

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : **BOUGUENINA Oubi**

Intitulé de la thèse

Analyse de la stabilité des plaques FGM avec des épaisseurs variables

Composition du jury :

ADDA BEDIA El Abbas	Pr	Président	UDL SBA
BELAKHDAR Khalil	MCA	Directeur de thèse	CU DE TAMANRASSAT
TOUNSI Abdelouahed	Pr	Co-Directeur de thèse	UDL SBA
FEKRAR Abdelkader	MCA	Examineur	UDL SBA
YEGHNEM Redha	MCA	Examineur	U DE SAIDA
KACI Abdelhakim	MCA	Examineur	U DE SAIDA
AIT ATMANE Hassen	MCA	Invité	U DE CHLEF

Année universitaire 2015-2016

Remerciement

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés. Je remercie Monsieur le Professeur **ADDA BEDIA El Abbas** de m'avoir accueilli dans ce laboratoire et de l'intérêt constant qu'il a accordé à cette thèse.

J'exprime mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, Monsieur **BELAKHDAR Khalil** et Monsieur **TOUNSI Abdelouahed** dont l'aide précieuse qui m'a été indispensable sur le plan scientifique. Je tiens également à les remercier pour la confiance et la sympathie qu'ils m'ont témoignées au cours de ces quatre années de thèse.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur **ADDA BEDIA El Abbas** Directeur de Laboratoire des Matériaux et Hydrologie et professeur à l'Université Djillali Liabès de SIDI BEL-ABBES, d'avoir accepté de présider le jury et également Messieurs **FEKRAR Abdelkader**, **YEGHNEM Redha**, **KACI Abdelhakim** et **AIT ATMANE Hassen** qui m'ont fait l'honneur de juger la présente thèse.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LMH, doctorants, permanents ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces quatre années une belle étape de ma vie.

Enfin, toutes les personnes qui ont apporté leur aide à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de mes remerciements.

ملخص

في هذه المذكرة نتعرض لدراسة الانبعاج الحراري لصفائح ذات خصائص مادية متغيرة في اتجاه الارتفاع وسمك متغير، مرتكزة على دعائم بسيطة، باستعمال طريقة الفروق المحدودة.

أولا نقوم باستخراج المعادلة التفاضلية التي تتحكم في استقرار الانبعاج الحراري للصفحة تحت تأثير حرارة موزعة بانتظام على سمك الصفحة، بعد ذلك نقوم بحل هذه المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة رقمية، و ذلك بإدراج طريقة الفروق المحدودة، للتأكد من مدى قدرات هاته الطريقة لحل مثل هاته الحالات نقوم بمقارنتها مع الحلول بالطرق التحليلية.

بعد التأكد من الطريقة المقترحة باستعمال الفروق المحدودة، نقوم بإدراج خاصية تغير سمك الصفحة في معادلات الفروق المحدودة. لمعرفة مدى ملائمة هذه الطريقة نقوم بمقارنة النتائج المحصل عليها مع النتائج الموجودة باستعمال الطرق التحليلية و قد لاحظنا ان هاته الطريقة المقترحة اعطت نتائج جد مرضية.

في الأخير نسرر دراسة و مناقشة مدى تأثير بعض الخصائص مثل الابعاد، السمك و معامل تغير المواد داخل الصفحة على درجة الحرارة الحرجة لحصول انبعاج الصفائح المتدرجة وظيفيا.

الكلمات مفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفيا ذات سمك متغير، الانبعاج الحراري، معاينة الاستقرار، طريقة الفروق المحدودة، الطرق الرقمية.

Résumé

Dans cette recherche une solution numérique en utilisant la méthode des différences finies pour évaluer le flambement thermique d'une plaque FGM simplement appuyée avec une épaisseur variable est présentée. Tout d'abord, l'équation différentielle régissant la stabilité thermique au flambement d'une plaque soumise à une température uniforme à travers l'épaisseur de la plaque est dérivée. Ensuite, l'équation régissant a été résolu en utilisant la méthode des différences finies. Après validation de la méthode numérique présentée à la solution analytique, la formulation des différences finies a été étendue afin d'inclure la variation d'épaisseur. La précision de la méthode des différences finies pour analyser le flambement thermique des plaques avec épaisseur variable a également été comparée aux résultats rapportés à la littérature où un bon accord a été trouvé. En outre, une étude paramétrique a été menée pour analyser l'effet des paramètres matériels et géométriques sur la résistance au flambement thermique des plaques FGM. On a constaté que la variation de l'épaisseur des plaques affecte un peu plus les plaques isotropes que les plaques FGM.

Mots-clés : plaque FGM d'épaisseur variable ; flambement thermique ; analyse de la stabilité ; différences finies ; méthode numérique.

Abstract

A numerical solution using finite difference method to evaluate the thermal buckling of simply supported FGM plate with variable thickness is presented in this research. First, the governing differential equation of thermal stability under uniform temperature through the plate thickness is derived. Then, the governing equation has been solved using finite difference method. After validating the presented numerical method with the analytical solution, the finite difference formulation has been extended in order to include variable thickness. The accuracy of the finite difference method for variable thickness plate has been also compared with the literature results where a good agreement has been found. Furthermore, a parametric study has been conducted to analyze the effect of material and geometric parameters on the thermal buckling resistance of the FGM plates. It was found that the thickness variation affects isotropic plates a bit more than FGM plates.

Keywords: FGM plate with variable thickness; thermal buckling; stability analysis; finite difference; numerical method.

Table des matières

ملخص	II
Résumé.....	III
Abstract.....	IV
Table des matières.....	V
Liste des Figures	VII
Liste des Tableaux	XI
Liste des Notations.....	XII
Introduction Générale	1
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Définition et Historique des FGM	6
I.3. Application des Matériaux FGM	9
I.4. Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM	10
I.4.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	11
I.4.2. Coulage en bande (Tape casting)	12
I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement).....	12
I.4.4. Coulée par centrifugation.....	12
I.4.5. Projection plasma	13
I.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)	13
I.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	15
I.4.8. Dépôt par électrophorèse.....	16
I.5. Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM.....	17
I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	19
I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	19
I.5.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	20
I.6. Conclusion	21
Chapitre II : Formalisme Conceptuel De La Stabilité Des Plaques FGM.....	22
II.1. Introduction.....	22
II.2. Notions de la Stabilité des Structures	22
II.3. Définition du Phénomène de Flambement (Voilement)	23
II.4. Aspect Historiques sur le Phénomène de Voilement	25
II.5. Quelques Etudes de la Stabilité des Plaques FGM	26
II.5.1. Méthodes analytiques.....	27
II.5.2. Méthodes des éléments finis (MEF).....	28
II.5.3. Méthodes semi-analytiques ou approcher	29

II.6. La Méthode des Différences Finies (MDF)	29
II.6.1. Principe de la méthode des différences finies	29
II.6.2. Application de la méthode des différences finies à l'analyse des plaques	31
II.7. Conclusion	33
Chapitre III : Analyse Du Flambement Thermique Des Plaques FGM Par La MDF	34
III.1. Introduction.....	34
III.2. Formulation Mathématique.....	34
III.2.1. Champ de déformation.....	36
III.2.2. Relations contraintes déformation.....	37
III.2.3. Equation des forces et moments.....	37
III.2.4. Equation d'équilibre.....	39
III.2.5. Solution analytique de l'équation différentielle	41
III.3. Solution de l'équation différentielle	41
III.4. Analyse du Flambement Thermique d'une Plaque FGM Avec Epaisseur Constante .	46
III.4.1. Etude de la Convergence des résultats	46
III.4.2. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température uniforme	49
III.4.3. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température linéaire.....	50
III.4.4. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température Sinusoïdale	52
III.5. Conclusion	53
Chapitre IV : Analyse Du Flambement Thermique Des Plaques FGM Avec Epaisseur Variable Par La MDF	54
IV.1. Introduction.....	54
IV.2. Formulation du problème.....	55
IV.3. Analyse du Flambement Thermique d'une Plaque FGM Avec Epaisseur Variable....	56
IV.3.1. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température uniforme	56
IV.3.2. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température linéaire.....	59
IV.3.3. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température sinusoïdale.....	63
IV.3.4. Etude paramétrique	64
IV.4. Conclusion	68
Conclusion générale.....	69
Références Bibliographiques	71

Liste des Figures

Chapitre I

Fig. I.1 Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996).....	6
Fig. I.2 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y., 1999).....	7
Fig. I.3 Différentes types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).	9
Fig. I.4 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999).	9
Fig. I.5 Schéma du processus de production de matériaux gradué par coulage (Marple B.R., 1997).....	11
Fig. I.6 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).	13
Fig. I.7 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).....	14
Fig. I.8 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).	15
Fig. I.9 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).....	16
Fig. I.10 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).....	17
Fig. I.11 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG	18
Fig. I.12 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque P-FGM.	19
Fig. I.13 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque S-FGM.	20
Fig. I.14 Variation de module de Young E dans une plaque E-FGM.	21

Chapitre II

Fig. II.1 Les trois cas d'équilibres.....	23
Fig. II.2 Voilement d'une plaque.	24

Fig. II.3 Structures en compression : poutre massive (à gauche) et plaque élancée (à droite)..... 25

Fig. II.4 Discrétisation par un maillage en DF d'un domaine..... 30

Fig. II.5 Maillage d'une plaque par MDF. 32

Fig. II.6 Ecriture de l'équation différentielle en MDF au point $w_{i,j}$ en maillage.... 32

Chapitre III

Fig. III.1 Système d'axe d'une plaque FGM. 34

Fig. III.2 Variation de module de Young en fonction de k dans une plaque P-FGM. 35

Fig. III.3 Illustration de la plaque Reissner-Mindlin (Reddy J.N., 1997)..... 36

Fig. III.4 Forces et moments résultants sur un élément de plaque (Reddy J.N., 1997) 38

Fig. III.5 Maillage de la plaque par différences finis..... 42

Fig. III.6 Convergence de la solution par la méthode des différences finies. 47

Fig. III.7 Les quatre modes naturelle de déformation $W_{i,j}$ d'une plaque FGM carré. 49

Fig. III.8 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température uniforme pour $k = 1$, respectant a/b et a/h 50

Fig. III.9 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température linéaire pour $k = 0$, respectant a/b et a/h . 51

Fig. III.10 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température sinusoïdale pour $k = 1$, respectant a/b et a/h 53

Chapitre IV

Fig. IV.1 Géométrie d'une plaque FGM avec épaisseur variable. 55

Fig. IV.2 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température uniforme pour différente valeur de k 57

Fig. IV.3 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température uniforme..... 58

Fig. IV.4 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variant à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température uniforme pour différente valeur de k 59

Fig. IV.5 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température linéaire pour différente valeur de k 60

Fig. IV.6 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température linéaire pour différente valeur de k 61

Fig. IV.7 *Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température linéaire pour différente valeur de k 62*

Fig. IV.8 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température sinusoïdale pour différente valeur de k 63

Fig. IV.9 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température sinusoïdale pour différente valeur de k 63

Fig. IV.10 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température sinusoïdale pour différente valeur de k 64

Fig. IV.11 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k 65

Fig. IV.12 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k 65

Fig. IV.13 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de la pente $C1$ sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k 66

Fig. IV.14 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente $C1$ sous une température uniforme. 66

Fig. IV.15 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente $C1$ sous une température linéaire. 67

Fig. IV.16 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente $C1$ sous une température sinusoïdale. 67

Liste des Tableaux

Chapitre III

Tableau III.1 Les caractéristiques des matériaux utilisés.	34
Tableau III.2 Comparaison de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée sous chargement thermique uniforme.	48

Chapitre IV

Tableau IV.1 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens x sous une température uniforme.....	56
Tableau IV.2 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens y sous une température uniforme.	57
Tableau IV.3 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée à épaisseur variable dans les deux sens x et y avec $C2 = a/100$ sous une température uniforme.	58
Tableau IV.4 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens x sous une température change linéairement.	60
Tableau IV.5 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens y sous une température change linéairement.	61
Tableau IV.6 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée à épaisseur variable dans les deux sens x et y avec $C2 = a/100$ sous une température linéaire.	62

Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice
Γ	propriété matérielle
$V(z)$	Fraction volumique locale.
$\Delta T(z)$	variation de la température
$k(z)$	conductivité thermique
$\Psi(z)$	fonction de forme
$f(z)$	fonction de forme
w_b	Déplacement transversal dû à la flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
$w_{,x}^b$	Rotation due à la flexion suivant x
$w_{,x}^s$	Rotation due au cisaillement suivant x
$E(z,T)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur et la température
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur et la température
$\rho(z,T)$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur et la température
$\alpha(z,T)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur et la température
U_p	énergie de déformation mécanique
U_T	énergie de déformation thermique
k^b	Champ des déformations en flexion
k^s	Champ des déformations en cisaillement
K	L'énergie cinétique
d_{ij} et	opérateurs différentielles
d_{ijlm}	
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s,$	les composantes de rigidité
D_{ij}^s, H_{ij}^s	

Liste des notations

u^0	Déplacement de membrane ou du plan médium suivant l'axe x,
v^0	Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y,
w	Déplacement transversal ou la flèche,
$g(z)$	Fonction de cisaillement,
i,j	Nombre naturelle
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
p	paramètre matériel pour détecter la variation du matériau suivant l'épaisseur de la plaque,
f	fréquence
T_b	Température au niveau de la surface inférieure de la plaque
T_t	Température au niveau de la surface supérieure de la plaque

Introduction Générale

Introduction Générale

Dans le domaine d'ingénieries, la politique actuelle tend à concevoir des structures tout en gardant leur rigidité et leur résistance. Les composites sont de plus en plus utilisés afin de répondre à cette demande. La généralisation de l'utilisation de ces matériaux composites dans le domaine de la structure et largement dépendante des sollicitations externes et du matériau lui-même. L'un des inconvénients des matériaux composites traditionnels c'est le problème d'interface. L'une des nouvelles classes des matériaux composites qui répondent à cette problématique ces les matériaux fonctionnellement gradués (FGM).

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (en anglais : Functionally Graded Material F.G.M) sont considérés comme des matériaux composites avec des propriétés variant progressivement dans l'épaisseur. Cette variation peut être réalisée en faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Habituellement, les FGM sont composés de métal et de céramique, dans lequel le métal a une résistance mécanique élevée par rapport à la céramique, tandis que le matériau céramique est caractérisé par son excellente résistance dans un environnement à haute température en raison de sa faible conductivité thermique. De nos jours, les FGM sont utilisés dans de nombreux domaines d'ingénierie et industriels, à savoir l'aéronautique, la fabrication des véhicules spatiaux, la mécanique, le génie civil, etc., parce qu'ils ont d'excellentes propriétés mécaniques sous environnement à haute température.

En raison des avantages des matériaux à gradient fonctionnelle FGM, un certain nombre de recherches ont été menées pour étudier le comportement des FGM dans un environnement thermique. De nombreuses théories et différentes solutions sont proposées dans la littérature (Noseir A., 1992; Rohit S., 2012; Koohkan H., 2010; Mohammadi M., 2010; Fekrar A., 2013; Praveen G.N., 1998). (Hiroyuki M., 2009) a étudié l'analyse thermique et mécanique de plaques FGM basés sur la théorie de déformation d'ordre élevé à deux dimensions par l'utilisation de développement en série de puissance pour l'évaluation des déplacements et des contraintes. (Bouazza M., 2009) ont analysé le flambement thermique d'une plaques S-FGM soumise à une température uniforme, linéaire, sinusoïdale. Ils ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la théorie classique

des plaques. (Zenkour A.M., 2010) ont proposé une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SPT) pour analyser le flambement thermique de plaques FGM. Ils ont comparé les résultats avec ceux obtenus en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HPT), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT) où ils ont constaté que leurs résultats sont très proches de celles de (HPT). (Raki M., 2012) ont présenté une solution analytique par l'utilisation de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour investiguer la température critique de flambement. Une température uniforme et varie graduellement à travers l'épaisseur de la plaque est prise en considération. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. (Javaheri R., 2002a; Javaheri R., 2002b) ont effectué une analyse de flambage mécanique et thermique de plaques FGM basant sur la théorie classique des plaques ; En outre, ils ont étudié également le flambement thermique de plaques FGM à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (Javaheri R., 2002c). (Lanhe W., 2004) a effectué un travail de recherche pour étudier le flambement thermique de plaques FGM rectangulaires modérément épais sur la base de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre.

Il convient de mentionner que les plaques d'une épaisseur constante ont été largement étudiées. Malgré cela, les plaques d'épaisseur variable ont également attiré l'attention des concepteurs et des chercheurs. Une telle modification de forme peut mieux améliorer la régularité de la répartition des contraintes en diminuant les discontinuités géométriques.

Cependant, les études des plaques FGM avec épaisseur variables soit en utilisant des méthodes analytiques ou des méthodes numériques sont limitées par rapport aux études des plaques FGM avec épaisseur constante. A titre d'exemple, une procédure simple est présentée par (Ait Atmane H., 2011) où ils ont étudié la vibration libre d'une poutre fonctionnellement graduée simplement appuyée et encastree-libre, à section variable basés sur la théorie des poutres de Bernoulli-Euler. (Rajasekaran S., 2013), ont présenté une solution numérique en utilisant la méthode des différences finies pour évaluer le flambement et la fréquence de vibration des plaques isotropes avec épaisseur variable, différentes conditions aux limites et types de chargement ont été considérer. Les résultats obtenus par cette chercheur ont trouvé un bon accord avec les résultats de la littérature. (Mozafari H., 2010a) (Mozafari H., 2012a) ont étudié la stabilité au flambement des plaques FGM simplement appuyées avec épaisseur varie linéairement sous une charge mécanique, utilisant les hypothèses de la théorie d'ordre élevé. La

formulation présentée est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff et les relations contrainte-déplacement non-linéaire de Sanders.

Peu d'études ont été réalisées spécialement pour analyser le flambement thermique des plaques FGM avec une épaisseur variable. (Mozafari H., 2010b) sur la base des mêmes hypothèses mentionnées précédemment, ils ont étudié l'effet de la variation d'épaisseur sur le flambement thermique de plaques FGM. En outre, (Mozafari H., 2012b) ont utilisé un algorithme concurrentiel coloniale pour optimiser la charge thermique critique de flambement pour une plaque de FGM avec une épaisseur variable. Dans un autre document (Mozafari H., 2012c), ils ont fondé leur travail sur l'algorithme concurrentiel impérialiste pour l'optimisation de la température critique de flambement pour les plaques de FGM avec une épaisseur variable, sous la charge de température non uniforme, utilisant une déformation de cisaillement de troisième ordre ; l'objectif de cette étude était de maximiser la capacité de la température critique de flambement d'une plaque FGM. (Ghomshei M.M., 2013) ont développé une formulation des éléments finis pour analyser le flambement thermique d'une plaque de révolution annulaires en FGM avec une épaisseur variable. (Pouladvand M., 2009) a étudié la stabilité thermique au flambement d'une plaque rectangulaire FG mince avec épaisseur variable, la plaque a été considérée simplement appuyée, l'équations de stabilité et d'équilibre de la plaque ont été obtenues sur la base de la théorie classique des plaques. L'analyse du flambement de la plaque FG a été faite sous une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur.

L'objectif de cette thèse est de développer une approche simple et efficace pour l'analyse de la stabilité des plaques fonctionnellement graduées FGM avec épaisseur variable. Pour ce fait, notre thèse est composée de quatre chapitres structurés comme suit :

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials FGM) sont présentés dans le premier chapitre. Où nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

Le second chapitre donne un aperçu sur la notion de la stabilité des structures minces, plus précisément le flambement (voilement) des plaques, on présente l'historique et les premiers études du flambement, par la suite, on donne quelques méthode utilisées dans la littérature pour

analyser la stabilité des structures en matériaux à gradient fonctionnelle. Enfin, on montre le principe de la méthode des différences finis pour analyser la flexion d'une plaque simplement appuyée.

Dans le chapitre III, l'analyse du flambement thermique d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés (FGM) a été envisagée, l'équation différentielle d'équilibre est obtenue par l'utilisation de la théorie de Von Karman en basant sur les relations contraintes-déformation dérivées par la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. La résolution de l'équation différentielle obtenue est faite par la méthode des différences finis, les résultats obtenus sont discutés et comparés à ceux de la littérature.

Enfin, dans le quatrième chapitre la méthode développée et présentée dans le troisième chapitre est étendue pour analyser le flambement thermique des plaques FGM avec épaisseur variable, les résultats présentés sont comparés à ceux rapportés de la littérature, les effets de la variation de l'épaisseur, l'indice matérielle de la loi de mélange, le rapport d'aspect largeur-longueur de la plaque sur la température critique de flambement thermique des plaques FGM seront discutés.

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux A Gradient De Propriétés

I.1. Introduction

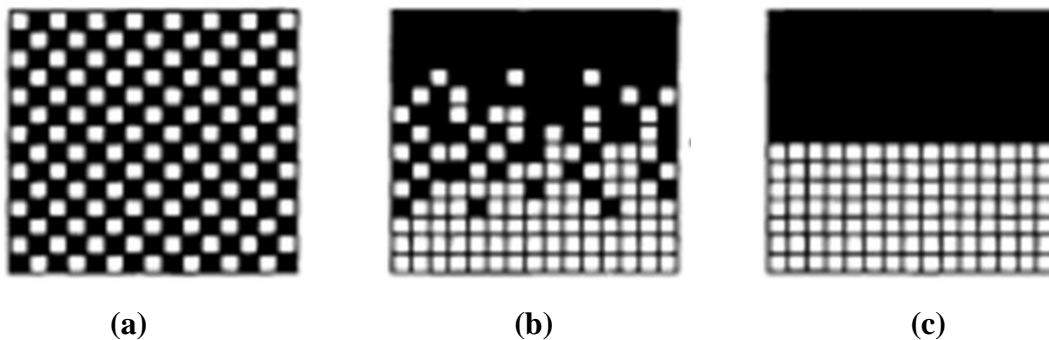
Au cours des dernières années, l'utilisation des matériaux devenus plus exigeants. Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique et thermique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Les matériaux conventionnels ne peuvent pas résister aux environnements sévères auxquels sont confrontés, d'autres développements en science et technologie comptent beaucoup sur le développement de nouveaux matériaux qui peuvent résister aux conditions qui sont créés par les progrès technologiques ; c'est pourquoi, depuis un certain nombre d'années, on cherche à obtenir des matériaux combinant différentes propriétés, matériaux composites, pour les utilisés au sein de différents secteurs tel que l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, le génie civil, la médecine, etc...

Dans le développement de ces nouveaux matériaux, il existe deux approches. On est à développer un nouveau matériau qui diffère complètement de tous les matériaux présents. D'autre part est de développer de nouvelles fonctions pour les matériaux existants. Le développement des matériaux composites satisfaisant les deux approches ci-dessus. De nombreux nouveaux types de composite ont déjà été fabriqués conformément aux propriétés des matériaux exigées par la technologie actuelle.

Pour les applications industrielles, il est essentiel dans l'utilisation que toutes les parties de la matière présente des propriétés uniformes. Les exigences en matière composites conventionnels ne font pas exception. La plupart des efforts dans le développement des composites dans le passé a été mis en déterminant comment mélanger uniformément la matière dispersée dans la matrice. Par conséquent, d'un point de vue macroscopique, même les composites ont été considérées comme homogènes, car dans ces matériaux les propriétés mécaniques et d'autres caractéristiques se révèlent être homogènes, comme le montre la figure I.1.a. En revanche, des études sont également menées pour concevoir des matériaux qui ont deux propriétés différentes au sein du matériau donné. Ces matériaux composites sont hétérogènes qui sont caractérisés par différentes propriétés de matériaux sur des surfaces ou des pièces séparées. Un exemple d'un composite ayant des fonctions différentes dans ses différentes surface est un matériau revêtu destiné à améliorer les caractéristiques de surface d'un matériau.

Cependant, ces composites présentent des limites nettes inhomogènes, comme le montre la figure I.1.c.

La discontinuité aux caractéristiques du matériau mécaniques, physiques et chimiques à la frontière présente souvent diverses propriétés indésirables. Pour cette raison, une proposition visant à concevoir un nouveau matériau destiné à éliminer la limite macroscopique dans les matériaux stratifiés (Niino M., 1987). Autrement dit, l'approche consiste à synthétiser des composites non homogènes, dans lesquels, les propriétés mécaniques, physiques et chimiques de la matière changent continuellement, et qui n'a pas de discontinuités dans le matériau. Ces matériaux sont appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM), figure. 20-1.b. (Hirai T., 1987; Koizumi M., 1993; Hirai T., 1996).



a) Composite homogène b) Matériau à gradient de propriété c) Composite stratifié

Fig. I.1 Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996).

I.2. Définition et Historique des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués, matériaux à gradient de propriété ou matériaux à gradient évalués (FGM) : sont des matériaux de type composite microscopiquement non homogènes, ils sont fabriqués généralement à partir de deux matériaux ou plus, le plus souvent un métal et une céramique, ou en changeant la microstructure d'un seul matériau.

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont des matériaux composites avec un changement spatiale continu des propriétés (Koizumi M., 1994; Kawasaki A., 1997; Borchert R., 1999).

Les matériaux à gradient fonctionnelle (FGM) sont des matériaux composites dont la composition ou la structure contrôlée (Erdogan F., 1995; Yang Y.Y., 1997; Kokini K., 1997; Yang Z., 2003) et il est donc possible de fabriquer des composants avec des propriétés locales souhaités (Carvalho O., 2015).

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de matériaux composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et d'alléger ainsi la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériel réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes.

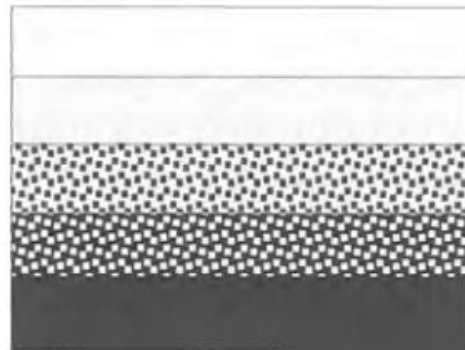
Une structure à gradation fonctionnelle est définie comme " ceux dans lesquels les fractions volumiques de deux ou plusieurs matériaux sont varié continuellement selon une fonction exigée en fonction de la position le long de certaine dimension (s) de la structure à réaliser " (Reddy J.N., 2000).

