blocs croissants et

## Chapitre IV : Modélisation et validation

---

changement aléatoire pur) constate que le modèle proposé et plus réaliste pour son évaluation de la durée de vie il est dans la plus part des cas conservative.

L'inexistence d'une loi qui donne des estimations de durée de vie acceptable utilisée par les bureaux d'études favorise l'utilisation d'une loi conservative pour le dimensionnement des pièces pour être plus prudent dans la conception, ce qui est le cas de notre modèle.

Les résultats de la simulation donnent des estimations de durées de vie optimistes, puisque trois sur six résultats sont conservatifs, on peut considérer que la simulation donne de bonnes prévisions, car la plupart des erreurs relatives en valeurs absolues sont inférieures à 20%. En plus, l'avantage de visualiser les zones endommagées dans la structure étudiée permet, aux concepteurs d'être prudents pour optimiser la durée de vie des pièces et des structures.

Enfin du chapitre, une application à un cas industrielle pratique est présentée. Le modèle proposé montre ses capacités d'application pour l'évaluation et la prédiction de la durée de vie pour des structures industrielles fissurées et réparées par la méthode de l'expansion à froid.

# Conclusion et perspective

## Conclusion et perspectives

---

Le travail présenté dans cette thèse a été consacré, dans la première partie, à la proposition d'un modèle d'endommagement basé sur l'énergie de déformation, ce modèle est similaire dans sa formulation à celui du modèle de la contrainte endommagée (modèle LML). Dans la deuxième partie, la simulation numérique des essais de fatigue est considérée pour optimiser la durée de vie d'une structure et la modélisation du processus de l'expansion. Autrement dit, cette étude est basée sur les deux axes principaux :

- Proposition d'une loi d'endommagement et validation ;
- Application du modèle proposé à un cas pratique pour l'évaluation de gain en durée de vie due à l'expansion à froid..

Après une introduction à la fatigue des matériaux, et les paramètres qui affectent la durée de vie des structures, une étude chronologique de quelques lois de cumul d'endommagements de la littérature est détaillée. Sur la base de cette étude, notre modèle de cumul de dommage est proposé. Ce modèle est non linéaire dans son évolution et simple pour la mise en œuvre. Les paramètres de la courbe S-N sont suffisants pour l'indicateur  $D_i$  de ce modèle contrairement à la majorité des autres lois de cumul de dommage qui nécessitent un nombre important de paramètres tel que la loi de Lemaitre et Chaboche (c.-à-d. un nombre importants d'essais supplémentaires). Notre modèle permet de déterminer, cycle par cycle, l'indicateur du dommage dans un matériau sollicité en fatigue à grand nombre de cycles et dans le domaine oligocyclique même pour des niveaux de contraintes inférieurs à la limite élastique pour un état de contrainte uniaxial et multiaxiale.

Les prévisions de notre modèle (en durée de vie et en indicateur de cumul de dommage) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux aussi bien pour les chargements par blocs (deux et quatre blocs) que pour les sollicitations uniaxiales aléatoires; sans oublier les résultats de simulation qui sont très prometteurs.

Une partie de cette thèse a été consacrée à la possibilité d'optimisation de la méthode du perçage avec expansion en fond de la fissure de fatigue afin d'atteindre la durée de vie maximale après réparation d'une structure fissurée et voire la possibilité d'appliquer notre proposition

De nombreuses voies de travail restent ouvertes, l'utilisation du modèle pour l'étude des structures sollicitées sous chargements combinés et multiaxiales aléatoires est une application très importante. D'autres perspectives s'ouvrent également pour la suite de ce modeste travail, notamment l'application de ce modèle pour la prédiction de la durée de vie et de l'endommagement des structures pré-fissurées et réparées par patch choses importantes pour les ingénieurs de la maintenance préventive.

# Références bibliographiques

## Références bibliographiques

---

- [1] **W. Schütz, 1996.** A history of fatigue. Eng. Fracture Mechanics, Vol.54, p. 263-300.
- [2] **J. Schijve, 2001.** Fatigue of Structures and Materials, Kluwer Academic Publishers p8
- [3] **A. Aid, 1998.** Influence du mode de chargement sur l'endommagement des matériaux métalliques. Thèse de magistère, Université de Mostaganem.
- [4] **G. Fortuné ANAGO, 2000.** Endommagement par fatigue de l'aluminium cas du 1200 et 5005, thèse de doctorat, Université Nationale de Benin, p 103.
- [5] **J.L. Robert. 1992.** Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires. Thèse de doctorat : l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, N°ordre 92 ISAL 0004, 229 p.
- [6] **J. Schijve, 2008.** Fatigue of Structures and Materials, Second Edition, Springer Science and Business Media, .p 174.
- [7] **M. Langon, 1999.** Introduction à la fatigue et mécanique de rupture, Centre d'essais Aéronautique de Toulouse. ENSICA - p32
- [8] **W. Schütz, 1995.** Corrosion fatigue. The forgotten factor in assessing durability. Estimation, Enhancement and Control of Aircraft Fatigue Performance, J.M. Grandage and G.S. Jost (Eds.), EMAS, pp. 1–51.
- [9] **H.J Gough. and D.G. Sopwith, 1933.** Some comparative corrosion fatigue tests employing two types of stressing action. J. Iron Steel Inst., Vol. 127 , pp301–332.
- [10] **A. Banvillet. 2001.** Prédiction de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre de Bordeaux.
- [11] **C. Lalanne, 1999.** Mechanical Vibration & Shock, Fatigue Damage, Volume IV, Taylor and Francis Books, Inc.
- [12] **S. Ariduru. 2004.** Fatigue live calculation by Rainflow cycle counting method, A Thesis Submitted To The Graduate School Of Natural And Applied Sciences Of Middle East Technical University.



## Références bibliographiques

---

- [13] **G. Lanza, 1886.** Strength of shafting subject to both twisting and bending. trans. ASME, 8 :130.
- [14] **W. Mason, 1917.** Alternating stress experiments. Proc. Inst. Mech. Eng., 1 :187–190.
- [15] **J. Marin, 1949.** Résistance des métaux à la fatigue par contraintes biaxiales. J. of Applied Mechanics, 16 :383.
- [16] **M. Poncelet. 1993.** Multiaxialité, hétérogénéités intrinsèques et structurales des essais d'auto-échauffement et de fatigue à grand nombre de cycles. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Paris
- [17] **I.V. Papadopoulos. 2001.** Long life fatigue under multiaxial loading. Int. J. Fatigue, 23 :839-849.
- [18] **K. Hohenemser, W. Prager, 1993.** The problem of fatigue strength under complex stresses, Metallwirtschaft XII, 24.
- [19] **J.H. Gough, H.V. Pollard, 1935.** The strength of metals under combined alternating stresses, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, vol.131, N0 3.
- [20] **T. Nishihara and M. Kawamoto. 1941.** The strength of metals under combined alternating bending and torsion. In Memoirs of the College of Engineering, volume 10, pages 177{201. Kyoto Imperial University.
- [21] **S.B. Lee, 1980.** Evaluation of theories on multiaxial fatigue with discrimination specimens. Phd Thesis, Stanford University, 174p.
- [22] **S.B. Lee, 1985.** A criterion for fully reversed out-of phase torsion and bending. ASTM STP 853, K.J Miller and M.W Brown Eds., Philadelphia, pp. 553-568.
- [23] **G. Sines, 1959,** Behaviour of metals under complex static and alternating stresses, dans Metal fatigue, Sines G, Waisman JL, editors, Mc Graw Hill, New York, pp. 145-169.
- [24] **B. Crossland, 1956,** Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel, Proceedings of the international conference on fatigue of metals, London, UK, pp. 138-149.

## Références bibliographiques

---

- [25] **J. Marin, 1956.** Interpretation of fatigue strengths for combined stresses. Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 184-194.
- [26] **Z. Hashin, 1981.** Fatigue failure criteria for combined cyclic stress. *Int. J. Fracture*, Vol. 17, N° 2, pp. 101-109.
- [27] **H. Altenbach, A. Zolochovski, 1994.** A unified model of low cycle fatigue damage. Fourth International Conference on Biaxial / Multiaxial Fatigue, Paris, May 31-June 3, Vol. 2, pp. 117-128.
- [28] **M. Fogue, 1987.** Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, N°ordre 87 ISAL 0030, 189 p.
- [29] **H. Kakuno and Y. Kawada. 1979.** A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*
- [30] **I.V. Papadopoulos, 1987.** Fatigue polycyclique des métaux: une nouvelle approche. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 18 décembre 1987, 443 p.
- [31] **I.V. Papadopoulos, 1993.** Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions – The microscopic approach. Technical Note N°I.93-101, (ISPRA) : Commission of the European Communities, Joint Research Centre, ISEI/IE 2495/93, 46 p.
- [32] **YS. Garud, 1981.** A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. *J Eng Mater Technol, Trans ASME* ,103:118–25.
- [33] **D. Lefebvre, K. W. Neale, F. Ellyin. 1981.** A criterion for low-cycle fatigue failure under biaxial states of stress. *J Eng Mater Technol, Trans ASME*,103:1–6.
- [34] **H. Nowack, D. Hanschmann , W. Ott, K. H. Trautmann, E. Maldfeld, 1997.** Crack initiation life behavior under biaxial loading conditions: experimental behavior and prediction. In: Kalluri S, Bonacuse PJ, editors. *Multiaxial fatigue and deformation testing techniques*, ASTM STP 1280. Philadelphia, PA: American Society for Testing and Materials, pp:159–83.