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été introduits comme une classe de composite avancé qui compose de simple gradient continu ou discontinu dans la composition et de la microstructure (Siti Nur Sakinah J., 2013)

Dans les formes les plus simples, deux ingrédients de matériaux différents changent progressivement de l'un à l'autre comme l'illustre la figure I.2.a. Les ingrédients matériels peuvent également changer de façon discontinue telle que la gradation progressive illustrée à la figure I.2.b. Ce type de structure peut également être considéré comme un FGM. Le FGM le plus traditionnel est obtenu par composition d'une céramique réfractaire à un métal. Il peut intégrer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, l'usure, l'oxydation, une haute ténacité, la capacité de liaison des métaux, sans contrainte thermique interne grave.



a) Matériau FGM continu



b) Matériau FGM à gradation discontinue

Fig. I.2 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y., 1999).

La première idée générale de gradients structurels a été avancé pour les composites et les matériaux polymères en 1972 (Bever M.B., 1972; Shen M., 1972). Différents modèles ont été proposés pour des gradients de composition, dans la concentration des fibres, et dans la polymérisation pour obtenir des structures gradués. Cependant, il n'y avait aucune enquête réelle sur la façon de concevoir, fabriquer, et d'évaluer les structures de gradient progressives jusqu'aux années 1980 (Miyamoto Y., 1999).

En 1985, l'utilisation du contrôle de la texture continue a été proposé afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser les contraintes thermique dans les revêtements céramiques et les articulations en cours d'élaboration pour le moteur de fusée réutilisable (Niino M., 1984). Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pourrait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou composition. À l'heure actuelle, le concept de l'ingrédient matière a été introduit pour la conception de tels matériaux.

En 1986, ces types de matériaux ont été appelés matériaux à gradient fonctionnel, qui est devenu bientôt en abrégé FGM. En 1995, à la suite d'une discussion lors de la troisième Symposium international sur les FGM tenue à Lausanne en 1994, il a été décidé de changer le nom complet de matériaux à gradient fonctionnel, car il est plus précis à la fois descriptive et grammaticalement.

Les FGM ne sont pas des matériaux homogènes, il a été reconnu que, pour les créer, il faudrait une méthodologie de conception et de modélisation théorique ainsi que dans le traitement et l'évaluation des études approfondies. Par conséquent, en 1987, un programme de recherche de 5 ans, des études fondamentales sur la relaxation de la contrainte thermique, a été lancé au Japon (Miyamoto Y., 1997). L'accent mis par le programme était de développer des formes pour une utilisation à haute température. Depuis 1989, les résultats de ces programmes de recherche et de développement ont été diffusés dans le monde entier par l'intermédiaire de papiers, des articles, des réunions internationales et des programmes d'échange. Un colloque international sur les FGM a lieu tous les 2 ans à compter de la première en 1990 à Sendai suivie par San Francisco, Lausanne. Aujourd'hui, le concept de la FGM étend sur une variété de domaines des matériaux à travers le monde (Hirai T., 1996).

En fonction de la nature du gradient, les matériaux fonctionnellement gradués FGM peuvent être groupées en catégories suivantes (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

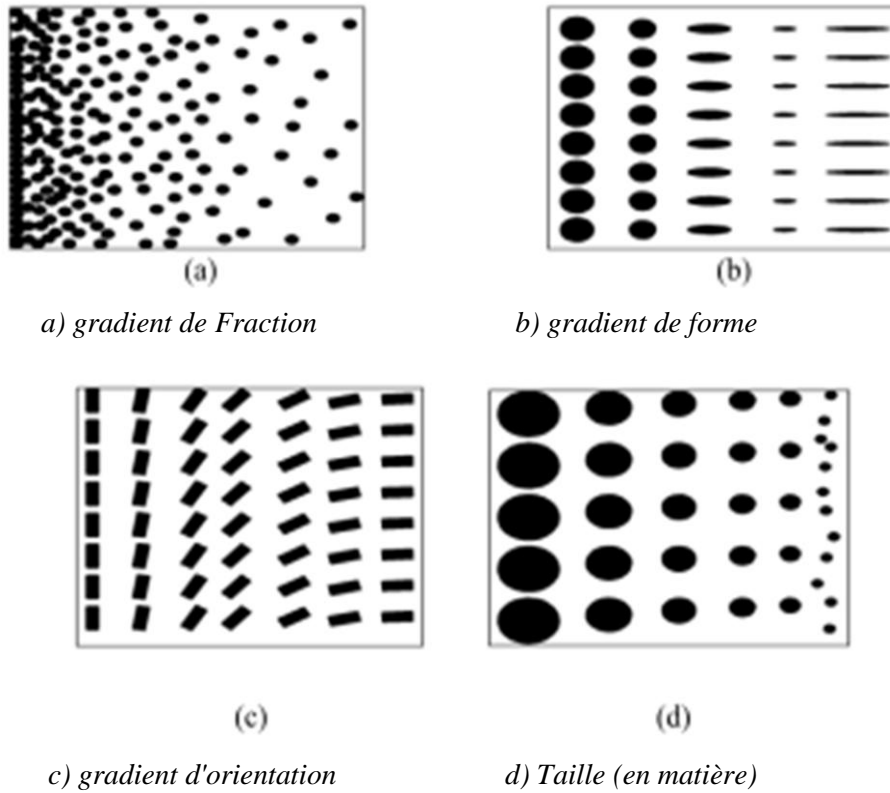


Fig. I.3 Différentes types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

I.3. Application des Matériaux FGM

En raison de leurs propriétés, les FGM sont potentiellement largement applicable dans de nombreux domaines, figure I.4.

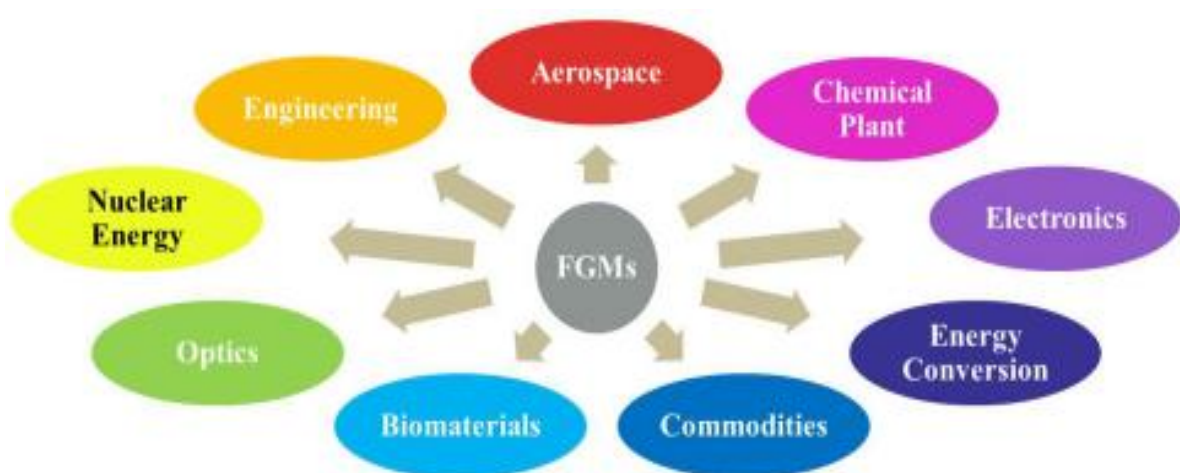


Fig. I.4 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999).

Les matériaux à gradient de propriété ont été élaborés autant que matériaux résistants à des grandes contraintes thermiques pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion (Hirai T., 1999; Uemura S., 2003).

Maintenant, ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères (BENATTA Mohamed A., 2011).

Le plus souvent les céramiques peuvent être utilisés comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques (Nguyen., 2004). Dans le domaine de transport comme composants de véhicules spatiaux, la protection du véhicule lors de choc, les moteurs de fusée, missiles furtifs (Miyamoto Y., 1999), des sondes (Müller E., 2003), des déclencheurs (Qiu J., 2003), des outils de coupe (Cho J.R., 2002), des turbines et moteurs aéronautiques (Miyamoto Y., 1999), des détecteurs photoélectriques (Paszkievicz B., 2008) et des implants dentaires (Watari F., 2004). Plusieurs revues traitent des divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières années. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans les FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et la rupture sous l'effet des contraintes thermiques (Shen H.S., 2009).

I.4. Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM

Depuis 1980, des recherches sur les FGM ont été consacrées au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée (Hirai T., 1996). Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en deux étapes, la première c'est d'établir la structure non homogène dans l'espace, gradation, la deuxième c'est la transformation de cet matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel. Il ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie (BENATTA Mohamed A., 2011).

I.4.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

La coulée en barbotine, est une technique utilisée pour la mise en forme de la céramique, un procédé typique pour la poudre empilée sous un courant induit par la pression. Une cavité dans un moule en plâtre de Paris est remplie d'une suspension contenant des particules d'un matériau céramique. Le liquide de suspension est absorbé par le moule par le biais des forces capillaires et les particules de céramique, qui sont généralement plus grands que les canaux capillaires, qui sont laissés sur les parois de la cavité du moule. Lorsque l'épaisseur de paroi souhaitée a été atteinte, la barbotine en excès est évacuée du moule et le corps vert est éliminé par séchage. La répétition de coulage en boues de compositions différentes peut être utilisée pour produire des MGF stratifiés. Un schéma de coulée à gradient dans laquelle un feuillet circule continuellement à travers le moule pendant l'étape de coulée est représenté sur la figure I.5 (Marple B.R., 1997). D'autres configurations sont également proposées par (Marple B.R., 1996). L'élément commun est la présence de plusieurs réservoirs contenant des suspensions de matériaux et d'être jeté. La composition de la barbotine introduite dans le moule est commandée pour correspondre à la composition souhaitée des piles étant déposé. Le glissement est diffusé en continu à travers le moule, et les suspensions des réservoirs sont ajoutées par des pompes de flux à des débits contrôlés par l'ordinateur. Le mélange des suspensions est amélioré par l'utilisation des mélangeurs fixes, en forme de spirale pour créer une turbulence pendant l'écoulement à travers les tubes d'alimentation.

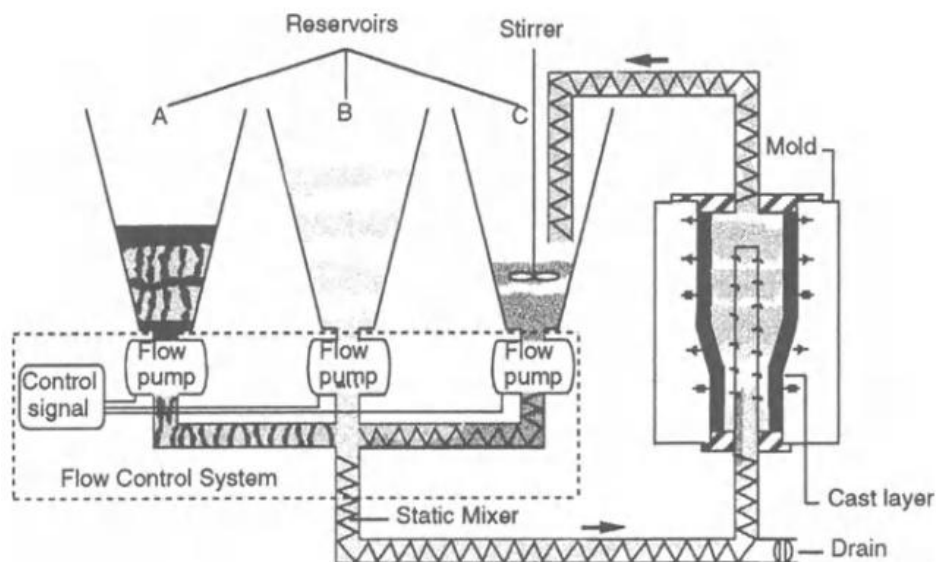


Fig. I.5 Schéma du processus de production de matériaux gradués par coulage (Marple B.R., 1997).

I.4.2. Coulage en bande (Tape casting)

La méthode de coulage en bande (Tape casting) est favorisée, du fait de faire coller facilement de grands nombres de feuilles minces d'une épaisseur uniforme entre eux. D'une manière générale, ce procédé a été effectué dans un système non aqueux (Takemura M., 1990; Kawasaki A., 1990).

Le processus de coulage en bande a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composants en céramique (Zeng Y.P., 2000).

I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple, un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec des compositions change dans la matrice compacté (Atarashiya K., 1993) (Leushake U., 1999). Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce ($<100 \text{ cm}^2$) en raison des limites des forces de compaction. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces sur des systèmes à gradient de propriétés (Kieback B., 2003).

I.4.4. Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant (Zhang J., 1998), ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg_2Si , (Zhang J., 1998)) et une densité plus élevée (Al_3Ti , (Watanabe Y., 1997)) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou extérieure du tube.

I.4.5. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 $^{\circ}\text{C}$ et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des tronçons solidifiés obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé (Watre Metz B., 2006).

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques de cette méthode sont l'isolation thermique et électrique, la résistance à l'usure et à la corrosion.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative (Omori M., 1998). (Ichikawa K., 2000) a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est montrée par la figure I.6.

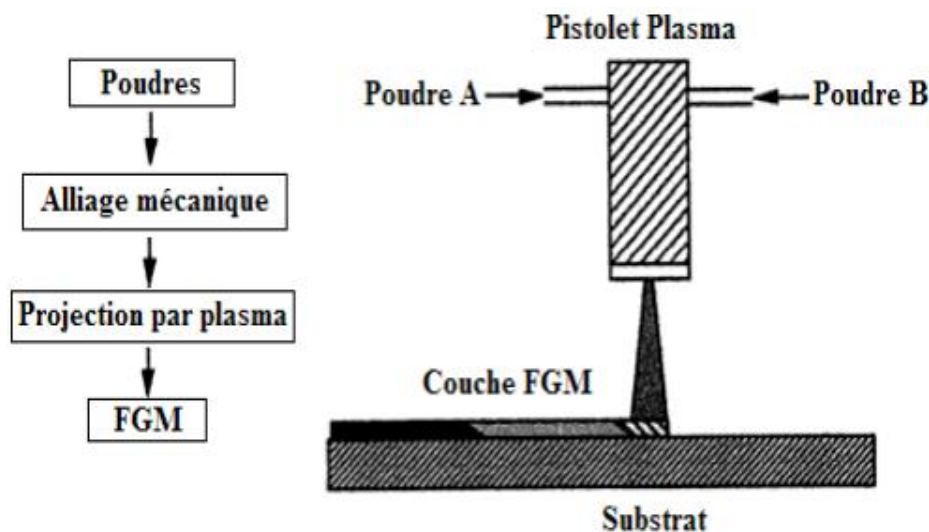


Fig. I.6 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).

(La composition est graduée dans la direction plane)

I.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie nécessaire pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les

avantages de PVD, les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie considérablement plus longue. L'équipement utilisé par PVD pour déposer les revêtements d'isolation thermiques, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. (Miyamoto Y., 1999).

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source (Miyamoto Y., 1999). Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à des environnements oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique (Mévrel R., 2009).

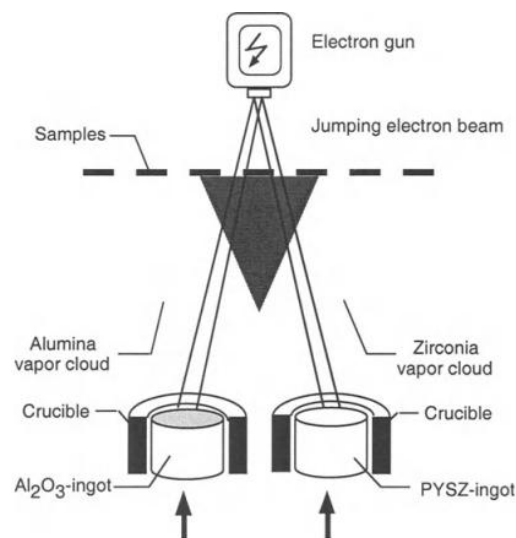


Fig. I.7 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur couchée à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).

I.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), figure I.8, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrides, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma (Miyamoto Y., 1999).

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces. Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - SiCl_4 - H_2) sont employés aux températures de dépôt entre 1400°C et 1500°C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

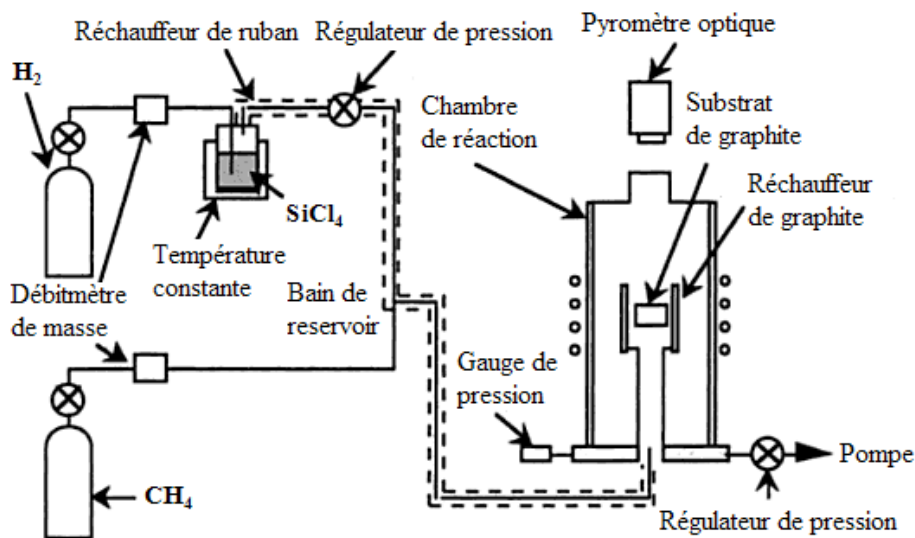


Fig. I.8 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces solide par chauffage d'une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite FGM composé de deux matériaux dont les

températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi M., 1990). Ce procédé peut être généralement appliqué pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki M., 1991) ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM PSZ/Mo. La figure I.9.

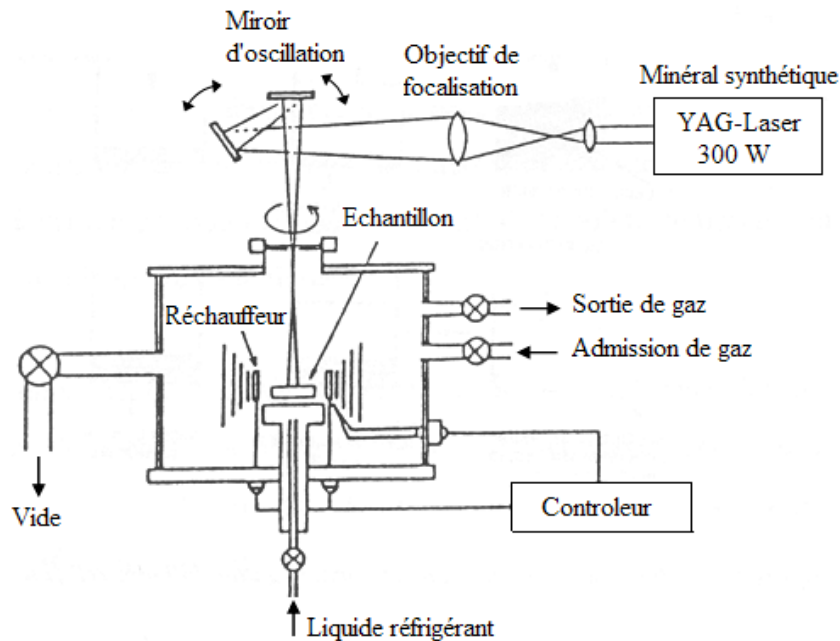


Fig. I.9 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).

I.4.8. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules

chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes (Aldo R., 2002). EPD permet la conception des matériaux FG en forme de plaque binaire en déposant une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches est déterminée par la suite de la suspension au moment du dépôt, figure I.10.

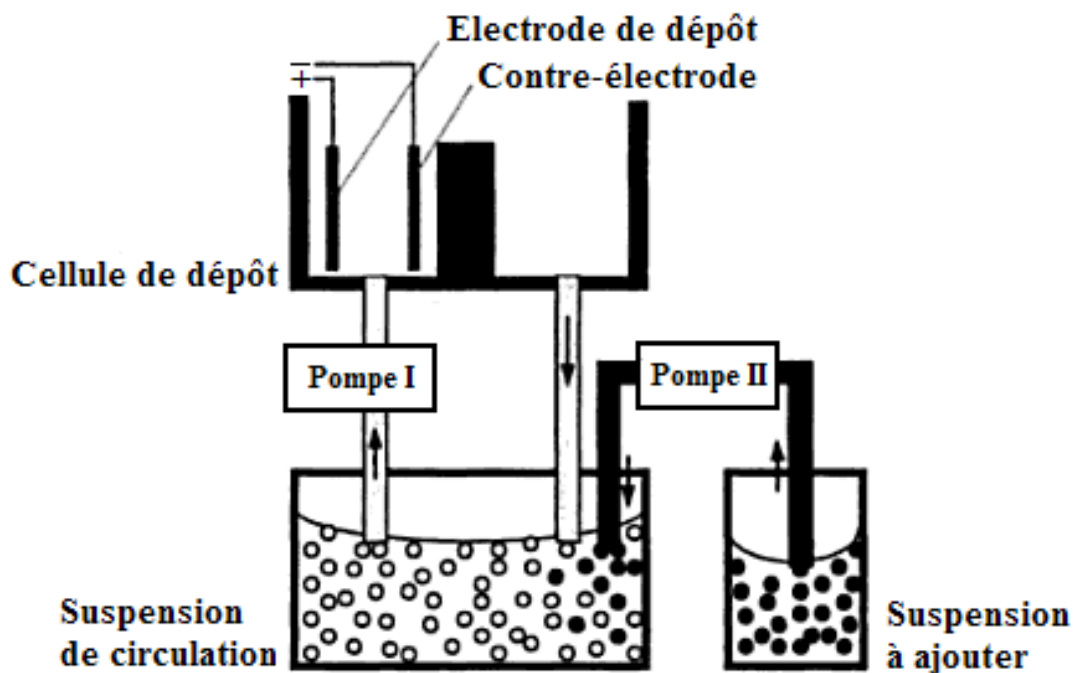


Fig. I.10 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).

I.5. Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés FGM consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue

de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure (HOUARI Mohammed S.A., 2011; BENATTA Mohamed A., 2011; KACI A., 2012).

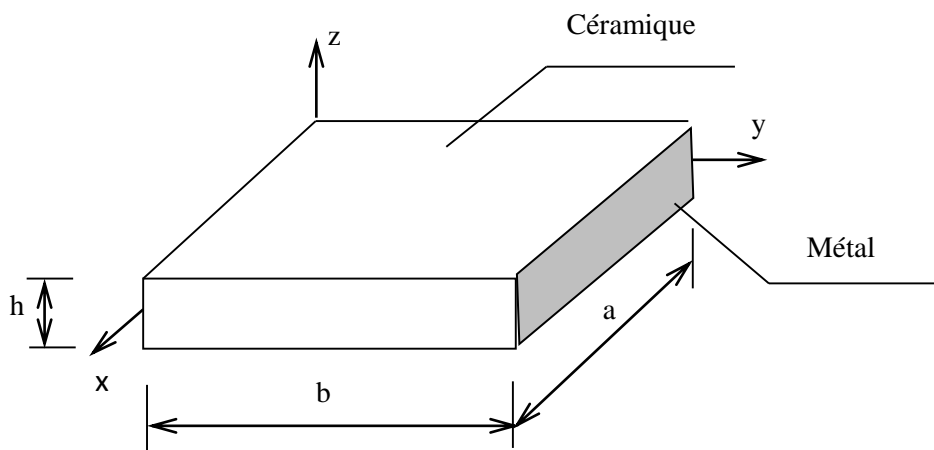


Fig. I.11 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées x et y ; tandis que l'axe z perpendiculaire au plan moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young E , le coefficient de dilatation thermique α , la conductivité thermique K , la masse volumique ρ ou même le coefficient de Poisson ν , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E., 2009), sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z). Les propriétés de la plaque FGM changent dans la direction de l'épaisseur suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), au avec une fonction sigmoïdes (S-FGM).

I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique d'une plaque P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0 \quad (I.1)$$

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (I.2)$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c) \quad (I.3)$$

où k est le paramètre du matériel qui décrit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur h . En utilisant la loi de mélange, les propriétés des matériaux tels que le module d'élasticité E et de dilatation thermique α sont supposés être fonction des matériaux constitutifs, figure I.12.

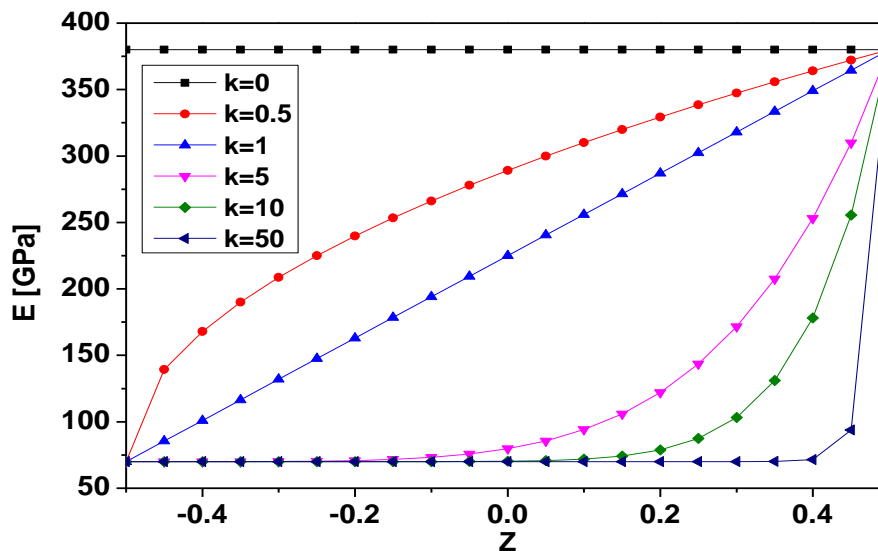


Fig. I.12 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque P-FGM.

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple au composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais changent rapidement.

Par conséquent, Chung et Chi définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces (Chi Shyang-ho., 2003). Les deux fonctions sont définis par :

$$\begin{aligned} V_f^1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (I.4)$$

En utilisant la loi de mélange, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$E(z) = \begin{cases} V_f^1(z)E_c + (1 - V_f^1(z))E_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)E_c + (1 - V_f^2(z))E_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (I.5)$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} V_f^1(z)\alpha_c + (1 - V_f^1(z))\alpha_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)\alpha_c + (1 - V_f^2(z))\alpha_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (I.6)$$

Où les indices $_c$ et $_m$ désignent respectivement la propriété de la céramique et le métal.