## Références bibliographiques

---

- [35] **W. Ott, O. Baumgart, K. H. Trautmann, H. Nowack, 1996** A new crack initiation life prediction method for arbitrary multiaxial loading considering mean stress effect. In: Proc Sixth Int Fatigue Congress, FATIGUE 96, Berlin, 1007–112.
- [36] **K. Golos, F. Ellyin, 1988** A total strain energy density theory for cumulative fatigue damage. *J Pressure Vessel Technol, Trans ASME* 1988;110:36–41.
- [37] **F. Ellyin, Z. Xia, 1993.** A general fatigue theory and its application to out-of-phase cyclic loading. *J Eng Mater Technol, Trans ASME* ;115:411–6.
- [38] **C. Froustey, S. Lasserre, and L. Dubar, 1992.** Essais de fatigue multiaxiaux et par blocs, validation d'un critère pour les matériaux métalliques. In L. Castex, G. Pluvinaud, and L. Vincent, editors, *Mat-Tec 92*, pages 79–85. Institute for Industrial Technology Transfer.)
- [39] **L. Palin, 1996.** Fatigue multiaxiale d'une fonte GS sous sollicitations combinées d'amplitude variable. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, France, (261 p.).
- [40] **F. Ellyin, 1988.** Cyclic strain energy density as a criterion for multiaxial fatigue failure, dans : M. Brown, K.J. Miller, *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, Mechanical Engineering Publications Ltd., London, pp. 571-583.
- [41] **Z. Xia, D. Kujawski, F. Ellyin, 1996.** Effect of mean stress and ratcheting strain on fatigue life of steel, *International Journal of Fatigue*, 18, 5, pp. 335-341.
- [42] **Z. Xia, F. Ellyin, 1998.** Multiaxial fatigue of an alumina particle reinforced aluminum alloy, *International Journal of Fatigue*, 20, 1, pp. 51-56.
- [43] **G. Tao, Z. Xia, 2007.** Mean stress/strain effect on fatigue behavior of an epoxy resin, *International Journal of Fatigue*, 29, pp. 2180-2190.
- [44] **G. Tao, Z. Xia, 2009** Biaxial fatigue behaviour of an epoxy polymer with mean stress effect, *International Journal of Fatigue*, 31, pp. 678-685.
- [45] **D. Kujawski, F. Ellyin, 1995.** A unified approach to mean stress effect on fatigue threshold conditions, *International Journal of Fatigue*, 17, 2,, pp. 101-106.
- [46] **F. Ellyin, H. El-Kadi, 1990** A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Composite Laminae, *Composite Structures*, 15, pp. 61-74.

## Références bibliographiques

---

- [47] **Y. Garud, 1981.** A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. Trans. of the ASME, 103 :118{125).
- [48] **G. Glinka, G. Shen, and A. Plumtree, 1995.** A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 18(1) :37{46).
- [49] **G Glinka, G. Wang, A. Plumtree, 1995.** Mean stress effects in multiaxial fatigue. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 18 :755{764).
- [50] **E. Macha, C.M. Sonsino, 1999.** Energy criteria of multiaxial fatigue failure. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 22 :1053{1070).
- [51] **W. N. Findley, 1957.** Fatigue of Metals Under Combinations of Stresses, Transactions of ASME (vol. 79).
- [52] **T. Yokobori, T. Yoshimurat, 1966.** A criterion for fatigue fracture under multiaxial alternating stress state. Institute for Strength and Fracture of Materials, Tohoku University, Sendai, Japan, Report of Research.
- [53] **D. L. McDiarmid, 1973.** A general criterion of fatigue failure under multiaxial stress. Proceedings of Second International Conference on Pressure Vessel Technology, American Society of Mechanical Engineers, San Antonio, Texas, U.S.A, Vol. II-61, pp. 851-862.
- [54] **D. L. McDiarmid, 1974.** A new analysis of fatigue under combined bending and twisting. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 78, N° 763, pp. 325-329.
- [55] **B. Kenmeugne, 1996.** Contribution à la modélisation du comportement en fatigue sous sollicitations multiaxiales d'amplitude variable. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon. No ordre 96 ISAL 0064.
- [56] **M. Jabbado, 2006.** Fatigue polycyclique des structures métalliques: durée de vie sous chargements variables. Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique.
- [57] **B. Weber, A. Carmet, B. Kenmeugne, J. L. Robert, 1999,** On a global stress based approach for fatigue assessment under multiaxial random loading. In Engineering Against Fatigue, J. Beynon, M. Brown, R. Smith, T. Lindley, and B. Tomkins, Eds., pp. 407–414.

## Références bibliographiques

---

- [58] **B. Weber, A. Carmet, B. Keneugne, J. L. Robert, 1999.** A stress based approach for fatigue assessment under multiaxial variable amplitude loading. In *Multiaxial Fatigue and Fracture*, ESIS 25, E. Macha, W. Bedkowski, and T. Lagoda, Eds., pp. 218–233.
- [59] **K. Dang Van, 1973.** Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et techniques de l'Armement*, N° 47, 3ème fascicule, pp. 641-722.
- [60] **K. Dang, Van, G. Cailletaud, J. F. Flavenot, L. Douaron, H. P. Lieurade, 1998** Criterion for high-cycle fatigue failure under multiaxial loading. In *Biaxial and Multiaxial Fatigue* (Sheffield), M. Brown and K. Miller, Eds., pp. 459–478.
- [61] **J. Papuga, M. Ružička, 2008,** Two new multiaxial criteria for high cycle fatigue computation, *International Journal of Fatigue*, 30(1), 58-66.
- [62] **M. A. Miner, 1945.** Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, pp159-164.
- [63] **P. Xavier, 2001.** Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles.
- [64] **S. M. Marco, W. L. Starkey, 1954.** A concept of fatigue damage. *Trans. ASME*, vol 76, n° 4, pp. 627-632.
- [65] **D. L. Henry, 1955.** A theory of fatigue damage accumulation in steel. *Trans. of the ASME*, pp.913-918.
- [66] **R. R. Gatts, 1961.** Application of cumulative damage concept to fatigue. –*Journal of basic Engineering*, *Trans, ASME*,, pp. 529-540
- [67] **S. S. Manson, J. C. Freche, S. R. Ensign, 1967.** Application of a double linear damage rule to cumulative fatigue. In *Fatigue Crack Propagation*, ASTM STP 415. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp, 384-412.
- [68] **J.-L. Chaboche, P. Kanouté, M. Kaminski. 2009.** Extension and application of a non-linear fatigue damage accumulation rule for variable amplitude loading programs. 2nd International Conference on Material and Component Performance under Variable Amplitude Loading. Darmstadt, Germany.

## Références bibliographiques

---

- [69] **J. Dubuc, T Bui Quoc, A. Bazergui, A Biron, 1971.** Unified Theory of Cumulative Damage in Metal Fatigue, WRC Bulletin n°162 , p20.
- [70] **J. L. Chaboche, 1974.** Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. Revue Française de Mécanique, N°50-51, pp.71.72.
- [71] **J . L Chaboche, 1978.** Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement- Journal Mécanique appliquée, vol.2 n°3, pp. 317-365.
- [72] **M. Chaudonneret, J. L. Chaboche 1986.** Fatigue life prediction of notched specimens International Conference on Fatigue of Engineering Materials and Structures, University of Sheffield (U.K) pp 503.509.
- [73] **J. L. Chaboche, 1988.** Mécanique des Matériaux Solides, - paris Edition DUNOD, p527
- [74] **B. Kenmeugne, 1996.** Contribution à la modélisation du comportement en fatigue sous sollicitations multiaxiales d'amplitude variable. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, p.258.
- [75] **D. Kujawski, F. Ellyin, 1984.** A cumulative damage theory of fatigue crack initiation and propagation. -International Journal of Fatigue, pp.83-88.
- [76] **K. Golos, F. Ellyin. 1987.** Generalization of cumulative damage criterion to multilevel cyclic loading.-Theoretical and Applied Fracture Mechanics, pp 169-176.
- [77] **N. Kimtangar. 2003.** Contribution à l'étude des lois d'endommagement en fatigue. Thèse de doctorat, de L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. p. 31.
- [78]**G. Mesmacque, S. Garcia, A. Amrouche, C. Rubio-Gonzalez, C. 2005.** Sequential law in multiaxial fatigue, a new damage indicator. International Journal of Fatigue, ,(27):461-467.
- [79] **A. AID, 2006.** Cumul d'endommagement en fatigue multiaxiale sous sollicitations variables, Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes De Sidi-Bel-Abbes.
- [80] **A. Aid, A. Amrouche B.A. Bachir, M. Benguediab 2011.** Fatigue life prediction under variable loading based on a new damage model. Materials & Design, 2011, 32(1):183–191.
- [81] **A. Aid, M. Bendouba, L. Aminallah, A. Amrouche, N. Benseddiq, M. Benguediab. 2012.** An equivalent stress process for fatigue life estimation under multiaxial loadings based

## Références bibliographiques

---

on a new non linear damage mode. *Materials Science and Engineering: A*, Volume 538, 15, 20-27.

[82] **K. N. SMITH, P. WATSON and T. H. TOPPER, 1970.** A stress-strain function for the fatigue of metals, *J. Mater.*, Vol. 5, pp. 767–776

[83] **Hoffman H., Seeger T ,1989.** Stress strain analysis and life predictions of a notched shaft under multiaxial loading, *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, AE-14, eds., G.E., Leese and D. Socie, Society of Automative Engineers, Inc., Warrendale, USA, pp. 81–99

[84] **Bergman J., Seeger T.1979.** On the influence of cyclic stress-strain curves, damage parameters and various evaluation concepts on the life prediction by the local approach. *Proc. 2nd European Coll. On Fracture*, Darmstadt, Germany, VDI-Report of Progress, Vol. 18, No.6.

[85] **W Ramberg, W.R. Osgood, 1943.** Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC.

[86] **M. Klesnil a kol, 1987. :** Cyclical Deformation and Metal Fatigue, VEDA/vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied Bratislava.

[87] **J. Mazúr, V. Dekýš, R. Melicher, 2006. :** Optimization Method Application for the Material Characteristics Identification, *Acta Mechanica Slovaca*, 4-B, str. 229-238.

[88] **K. Molski, Glinka G, 1981.** A Method of Elasto-Plastic: Stress and Strain Calculation at a Notch Root. *Materials Science and Engineering N<sup>o</sup>50*, pp. 93-100.

[89] **G. Glinka, A. Moftakhar, A Buczynsky, 1993 .** Calculation of Elasto-plastic Strains and Stresses in Notched Bodies under Multiaxial Cyclic Loading. *Fatigue '93*.