La figure I.13, montre que la variation du module de Young selon l'équation (I.5) a des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée Plaque S-FGM.

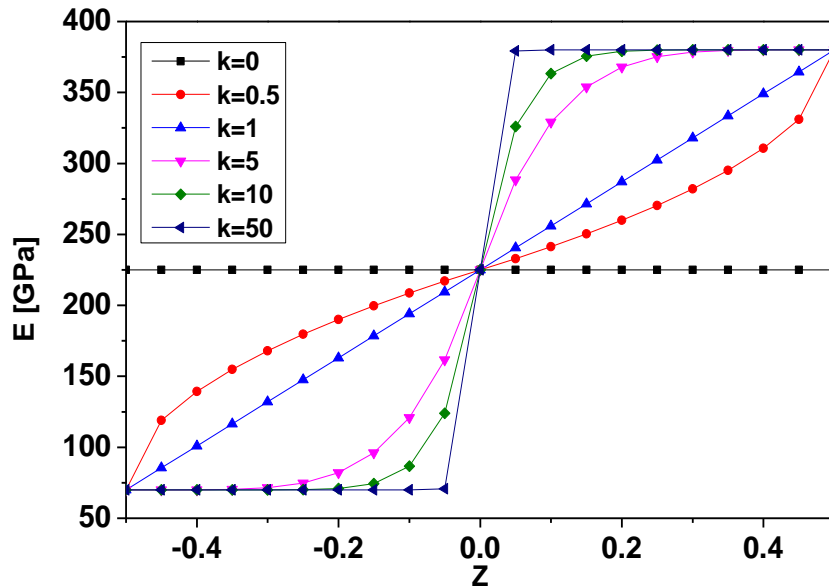


Fig. I.13 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque S-FGM.

I.5.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale F., 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (I.7)$$

$$\alpha(z) = \alpha_2 e^{B\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad (I.8)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \text{ ou } B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

Selon la propriété du matériau cherchée.

La figure I.14, représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

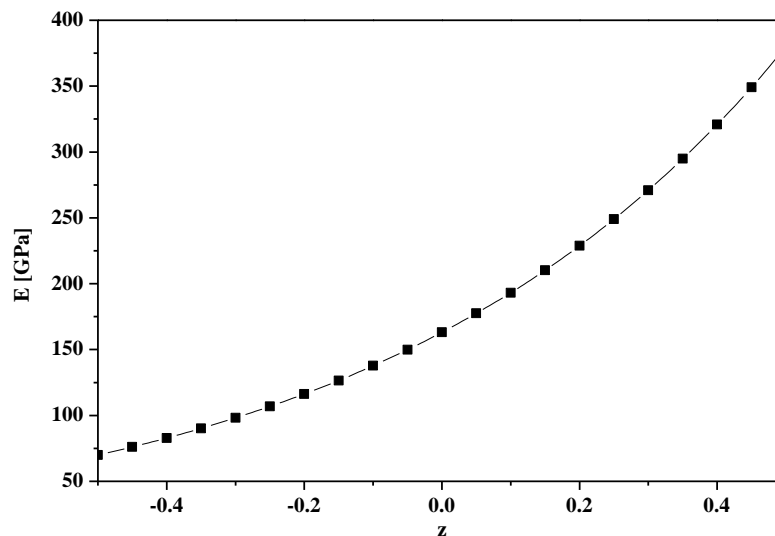


Fig. I.14 Variation de module de Young E dans une plaque E-FGM.

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes unissent à la fois une rigidité, une résistance mécanique et thermique, une ténacité élevée et une grande légèreté, qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II : Formalisme Conceptuel De La Stabilité Des Plaques FGM

Chapitre II : Formalisme Conceptuel De La Stabilité Des Plaques FGM

II.1. Introduction

De tous temps, un des objectifs prioritaires en design de structures a été de concevoir les structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. De nos jours, l'existence de matériaux performants et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de bien remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures minces et élancées pour lesquelles la stabilité peut devenir un problème primordial (BAGUET S., 2001).

Il est donc important pour les concepteurs d'être capable de prévoir le comportement en flambement des structures. Toutefois, les études de stabilité des plaques en matériaux à gradient de propriété FGM peuvent s'avérer très complexes car le matériau change sans interruption à travers l'épaisseur de la plaque. En effet, le flambement de la structure pour une valeur prédite par la théorie dépend des caractéristiques de la plaque et de la théorie elle-même. Concrètement, cela signifie qu'un mauvais choix de la théorie ou sous-estimation de la loi de mélange du matériau utilisé peut avoir un effet catastrophique sur la structure en réduisant considérablement la charge critique qu'elle peut supporter avant son effondrement.

II.2. Notions de la Stabilité des Structures

Lorsqu'un élément de structure élancé est soumis à une compression, il présente potentiellement un danger d'instabilité. Le mot instabilité est un terme générique utilisé pour désigner un ensemble de phénomènes et ce, indépendamment du type de structure que ces phénomènes concernent. Des termes spécifiques sont utilisés pour différencier plus précisément les phénomènes d'instabilité élémentaire, tels que : le flambement pour une poutre soumise à une compression longitudinale, le déversement pour une poutre soumise à une flexion ou le voilement pour les plaques et coques. Il faut noter que le terme voilement s'applique aussi bien aux plaques qu'aux coques, mais leurs comportements peuvent fréquemment être différenciés, en particulier leurs comportements postcritiques respectifs.

La notion d'instabilité ou de stabilité est toujours associée au concept d'équilibre, une des notions de base essentielle de la mécanique du solide. D'une manière générale, la stabilité peut être définie comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est

perturbé légèrement. La stabilité peut être illustrée à travers l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe, Fig. II.1 Les trois cas d'équilibres. Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable, figure II.1a : si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. À l'inverse, lorsque, dans le second cas, la bille repose au sommet d'une surface convexe, figure II.1b, le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements : on dit alors que le système est instable. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit neutre : la perturbation appliquée à la bille conduit à un autre état d'équilibre, figure II.1c, (Khanh L.T., 2012).

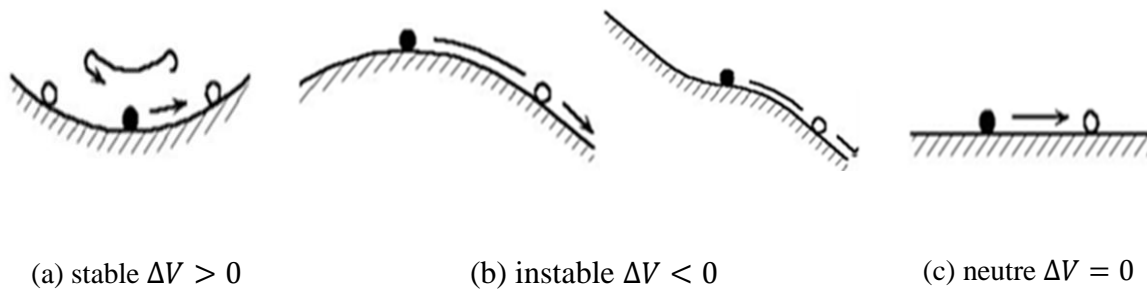


Fig. II.1 Les trois cas d'équilibres

II.3. Définition du Phénomène de Flambement (Voilement)

On peut considérer qu'il y a flambement lorsque sous l'action d'une charge axiale et l'introduction d'une charge transversale minime, la structure fléchit et reste dans sa position même après suppression de la charge transversale (Vallat P., 1945; Timoshenko S., 1968).

Le principe des travaux virtuels permet de mettre en évidence le seuil d'instabilité au-delà duquel apparaît le flambement. Considérant les déplacements virtuels licites de la structure (compatibles avec les conditions aux limites), on peut écrire la variation du potentiel total à partir de l'état initial sous la forme :

$$\delta(V + W) = F_1\delta + F_2\delta^2 + F_3\delta^3 + \dots \quad (\text{II.1})$$

Avec

V le potentiel des efforts extérieurs,

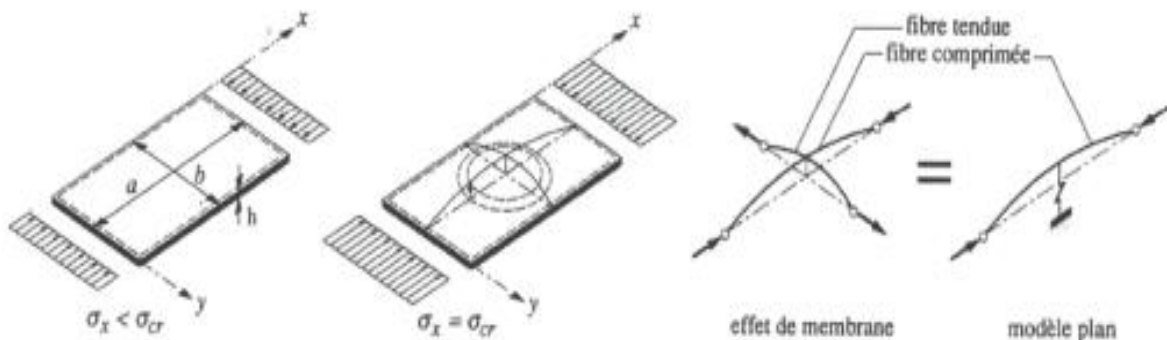
W le potentiel élastique,

F_1, F_2, F_3 des fonctions des charges appliquées, de la rigidité de la structure et de ses caractéristiques dimensionnelles.

δ caractérise l'amplitude infinitésimale de la transformation virtuelle (déplacements).

L'équilibre est stable si $F_2 > 0$ et instable si $F_2 < 0$. On définit par post-flambement le comportement de la structure pour des charges comprises entre la charge de flambement et la charge de rupture de l'ensemble de la structure. Il convient de définir à ce stade les notions de flambement général et de flambement local (BERTOLINI J., 2008).

Le voilement est le phénomène d'instabilité des plaques minces sollicitées dans leur plan. Considérons, par exemple, la plaque rectangulaire, figure II.2a parfaitement plane, articulée sur ses quatre bords et comprimée dans la direction de l'axe x , pour une contrainte σ_x faible on impose à la plaque une déformation w hors du plan, elle va revenir à sa position initiale après suppression de la cause ayant engendré la déformation. Pour une certaine contrainte $\sigma_x = \sigma_{cr}$ plus élevée, la plaque va rester dans sa position déformée et former une cloque, figure II.2b ; elle est donc en équilibre indifférent (ou métastable) et on dit qu'elle a voilé. La contrainte σ_{cr} pour laquelle le voilement se produit est appelée contrainte critique de voilement élastique (Manfred A.H., 1994).



a) Plaque non voilée.

b) plaque voilée.

c) fibre médianes après voilement.

Fig. II.2 Voilement d'une plaque.

Lorsqu'une poutre est chargée en compression elle se contracte longitudinalement, figure II.3.

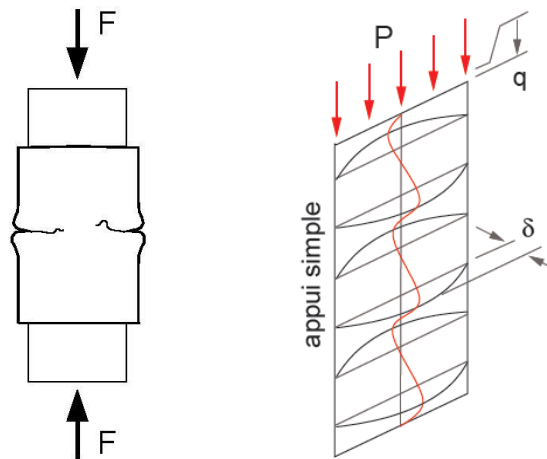


Fig. II.3 Structures en compression : poutre massive (à gauche) et plaque élancée (à droite).

A partir d'une certaine valeur de la charge, deux phénomènes peuvent survenir. Si la plaque est suffisamment massive, elle va s'écraser jusqu'à rupture. Il s'agit alors d'un problème de ruine du matériau. Si au contraire, la plaque est mince et élancée, elle peut fléchir brutalement. Dans ce dernier cas, on parle de flambement. Il s'agit alors d'un phénomène de stabilité, purement géométrique, complètement dissocié de toute considération de ruine du matériau (BAGUET S., 2001).

Dans une plaque, les deux phénomènes peuvent survenir : une plaque mince flambe alors que la plaque épaisse se fissure et rompt. Il convient de dimensionner une telle structure en tenant compte de ces deux phénomènes, i.e. en utilisant des critères de stabilité et de résistance pour le matériau (BAGUET S., 2001).

II.4. Aspect Historiques sur le Phénomène de Voilement

La détermination de la charge critique de flambement des éléments minces (poteau, poutre, plaque et coque) ainsi que leur comportement après le flambement ont fait l'objet de beaucoup d'études et de recherches, aussi bien expérimentales qu'analytiques ou numériques. Les résultats qui découlent de ces études sont très importants car ils permettent la réalisation de structures sûres, c'est-à-dire sans risque de flambement lors de leur utilisation courante.

Il existe plusieurs milliers de recherches relatives à ce sujet. Parmi ces recherches, on peut citer ceux de NOOR (1990) sur les coques (Noor A.K., 1990), et plus général sur la stabilité

des structures (Iyengar N.G.R., 1988; Calladine C.R., 1983; Timoshenko S., 1959; Timoshenko S., 1963; Zdenek .P.B., 2010; Eduard V., 2001; Brush D.O., 1975; Jaeger L.G., 1964).

II.5. Quelques Etudes de la Stabilité des Plaques FGM

L'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillée l'intérêt des chercheurs à l'étude de la réponse des plaques fonctionnellement graduées (FG) utilisées dans des domaines à fort gradient thermique.

Plusieurs investigations sur la stabilité des plaques à gradient fonctionnel (FGP) ont été publiées et ont vues le jour ces dernières années. Les propriétés mécaniques non homogènes des FGP sont décrites par une simple loi de distribution variable suivant l'épaisseur.

Les équations d'équilibre basées sur la théorie d'ordre élevé d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduées soumise à un chargement thermique ont été décrites par (Javaheri R., 2002a). Le système des équations différentielles partielles a été établi par l'utilisation de la méthode vibrationnelle. Les équations d'équilibre et de stabilité des FGP obtenues sont identiques à celles des plaques composites. Une analyse du flambement d'une FGP sous quatre charges thermique a été présentée. (Na K.S., 2004) ont étudiées le flambement tridimensionnel d'une FGP sandwich composée de trois couches, céramique, FGM et métal sous un chargement thermomécanique. Ils se sont penchés sur le comportement de ces plaques du au rapport d'épaisseur, la distribution de la fraction volumique et le système des paramètres géométrique.

Le flambement thermique des plaques FGM circulaires a fait l'objet d'étude par (Najafizadeh M.M., 2004). En supposant que les propriétés matérielles changent comme une simple loi de puissance suivant l'ordonnée « z » et par l'utilisation de la méthode vibrationnelle, le flambement des plaques circulaires fonctionnellement graduées sous diverses charges thermiques a été analysé. Les équations d'équilibre des plaques rectangulaires épaisses sous un chargement thermique ont été obtenues par (Lanhe W., 2004). Un chargement thermique sous forme d'un gradient uniforme de température à travers l'épaisseur a été retenu.

L'influence de l'indice de la fraction volumique et du cisaillement transverse sur la température critique du flambement a été discutée. (Bouazza M., 2010) Étudièrent le flambement thermoélastique des FGP en utilisant la théorie de cisaillement du premier ordre. Les effets du changement des caractéristiques des plaques, la composition matérielle et la fraction volumique des constituants sur la température critique du flambement des plaques

simplement appuyées ont été aussi discutées. (Shariat BAS., 2005) présentent une analyse de flambement thermique des plaques rectangulaires FGP avec des imperfections géométriques en se basant sur la théorie classique des plaques. Trois chargements thermiques ont été retenus : variation uniforme, non linéaire à travers l'épaisseur et axiale.

L'analyse du voilement des plaques fonctionnellement graduées FGM fait l'objet de plusieurs recherches, la résolution de ce type de problème peut être effectuée par les méthodes suivantes :

II.5.1. Méthodes analytiques

Afin de résoudre les problèmes de stabilité des structures minces tel que les poutres et les plaques (FGM) dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Depuis longtemps des recherches consacrées à la résolution analytique de la stabilité des plaques FGMs, (Noseir A., 1992; Rohit S., 2012; Koohkan H., 2010; Mohammadi M., 2010; Fekrar A., 2013; Praveen G.N., 1998; Suresh K.J., 2011). (Bouazza M., 2009) ont analysé le flambement thermique d'une plaque FGM suit une simple loi de distribution sigmoïde métal-céramique simplement appuyés. Ils ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), l'élévation de température à travers l'épaisseur est considérer uniforme répartie, linéaire et sinusoïdale, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la théorie classique des plaques (CPT). (Zenkour A.M., 2010) ont proposé une théorie de cisaillement sinusoïdale de plaque (SPT) pour analyser le flambement thermique de plaques FGM. Ils ont comparé les résultats avec ceux obtenus en utilisant HOSPT, FSDT et CPT où ils ont constaté que leurs résultats sont très proches de celles de HOSPT. (Raki M., 2012) ont présenté une solution analytique de flambement thermique d'une plaque FGM, ils ont basé sur la théorie de déformation de premier ordre (FSDT). Une température uniforme est prise en considération. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis MEF et celle de la théorie classique (CPT). (Javaheri R., 2002a; Javaheri R., 2002b) ont effectué une analyse de flambement mécanique et thermique de plaques en FGM sur la base de la théorie classique de plaque (CPT) ; En outre, ils ont étudié également le flambement thermique de plaques FGM à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement (Javaheri R., 2002c). Un modèle raffiné pour les plaques est développer (RPT : Refined Plate Theory). (Mechab I., 2010; Hadj Henni A., 2011; Benachour A., 2011; Kim S.E., 2009). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables

qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. (Tounsi A., 2013; Bouhadra A., 2015; Z. Abdelhak., 2015; Khalfi Y., 2014; Thai H.T., 2012; Kaviani F., 2013; Iurlaro L., 2013) ont adaptée cette théorie, avec succès, pour la flexion, le flambement et la vibration des plaques FGM.

II.5.2. Méthodes des éléments finis (MEF)

L'analyse de la stabilité des plaques à gradient de propriété FGM par la méthode des éléments finis (MEF) fait l'objet de plusieurs recherches. (Na K.S., 2006) ont investigué le flambement et le post-flambement d'une plaque P-FGM sous l'effet d'une température uniforme et non-uniforme, un élément solide de 18 nœuds trois-dimensionnels est utilisé, la plaque est sollicité par une température uniforme, linéaire et sinusoïdal à travers l'épaisseur de la plaque. (Alieldin S.S., 2011) ont exploité la théorie de déformation de premier ordre FSDT pour examiner le comportement mécanique d'une plaque en composite laminée et une plaque FGM, la solution est faite par un élément fini de 9 nœuds, l'équation d'interpolation est interpolé par la fonction de Lagrange. La méthode des éléments finis est utilisée pour analyser la flexion statique, le flambement thermique et mécanique et la vibration libre d'une plaque FGM, (Valizadeh N., 2013) ont basé sur la FSDT pour développement des équations. (Nguyen-Xuan H., 2011) étudient le flambement et la vibration libre d'une plaque FGM basant sur la méthode des élément finis. L'analyse des grandes déformations d'une coque en FGM est faite par la méthode des éléments finis, la formulation du problème proposée par (Arciniega R.A., 2007) basée sur l'utilisation de la théorie du premier ordre FSDT et les coordonnées curvilignes. L'analyse par la méthode des éléments finis d'une coque en FGM sous un chargement thermique, mécanique et la vibration libre est investigué dans une recherche publiée par (Koteswara Rao D., 2012). (Hamzehei M., 2011) ont examiné le flambement thermique d'une plaque rectangulaire mince en FGM, l'analyse est faite analytiquement par l'utilisation d'une haute théorie de déformation (HOSDT), les résultats obtenus sont comparés à celle de la méthode des éléments finis basant sur le code Ansys.

II.5.3. Méthodes semi-analytiques ou approcher

(Matsunaga H., 2009) a étudié l'analyse thermique et mécanique de plaques en FGM basés sur la théorie de déformation d'ordre supérieur à deux dimensions par l'utilisation de développement en série de puissance pour l'évaluation des déplacements et des contraintes.

(Zhao X., 2009) le flambement mécanique et thermique est analysé pour une plaque FGM métal-céramique, les équations sont développées en basant sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), la résolution du problème faite par la méthode des éléments libres kp-Ritz. L'influence des paramètres géométrique et la fraction volumique sont évaluées ainsi que la dimension et la forme des ouvertures. L'analyse de la flexion et les déformations thermiques de poutres 2D FGM, ont utilisé une solution numérique basant sur la méthode des quadratures différentielles (Lü C.F., 2008).

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de la méthode des différences finies pour l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM. L'avantage de cette méthode c'est la possibilité d'être entendue pour analyser des plaques à gradient de propriété FGM avec épaisseur variable.

II.6. La Méthode des Différences Finies (MDF)

L'objectif de la méthode des différences finies est de trouver une solution approchée aux équations différentielles d'un problème donné, à savoir, de trouver une fonction (ou une approximation discrète à cette fonction) qui satisfait une relation donnée entre ses dérivés sur une région donnée de l'espace et / ou le temps, ainsi que certaines conditions limites le long des bords de ce domaine. En général, cela est un problème difficile à résoudre et une formule analytique ne peut que rarement être trouvée pour la solution. Une méthode des différences finies procède par le remplacement des dérivés dans les équations différentielles par approximations aux différences finies. Cela donne un grand système algébrique des équations à résoudre à la place de l'équation différentielle, quelque chose qui est facilement résolu sur un ordinateur.

II.6.1. Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) fonctionne en remplaçant la région sur laquelle les variables indépendantes de l'équation de dériver partielle EDP sont définis par une grille finie (un maillage) des points où la variable dépendante est approchée. Les dérivées partielles de la

EDP à chaque zone de point de grille estimés, figure II.4, à partir des valeurs voisines en utilisant le théorème de Taylor.

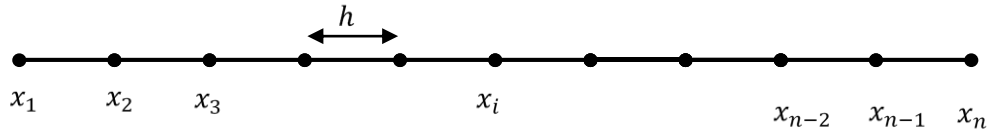


Fig. II.4 Discrétisation par un maillage en DF d'un domaine.

Soit $U(x)$ une fonction accepte n dérivées continues sur l'intervalle (a, b) . Pour $a < x_0, x_0 + h < b$,

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + h U_x(x_0) + h^2 \frac{U_{xx}(x_0)}{2!} \dots + h^{n-1} \frac{U_{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + O(h^n) \quad (\text{II.2})$$

Où

$$U_x = \frac{dU}{dx}, U_{xx} = \frac{d^2U}{dx^2}, \dots, U_{(n-1)} = \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}.$$

$U_x(x_0)$ la dérivé de U par rapport à x pour $x = x_0$.

$O(h^n)$ terme d'erreur inconnu.

h le pas de grille

L'interprétation habituelle du théorème de Taylor dit que si nous connaissons la valeur de U et les valeurs de ses dérivés au point x_0 alors nous pouvons écrire l'équation (II.2) pour sa valeur au point $x_0 + h$ (à proximité). Cette expression contient une quantité inconnue qui est $O(h^n)$. Si nous écartons le terme $O(h^n)$ à l'équation (II.2), nous obtenons une approximation de $U(x_0 + h)$. L'erreur dans cette approximation est $O(h^n)$.

Dans la MDF, les deux points de grille x_0 et $x_0 + h$ et $U(x_0)$ et $U(x_0 + h)$ sont connus. Cela nous permet de réorganiser l'équation (II.2) pour obtenir soi-disant différences finies (FD) approximatives aux dérivés qui ont les erreurs $O(h^n)$.

Après simplification, le premier terme de dérivé en avant est donné par :

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0+h) - U(x_0)}{h} + O(h) \quad (\text{II.3})$$

Négligeant le terme $O(h)$

$$U_x(x_0) \approx \frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h} \quad (\text{II.4})$$

$$U_x(x_0) \approx \frac{U_{i+1}-U_i}{h} \quad (\text{II.4.Bis})$$

Pour le premier terme de dérivé en arrière on prend $-h$ au lieu de h est donné par :

$$U_x(x_0) \approx \frac{U_i-U_{i-1}}{h} \quad (\text{II.5})$$

La dérivé central est donné par :

$$U_x(x_0) \approx \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h} \quad (\text{II.6})$$

La deuxième dérivé est donné par une différence finie symétrique :

$$U_{xx}(x_0) \approx \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{2h^2} \quad (\text{II.7})$$

II.6.2. Application de la méthode des différences finies à l'analyse des plaques

Considérons une plaque mince simplement appuyée, l'équation décrivant la flexion de la plaque est donnée :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (\text{II.8})$$

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (\text{II.9})$$

Les trois paramètres de l'équation II.8 s'écrivent en utilisant la MDF au point $w_{i,j}$, figure II.5, par :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i+2,j} - 4 w_{i+1,j} + 6 w_{i,j} - 4 w_{i-1,j} + w_{i-2,j})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i,j+2} - 4 w_{i,j+1} + 6 w_{i,j} - 4 w_{i,j-1} + w_{i,j-2})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{h^2} (w_{i,j+1} - 2 w_{i,j} + w_{i,j-1}) \right)$$

Donc

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4} (w_{i+1,j+1} - 2 w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1} - 2 w_{i+1,j} + 4 w_{i,j} - 2 w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - 2 w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1})$$

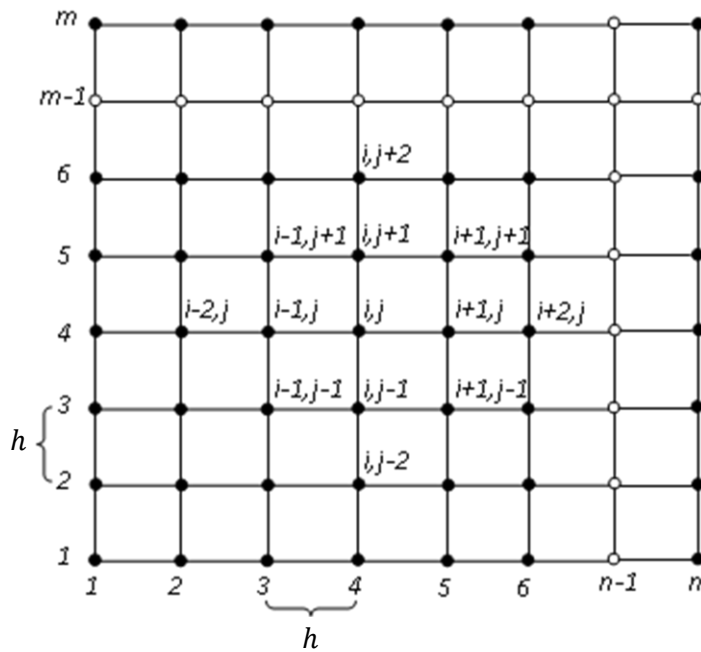


Fig. II.5 Maillage d'une plaque par MDF.