[90] **G. Glinka, 1985.** Calculation of Inelastic Notch-Tip Strain-Stress Histories under Cyclic Loading. *Eng. Fracture Mech.*

[91] **T. Lagoda, E. Macha, 1998.** A Review of High-Cycle Fatigue Models under Non-Proportional Loadings, in: *Fracture from Defects*, Proceedings of ECF-12, Sheffield, M.W. Brown, E.R. de los Rios and K.J. Miller, eds., EMAS, Vol. I, pp. 73–78.

## Références bibliographiques

---

- [92] **T. Lagoda, E. Macha, 1998.** Energetic approach to fatigue under combined bending with torsion of smooth and notched specimens, presented in 3rd annual meeting of Copernicus Contract CIPA CT940194 and 6th International Scientific Conference „Achievements in the Mechanical and Materials Engineering, Miscolc – Hungary, Proceedings, T. Laszlo, ed., Miscolc, pp. 53–64.
- [93] **T. Lagoda, E. Macha, 2000.** Fatigue lives under biaxial random loading according to normal stress, strain and strain energy density in the critical plane, Life Assessment and Management for Structural Components, Proceedings of the Conference, ed., V.T. Troshenko, Kijów, Tom 1, pp. 119–124.
- [94] **T. Lagoda, 2008.** Lifetime Estimation of Welded Joints. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [95] **G.E. Leese, D Socie, 1989.** Multiaxial fatigue: analysis and experiments. Ae-14;. ISBN: 0-89883:780-784.
- [96] **C. Baum, W. Ott, A. Buczynski, K .K. Trautmann, H Nowack, 2003.** Further evaluation of the advanced prediction method EVICD for arbitrary multiaxial loading. In: First int conference on fatigue damage of materials—experiment and analysis, Toronto, Canada, 14–16.
- [97] **J. Szusta, A. Seweryn, 2011.** Fatigue damage accumulation modelling in the range of complex low-cycle loadings – The strain approach and its experimental verification on the basis of EN AW-2007 aluminum alloy. International Journal of Fatigue, 33 pp.255-264.
- [98] **D.G. Pavlou. 2002,** A phenomenological fatigue damage accumulation rule based on hardness increasing, for the 2024-T42 aluminum. Engineering Structures, vol. 24, pp.1363-1368.
- [99]**G. F. Anago. 2000.** Endommagement par fatigue de l'aluminium : Cas des alliages 1200 et 5005, Thèse de doctorat de l'Université nationale du Bénin, p.184.
- [100] **L.P. Borrego a,\* , F.V. Antunes b, J.M. Costa b, J.M. Ferreira b, 2006.** Mixed-mode fatigue crack growth behaviour in aluminium alloy, International Journal of Fatigue., p.619.
- [101] **A. Banvillet, 2001.** Prévion de la vie en fatigue multiaxiale sous chargement réel : vers des essais accélérés. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.



## Références bibliographiques

---

- [102] **J. Bannantine, 1989.** A variable amplitude fatigue life prediction method. PhD thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, p 270.
- [103] **A. Fatemi, D. Socie, 1988.** A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.*, 11, 3, 149–165.
- [104] **Wang, M. Brown, 1994.** M. A study of the deformation behavior under multiaxial loading. *Eur. J. Mechanics, A/Solids*, 13, 2, 75–188.
- [105] **F. MOREL, 1996.** Fatigue multiaxiale sous chargement d’amplitude variable. Thèse de doctorat, ENSMA de Poitiers, France, . (210 p.).
- [106] **D. Socie, 1993.** Critical plane approaches for multiaxial fatigue damage assessment. In *Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP 1191, pp. 7–36.
- [107] **V.D. Larac, D.J. Smith, M.J. Pavier.** 2001. effect of cold expansion on fatigue crack growth from open holes at room and high temperature, *International Journal of Fatigue*, 23: 161– 170.
- [108] **S. Pasta.** 2007. Fatigue crack propagation from a cold-worked hole. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007; 74:1525-1538.
- [109] **American Society for Testing and Materials – ASTM.** 1978. Designation E 647-88a: Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates.
- [110] **M. Bendouba, A. Aid, A. Benhamena, M. Benguediab.** 2012. Effect of hardening induced by cold expansion on damage fatigue accumulation and life assessment of Aluminum alloy 6082 T6. *bMat. Res.* vol.15 no.6. <http://dx.doi.org/10.1590/S1516-14392012005000123>

# Liste des figures

## Chapitre I

**Figure I.01** : Les différentes phases de fatigue.

**Figure I.02** : Les stades de propagation de la microfissure.

**Figure I.03** : Les différents types de signaux.

**Figure I.04** : Types de Cycles de contraintes.

**Figure I.05** : Exemple de la courbe de Wöhler et les trois domaines d'endurance.

**Figure I.06** : Diagramme de Haigh.

**Figure I.07** : Diagramme de Haig. Représentation de Gerber, Goodman et Söderberg.

**Figure I.08** : Principe de similitude avec la même valeur de  $S_{max}$ .

**Figure I.09** Courbes de S-N correspondant à des éprouvettes de même section nette mais de  $K_t$  différent

**Figure I.10** : Effet de l'eau salée sur la courbe S-N.

**Figure 1.11** : Cycles de contrainte-déformation.

**Figure 1.12** : Exemple de données aléatoires de contraintes.

**Figure I.13** : Définition pratique de la méthode de Rainflow.

## Chapitre II

**Figure II.01** : Types de sollicitation utilisée en fatigue multiaxiale (a) Torsion- flexion. (b) Traction-pression interne (c)Traction-torsion-pression interne. (d) traction biaxiale.