L'équation II.8 s'écrit en utilisant le maillage en MDF au point $w_{i,j}$:

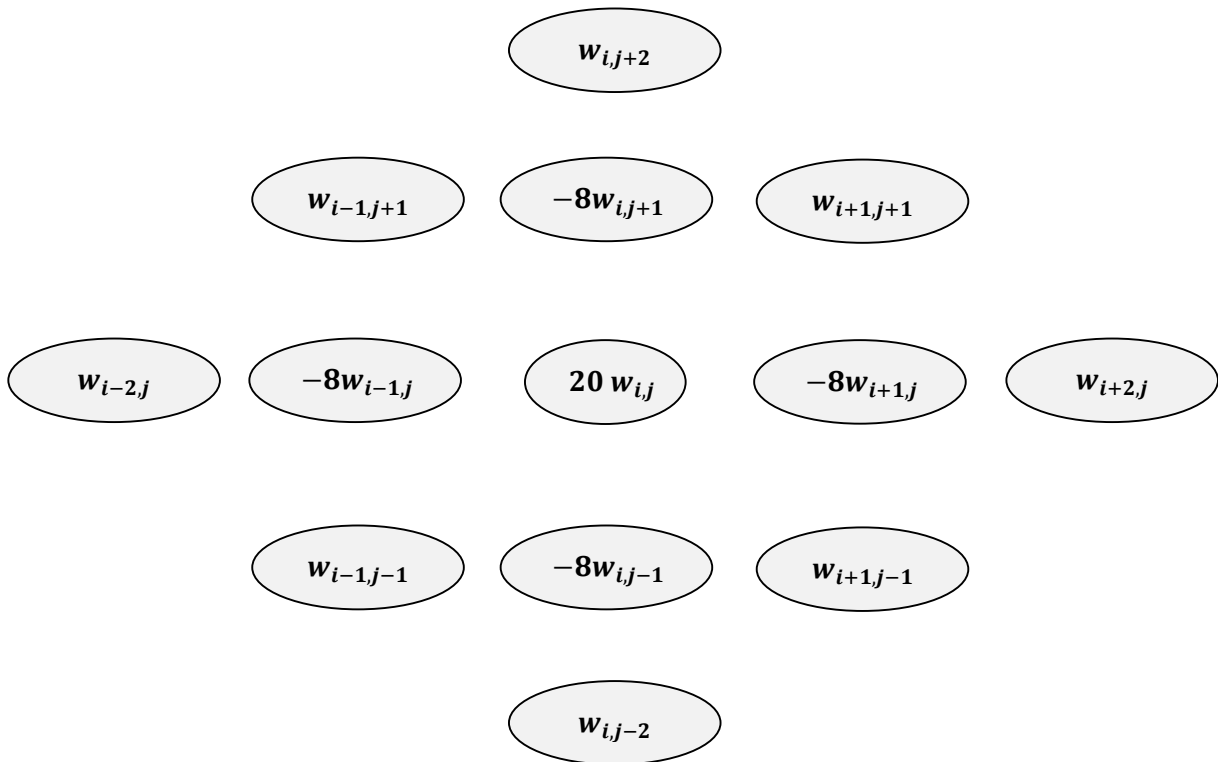


Fig. II.6 Ecriture de l'équation différentielle en MDF au point $w_{i,j}$ en maillage.

II.7. Conclusion

Dans ce qui précède, nous avons donné un aperçu sur la notion de la stabilité des structures minces, plus précisément le flambement (voilement) des plaques, on a présenté l'historique et les premières études du flambement. Il a été apparu nécessaire d'analyser la stabilité des plaques en matériaux fonctionnellement gradués.

Certaines méthodes ont été proposées dans la littérature pour analyser la stabilité des structures en matériaux à gradient de propriété, on a distingué les méthodes analytiques qui basent sur la théorie classique des plaques CPT, la théorie de cisaillement de premier ordre, les théories de cisaillement d'ordre élevé et la méthode raffinée, la méthode des éléments finis et les méthodes numériques ou semi-analytiques.

Une méthode semi-analytique est montrée par la suite basant sur la méthode des différences finies, le principe de cette méthode est détaillé pour la flexion d'une plaque simplement appuyée.

L'utilisation de la méthode des différences finies permet de étudier la stabilité au flambement des plaques en gradient de propriété, l'avantage de cette méthode c'est la capacité d'analyser la stabilité des plaques avec différentes conditions aux limites, analyser des plaques avec épaisseur variables.

**Chapitre III : Analyse Du Flambement
Thermique Des Plaques FGM Par La
MDF**

Chapitre III : Analyse Du Flambement Thermique Des Plaques FGM Par La MDF

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse du flambement thermique d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés (FGM) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre un (FSDT). On considère que les propriétés matérielles sont variées dans la direction de l'épaisseur de la plaque selon une simple loi de puissance ou une loi sigmoïde, en basant sur les relations contrainte-déformation et les conditions aux limites, l'équation différentielle d'équilibre est obtenue par l'utilisation de la théorie de Von Karman.

III.2. Formulation Mathématique

On considère une plaque rectangulaire fonctionnellement gradué (FGM) simplement appuyé d'épaisseur h , de largeur b et de longueur a , définie par le système de coordonnées x, y, z où z est la normale au plan moyen de la plaque, figure III.1.

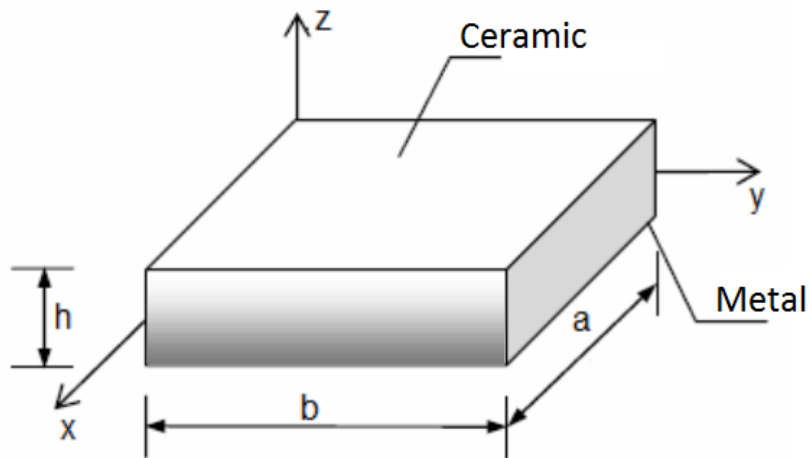


Fig. III.1 Système d'axe d'une plaque FGM.

La plaque est composée de deux matériaux, métal et céramique, de propriétés indiquées au tableau III.1.

Tableau III.1 Les caractéristiques des matériaux utilisés.

matériaux	E [GPa]	α [m/m °C]	K [W/mk]	ν	ρ [kg/m ³]	Température de fusion [C°]
Métal (Aluminium)	70	23 10 ⁻⁶	204	0.3	2707	770
Céramique (Alumina)	380	7.4 10 ⁻⁶	10.4	0.3	3800	2030

La surface supérieure est riche en céramique et la surface inférieure riche en métal, la partie intermédiaire est une combinaison entre les deux matériaux selon une simple loi de puissance P-FGM, figure III.2.

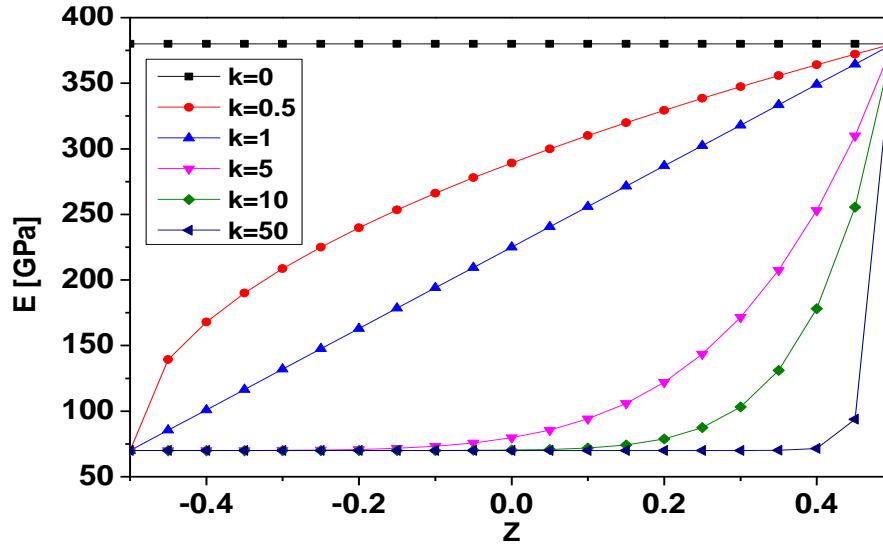


Fig. III.2 Variation de module de Young en fonction de k dans une plaque P-FGM.

Pour $k = 0$ la plaque devient isotrope purement en céramique, pour $k = \infty$ la plaque est en métal et pour $k = 1$ la variation entre les deux matériaux est linéaire.

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad (III.1)$$

$$V_m(z) + V_c(z) = 1$$

Les propriétés de matériau de la plaque P-FGM sont données par l'équation (III.2)

$$P(z) = P_c V_c + P_m (1 - V_c) \quad (III.2)$$

Où les indices c et m désignent respectivement la propriété de la céramique et le métal, P désigne les propriétés de matériau, il peut prendre soit le module de Young E , le coefficient de dilatation thermique α , la conductivité thermique K , la masse volumique ρ ou même le coefficient de Poisson ν , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E., 2009).

A titre d'exemple la variation du module de Young est donnée par l'équation (III.3).

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (III.3)$$

III.2.1. Champ de déformation

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), figure III.3, (Reissner E., 1945) (Mindlin R.D., 1951)

La théorie de premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = u + z \psi_x \\ v_1(x, y) = v + z \psi_y \\ w_1(x, y) = w \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Avec u_1 , v_1 et w_1 représente les déplacement totaux et u et v les déplacement dans le plan de la surface neutre, respectivement dans la direction x , y et z .

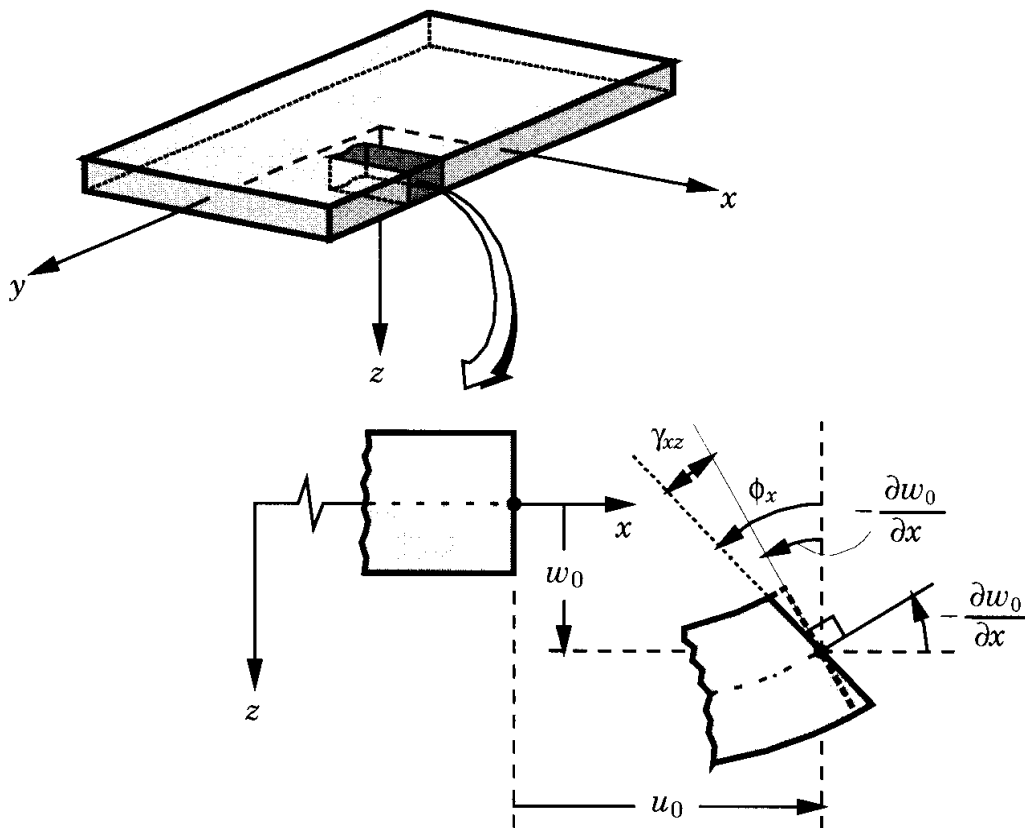


Fig. III.3 Illustration de la plaque Reissner-Mindlin (Reddy J.N., 1997)

Les déformations de ce champ de déplacement donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + z \psi_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + z \psi_{y,y} \\ \varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} + z (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ \varepsilon_{yz} = \psi_{y,z} + w_{,y} \\ \varepsilon_{xz} = \psi_{x,z} + w_{,x} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

Où

$$\begin{aligned} u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 &= \varepsilon_1 \\ v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 &= \varepsilon_2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} &= \varepsilon_3 \end{aligned}$$

ψ_x et ψ_y représente les termes de rotation autour des axes y et x respectivement.

III.2.2. Relations contraintes déformation

Les relations contraintes déformations d'une plaque données par la loi de Hooke généralisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} - (1 + \nu)\alpha(z)T) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx} - (1 + \nu)\alpha(z)T) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E(z)}{2(1-\nu)} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= \frac{E(z)}{2(1-\nu)} \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E(z)}{2(1-\nu)} \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

III.2.3. Equation des forces et moments

Les forces et les moments interne, figure III.4, par unité de longueur en fonction des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque données par l'équation (III.7)

$$\begin{aligned} (N_i, M_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i (1, z) dz; \quad i = xx, yy, xy \\ Q_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz; \quad i = x, y \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

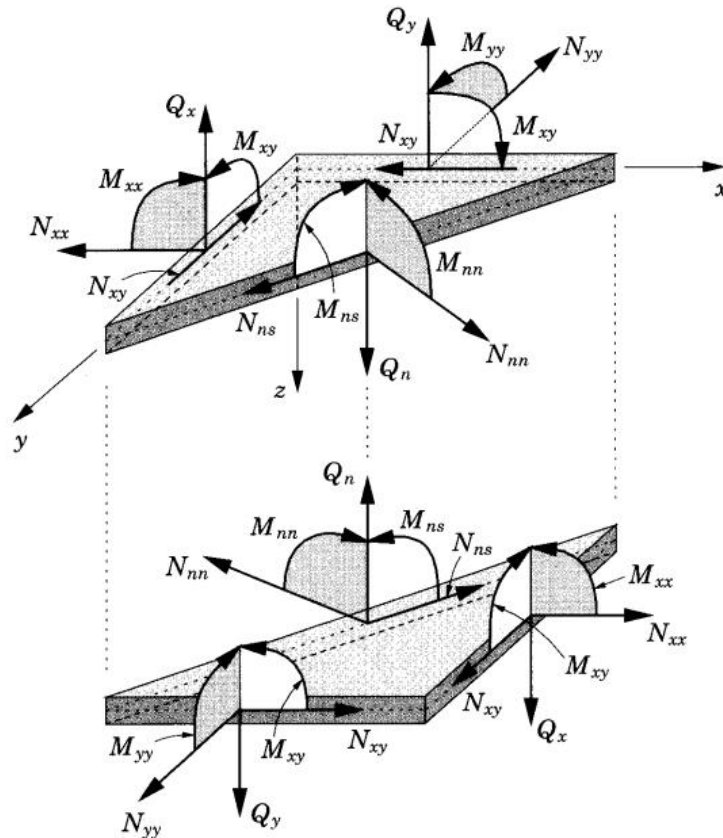


Fig. III.4 Forces et moments résultants sur un élément de plaque (Reddy J.N., 1997)

On introduit la loi de Hooke généralisé, équations (III.6), dans les relation des forces et moments, équations (III.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \frac{E1}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - (1 + \nu)\alpha(z)T) + \frac{E2}{1-\nu^2} (\psi_{x,x} + \nu \psi_{y,y}) \\
 N_{yy} &= \frac{E1}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - (1 + \nu)\alpha(z)T) + \frac{E2}{1-\nu^2} (\nu \psi_{x,x} + \psi_{y,y}) \\
 N_{xy} &= \frac{E1}{2(1+\nu)} \varepsilon_3 + \frac{E2}{2(1+\nu)} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\
 Q_x &= \frac{E1}{2(1+\nu)} (\psi_x + w_{,x}) \\
 Q_y &= \frac{E1}{2(1+\nu)} (\psi_y + w_{,y}) \\
 M_{xx} &= \frac{E2}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - (1 + \nu)\alpha(z)T) + \frac{E3}{1-\nu^2} (\psi_{x,x} + \nu \psi_{y,y}) \\
 M_{yy} &= \frac{E2}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - (1 + \nu)\alpha(z)T) + \frac{E3}{1-\nu^2} (\nu \psi_{x,x} + \psi_{y,y}) \\
 M_{xy} &= \frac{E2}{2(1+\nu)} \varepsilon_3 + \frac{E3}{2(1+\nu)} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

Où

$$(E1, E2, E3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz \tag{III.9}$$

III.2.4. Equation d'équilibre

On utilise la théorie de Von Karman, l'équation non linéaire d'équilibre donnée par :

$$\begin{aligned}
 N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
 N_{yy,y} + N_{xy,x} &= 0 \\
 M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\
 M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y &= 0 \\
 Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2 N_{xy}w_{,xy} &= 0
 \end{aligned} \tag{III.10}$$

On insère les équations (III.8) dans l'équation (III.10)

$$\begin{aligned}
 E1 \left(\frac{\varepsilon_{1,x} + \nu \varepsilon_{2,x}}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,y}}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E2 \left(\frac{\psi_{x,xx} + \nu \psi_{y,xy}}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}}{2(1+\nu)} \right) &= 0 \\
 E1 \left(\frac{\varepsilon_{2,y} + \nu \varepsilon_{1,y}}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,x}}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E2 \left(\frac{\nu \psi_{x,xy} + \psi_{y,yy}}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}}{2(1+\nu)} \right) &= 0 \\
 E2 \left(\frac{\varepsilon_{1,x} + \nu \varepsilon_{2,x}}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,y}}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E3 \left(\frac{\psi_{x,xx} + \nu \psi_{y,xy}}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}}{2(1+\nu)} \right) - E1 \frac{\psi_x + w_{,x}}{2(1+\nu)} &= 0 \\
 E2 \left(\frac{\varepsilon_{2,y} + \nu \varepsilon_{1,y}}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,x}}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E3 \left(\frac{\nu \psi_{x,xy} + \psi_{y,yy}}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}}{2(1+\nu)} \right) - E1 \frac{\psi_y + w_{,y}}{2(1+\nu)} &= 0 \\
 E1 \frac{(\psi_{x,x} + w_{,xx} + \psi_{y,y} + w_{,yy})}{2(1+\nu)} + N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2 N_{xy}w_{,xy} &= 0
 \end{aligned} \tag{III.11}$$

Les équations de stabilité sont obtenus en utilisant la méthode d'équilibre critique (Brush D.O., 1975) dans cette méthode, les éléments de déplacement sont constitués de deux états, l'état d'équilibre et l'état voisin, pour une plaque sous une charge thermique le déplacement de l'état voisin est donné par :

$$\Delta w = w_0 - w_1 \tag{III.12}$$

Où w_0 se réfère à l'état d'équilibre et w_1 se réfère à l'état voisine, c'est l'augmentation dans le voisinage de l'état d'équilibre.

Pour obtenir les équations régissant, on réécrit l'équation (III.11) en termes d'états des déplacements voisins.

$$E1 \left(\frac{\varepsilon_{1,x}^1 + \nu \varepsilon_{2,x}^1}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,y}^1}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E2 \left(\frac{\psi_{x,xx}^1 + \nu \psi_{y,xy}^1}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,yy}^1 + \psi_{y,xy}^1}{2(1+\nu)} \right) = 0 \tag{III.13a}$$

$$E1 \left(\frac{\varepsilon_{2,y}^1 + \nu \varepsilon_{1,y}^1}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,x}^1}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E2 \left(\frac{\psi_{y,yy}^1 + \nu \psi_{x,xy}^1}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,xy}^1 + \psi_{y,xx}^1}{2(1+\nu)} \right) = 0 \tag{III.13b}$$

$$E2 \left(\frac{\varepsilon_{1,x}^1 + \nu \varepsilon_{2,x}^1}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,y}^1}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E3 \left(\frac{\psi_{x,xx}^1 + \nu \psi_{y,xy}^1}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,yy}^1 + \psi_{y,xy}^1}{2(1+\nu)} \right) - E1 \frac{\psi_x^1 + w_{,x}^1}{2(1+\nu)} = 0 \tag{III.13c}$$

$$E2 \left(\frac{\varepsilon_{2,y}^1 + \nu \varepsilon_{1,y}^1}{1-\nu^2} + \frac{\varepsilon_{3,x}^1}{2(1+\nu)} - (1+\nu)\alpha(z)T \right) + E3 \left(\frac{\psi_{y,yy}^1 + \nu \psi_{x,xy}^1}{1-\nu^2} + \frac{\psi_{x,xy}^1 + \psi_{y,xx}^1}{2(1+\nu)} \right) - E1 \frac{\psi_y^1 + w_y^1}{2(1+\nu)} = 0 \quad (\text{III.13d})$$

$$E1 \frac{(\psi_{x,x}^1 + w_{xx}^1 + \psi_{y,y}^1 + w_{yy}^1)}{2(1+\nu)} + N_{xx}^1 w_{xx}^1 + N_{yy}^1 w_{yy}^1 + 2 N_{xy}^1 w_{xy}^1 = 0 \quad (\text{III.13e})$$

Réécrire les déformations dans les équations (III.13a-b) en termes de rotations et remplacer le dans les différenciations des équations (III.13c-d) par rapport aux variables x et y, en faisant des calculs mathématiques et des simplifications :

$$\frac{E1E3-E2^2}{E1} \left(\frac{\nabla^2 \psi_{x,x}^1 + \nabla^2 \psi_{y,y}^1}{(1-\nu^2)} \right) - E1 \frac{\psi_{x,x}^1 + \psi_{y,y}^1 + \nabla^2 w^1}{2(1+\nu)} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Dans l'équation (III.13e), les rotations sont liés au déplacement transversal w par :

$$\psi_{x,x}^1 + \psi_{y,y}^1 = -\nabla^2 w^1 - \frac{2(1+\nu)}{E1} (N_{xx}^1 w_{xx}^1 + N_{yy}^1 w_{yy}^1 + 2 N_{xy}^1 w_{xy}^1) \quad (\text{III.15})$$

En substituant l'équation (III.15) dans l'équation (III.14) et on respecte la différenciation :

$$\frac{E1E3-E2^2}{E1(1-\nu^2)} \left(-\nabla^4 w^1 - \frac{2(1+\nu)}{E1} \nabla^2 (N_{xx}^1 w_{xx}^1 + N_{yy}^1 w_{yy}^1 + 2 N_{xy}^1 w_{xy}^1) \right) + (N_{xx}^1 w_{xx}^1 + N_{yy}^1 w_{yy}^1 + 2 N_{xy}^1 w_{xy}^1) = 0 \quad (\text{III.16})$$

Où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ représenter l'opérateur Laplacien et N_{xx}^1 , N_{yy}^1 et N_{xy}^1 sont les résultantes des forces de pré-flambement. Une fois les forces thermiques de pré-flambement sont trouvées, les forces de flambage peuvent être évaluées.

En résolvant la forme de la membrane des équations d'équilibre, ce qui donne les résultantes des forces de pré-flambement :

$$\begin{aligned} N_x^0 &= -\frac{\Phi}{1-\nu} \\ N_y^0 &= -\frac{\Phi}{1-\nu} \\ N_{xy}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En supposant une augmentation uniforme de la température et en utilisant l'équation. (III.9), on a :

$$\Phi = P \Delta T \quad (\text{III.18})$$

Où

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) dz \quad (\text{III.19})$$

En substituant l'équation (III.17) et l'équation (III.18) dans l'équation (III.16), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\nabla^4 w_1 - \frac{2(1+\nu) P \Delta T}{E_1 (1-\nu)} \nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2) P \Delta T}{E_1 E_3 - E_2^2 (1-\nu)} \nabla^2 w_1 = 0 \quad (\text{III.20})$$

La plaque est simplement appuie donc les conditions aux limites pris en charge sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ M_{x1} &= 0 \text{ à } x = 0, a \\ \phi_{y1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ M_{y1} &= 0 \text{ at } y = 0, b \\ \phi_{x1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

III.2.5. Solution analytique de l'équation différentielle

La solution de l'équation (III.20) en satisfaisant les conditions aux limites donnée (Bouazza M., 2009; Mozafari H., 2010b) sous la forme :

$$w_1 = c \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \quad (\text{III.23})$$

Où c est un coefficient constant, m et n les nombres des ondulations dans les directions x et y , respectivement.

La température critique de flambement ΔT_{cr} pour une distribution de température uniforme peut être donnée par la formule suivante :

$$\Delta T_{cr} = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2)\pi^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + E_1^2 a^2 (1-\nu^2)} \frac{E_1}{P} \quad (\text{III.24})$$

Pour déterminer la température critique de flambement on peut utiliser une méthode analytique, exacte, ou une méthode semi-analytique, approximative.

III.3. Solution de l'équation différentielle

La détermination de la température critique, température minimale nécessaire pour que la plaque se flambe, nécessite la résolution de l'équation différentielle (III.20). Dans cette recherche la résolution du problème s'effectuera par une discrétisation en utilisant la méthode des différences finis.

Pour donner une solution approchée à l'équation différentielle (III.20), à savoir, de trouver une fonction, ou une approximation discrète à cette fonction, qui satisfait une relation donnée entre ses dérivés sur une région donnée de l'espace et / ou le temps, avec les conditions des frontières le long des bords de ce domaine. En général, cela est un problème difficile et une formule analytique ne peut que rarement être trouvée pour la solution. La méthode de différence finie procède en remplaçant les dérivés dans les équations différentielles par approximations aux différences finies. Cela donne un grand système algébrique des équations à résoudre à la place de l'équation différentielle, quelque chose qui est facilement résolu sur un ordinateur.

L'objectif de l'utilisation de la méthode des différences finies est de disposer des capacités supplémentaires telles que notamment la variation d'épaisseur, tout en évitant une telle procédure analytiques qui peuvent généralement conduire à des expressions complexes qui sont difficiles à résoudre.

Pour ce faire, nous considérons une plaque FGM rectangulaire représentée sur la figure III.5 maillée en x et y directions par $n \times m$ nœuds espacées de Δh .

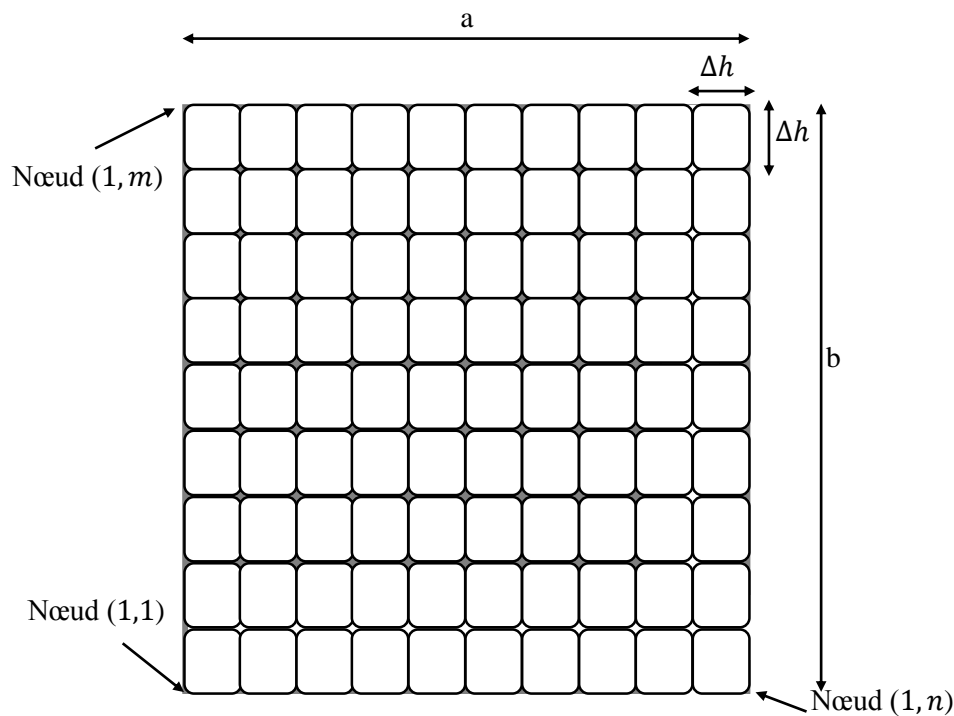


Fig. III.5 Maillage de la plaque par différences finis

L'équation (III.20) est simplifiée comme suit :

$$\nabla^4 W.A + \nabla^2 W.B = 0 \quad (III.25)$$

Où :

$$\begin{aligned}
 W &= w_1 \\
 A &= 1 - \frac{2(1+\nu) P \Delta T}{E_1 1-\nu} \\
 B &= \frac{E_1(1-\nu^2) P \Delta T}{E_1 E_3 - E_2^2 1-\nu}
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

L'équation (III.25) peut être s'écrit au nœud (i, j) en différences finies (DF) comme suit :

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) \cdot W_{(i,j)} + \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j-2)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i,j-1)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i,j+1)} + \\
 &\frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j+2)} + \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-2,j)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i-1,j)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j-1)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j+1)} + \\
 &\left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i+1,j)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j-1)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j+1)} + \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+2,j)} = 0
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Le maillage présenté par l'équation (III.27) est appliquée au niveau des nœuds de coordonnées $(i = 2 \dots n - 1, j = 2 \dots m - 1)$. Noter que cette opération entraîne des nœuds virtuels aux lignes $(i = 2, i = n - 1, j = 2, j = m - 1)$.

Les nœuds virtuels peuvent être éliminés en utilisant les conditions aux limites. La plaque est simplement appuie donc :

- 1) Tous les déplacements le long des bords égaux à zéro, i.e. :

$$W_{(i,j)} = 0 \tag{III.28}$$

Pour $[i = (1, n) \text{ et } j = (1 \dots m)]$ et pour $[i = (1 \dots n) \text{ et } j = (1, m)]$

- 2) D'autre part, le moment sur tous les bords est égal à zéro ($M = 0$), où le moment peut être exprimé en termes de déviation par :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \tag{III.29}$$

A titre d'exemple illustratif, sur le bord inférieur ($j = 1$), le moment peut être exprimé en différences finies à chaque nœud (i, 1) comme suit :

$$\frac{1}{\Delta h^2} \left(-4 W_{(i,1)} + W_{(i,0)} + W_{(i,2)} + W_{(i+1,1)} + W_{(i-1,1)}\right) = -\frac{M_{(i,1)}}{D_{(i,1)}} = 0 \tag{III.30}$$

Depuis la première condition au bord, tout $W_{(i,1)} = 0$, l'expression (III.30) peut être simplifiée comme suit :

$$W_{(i,0)} = -W_{(i,2)} \tag{III.31}$$

Où $W_{(i,0)}$ sont des nœuds virtuels peuvent être substitué dans l'équation (III.31) au niveau des nœuds ($i, j = 2$), on peut obtenir :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{19A}{\Delta h^2} - 4B\right) \cdot W_{(i,2)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i,1)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i,3)} + \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,4)} + \\ & \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-2,2)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + B\right) \cdot W_{(i-1,2)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,1)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,3)} + \left(-\frac{8A}{\Delta h^2} + \right. \\ & \left. B\right) \cdot W_{(i+1,2)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,1)} + \frac{2A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,3)} + \frac{A}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+2,2)} = 0 \end{aligned} \quad (III.32)$$

Pour résoudre le système d'équations homogènes (III.33), on obtient $(n - 2) \times (m - 2)$ mode pour $W_{(i,j)}$. Ensuite, pour évaluer la température critique de flambement ΔT_{cr} , le mode de flambement le plus significatif c'est le premier mode qu'on va utiliser dans l'équation (III.25).

La résolution du système d'équations (III.33) nécessite la détermination de la valeur de ΔT_{cr} incorporée au paramètres A et B . pour se faire il y a deux méthodes :

- 1) Il est possible d'utiliser la méthode de tâtonnement pour trouver la bonne valeur de ΔT_{cr} . Depuis la forme du mode de flambement $W(x, y)$ est totalement indépendant de la valeur de ΔT_{cr} , donc on peut utiliser n'importe quelle valeur de ΔT_{cr} pour résoudre le système d'équations (III.33) sans aucun effet sur les résultats de $W_{(i,j)}$.
- 2) Par contre, dans la solution analytique de flambement, les modes de flambement $W(x, y)$ sont généralement être supposés des fonctions sinusoïdales satisfis les conditions aux limites. Par conséquent, pour résoudre numériquement le flambement ou la vibration des plaques, il est possible de supposer que les modes de flambement sont identiques à données par $\nabla^4 W(x, y) = 0$, car il a la même solution que la méthode analytique.

Dons cette recherche, la technique adoptée pour résoudre le système d'équation (III.33) c'est la méthode de tâtonnement, en supposant $\Delta T_{cr} = 0$ comme valeur initiale, le système d'équation (III.33) s'écrit par (III.34).

En substituant le vecteur du premier mode de flambement W dans l'équation (III.25)

$$\Delta T_{cr} = \frac{\nabla^4 W}{\frac{2(1+\nu)P}{E_1(1-\nu)}\nabla^4 W - \frac{E_1(1-\nu^2)P}{(E_1E_3 - E_2^2)(1-\nu)}\nabla^2 W} \quad (III.35)$$

L'équation (III.35) peut être exprimée sous forme de différence finie au niveau de chaque nœud, on peut donner par l'équation (III.36), tandis que la valeur adoptée de ΔT_{cr} est la valeur minimale de $\Delta T_{cr(i)}$.

$$\begin{bmatrix}
 \left(\frac{18A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \frac{A}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{19A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{A}{\Delta h^2} & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \frac{A}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{A}{\Delta h^2} & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \left(\frac{20A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \frac{A}{\Delta h^2} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{19A}{\Delta h^2} - 4B\right) & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{A}{\Delta h^2} & -\frac{8A}{\Delta h^2} + B & \left(\frac{18A}{\Delta h^2} - 4B\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 W_{(2,2)} \\
 W_{(3,2)} \\
 W_{(4,2)} \\
 \vdots \\
 W_{(i-1,j)} \\
 W_{(i,j)} \\
 W_{(i+1,j)} \\
 \vdots \\
 W_{(n-3,m-1)} \\
 W_{(n-2,m-1)} \\
 W_{(n-1,m-1)}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (III.33)$$

$$\begin{bmatrix}
 \left(\frac{18}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} & \frac{1}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{19}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{\Delta h^2} & -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{20}{\Delta h^2}\right) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \left(\frac{20}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} & \frac{1}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{20}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\Delta h^2} & -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{20}{\Delta h^2}\right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \left(\frac{20}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} & \frac{1}{\Delta h^2} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{19}{\Delta h^2}\right) & -\frac{8}{\Delta h^2} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\Delta h^2} & -\frac{8}{\Delta h^2} & \left(\frac{18}{\Delta h^2}\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 W_{(2,2)} \\
 W_{(3,2)} \\
 W_{(4,2)} \\
 \vdots \\
 W_{(i-1,j)} \\
 W_{(i,j)} \\
 W_{(i+1,j)} \\
 \vdots \\
 W_{(n-3,m-1)} \\
 W_{(n-2,m-1)} \\
 W_{(n-1,m-1)}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (III.34)$$

$$\Delta T_{cr(i)} = \frac{\left(\frac{20}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j)} - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j)} - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j)} - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j-1)} - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j+1)} \right.}{\left(\begin{aligned} &+ \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j-1)} + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j-1)} + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j+1)} + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j+1)} \\ &+ \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-2,j)} + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+2,j)} + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j-2)} + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j+2)} \end{aligned} \right)} \quad (III.36)$$

$$\left(\begin{aligned} &\left(\frac{20C}{\Delta h^2} - 4D \right) \cdot W_{(i,j)} + \left(-\frac{8C}{\Delta h^2} + D \right) \cdot W_{(i-1,j)} + \left(-\frac{8C}{\Delta h^2} + D \right) \cdot W_{(i+1,j)} + \left(-\frac{8C}{\Delta h^2} + D \right) \cdot W_{(i,j-1)} \\ &+ \left(-\frac{8C}{\Delta h^2} + D \right) \cdot W_{(i,j+1)} + \frac{2C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j-1)} + \frac{2C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j-1)} + \frac{2C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-1,j+1)} + \frac{2C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+1,j+1)} \\ &+ \frac{C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i-2,j)} + \frac{C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i+2,j)} + \frac{C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j-2)} + \frac{C}{\Delta h^2} \cdot W_{(i,j+2)} \end{aligned} \right)$$

Où

$$C = \frac{2(1+\nu)P}{E_1(1-\nu)}$$

$$D = -\frac{E_1(1-\nu^2)P}{(E_1E_3 - E_2^2)(1-\nu)}$$

III.4. Analyse du Flambement Thermique d'une Plaque FGM Avec Epaisseur Constante

L'analyse de flambement thermique d'une plaque rectangulaire simplement appuyée en matériau à gradient de propriété S-FGM avec une épaisseur constante a été réalisée, afin de valider la solution obtenue par la méthode des différences finies en comparant les résultats avec la solution exacte présentée par (Bouazza M., 2009).

Les dimensions de la plaque dans le plan $x - y$ sont a et b avec $a \leq b$. L'épaisseur de la plaque est h dans la direction z où le matériau change progressivement, comme représenté sur la figure III.1.

La plaque exposée à une charge thermique uniforme. La température de référence est supposée être de $5^\circ C$. Le métal et la céramique utilisées dans la constitution de la plaque sont l'Aluminium et l'Alumina avec les propriétés suivantes :

$$E_m = 70 \text{ GPa}, \alpha_m = 23 \times 10^{-6} (1/C^\circ) \text{ et } k_m = 204 \text{ W/mk} \text{ pour l'Aluminium et } E_c = 380 \text{ GPa}, \alpha_c = 7.4 \times 10^{-6} (1/C^\circ) \text{ et } k_c = 10.4 \text{ W/mk} \text{ pour l'Alumina.}$$

Tandis que, le coefficient de Poisson ν est supposé être constant sur toute l'épaisseur de la plaque, tableau III.1.

III.4.1. Etude de la Convergence des résultats

Dans un premier temps, effectuons une étude de la convergence des résultats obtenus par la méthode des différences finies pour examiner la sensibilité de l'analyse et la densité du maillage convenable.

La figure III.6 représente l'allure de la courbe de convergence de la solution par la méthode des différences finies, on constate que, lorsque la densité du maillage $a/\Delta h$ (nombre de divisions) augmente, la solution converge vers la valeur exacte donnée par (Bouazza M., 2009).

En d'autres termes, l'erreur relative aux résultats devient inférieure à 0,035% lorsque la plaque est divisée en plus de 40 segments de chaque côté. Il convient également de noter que, les erreurs de solutions obtenus par les différences finies pour un maillage grossier ($a/\Delta h < 30$) sont assez grandes pour une plaque mince ($a/h = 50$) que celle d'une plaque épaisse ($a/h = 5$).

Toutefois, pour obtenir des meilleurs résultats le maillage utilisé est ($a/\Delta h = 50$), l'erreurs de la solution diminuent à moins de 0,035% et de 0,017% pour $k = 0$ et $k = 50$, respectivement. En outre, on a remarqué que plus le maillage utilisé est fin, plus le temps nécessaire pour résoudre le problème est plus important, en gardant le cas d'un maillage de ($a/\Delta h = 50$), donc 2601 nœuds dans le modèle.

En conséquence, la densité du maillage retenu pour le reste de l'analyse a été prise égale à $a/\Delta h = 50$ qui a été jugée appropriée et satisfaisante en termes de précision et de temps.

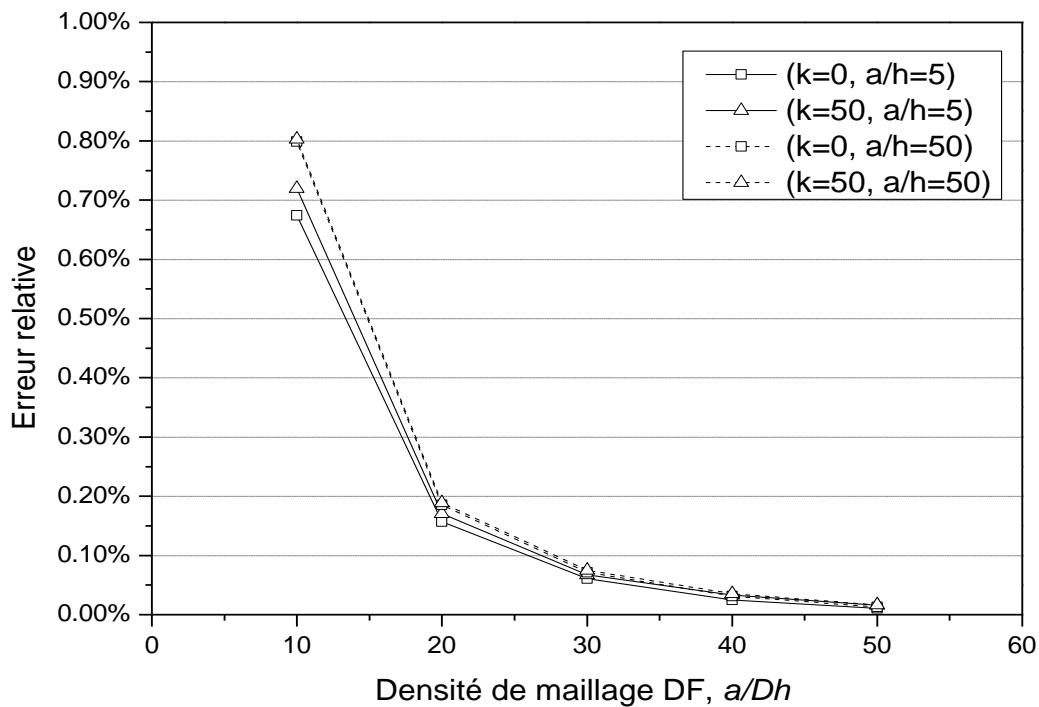


Fig. III.6 Convergence de la solution par la méthode des différences finies.

Le tableau III.2, représente la comparaison de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée sous chargement thermique uniforme, la solution exacte présentée par (Bouazza M., 2009) et la présente solution par la méthode des différences finies, pour différentes rapports longueur-épaisseur a/h , largeur-longueur b/a et les différentes paramètre de la fraction volumique k pour une loi de distribution sigmoïde.

D'après le tableau III.2, un très bon accord a été trouvé entre la méthode numérique par l'utilisation de la méthode des différences finies et la solution analytique pour les différentes gammes de propriétés géométriques et matérielles. Ainsi, la présente solution de différences finies peut être utilisée efficacement pour analyser le voilement thermique de la plaque FGM avec une très bonne précision.

En général, les résultats indiquent que la rigidité de la plaque augmente, la température critique de flambement augmente. Notant que la rigidité de la plaque augmente lorsqu'on utilise des valeurs plus basses du rapport a/h , et du paramètre matériel k . En outre, les résultats indiquent que la température critique de flambement ΔT_{cr} des plaques FGM $k \geq 1$ est inférieures à celle de la plaque homogène purement en céramique ($k = 0$).

Tableau III.2 Comparaison de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée sous chargement thermique uniforme.

k	a/h	Solution exacte [Bouazza]	Densité du maillage adopté par la méthode des différences finies (a/Δh)									
			10		20		30		40		50	
			ΔT_{cr}	%erreur*	ΔT_{cr}	%erreur*	ΔT_{cr}	%erreur*	ΔT_{cr}	%erreur*	ΔT_{cr}	%erreur*
0	5	2802.902	2784.000	0.674%	2798.500	0.157%	2801.200	0.061%	2802.200	0.025%	2802.600	0.011%
	10	794.731	789.012	0.720%	793.680	0.132%	794.547	0.023%	794.850	0.015%	794.991	0.033%
	20	205.601	204.071	0.744%	205.320	0.137%	205.552	0.024%	205.633	0.016%	205.671	0.034%
	50	33.236	32.970	0.798%	33.174	0.185%	33.212	0.071%	33.225	0.031%	33.232	0.013%
1	5	2743.361	2724.400	0.691%	2739.000	0.159%	2741.700	0.061%	2742.600	0.028%	2743.000	0.013%
	10	764.145	758.256	0.771%	762.774	0.179%	763.613	0.070%	763.907	0.031%	764.043	0.013%
	20	196.649	195.090	0.793%	196.286	0.185%	196.508	0.072%	196.586	0.032%	196.622	0.014%
	50	31.725	31.471	0.800%	31.666	0.186%	31.702	0.072%	31.715	0.032%	31.720	0.014%
10	5	2797.583	2777.700	0.711%	2793.000	0.164%	2795.900	0.060%	2796.900	0.024%	2797.300	0.010%
	10	762.036	756.146	0.773%	760.690	0.177%	761.534	0.066%	761.829	0.027%	761.966	0.009%
	20	194.872	193.332	0.791%	194.520	0.181%	194.741	0.068%	194.818	0.028%	194.854	0.009%
	50	31.381	31.131	0.796%	31.324	0.182%	31.360	0.068%	31.372	0.028%	31.378	0.010%
50	5	2914.566	2893.600	0.719%	2909.600	0.170%	2912.600	0.067%	2913.600	0.033%	2914.100	0.016%
	10	792.918	786.729	0.781%	791.459	0.184%	792.337	0.073%	792.645	0.034%	792.787	0.017%
	20	202.700	201.083	0.798%	202.319	0.188%	202.548	0.075%	202.629	0.035%	202.666	0.017%
	50	32.638	32.376	0.803%	32.576	0.189%	32.614	0.075%	32.627	0.035%	32.633	0.017%

*Erreur relative = $\frac{|différence\ finie - Solution\ exacte|}{Solution\ exacte} \%$; où la solution exacte est donnée par (Bouazza M., 2009).

La figure III.7 représente les quatre premiers modes de flambement $W_{i,j}$ (déplacement) pour la plaque S-FGM avec $b/a = 1$, $a/h = 10$ et $k = 10$.

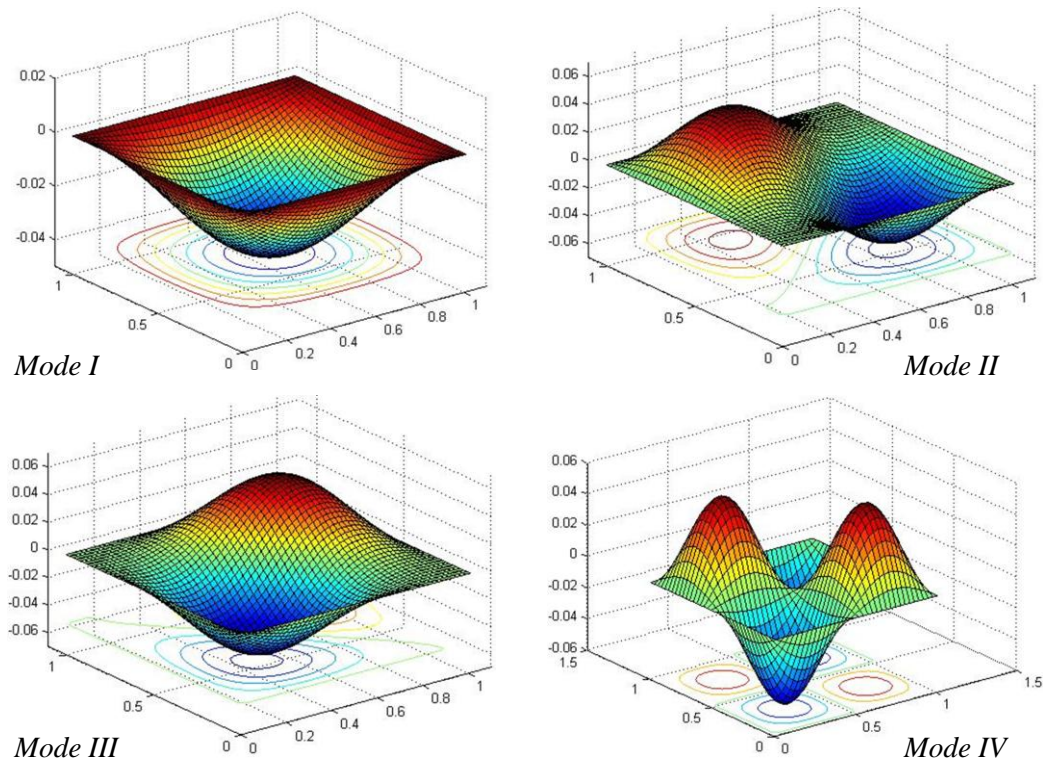


Fig. III.7 Les quatre modes naturelle de déformation $W_{i,j}$ d'une plaque FGM carré.

III.4.2. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température uniforme

La figure III.8 montre la variation de la température critique de flambement d'une plaque S-FGM simplement appuyée en fonction de la variation d'épaisseur, le paramètre matériel $k = 1$.

On observe que la méthode des différences finis (MDF) donne des bonnes résultats comparant à ceux obtenus par la méthode exacte présentées par (Bouazza M., 2009), constatant que la température critique de flambement augmente avec la diminution du rapport largeur-épaisseur a/h , augmentation de l'épaisseur de la plaque, la température critique de flambement ΔT_{cr} augmente si le rapport largeur-longueur a/b augment, plus la plaque est épaisse plus est rigide plus la plaque est mince elle devient plus fragile.

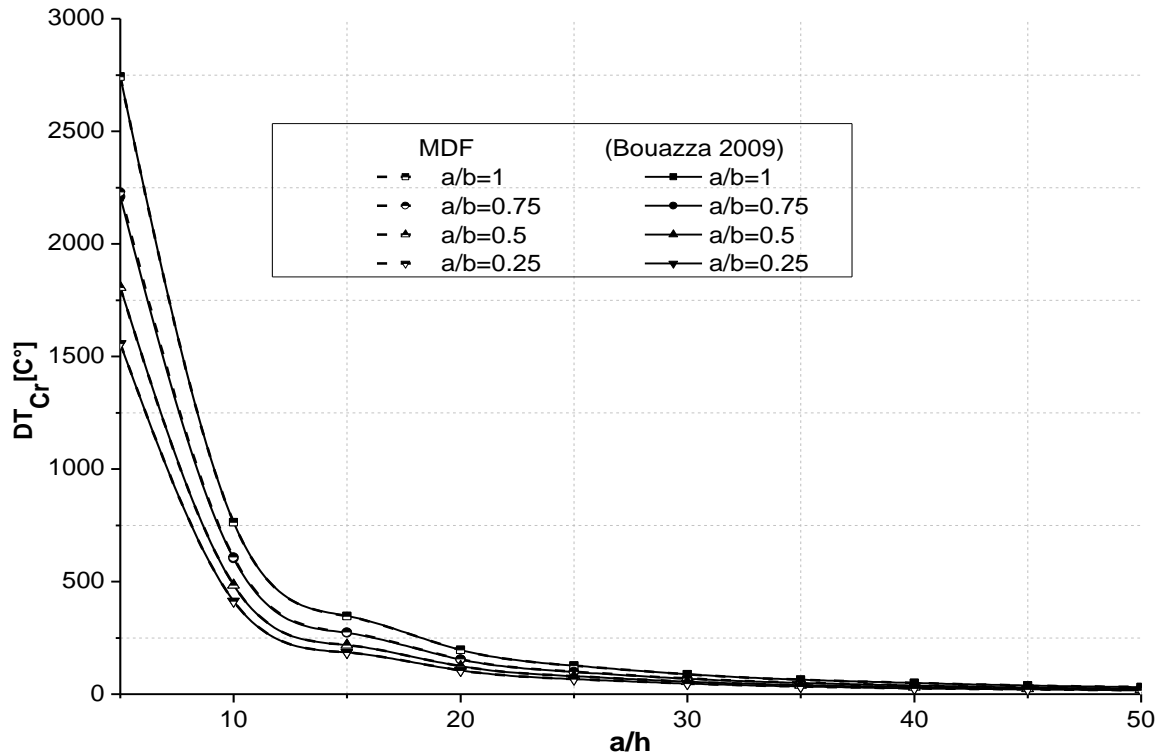


Fig. III.8 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température uniforme pour $k = 1$, respectant a/b et a/h .