**Figure II.02** : Orientation du plan critique  $Pc$  au point  $O$  considère

**Figure II.03** : Définition des termes relatifs à la contrainte de cission.

**Figure II.04** : Classification des critères multiaxiaux de fatigue.

**Figure II.05** : Principe de représentation de l'ensemble des plans physiques passant par un point P à l'aide d'une sphère de rayon unité.

**Figure II.06** : Contrainte normale choisie comme variable de comptage.

**Figure II.07** : Illustration de l'estimation du champ de contraintes résiduelles  $\underline{\rho}$ .

## Chapitre III

**Figure III.01** : Présentation de la méthode des nombres de cycles équivalents.

**Figure III.02** : Modélisation de la loi de comportement  $\sigma, \varepsilon$  lors du  $n^{\text{ème}}$  cycle de sollicitation.

**Figure III.03** : Interprétation du dommage en fatigue à deux niveaux de contrainte.

**Figure III.04** : Cumul de dommage pour des essais à deux niveaux de contrainte.

## Liste des figures

---

**Figure III.05** : Elément de volume fini isolé.

**Figure III.06** : Courbe maitresse des boucles d'hystérésis d'un matériau de type non Masing.

**Figure III.07** : Définition des paramètres utilisés dans la loi de la contrainte endommagée

### Chapitre IV

**Figure IV.01** : Représentation de la courbe W-N et la loi d'énergie.

**Figure IV.02** : Algorithme de cumule de dommage et estimation de durée de vie.

**Figure IV.03** : Comparaison entre la prévision théorique du modèle proposé et les résultats expérimentaux [95] : a) chargement uniaxial de traction-compression, b) Torsion est les erreurs relative de prévision (ERP %) correspondantes.

**Figure IV.04** : a) Comparaison entre la prévision théorique du modèle proposé et les résultats expérimentaux, b) les erreurs relative de prévision (ERP %) correspondantes.

**Figure IV.05** : Comparaison des durées de vie calculées (par la méthode classique) et de celles obtenues expérimentalement.

**Figure IV.06** : Comparaison des durées de vie calculées et de celles obtenues expérimentalement.

**Figure IV.07** : Courbe  $W - N$  de l'alliage l'aluminium Al-2024.

**Figure IV.08** : Erreurs relatives de prévision de durée de vie totale pour les chargements Bas-Haut appliqués à l'alliage d'aluminium Al-2024.

**Figure IV.09** : Représentation des résultats expérimentaux de Pavlou de premier chargement bas-haut et comparaison avec les prédictions des modèles.

**Figure IV.10** : Courbe  $W - N$  de l'alliage d'aluminium Al 5005.

**Figure VI.11** : Accumulation de l'endommagement en fonction de nombre de cycles.

**Figure VI.12** : Exemple de conditions de chargement aléatoire par bloc.

**Figure VI.13** : Erreurs relatives de prévision de durée de vie totale pour les chargements appliqués à fonte GS61.

**Figure IV.14** : Comparaison des durées de vie expérimentales et estimés pour les essais sous chargements aléatoire par blocs.

**Figure IV.15** : Evolution de cumule de l'endommagement des trois spectres appliqués à la fonte GS61.

**Figure IV.16** : Géométrie et dimensions de modèle.

**Figure IV.17** : Courbe contrainte-déformation de l'aluminium 6082.

**Figure IV.18** : Maillage de modèle géométrique.

## Liste des figures

---

- Figure IV.19** : Etat de contrainte de Von Miss.
- Figure IV.20** : Le tour des cinq boites.
- Figure IV.21** : Courbe S-N de l'alliage d'aluminium 6082.
- Figure IV.22** : Courbe  $W - N$  de l'alliage d'aluminium 6082
- Figure IV.23** : Programme de chargement par blocs croissants.
- Figure IV.24** : Progression de l'endommagement au cours de la durée de vie optimisé du modèle énergétique des essais (essai 1 jusqu' a l'essai 6).
- Figure IV.25** : Signal de chargement aléatoire appliqué à l'essai 01.
- Figure IV.26** : Résultat du comptage Rainflow appliqué sur le spectre de la figure VI.25.
- Figure IV.27** : Programme de chargement par blocs après reconstruction.
- Figure IV.28** : Distribution de l'endommagement sur le modèle géométrique.
- Figure IV.29** : Prévision de durée de vie de l'éprouvette de l'essai 01.
- Figure IV.30** : Erreurs relatives de prévision de durée de vie pour les chargements aléatoire des essais (1-6).
- Figure IV.31** : Evaluation de l'endommagement en fonction de la durée de vie par le modèle proposé pour les essais (essai1 jusqu' a l'essai 6).
- Figure IV.32** : Distribution du dommage obtenu pour le chargement aléatoire de l'essai 06.
- Figure VI.33**: Chargement de flexion plane et de torsions combinées a1), représentation de l'histoire du chargement en fonction des paramètres de l'énergie de déformation, a2) série N<sup>0</sup>01, a3b) série N<sup>0</sup>02, a4) série N<sup>0</sup>03, a5) série N<sup>0</sup>04.
- Figure VI.34**: Comparaison des durées de vie prévues et expérimentales pour les essais de flexion plane et torsion combinées.
- Figure VI.35** : Comparaison des erreurs relatives de prévision des critères étudiés pour les essais de flexion plane et torsion combinées.
- Figure IV.36** : Processus d'expansion du trou percé.
- Figure IV.37** : Géométrie et les dimensions de l'éprouvette de fatigue.
- Figure VI.38** : courbe de Wöhler des éprouvettes avec et sans expansion.
- Figure VI.39** : Maillage du modèle et bille rigide.
- Figure VI.40** : Evolution des contraintes résiduelles circonférentielles au cours de l'expansion. a) face d'entre, b) bille au milieu de trou, c) face de sortie.
- Figure IV.41** : Distribution des contraintes résiduelles circonférentielles dans le modèle 3D
- Figure IV.41** : Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux pour différentes conditions de chargement.