III.4.3. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température linéaire

Le chargement thermique sous une variation de température linéaire à travers l'épaisseur est donné par l'équation III.37

$$\Phi = PT_m + X \Delta T$$

$$X = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) \left(z + \frac{h}{2}\right) dz \quad (\text{III.37})$$

D'après l'équation III.37 la température critique de flambement ΔT_{cr} s'écrit :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\nabla^4 W}{\frac{2(1+\nu)X}{E_1(1-\nu)} \nabla^4 W - \frac{E_1(1-\nu^2)X}{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)} \nabla^2 W} - \frac{PT_m}{X} \quad (\text{III.38})$$

Ou par différence finie au point (i)

$$\Delta T_{cr}(i) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{20}{\Delta h^2} \cdot W(i,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-1) \\ - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j-1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j-1) \\ + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j+1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j+1) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i-2,j) \\ + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i+2,j) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-2) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+2) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (\frac{20F}{\Delta h^2} - 4G) \cdot W(i,j) + (-\frac{8F}{\Delta h^2} + G) \cdot W(i-1,j) + (-\frac{8F}{\Delta h^2} + G) \cdot W(i+1,j) \\ + (-\frac{8F}{\Delta h^2} + G) \cdot W(i,j-1) + (-\frac{8F}{\Delta h^2} + G) \cdot W(i,j+1) + \frac{2F}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j-1) \\ + \frac{2F}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j-1) + \frac{2F}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j+1) + \frac{2F}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j+1) \\ + \frac{F}{\Delta h^2} \cdot W(i-2,j) + \frac{F}{\Delta h^2} \cdot W(i+2,j) + \frac{F}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-2) + \frac{F}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+2) \end{pmatrix}} - \frac{P T_m}{X} \quad (III.39)$$

Où

$$F = \frac{2(1+\nu)X}{E_1(1-\nu)} \quad ; \quad G = -\frac{E_1(1+\nu)X}{(E_1E_3 - E_2^2)}$$

La température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque S-FGM avec un paramètre matériel $k = 0$ sous une variation de température linéaire à travers l'épaisseur, figure III.9, on remarque que la température ΔT_{cr} augmente avec l'augmentation de l'épaisseur h et le rapport a/b .

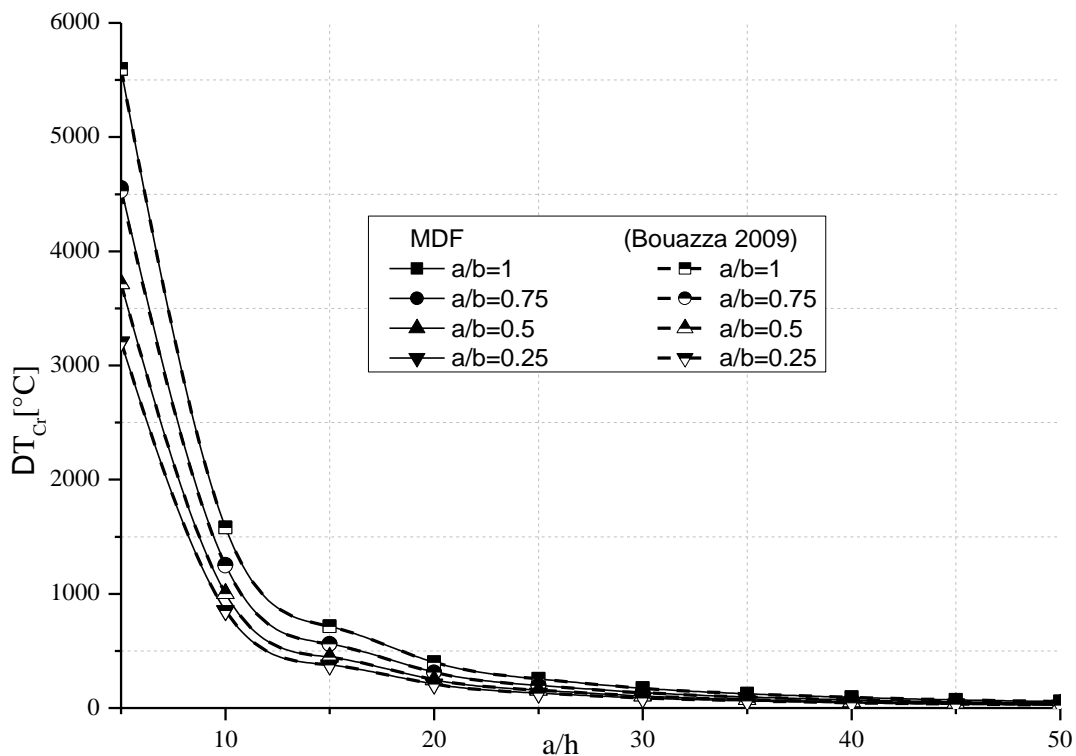


Fig. III.9 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température linéaire pour $k = 0$, respectant a/b et a/h .

III.4.4. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur constante sous une température Sinusoïdale

La température critique ΔT_{cr} pour un chargement varie sinusoidalement à travers l'épaisseur de la plaque donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi &= P(T_m + \Delta T) - Y \Delta T \\ Y &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) dz \end{aligned} \quad (III.40)$$

$$\Delta T_{cr} = \frac{\nabla^4 W}{\frac{2(1+\nu)(P-Y)}{E_1(1-\nu)} \nabla^4 W - \frac{E_1(1-\nu^2)(P-Y)}{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)} \nabla^2 W} - \frac{P T_m}{(P-Y)} \quad (III.41)$$

Ou par différence finie

$$\Delta T_{cr}(i) = \frac{\left(\begin{aligned} &\frac{20}{\Delta h^2} \cdot W(i,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j) - \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-1) \\ &- \frac{8}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j-1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j-1) \\ &+ \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j+1) + \frac{2}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j+1) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i-2,j) \\ &+ \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i+2,j) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-2) + \frac{1}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+2) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &\left(\frac{20H}{\Delta h^2} - 4M\right) \cdot W(i,j) + \left(-\frac{8H}{\Delta h^2} + M\right) \cdot W(i-1,j) + \left(-\frac{8H}{\Delta h^2} + M\right) \cdot W(i+1,j) \\ &+ \left(-\frac{8H}{\Delta h^2} + M\right) \cdot W(i,j-1) + \left(-\frac{8H}{\Delta h^2} + M\right) \cdot W(i,j+1) + \frac{2H}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j-1) \\ &+ \frac{2H}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j-1) + \frac{2H}{\Delta h^2} \cdot W(i-1,j+1) + \frac{2H}{\Delta h^2} \cdot W(i+1,j+1) \\ &+ \frac{H}{\Delta h^2} \cdot W(i-2,j) + \frac{H}{\Delta h^2} \cdot W(i+2,j) + \frac{H}{\Delta h^2} \cdot W(i,j-2) + \frac{H}{\Delta h^2} \cdot W(i,j+2) \end{aligned} \right)} - \frac{P T_m}{(P-Y)} \quad (III.42)$$

Où

$$H = \frac{2(1+\nu)(P-Y)}{E_1(1-\nu)} ; \quad M = -\frac{E_1(1+\nu)(P-Y)}{(E_1 E_3 - E_2^2)}$$

La figure III.10 représente la variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque en matériau de propriété à une fraction volumique $k = 1$, on remarque que l'accroissement du rapport a/b et l'épaisseur h de la plaque provoque l'augmentation de la résistance de la plaque au flambement thermique.

La plaque sollicitée par une température de distribution sinusoidale à travers l'épaisseur est plus résistante que la plaque sous une température linéaire, et cette dernière plus résistante que celle sollicitée par une température uniforme.

Les résultats obtenus par la présente étude en utilisant la méthode des différences finies sont semblables à ceux données par la méthode exacte présentée par (Bouazza M., 2009), on avise ici que la méthode d'exacte base sur la théorie des déformations de cisaillement de premier ordre (FSDT).

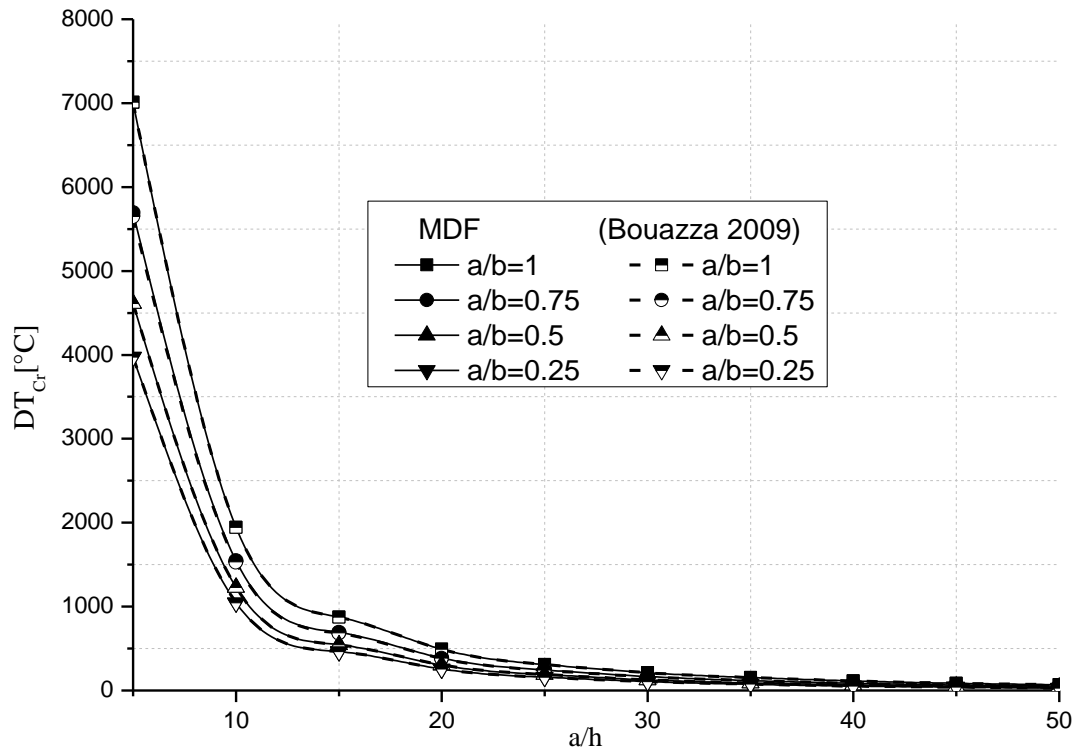


Fig. III.10 Comparaison de la variation de la température critique du flambement thermique ΔT_{cr} sous une température sinusoïdale pour $k = 1$, respectant a/b et a/h .

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilité au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sujettes aux variations de température uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque a été envisager. Les propriétés matérielles de la plaque ont été considérées comme varies à travers l'épaisseur suivant une simple loi sigmoïde.

La théorie de déformation de cisaillement d'ordre un est utilisée pour la formulation du problème, l'équation différentielle trouvée est résolue par la méthode des différences finies. Les résultats obtenus par la présente méthode donnent une bonne corrélation comparant à la méthode exacte présentée par (Bouazza M., 2009).

Dans ce qui suit nous nous analysons le flambement thermique d'une plaque avec épaisseur variable par l'utilisation de la présente méthode.

**Chapitre IV : Analyse Du Flambement
Thermique Des Plaques FGM Avec
Epaisseur Variable Par La MDF**

Chapitre IV : Analyse Du Flambement Thermique Des Plaques FGM Avec Epaisseur Variable Par La MDF

IV.1. Introduction

Plusieurs études sont consacré à l'analyse de la stabilité des plaques en matériaux à propriété fonctionnelle, nous citerons à titre d'exemple, ceux qui analyse le flambement thermique, mécanique et la vibration des plaques avec épaisseur constante (Bouazza M., 2010; Benachour A., 2011; Bouazza M., 2009; Fekrar A., 2013; Khalfi Y., 2014; Mohammadi M., 2010; Rohit S., 2012; Kim S.E., 2009).

Peu d'études ont été réalisées spécialement pour l'analyse des plaques à gradient de propriété FGM avec une épaisseur variable. (Mozafari H., 2010b), a étudié la stabilité d'une plaque FGM simplement appuyées sous une charge mécanique de flambement utilisant les hypothèses de la théorie d'ordre supérieur. La formulation présentée est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. En outre, (Mozafari H., 2012b) ont utilisé un algorithme concurrentiel coloniale pour optimiser la charge thermique critique de flambage pour une plaque FGM avec une épaisseur variable. Dans une autre publication (Mozafari H., 2012c), ils ont fondé leur travail sur l'algorithme concurrentiel impérialiste pour l'optimisation de la température critique de flambement pour les plaques FGM avec une épaisseur variable sous la charge de température non uniforme en utilisant une déformation de cisaillement de troisième ordre; l'objectif de cette étude était de maximiser la capacité de la température critique d'une plaque FGM. (Ghomshei M.M., 2013) ont développé une formulation des éléments finis pour analyser la déformation thermique de révolution d'une plaques annulaires en FGM avec une épaisseur variable. (Pouladvand M., 2009) a étudié la stabilité thermique des plaques rectangulaires FGM minces à épaisseur variable, la plaque a été considérée simplement appuyée, l'équation de stabilité et d'équilibre de la plaque a été obtenue par l'utilisation de la théorie classique des plaques CPT. L'analyse de flambement de la plaque FG a été faite sous une température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur.

Le chapitre qui précède Nous a permet d'analyser le flambement thermique des plaques S-FGM sous différente sollicitation que ce soit une température uniforme, linéaire et sinusoïdale, utilisant la méthode des différence finies, cette méthode présente une bonne corrélation comparant aux valeurs exacte publiés par (Bouazza M., 2009).

L'objectif de cette partie est d'analyser le flambement thermique d'une plaque avec épaisseur variable, la méthode des différences finies utilisée au chapitre précédent doit être adoptée pour étudier le flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable.

IV.2. Formulation du problème

La procédure de différences finies, décrite au chapitre précédent, a été étendue pour évaluer le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur variable. La capacité de variation d'épaisseur peut être facilement incluse dans la formulation par différence finie DF en faisant varier l'épaisseur au niveau de chaque nœud, à savoir l'introduction d'une épaisseur variable $h(i, j)$ qui représente l'épaisseur de la plaque au niveau du nœud (i, j) , tel que précisé sur la figure IV.1.

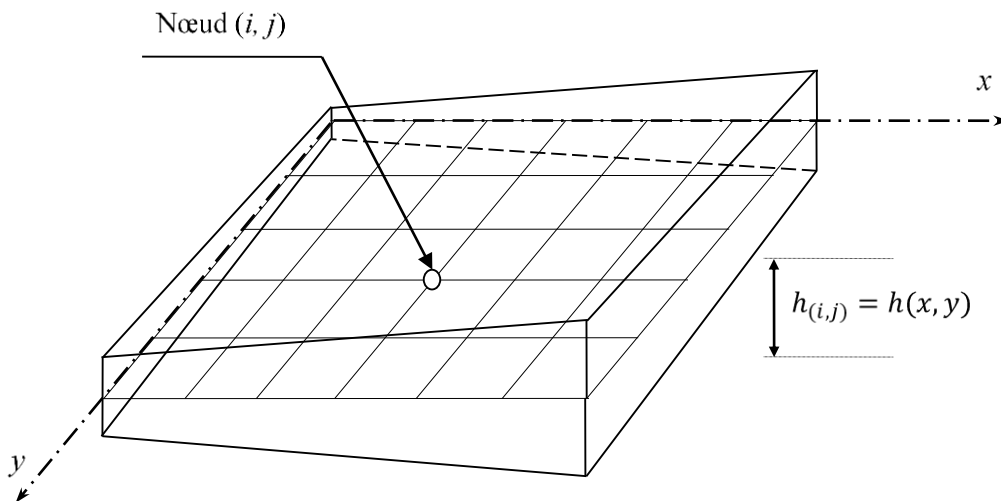


Fig. IV.1 Géométrie d'une plaque FGM avec épaisseur variable.

Deux types de variation linéaire d'épaisseur ont été étudiés, une variation linéaire dans un seul sens, à savoir x ou y , et une variation linéaire dans les deux directions x et y en même temps.

La variation linéaire de l'épaisseur de la plaque dans la direction x ou y est supposée varier en fonction de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} h(x) &= c_1 x + c_2 \\ h(y) &= c_1 y + c_2 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Où, c_1 est un paramètre sans dimension qui représente la pente de la variation d'épaisseur de la plaque, et c_2 est l'épaisseur nominale de la plaque à l'origine.

Tandis que, dans le cas d'une variation linéaire dans les deux directions x et y en même temps, l'équation suivante est utilisée :

$$h(x, y) = c_1x + c_1y + c_2 \quad (IV.2)$$

Considérons la plaque à gradient de propriété FGM avec épaisseur variable étudié par (Pouladvand M., 2009), pour des raisons de comparaison et validations. La variation des propriétés de la plaque FGM suit une simple loi de puissance, comme décrit précédemment au chapitre I par les équations (I.1-I.3). La surface supérieure de la plaque est riche en céramique tandis que la surface inférieure est riche en métal. Les propriétés de céramique et de métal sont illustrées au tableau III.1.

IV.3. Analyse du Flambement Thermique d'une Plaque FGM Avec Epaisseur Variable

La plaque est simplement appuyée sollicitée par une température change d'une manière uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur.

IV.3.1. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température uniforme

Le tableau IV.1 montre une étude comparative entre les résultats obtenus par la présente méthode, utilisant la méthode des différences finis (MDF), et ceux rapportés par (Pouladvand M., 2009), qui utilise la théorie classique des plaques (CPT). Les résultats sont présentés pour des plaques rectangulaires FG simplement appuyées avec épaisseur variable dans la direction x . Les résultats de la présente méthode donnent une bonne corrélation avec la CPT pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance k et tous les rapports b/a .

Tableau IV.1 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens x sous une température uniforme.

b/a	Théorie	k			
		50	10	1	0
1	Présente	10.6856	12.3386	13.1166	28.2306
	CPT (Pouladvand M., 2009)	10.7140	13.5710	14.5710	28.5710
2	Présente	21.0914	24.3537	25.8955	55.7276
	CPT (Pouladvand M., 2009)	21.4290	23.5710	26.4290	55.7140
3	Présente	38.6834	44.6648	47.5118	102.2256
	CPT (Pouladvand M., 2009)	38.5710	45.0000	47.8570	102.1430
4	Présente	62.8076	72.5149	77.1802	166.0136
	CPT (Pouladvand M., 2009)	62.8570	72.8570	77.1430	165.7140

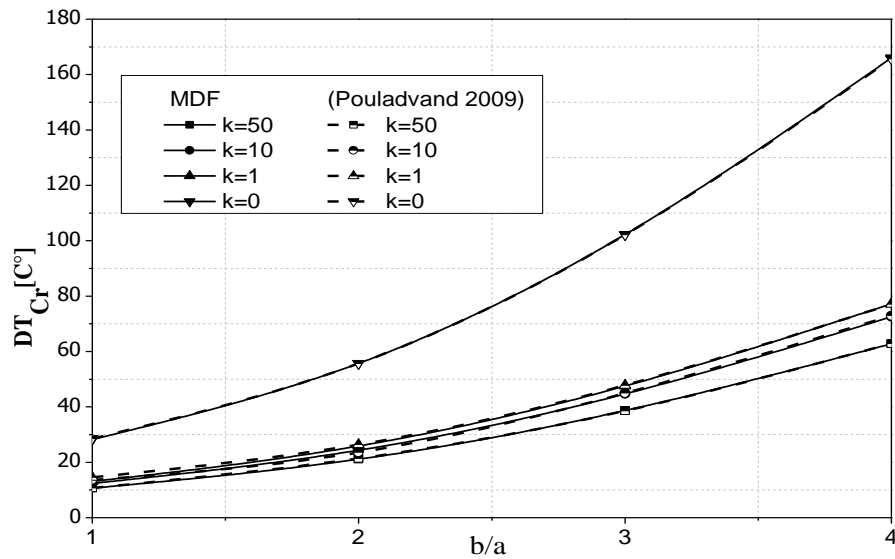


Fig. IV.2 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température uniforme pour différente valeur de k .

La figure IV.2 présente la variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} des plaques rectangulaires P-FGM simplement appuyés avec épaisseur variable dans la direction x soumise à un chargement uniforme. Il est observé qu'avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance k la température critique de flambement ΔT_{cr} diminue, la température critique augmente d'une façon graduelle aussi avec l'augmentation du rapport d'aspect longueur-largeur b/a .

Tableau IV.2 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens y sous une température uniforme.

b/a	Théorie	k			
		50	10	1	0
1	Présente	10.6856	12.3386	13.1166	28.2306
	CPT (Pouladvand M., 2009)	10.4270	12.3220	14.2180	28.4360
2	Présente	26.6816	30.8081	32.7628	70.5016
	CPT (Pouladvand M., 2009)	27.4880	30.3320	31.2800	71.0900
3	Présente	53.2448	61.4755	65.4161	140.7247
	CPT (Pouladvand M., 2009)	52.1330	60.6640	65.4030	139.3360
4	Présente	90.2389	104.1791	110.9519	238.5806
	CPT (Pouladvand M., 2009)	90.0470	104.2650	110.9000	236.9670

Dans le tableau IV.2, une étude comparative est effectuée entre les résultats obtenus par la méthode des différences finis et ceux donnés par (Pouladvand M., 2009). La plaque FG examinée est simplement appuyée, avec épaisseur vari linéairement dans la direction y , soumise à une température uniforme. On remarque que la température critique de flambement augmente

considérablement quand le rapport b/a augment, la plaque riche en céramique $k = 0$ est plus rigide vis-à-vis le flambement thermique.

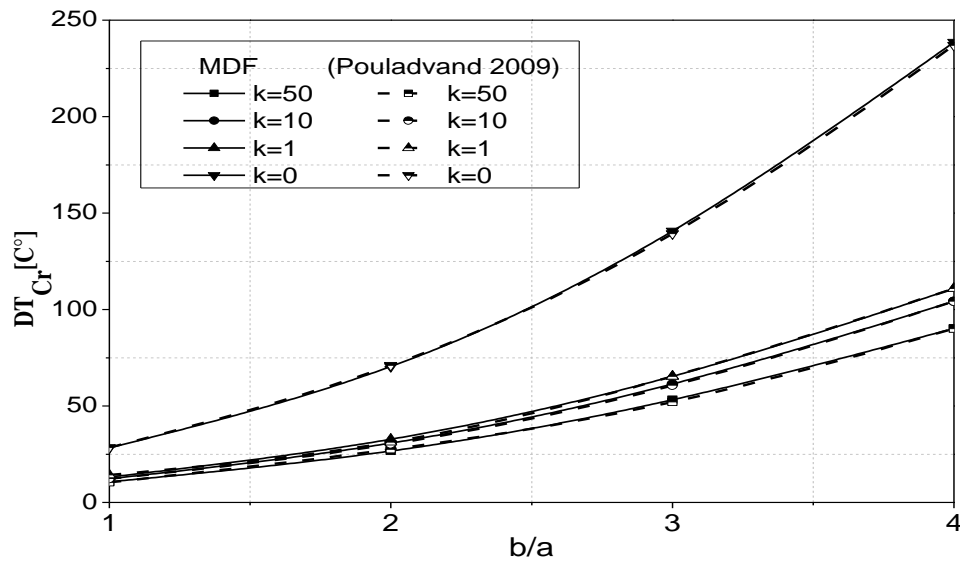


Fig. IV.3 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température uniforme

La variation de la température critique de flambement d'une plaque FG à épaisseur varie dans le sens y est montrée par la figure IV.3. il est remarqué que l'augmentation du rapport b/a répercute directement sur l'augmentation de la température critique de flambement, par contre elle diminue avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance k .

Tableau IV.3 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée à épaisseur variable dans les deux sens x et y avec $C2 = a/100$ sous une température uniforme.

C1	Théorie	k			
		50	10	1	0
0	Présente	6.4663	7.4668	7.9368	17.0830
	CPT (Pouladvand M., 2009)	6.4840	7.4220	7.8910	17.0830
0.001	Présente	7.2260	8.3440	8.8694	19.0901
	CPT (Pouladvand M., 2009)	7.1090	8.2030	8.8280	18.9060
0.002	Présente	8.0278	9.2698	9.8537	21.2084
	CPT (Pouladvand M., 2009)	7.8910	9.1410	9.8440	21.0160
0.003	Présente	8.8717	10.2442	10.8896	23.438
	CPT (Pouladvand M., 2009)	8.9060	10.1560	10.8590	23.3590
0.004	Présente	9.7576	11.2671	11.9773	25.7787
	CPT (Pouladvand M., 2009)	9.8440	11.3280	12.0310	25.7810
0.005	Présente	10.6856	12.3386	13.1166	28.2306
	CPT (Pouladvand M., 2009)	10.7810	12.4220	13.1250	28.7180

Une comparaison de l'évolution de la température critique ΔT_{cr} est montrée dans tableau IV.3. Les résultats présentés ici sont d'une plaque FG carrée à épaisseur varie dans les deux sens x et y avec $C2 = a/100$, la plaque est simplement appuyée. On remarque qu'avec l'augmentation de la pente $C1$ la température critique de flambement augmente et diminue si l'indice de la loi de puissance k augment. La présente méthode donne un bon accord par rapport aux résultats apportés par (Pouladvand M., 2009).

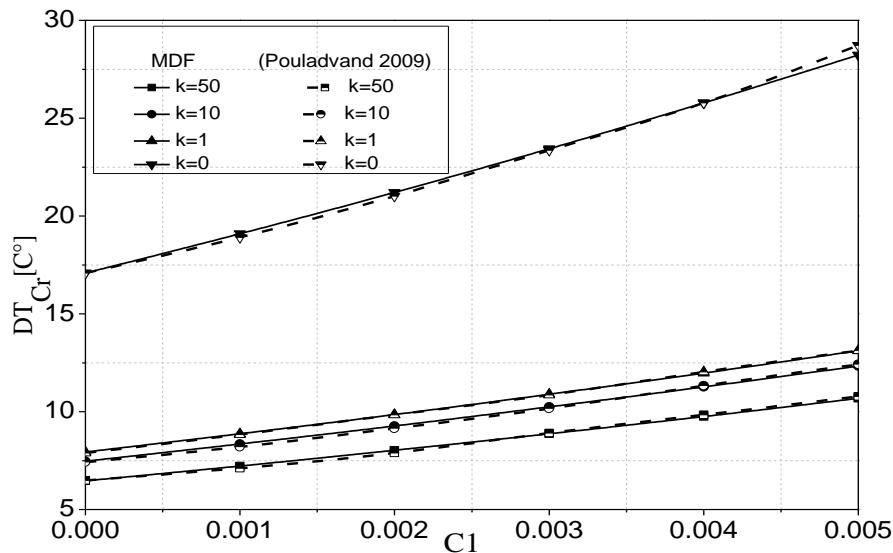


Fig. IV.4 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variant à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température uniforme pour différente valeur de k .

Il est montré dans la figure IV.4 la variation de la température critique de flambement d'une plaque carrée FG simplement appuyée à épaisseur varie dans les deux direction x et y . On observe que la méthode des différences finis donne une bonne corrélation avec les résultats présentés par (Pouladvand M., 2009). Il est à noter que la présente méthode basse sur la théorie de cisaillement de premier ordre pour le développement par contre (Pouladvand M., 2009) utilise la théorie classique des plaques. La température critique de flambement augmente avec l'augmentation de la pente $C1$, mais diminue avec l'augmentation de k .

IV.3.2. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température linéaire

Le tableau IV.4 montre la comparaison de la température critique de flambement d'une plaque rectangulaire FG simplement appuyée à épaisseur varie dans le sens x , soumise à une température change linéairement à travers l'épaisseur. Il est remarqué que l'augmentation du rapport b/a répercute directement sur l'augmentation de la température critique de flambement. La présente méthode présente un bon accord avec ceux présentés par (Pouladvand M., 2009).

Tableau IV.4 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens x sous une température change linéairement.

b/a	Théorie	k			
		50	10	1	0
1	Présente	10.9445	13.0060	15.2223	46.4612
	CPT (Pouladvand M., 2009)	10.5680	12.9160	15.2640	45.7930
4/3	Présente	16.1118	18.4992	21.4037	60.6469
	CPT (Pouladvand M., 2009)	16.4380	18.7870	21.1350	63.4050
2	Présente	30.9753	34.2998	39.1883	101.4553
	CPT (Pouladvand M., 2009)	31.7030	34.0510	38.7480	102.1500
3	Présente	64.8390	70.2964	79.7283	194.4512
	CPT (Pouladvand M., 2009)	64.5790	68.1020	79.8430	194.9100
4	Présente	111.2770	119.6542	135.3697	322.0273
	CPT (Pouladvand M., 2009)	111.5500	119.7700	135.0300	320.5500

La figure IV.5 montre la variation de la température critique de flambement d'une plaque FG simplement appuyée avec épaisseur varie dans la direction x soumise à un chargement thermique linéaire. On observe qu'avec la diminution de l'indice de k la température critique de flambement augmente et augmente quand le rapport b/a augment.

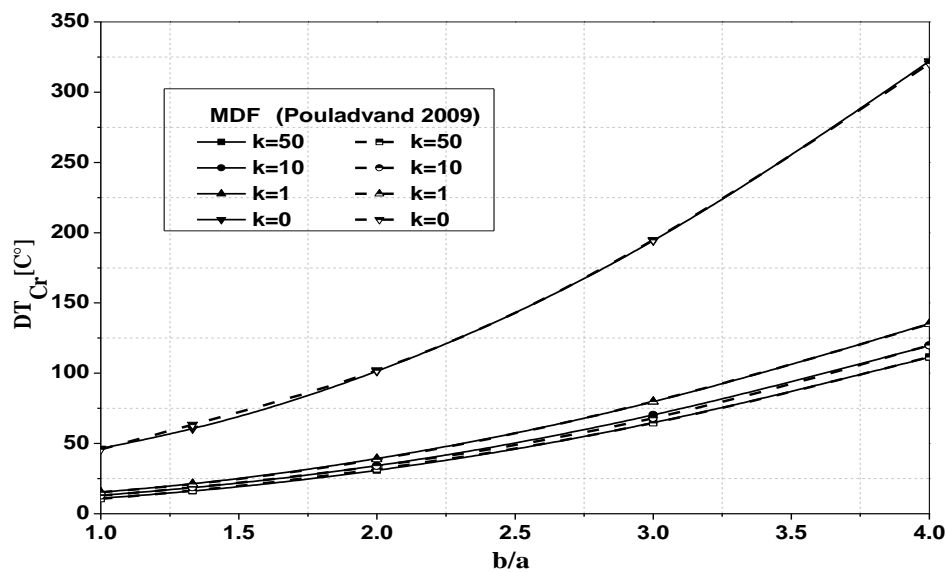


Fig. IV.5 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température linéaire pour différente valeur de k .

Le tableau IV.5 représente la comparaison de la variation de la température critique de flambement d'une plaque FG soumise à un chargement thermique linéaire. Les résultats sont présentés pour une plaque FG simplement appuyée à épaisseur varie dans le sens y , on

remarque que la température critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect b/a .

Tableau IV.5 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG rectangulaire avec épaisseur variable dans le sens y sous une température change linéairement.

b/a	Théorie	k			
		50	10	1	0
1	Présente	10.9445	13.0060	15.2223	46.4612
	CPT (Pouladvand M., 2009)	10.7280	13.7930	15.3260	47.5100
4/3	Présente	19.2367	21.8212	25.1423	69.2260
	CPT (Pouladvand M., 2009)	19.9230	21.4560	24.5210	72.0310
2	Présente	41.7361	45.7387	52.0674	131.0032
	CPT (Pouladvand M., 2009)	41.3790	44.4440	50.5750	130.2700
3	Présente	92.8690	100.0895	113.3068	271.4494
	CPT (Pouladvand M., 2009)	90.4210	96.5520	108.8100	266.6700
4	Présente	164.0810	175.7714	198.7064	467.1613
	CPT (Pouladvand M., 2009)	162.4500	174.7100	197.7000	462.8400

Les résultats de la variation de la température critique de flambement d'une plaque FG simplement appuyée à épaisseur varie dans le sens y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et le rapport d'aspect b/a sont présentés par la figure IV.6.

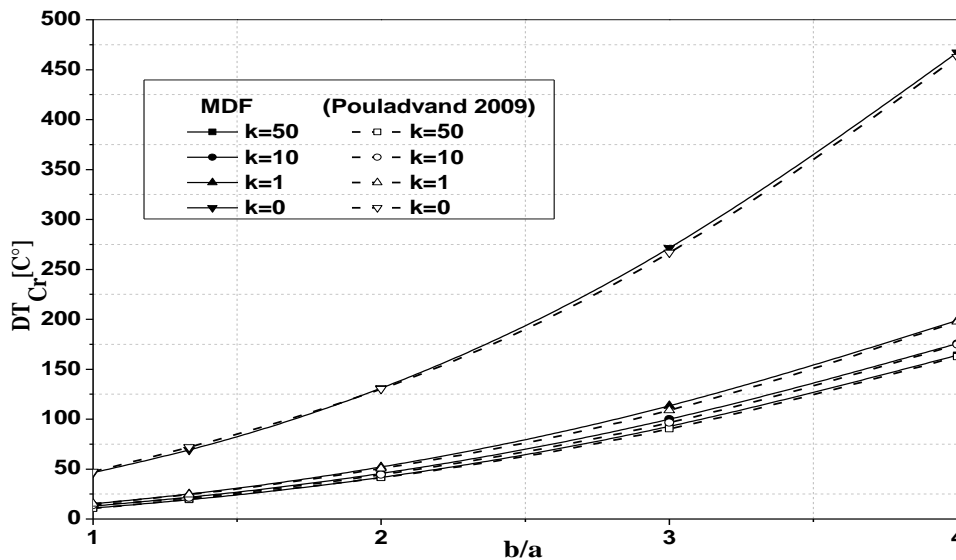


Fig. IV.6 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température linéaire pour différente valeur de k .

Les résultats de la température critique de flambement d'une plaque carrée avec épaisseur variable dans les deux directions x et y sont présentés au tableau IV.6. On observe que la

température critique de flambement augmente avec l'augmentation de la pente $C1$ et la diminution de l'indice k .

Tableau IV.6 Comparaison de ΔT_{cr} d'une plaque FG carrée à épaisseur variable dans les deux sens x et y avec $C2 = a/100$ sous une température linéaire.

C1	Théorie	k			
		50	10	1	0
0	Présente	2.8227	4.3718	5.5078	24.1660
	CPT (Pouladvand M., 2009)	2.7723	4.2574	5.5446	24.2570
0.001	Présente	4.2850	5.9264	7.2568	28.1802
	CPT (Pouladvand M., 2009)	4.0594	5.6436	7.1287	27.7230
0.002	Présente	5.8284	7.5671	9.1027	32.4169
	CPT (Pouladvand M., 2009)	5.5446	7.3267	9.0099	31.9800
0.003	Présente	7.4528	9.2940	11.0457	36.8760
	CPT (Pouladvand M., 2009)	7.1287	9.2079	10.7920	36.5350
0.004	Présente	9.1582	11.1070	13.0855	41.5575
	CPT (Pouladvand M., 2009)	9.0099	11.0890	13.0690	41.6830
0.005	Présente	10.9445	13.006	15.2223	46.4613
	CPT (Pouladvand M., 2009)	11.0890	13.0690	15.4460	47.1290

La figure IV.7 représente l'influence de la variation de la pente $C1$ et l'indice de la loi de puissance k sur la variation de la température critique de flambement, la plaque étudiée est carrée, simplement appuyée, soumise à un chargement thermique linéaire.

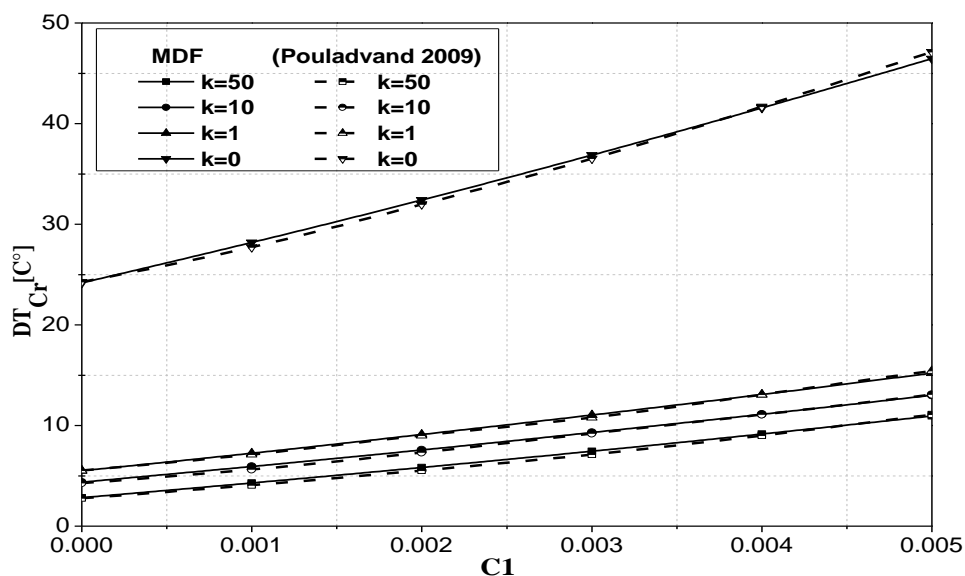


Fig. IV.7 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température linéaire pour différente valeur de k .

IV.3.3. Flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable sous une température sinusoïdale

Le flambement thermique d'une plaque P-FGM avec épaisseur variable sous une température change sinusoïdalement à travers l'épaisseur est effectué dans cette partie.

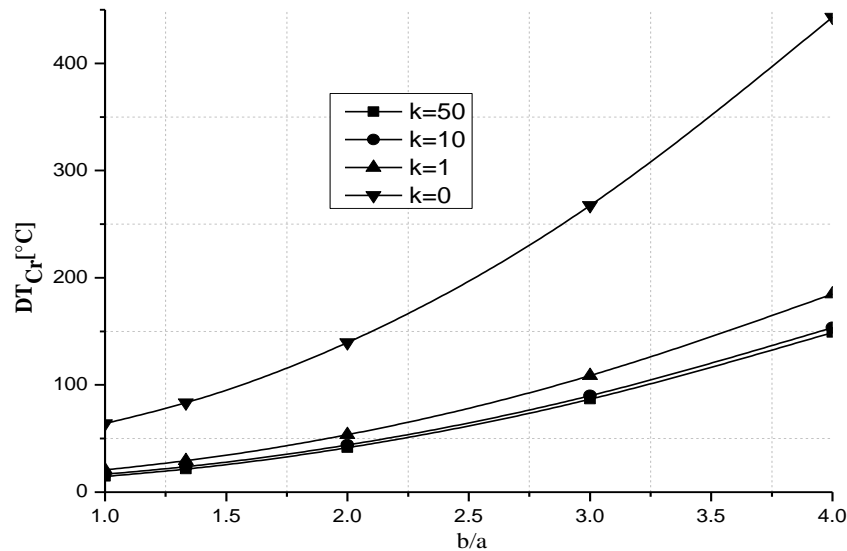


Fig. IV.8 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous température sinusoïdale pour différente valeur de k .

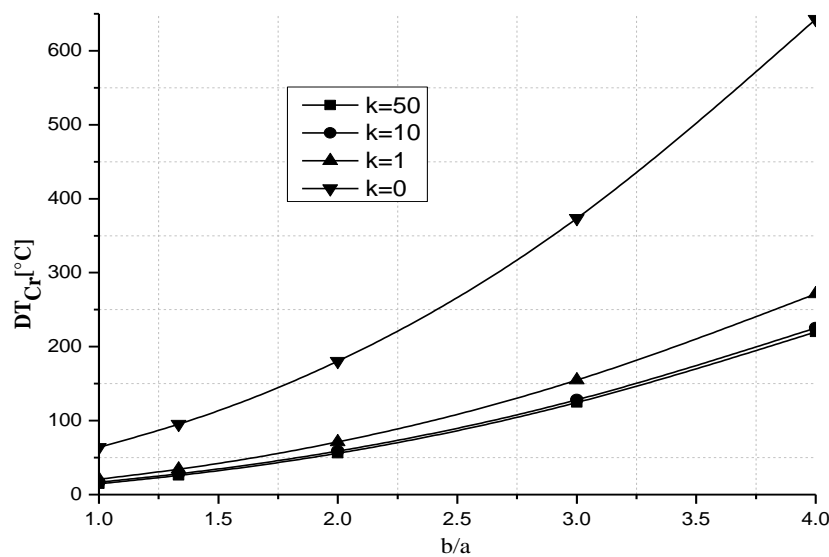


Fig. IV.9 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous température sinusoïdale pour différente valeur de k .

On observe dans les figures IV.8 et IV.9 que la température critique de flambement ΔT_{cr} augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect b/a et la diminution de l'indice de la loi de

puissance k . La température critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport b/a et diminue quand l'indice k augmente.

La figure IV.10 montre la variation de la température critique ΔT_{cr} de flambement d'une plaque FG carrée avec épaisseur variable dans les deux sens x et y , simplement appuyée, soumise à un chargement thermique sinusoïdale. Il est remarquable que la température critique de flambement augmente avec l'augmentation de la pente $C1$ et diminue avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance k .

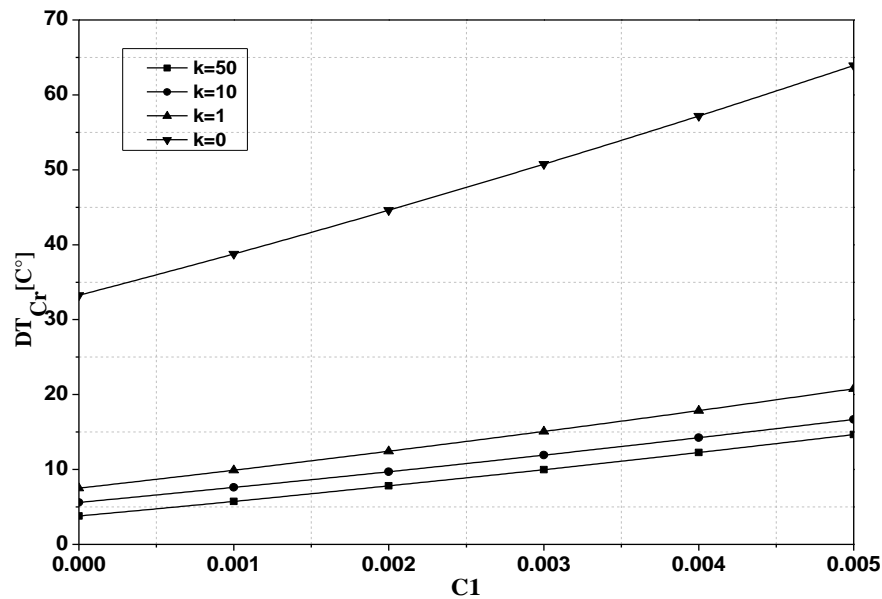


Fig. IV.10 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x et y en fonction de la pente $C1$ sous température sinusoïdale pour différente valeur de k .

IV.3.4. Etude paramétrique

Les figures IV.11, IV.12 et IV.13 représentent la variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} pour des plaques rectangulaire FG à épaisseur varie dans le sens x et dans le sens y respectivement, simplement appuyées, soumises à une température uniforme, linéaire et sinusoïdale. Les résultats montrent qu'avec l'augmentation du rapport d'aspect b/a la température critique de flambement augmente, la plaque riche en céramique est plus rigide. La température critique de flambement d'une plaque sollicitée à un chargement sinusoïdale est plus grande par rapport à celle sollicitée par un chargement linéaire et la plaque soumise à un chargement linéaire est plus grande à celle sollicitée par un chargement uniforme.

Pour la variation de l'épaisseur dans les deux sens x et y , figure IV.13. Les résultats sont présentés pour une plaque carrée simplement appuyée, soumise à un chargement uniforme, linéaire et sinusoïdale, en fonction de la pente $C1$ et pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance k .

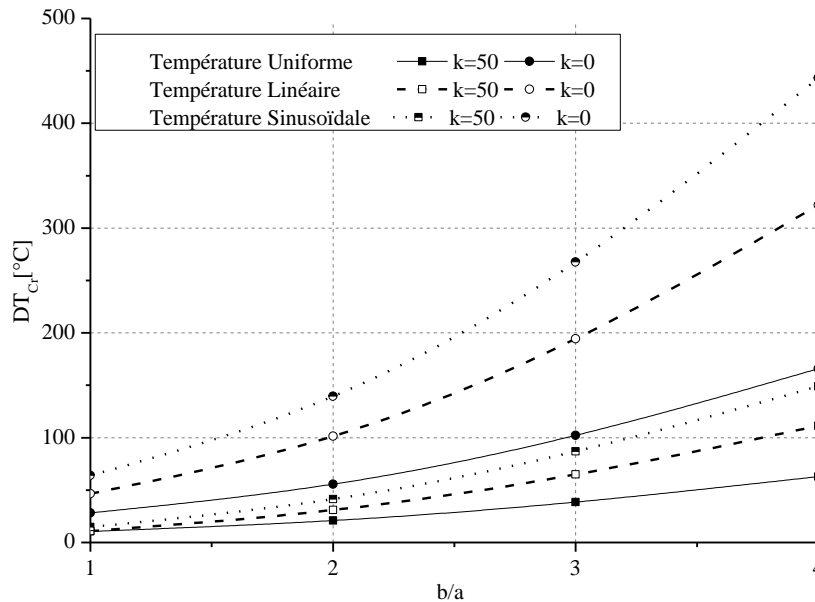


Fig. IV.11 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction x en fonction du rapport b/a sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k .

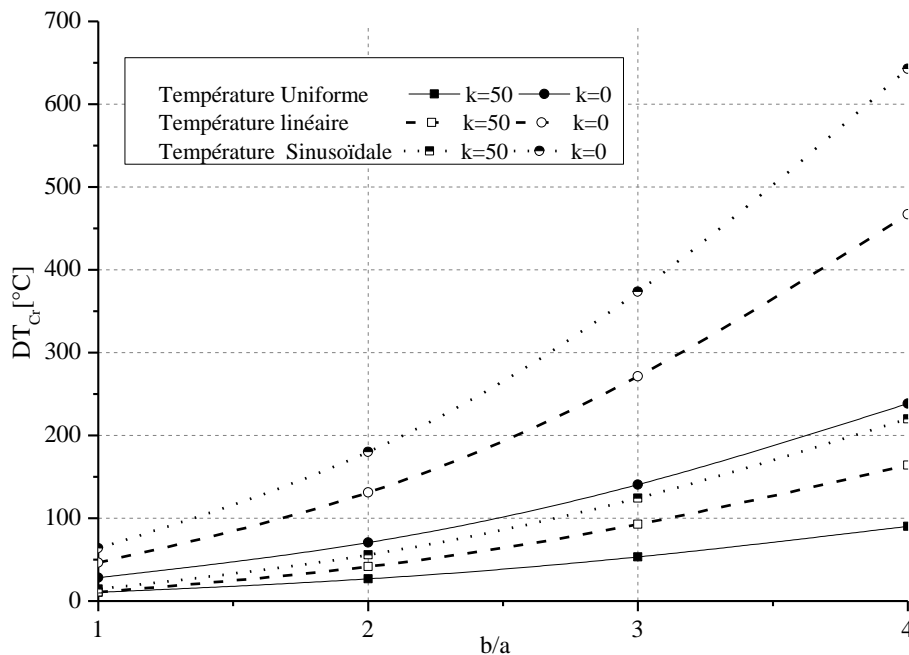


Fig. IV.12 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable à la direction y en fonction du rapport b/a sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k .

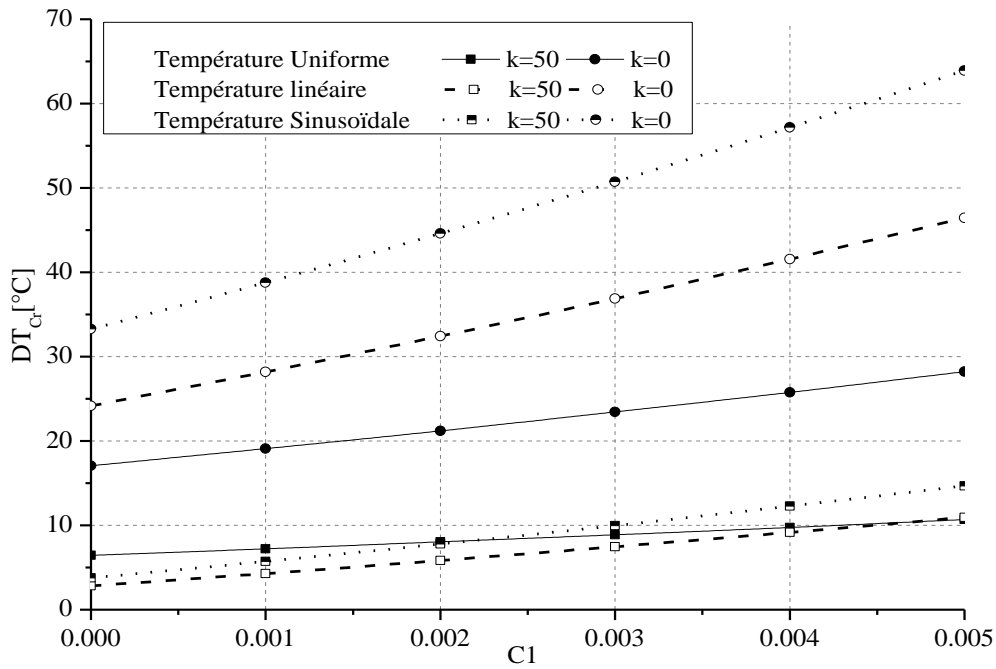


Fig. IV.13 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de la pente C_1 sous une température uniforme, linéaire et sinusoïdale pour différente valeur de k .

Les figures IV.14, IV.15 et IV.16 montrent la variation de la température critique de flambement d'une plaque carrée FG simplement appuyée, soumise à un chargement thermique uniforme, linéaire et sinusoïdale respectivement, en fonction de l'indice de la loi de puissance k .

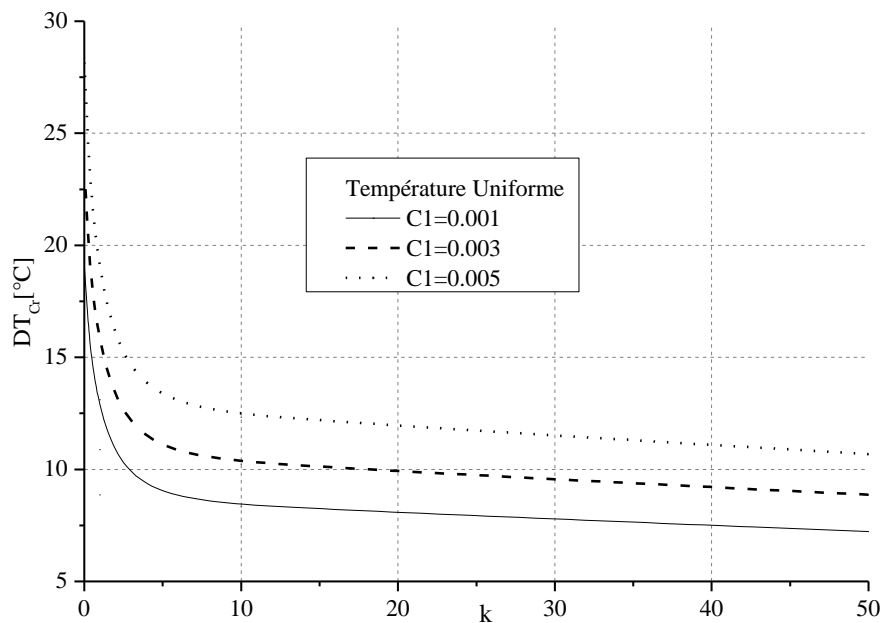


Fig. IV.14 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente C_1 sous une température uniforme.

Selon ces figures, la température critique de flambement augmente avec la diminution de l'indice de la loi de puissance k et l'augmentation de la pente $C1$. On observe que la température critique de flambement ΔT_{cr} augmente rapidement avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance k et presque indépendante de ce dernier lorsque il dépasse 10.