# Liste des tableaux

## Chapitre I

**Tableau I.1 :** Quelques modèles mathématiques de la courbe S-N.

## Chapitre IV

**Tableau IV.1 :** Résultats des essais expérimentaux et prédiction pour l'acier SAE 1045 sous :  
a) chargement uniaxial de traction-compression ; b) Torsion.

**Tableau IV.2 :** Résultats des essais expérimentaux et prédiction pour l'acier L290GA.

**Tableau IV.3 :** propriétés mécanique et paramètres de fatigue du l'alliage  
d'aluminium EN AW-2007 [95]

**Tableau IV.4 :** Résultats expérimentaux (essai de fatigue traction-compression) et théoriques  
obtenus avec le modèle proposé.

**Tableau IV.5 :** Récapitulatif des résultats de Pavlou et les différents résultats obtenus par les  
lois d'endommagement.

**Tableau IV.6 :** Durée de vie des lois et erreurs relatives correspondantes.

**Tableau IV.7 :** Conditions de chargement et durée de vie expérimentale, et prévisions des  
modèles.

**Tableau IV.8 :** Conditions de chargement, résultats expérimentaux et les prédictions de  
durée de vie des lois d'endommagements.

**Tableau IV.9 :** Caractéristiques mécaniques de l'alliage d'aluminium 6082.

**Tableau IV.10 :** Propriétés de fatigue de l'alliage d'aluminium 6082.

**Tableau IV.11 :** Durées de vie totales, prévus par les modèles d'endommagement et les  
erreurs relatives correspondantes.

**Tableau IV.12 :** Récapitulatif des résultats (durées de vie et les erreurs relatives  
correspondantes).

**Tableau VI.13 :** Conditions de chargement et résultats des essais sinusoïdaux de flexion  
plane et de torsion ( $R=-1$ ) combinées à même fréquence et à fréquences  
différentes.

**Tableau VI.14:** Durées de vie prévues par les méthodes de calcul et durées de vie  
expérimentales Médiannes pour les essais combinés de flexion plane et  
torsion.

**Tableau IV.15:** Composition chimique de l'Al 6082-T6.

**Tableau IV.16 :** Propriétés mécaniques de l'alliage d'Al 6082 T6.

**Tableau VI.17 :** Conditions expérimentales.

## Liste des tableaux

---

**Tableau VI.18 :** Les résultats expérimentaux pour deux blocs de chargement.

**Tableau VI.19 :** Les résultats expérimentaux pour quatre blocs de chargement.



# Notations

## Notations

---

$a$  : constante dans les équations des courbes S-N selon les auteurs.

$b$  : constante dans les équations des courbes S-N selon les auteurs.

$D$ : endommagement.

$P_H$  : pression hydrostatique

$N_{Ri}$  : nombre de cycles à la rupture.

$\sigma_m$  : contrainte moyenne.

$\sigma_a$  : amplitude de contrainte.

$\sigma_{aeq}$  : contrainte alternée équivalente.

$\sigma_{D0}$  : limite d'endurance du matériau vierge.

$\sigma_D$  : limite d'endurance instantanée.

$R_m$  : contrainte maximale de traction.

$\sigma_u$  : contrainte ultime de traction.

$\sigma_{-1}$  : Limite d'endurance en traction alternée symétrique.

$R_m$  : Résistance maximale à la traction.

$R$  : rapport de charge.

$\beta$  et  $C$  : constantes de l'équation de Basquin.

$A, B$  et  $C$  : constantes de l'équation de Bastenaire.

$\beta_i$  : fraction de durée de vie.

$m_i$  : exposant de loi de Marco et Starkey.

$p$  : constante de la loi de Mansan et al.

$\gamma_u$  : résistance ultime additionnelle pour la théorie Unifiée.

$m$  : exposant de la théorie Unifiée.

$\alpha, \beta, a$  et  $M_0$  : constantes de la loi de Lmaitre et Chaboche.

$\Delta W^*$  : limite de fatigue réduite selon Ellyin.

$\xi$  : exposant de loi d'Ellyin.

$\sigma_{ed}$  : contrainte endommagée.

$\sigma_{equiv}$  : contrainte équivalente pour le modèle de la contrainte endommagée.

## Notations

---

ERP : erreur relative de prédiction.

HV : dureté Vickers.

Re : limite d'élasticité à 0,2%

E : module de Young.

K : module d'écrouissage monotone.

MEF : méthode des éléments finis.

$\sigma_f'$  : Coefficient de résistance à la fatigue,

$\varepsilon_f'$  : Coefficient de ductilité de fatigue,

$\nu$  : coefficient de Poisson.

$w_a$  : énergie de déformation.

$w_u$  : énergie ultime

$w_{eq}$  : énergie équivalente

$n_f$  : nombre de cycles à rupture

$\varepsilon$  : déformation

$\varepsilon_a^e$  : déformation élastique.

$\varepsilon_a^p$  : déformation plastique.

$I_1$  : Valeur moyenne du premier invariant du tenseur contraintes.

$I_1$  : Amplitude du premier invariant du tenseur contraintes.

$P_{hm}$  : pression hydrostatique moyenne

$P_{ha}$  : amplitude de la pression hydrostatique

$I_2$  : deuxième invariant du tenseur contraintes.

$J_{2a}$  : amplitude du deuxième invariant du déviateur du tenseur de contrainte.

$T_{oct,a}$  : contrainte de cisaillement octaedral alterné.

$\Sigma_H$  : maximum sur un cycle de la contrainte hydrostatique.

# Résumé

## Résumé

---

### Résumé

La connaissance des causes de l'endommagement des matériaux est une priorité absolue pour les ingénieurs de conception afin d'éviter la rupture soudaine des équipements en service. L'une des raisons les plus importantes de la rupture des matériaux est la fatigue, ce phénomène peut être défini comme l'endommagement du métal sous contraintes répétées et inférieure à la limite d'élasticité. Nous avons cité dans cette thèse, les facteurs influençant sur la durée de vie des structures, en plus les lois d'endommagements les plus utilisées qui permettent de prédire la durée de vie des matériaux. L'objectif essentiel de cette étude est la mise en place d'un modèle d'endommagement basé sur l'énergie de déformation, ensuite la validation de cette proposition par des résultats de la bibliographie ainsi une comparaison avec d'autres lois d'endommagement. La majorité des résultats obtenus par notre proposition donne des résultats conservatifs. Un autre objectif est visé, il s'agit de la simulation de l'essai de la fatigue ainsi que le processus de l'expansion à froid pour réparer les structures fissurées, une comparaison entre notre proposition et des résultats expérimentaux est faite.

### Mots clé :

Endommagement, fatigue, critère énergétique, état de contraintes multiaxiales, expansion

# **Abstract**

# Abstract

---

## Abstract

The Knowledge of the causes of damage of materials is a priority for design engineers to avoid sudden failure of equipment in service. One of the most important reasons for the failure of materials is fatigue, this phenomenon can be defined as damage to the metal under repeated stress and lower than the yield stress. We mentioned in this thesis, the factors influencing the life of structures and the most commonly used for predicting life of materials in service. The main objective of this study is the development of a damage model based on the strain energy, then validating this proposal by the results of the literature and a comparison with other rules of damage. The majority of the results obtained by our proposal gives conservative results. Another objective is concerned, it is the simulation of the fatigue test and the process of cold expansion to repair cracked structures, a comparison between our proposal experimental results is made.

## Keywords:

Damage, fatigue, energy criterion, multiaxial stress state, expansion.

ملخص



إن معرفة الأسباب الكامنة و راء قصور المواد و فشلها يمثل أولوية قصوى بالنسبة لمهندسي التصميم من أجل تفادي الكسر المفاجئ للأجهزة و المعدات لضمان عدم إنهيارها تحت ظروف العمل. و من أهم أسباب الإنهيار المفاجئ للمواد ، نذكر الكلال الذي يمكن تعريفه بأنه فشل للمعدن تحت الاجهادات الصغيرة المتكررة و في إتجاهات متعددة التي لا ترقى إلى قيمة مقاومة الخضوع الحدية.

لقد تناولنا في هذا البحث أهم الأسباب المتحكمة في هذه الظاهرة بالإضافة إلى أهم القوانين التي تنتبأ بعمر المواد. تهدف هذه الدراسة إلي تقديم قاعدة جديدة للتنبؤ تعتمد على طاقة الانفعال الهندسي ، و مقارنتها بقوانين أخرى لمعرفة مدى نجاعتها. لقد أظهرت أغلب النتائج المحصل عليها أن هذه القاعدة تقدم أعمار تحفظية (عمر الأمان) أي أنها أصغر من النتائج التطبيقية.

لم تقتصر الدراسة علي تقديم هذه القاعدة بل تعدتها إلي المحاكاة الرقمية لاختبار الكلال و كذلك عملية التوسيع في درجة الحرارة العادية للهياكل التي تحتوي على صدع من أجل إطالة مدة استخدامها. لقد قمنا في هذا البحث بمقارنة النتائج المتحصل عليها بالنتائج السابقة.

### مفاتيح:

التلف , الكلال , طاقة الانفعال الهندسي , الاجهادات المتعددة الأبعاد , التوسيع