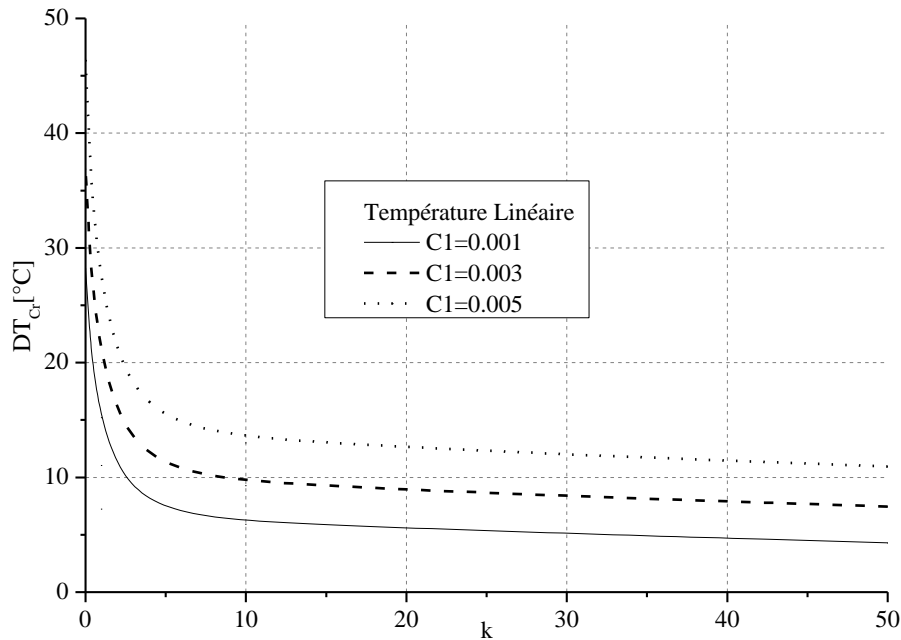


Fig. IV.15 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente $C1$ sous une température linéaire.

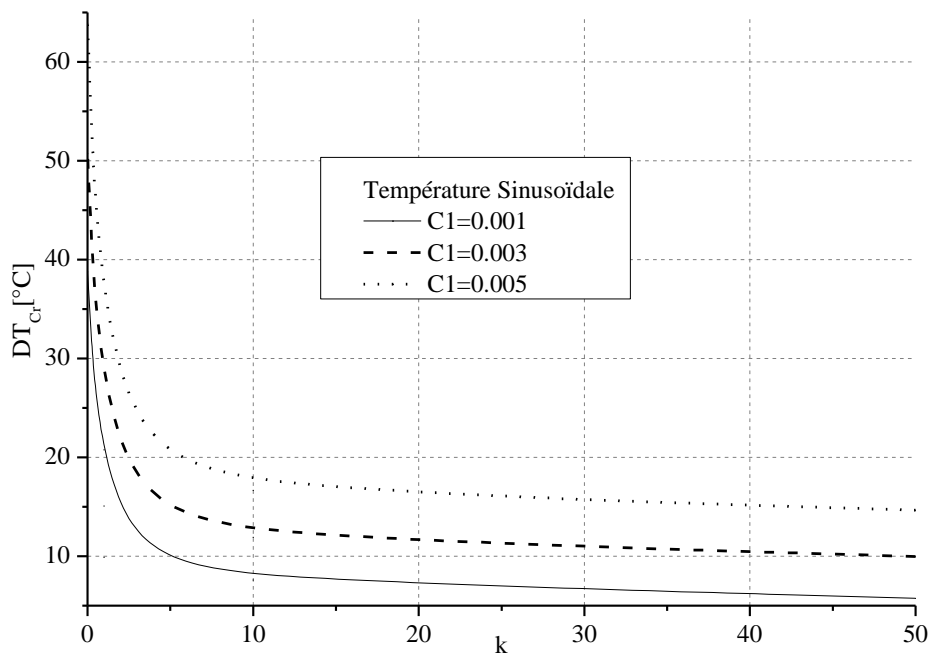


Fig. IV.16 Variation de la température critique de flambement ΔT_{cr} d'une plaque carrée à épaisseur variable dans les deux directions x et y en fonction de l'indice de la loi de puissance k et pour différente valeur de pente $C1$ sous une température sinusoidale.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilité au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyée à épaisseur varie linéairement dans le sens x , y et dans les deux sens x et y sujettes aux variations de température uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque a été envisager. Les résultats montrent que la présente méthode basant sur la théorie de cisaillement du premier ordre et utilisant la méthode des différences finis MDF, pour résoudre l'équation d'équilibre, est capable d'être utilisée pour analyser le flambement d'une plaque à épaisseur variable. L'étude comparative montre que la présente méthode donne une bonne corrélation avec la théorie classique des plaques rapportée par (Pouladvand M., 2009).

La température critique de flambement augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect b/a et la diminution de l'indice de la loi de puissance k , l'augmentation de la pente $C1$ augmente la température critique de flambement qui signifie l'augmentation de la résistance de la plaque vis-à-vis le flambement thermique.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Au cours des dernières années, l'utilisation des matériaux devenus plus exigeants. Les matériaux conventionnels ne peuvent pas résister aux environnements sévères auxquels sont confrontés, d'autres développements en science et technologie comptent beaucoup sur le développement de nouveaux matériaux qui peuvent résister aux conditions qui sont créés par les progrès technologiques ; c'est pourquoi, depuis un certain nombre d'années, on cherche à obtenir des matériaux combinant différentes propriétés, matériaux composites, pour les utilisés au sein de différentes secteurs tel que l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, le génie civil, la médecine, etc...

De nombreux nouveaux types de composite ont déjà été fabriqués conformément aux propriétés des matériaux exigées par la technologie actuelle. Parmi eux on distingue les matériaux à gradient fonctionnelle FGM.

L'utilisation des matériaux à gradient fonctionnelle FGM pour la conception des structures minces et élancées tels que les plaques et les poutres nécessite la vérification de leurs stabilités.

La présente thèse porte sur l'analyse de la stabilité des plaques fonctionnellement graduées FGM avec épaisseur variable. Nous avons proposé une méthode semi-analytique simple en utilisant la méthode des différences finis pour déterminer la température critique de flambement, d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée soumise à des champs de températures uniforme, linéaire et sinusoïdale. L'équation différentielle est obtenue par l'utilisation de la théorie des déformations de cisaillement d'ordre un et le tenseur de Von Karman. Les propriétés matérielles sont proposées dépendantes de la température, varient à travers l'épaisseur en termes de fractions volumique des constituants selon une loi sigmoïde ou de puissance.

Afin d'étudier la stabilité vis-à-vis au flambement des plaques FGM avec des épaisseurs variables, nous avons divisé notre travail en deux parties :

Premièrement, nous avons étudiés le flambement d'une plaque FGM simplement appuyée avec épaisseur constante. Les propriétés matérielles sont dépendantes de la température, varient à travers l'épaisseur selon une loi sigmoïde en termes de fractions volumique des constituants.

Pour valider cette méthode, nous avons comparé les résultats obtenus à ceux présentés dans la littérature. Le présent modèle donne une bonne corrélation, capable d'être utilisé pour analyser le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduée FGM.

Deuxièmement, nous avons utilisé ce modèle pour étudier le flambement thermique d'une plaque FGM avec épaisseur variable, l'idée principale c'est d'étendre cette méthode pour introduire la variation de l'épaisseur de la plaque. On a proposé la variation linéaire de l'épaisseur de la plaque selon une direction soit x ou y et dans les deux sens x et y . La comparaison des résultats obtenus par la présente méthode et ceux rapportés dans la littérature, montre que cette méthode est efficace pour déterminer la température critique flambement des plaques FGM avec épaisseur variable. En terme des résultats obtenus on peut conclure que :

- La température critique de flambement obtenue, en utilisant la méthode des différences finis, est plus proche que celles présentés dans la littérature et obtenus par des méthodes analytiques exactes, que ce soit pour les plaques à épaisseur constante ou avec épaisseur variable.
- La température critique de flambement augmente avec la diminution du rapport d'épaisseur a/h . Elle diminue lorsque le rapport d'aspect a/b diminue.
- La température critique de flambement augmente avec l'augmentation de la pente de variation d'épaisseur $C1$.
- La température critique de flambement est maximale pour une plaque entièrement en céramique et minimale pour une plaque entièrement en métal, et diminue graduellement lorsque l'indice de loi de puissance k augmente.

Pour terminer on peut dire que la présente méthode est efficace pour déterminer la température critique de flambement des plaques avec épaisseur variable et constante. Le présent travail peut être poursuivi pour analyser la stabilité des plaques FGM avec épaisseur variable sous différents types de chargement, mécanique, en vibration et thermomécanique, étudier le comportement des plaques FGM avec d'autres configurations de changement d'épaisseur, en tenant compte l'influence des conditions aux limites et la variation des propriétés matériels et géométriques.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- Ait Atmane H., Tounsi A., Ziane N. and Mechab I., 2011.** "Mathematical solution for free vibration of sigmoid functionally graded beams with varying cross-section". *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 2011, Vol. 11(6), 489-504.
- Aldo R., Boccaccini O., Van der Biest, Talbot Jan B., 2002.** "Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications". in *Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society*, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- Alieldin S.S., Alshorbagy A.E., Shaat M., 2011.** "A first-order shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates". *Ain Shams Engineering Journal*. 2011, Vol. 2, 53-62.
- Arciniega R.A., Reddy J.N., 2007.** "Large deformation analysis of functionally graded shells". *International Journal of Solids and Structures*. 2007, Vol. 44, 2036-2052.
- Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., 1993.** "Functionally Gradient Materials". in: *Holt J.B, Koizumi .M, Hirai .T, Munir Z.A. American Ceramic Society, Westerville, OH.*, Ceram. Trans., 1993, Vol. 34, 141-148.
- BAGUET S. 2001.** "Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique". *Thèse de Doctorat université Aix-Marseille II, France*. 2001.
- Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., and Ahmed M.S., 2011.** "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates whit arbitrary gradient". *Composite: Part B*. 2011, Vol. 42, 1386-1394.
- BENATTA Mohamed A. 2011.** "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2011.
- BERTOLINI J. 2008.** "Contribution à l'analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs". *Thèse de Doctorat université Toulouse III – PAUL SABATIER, France*. 2008.
- Bever M.B., and Duwez P.E., 1972.** "Gradients in composite materials". *Mater. Sci. Eng.* 1972, Vol. 10, 1-8.
- Borchert R., Willert-Porada, M. 1999.** "An oxidation resistant metal-ceramic functionally graded material". *Proceedings of the 9 th World Ceramic Congress and Forum on New Materials CIMTEC*. Florence, 1999, Part C, 313-320.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A. 2010.** "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Computational Materials Science*. 2010, Vol. 49, 865-870.
- Bouazza M., Tounsi A., Bedia Adda E.A., and Megueni A., 2009.** "Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges". *Leonardo J. of Sciences*. 2009, Vol. 8(15), 21-32.

- Bouhadra A., Benyoucef S., Tounsi A., Bernard F., Bachir Bouiadjra R., and Houari Mohammed.S.A., 2015.** "Thermal Buckling Response of Functionally Graded Plates with Clamped Boundary Conditions". *Journal of Thermal Stresses*. 2015, Vol. 38(6), 630–650.
- Brush D.O., Almroth B.O. 1975.** "Buckling of bars, Plates and Shells". Second. New York : McGraw-Hill, 1975.
- Calladine C.R. 1983.** "Theory of shell structures". New York, Amerique : CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1983.
- Carvalho O., Buciumeanu M., Madeira S., Soares D., Silva F.S., Miranda G., 2015.** "Optimization of AlSi-CNTs functionally graded material composites for engine piston rings". *Mater. Des.* 2015, Vol. 80, 163-173.
- Chi Shyang-ho., Chung Yen-Ling., 2003.** "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*. 2003, Vol. 70 (10), 1227–1243.
- Cho J.R., Park H.J., 2002.** "High strength FGM cutting tools: finite element analysis on thermoelastic characteristics". *J. Mater. Process. Technol.* 2002, 130-131: 351-356.
- Delale F., Erdogan F., 1983.** "The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1983, Vol. 50 (3), 609-614.
- Eduard V., Theodor K., 2001.** "Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications". s.l. : Marcel Dekker, Inc. New York. Basel, 2001.
- Erdogan F. 1995.** Fracture mechanics of functionally graded materials". *Compos. Eng.* 1995, Vol. 5, 753-770.
- Fekrar A., Zidi M., Boumia L., Ait Atmane H., Tounsi A., and Bedia Adda E.A., 2013.** "Thermal buckling of AL/AL₂O₃ functionally graded plates based on first order theory". *Nature & Technology, J. A- Fundamental & Eng. Sci.* 2013, Vol. A(08), 12-16.
- Ghomshei M.M., and Abbasi V., 2013.** "Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method". *J. of Mech. Sci. and Tech.* 2013, Vol. 27(4), 1031-1039.
- Gupta K.M. 2012.** "Materials Science". *Metallurgy and Engineering*. Umesh Publications. New Delhi, 2012.
- Hadj Henni A., Ait ATMANE H., MECHAB I., BOUMIA L., TOUNSI A., Adda Bedia E.A., 2011.** "Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory". *Chinese Journal of Aeronautics*. 2011, Vol. 24, 434-448.
- Hamzehei M., Raki M., 2011.** "Study and Simulation of Thermal Buckling in a Thin Rectangular FGM Plate". *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.)*. 2011, Vol. 5(5), 918-926.
- Hirai T. 1996.** Chapter 20, "Functional Gradient Materials". [éd.] P. Hassen and E.J. Kramer R.W. Chan. *Mater. Sci. and Tech.* 1996, Vol. 17B, 293-341.
- Hirai T., and Chen L., 1999.** "Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan". *Materials Science Forum*. 1999, 308-311, 509-514.
- Hirai T., Sasaki M., Niino M., 1987.** *J. Soc. Mater. Sci. Jpn.* 1987, Vol. 36, 1205-1211 (in Japanese).
-

- Hiroyuki M. 2009.** "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings". *Compos. Struct.*, 2009, Vol. 87(4), 344-357.
- HOUARI Mohammed S.A. 2011.** "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2011.
- Ichikawa K. 2000.** "Functionally graded materials". in *the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts.* 2000, 264 p., Hardcover. .
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A., 2013.** "Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories". *Composite Structures.* 2013, Vol. 106, 777-792.
- Iyengar N.G.R. 1988.** "*Structural stability of columns and plates*". [éd.] ELLIS HORWOOD LIMITED. New York. Chichester. Brisbane. Toronto : s.n., 1988.
- Jaeger L.G. 1964.** "*Elementary Theory of Elastic Plates*". First edition. s.l. : Pergamon Press, Oxford, 1964.
- Javaheri R., and Eslami M.R., 2002c.** "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory". *J. Therm. Stress.* 2002c, Vol. 25(1), 603-625.
- , **2002b.** "Thermal buckling of functionally graded plates". *AIAA. J.* 2002b, Vol. 40(1), 162-169.
- Javaheri R., Eslami M.R., 2002a.** "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading". *ZAMM Z Angew Mater Mech.* 2002a, Vol. 82(4), 277-283.
- Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour, S.R. 2009.** "An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates". *Materials & Design.* 2009, Vol. 30, 3679-3685.
- KACI A. 2012.** "Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2012.
- Kaviani F., and Mirdamadi H.R., 2013.** "Static Analysis of Bending, Stability, and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates by a Four-Variable Theory". *Amirkabir Journal of Science & Research, ME.* 2013, Vol. 45(2), 5-7.
- Kawasaki A., and Watanabe R., 1990.** "Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process". In *Proc. 1st. Int. symp. FGM.* edited by : Yamanouchi M., Koizumi M., 1990, 197-202.
- Kawasaki A., Watanabe, R. 1997.** "Concept and P/M Fabrication of Functionally Gradient Materials". *Ceramics International.* 1997, Vol. 23, 73-83.
- Khalfi Y., Houari M.S.A., Tounsi A., 2014.** "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation". *International Journal of Computational Methods.* 2014, Vol. 11(05).
- Khanh L.T. 2012.** "Etude de la résistance et de la stabilité des tôles courbes cylindriques en acier : applications aux ouvrages d'art". *Thèse de Doctorat université Paris-Est, France.* 2012.
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H., 2003.** "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering.* 2003, Vol. A362, 81-105.

- Kim S.E., Thai H.T., Lee J., 2009.** "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory". *Thin-Walled Structures*. 2009, Vol. 47, 455-462.
- Koizumi M. 1993.** "Ceramic Transactions Functionally Gradient Materials". *2nd Int.Symp. on Functionally Gradient Materials*. Society, American Ceramic, 1993, Vol. 34, 3-10.
- . **1994.** "The Concept of FGM", FGM-News". *Journal of the FGM-Forum, National Aerospace Laboratory, Nippon Oil Company*. Nippon Oil Company, 1994, Vol. 24, 3-6, pp. 3-6.
- Kokini K., Choules B.D., Takeuchi Y.R., 1997.** Thermal fracture mechanisms in ceramic thermal barrier coatings". *J. Therm. Spray Technol.* 1997, Vol. 6, 43-49.
- Koohkan H., Kimiaefar A., Mansourabadi A., and Vaghefi R., 2010.** "An analytical approach on the buckling analysis of circular, solid and annular functionally graded thin plates". *J. Mech. Eng.* 2010, Vol. ME 41(1), 7-14.
- Koteswara Rao D., Blessington P.J., Tarapada R., 2012.** "Finite Element Modeling and Analysis of Functionally Graded (FG) Composite Shell Structures". *Procedia Engineering*. 2012, Vol. 38, 3192-3199.
- Lanhe W. 2004.** "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate". *Composite Structures*. 2004, Vol. 64, 211-218.
- Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A., 1999.** "Functionally Graded Materials 1998". *Proceedings of the 5 International Symposium on FGM 1998*. in: Kaysser W.A, Trans Tech Publications, Switzerland, 1999, 13-18.
- Lü C.F., Chen W.Q., Xu R.Q and Lim C.W., 2008.** "Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams". *International Journal of Solids and Structures*. 2008, Vol. 45, 258-275.
- Manfred A.H., Rolf B., 1994.** "Construction métallique, Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement". *Traité de Génie Civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, France*. 1994, Vol. 10.
- Marple B.R., and Boulanger J., 1996.** "Slip casting process and apparatus for producing graded materials". *Us. Patent*. 1996, Vol. 5, 498-383.
- Marple B.R., and Tuffe S., 1997.** "Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials". *ibid.* 1997, 159-166.
- Matsunaga H. 2009.** "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory". *Composite Structures*. 2009, Vol. 90, 76-86.
- Mechab I., Atmane H.A., Tounsi A., Belhadj H.A., Bedia E.A.A., 2010.** "A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates". *Acta Mech. Sinica*. 2010, Vol. 26 (6), 941-949.
- Mévrel R. 2009.** "Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine. *PlastOx 2007 - Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité - Environnement*. 2009, 255-264.
- Mindlin R.D. 1951.** "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1951, Vol. 18, 31-38.

- Miyamoto Y. 1997.** "Applications of FGM in Japan, in Functionally Graded Materials. *Manufacture, Properties, and Applications*. Ceramic Transactions. Am. Ceram. Soc, 1997, Vol. 76, 171-189.
- Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B.H. Kawasaki A., Ford Renee G., 1999.** "*FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, Design, Processing and Applications*". [éd.] Miyamoto Y. Media New York : LLC, 1999.
- Mohammadi M., Saidi A.R., and Jomehzadeh E., 2010.** "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates". *Appl. Compos. Mater.* 2010, Vol. 17(1), 81-93.
- Mozafari H., Abdi B., and Ayob A., 2012b.** "Optimization of temperature-dependent functionally graded material based on colonial competitive algorithm". *Applied Mechanics and Materials*. 2012b, Vol. 121-126, 4575-4580.
- Mozafari H., Abdi B., Ayob A., and Alias A., 2012c.** "Optimum critical buckling of functionally graded plates under non-linear temperature by using imperialist competitive algorithm". *Applied Mechanics and Materials*. 2012c, Vol. 110-116, 3429-3433.
- Mozafari H., and Ayob A., 2012a.** "Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials". *Procedia Technology*. 2012a, Vol. 1(2012), 496-504.
- Mozafari H., Ayob A., and Alias A., 2010a.** "Influence of thickness variation on the buckling load in plates made of functionally graded materials". *Eur. J. Sci. Res.* 2010a, Vol. 47(3), 422-435.
- Mozafari H., Ayob, A. and Alias, A. 2010b.** "Verification of the thermal buckling load in plates made of functionally graded materials". *Int. J. of Eng.* 2010b, Vol. 4 (5), 338-356.
- Müller E., Drasar C., Schilz J., and Kaysser W.A., 2003.** "Functionally graded materials for sensor and energy applications". *Materials Science and Engineering*. 2003, Vol. A362, 17-39.
- Na K.S., Kim J.H., 2004.** "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials". *Composites Part B*. 2004, Vol. 35, 429-437.
- Na K.S., Kim J.K., 2006.** "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method". *Finite Elements in Analysis and Design*. 2006, Vol. 42, 749-756.
- Najafizadeh M.M., Heydaru H.R., 2004.** "Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory". *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2004, Vol. 23, 1085-1100.
- Neubrand A. 2001.** "*Functionally graded materials*". In: Editors-in Chief:, K. H. J. B., Robert, W. C., Merton, C. F., Bernard, I., Edward, J. K., Subhash, M., Patrick, V. s.l. : *Encyclopedia of Materials: Science and Technology* (Second Edition). Elsevier, Oxford, 2001. pp. 3407-3413.
- Nguyen., Viet.Tung. 2004.** "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées*. ParisTech, France, 2004.
- Nguyen-Xuan H., Tran L.V., Nguyen-Thoi T., Vu-Do H.C., 2011.** "Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method". *Composite Structures*. 2011, Vol. 93, 3019-3039.

- Niino M., Hirai T. and Watanabe, R. 1987.** *J. Japan Soc. Comps. Mater.* 1987, Vol. 13, 257-264 (in Japanese).
- Niino M., Kumakawa A., Watanabe R., Doi Y. 1984.** "Fabrication of a high pressure thrust chamber by the eIP forming method". *20th Joint Propulsion Conference*. Joint Propulsion Conferences, 1984, 84-1227.
- Noor A.K. 1990.** "Bibliography of monographs and surveys on shells". *Applied Mechanics Reviews*. 1990, Vol. 43(9), 223-234.
- Noseir A., Reddy J.N., 1992.** "On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories". *Acta. Mech.* 1992, Vol. 94(3-4), 145-169.
- Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T., 1998.** *J. Jpn. Inst. Met.* 1998, Vol. 62, 986-991.
- Paszkiwicz B., Paszkiwicz R, Wosko M., Radziewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M., 2008.** "Functionally Graded semiconductor layers for devices application". *Vacuum*. 2008, Vol. 82, 389-394.
- Pouladvand M. 2009.** "Thermal stability of thin rectangular plates with variable thickness made of functionally graded material". *J. of Solid Mechanics*. 2009, Vol. 1(3), 171-189.
- Praveen G.N., Reddy J.N., 1998.** "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates". *Int. J. of Solids and Struct.* 1998, Vol. 35(33), 4457-4476.
- Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H., 2003.** "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators". *Smart Materials and Structures*. 2003, Vol. 12, 115-121.
- Rajasekaran S., and Wilson J.A., 2013.** "Buckling and vibration of rectangular plates of variable thickness with different end conditions by finite difference technique". *Struct. Eng. Mech., Int. J.,* 2013, Vol. 46(2), 269-294.
- Raki M., Alipour R., and Kamanbedast A., 2012.** "Thermal buckling of thin rectangular FGM plate". *World Applied Sciences Journal*. 2012, Vol. 16 (1), 52-62.
- Reddy J.N. 2000.** "Analysis of functionally graded plated". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, Vol. 47, pp. 663-384.
- . 1997. "Mechanics of Laminated Composites Plates and shells: Theory and Analysis". [éd.] second. 1997.
- Reissner E. 1945.** "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, 1945, Vol. 12, 69-77.
- Rohit S., and Maiti P.R., 2012.** "Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load". *Int. J. Civil and Struct. Engin.* 2012, Vol. 2(4), 1035-1050.
- Schulz U., et al. 1997.** "Graded design of EB-PVD thermal barrier coating systems". *AGARD 85th Structures and Materials Panel Meeting, Workshop 3, Thermal Barrier Coatings, Aalborg, Denmark*. 1997.
- Shariat BAS., Eslami M.R., 2005.** "Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates". *Journal of Thermal Stresses*. 2005, Vol. 28, 1183-1198.

- Shen H.S. 2009.** *"Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells"*. s.l. : CRC Press, 2009. p. 280.
- Shen M., and Bever M.B., 1972.** "Gradients in polymeric materials". *J. Mater. Sci.* 1972, Vol. 7, 741-746.
- Siti Nur Sakinah J., Faizal, M., Dewan, M. N., Shah, N. B. 2013.** "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*. 4 June 2013, Vol. 8(21), 828-840.
- Suresh K.J., Reddy S.B., Reddy E.C., 2011.** "Nonlinear Thermal Analysis of Functionally Graded Plates Using Higher Order Theory". *Innovative Systems Design and Engineering*. 2011, Vol. 2(5), 1-14.
- Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., 1990.** "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique". in *proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan*. 1990, 129-134.
- Takemura M., and Tamura M. et al., 1990.** "Mechanical and thermal properties of FGM fabricated by thin sheet lamination method". In *Proc. 1st. Int. symp. FGM*,. edited by: Yamanouchi. M., Koizumi M., 1990, 97-100.
- Thai H.T., Choi D.H., 2012.** "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates". *Applied Mathematical Modelling*. 2012, Vol. 36, 1008–1022.
- Timoshenko S. 1968.** "Résistance des matériaux, Théorie développée et problèmes", Tome 2. éditions Dunod, 1968.
- Timoshenko S., Gere J.M., 1963.** *"Theory of Elastic Stability"*. New York, Amérique : McGraw-Hill Book Company,, 1963. p. second edition.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1959.** *"Theory of Plates and Shells"*. second edition. New York, Amérique : McGraw-Hill Book Company, 1959.
- Tounsi A., Houari Mohammed S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., 2013.** "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates". *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 24, 209–220.
- Uemura S. 2003.** "The activities of FGM on new applications". *Materials Science Forum*. 2003, 423-425, 1-10.
- Valizadeh N., Natarajan S., Gonzalez-Estrada O.A., Rabczuk T., Bui T.Q., Bordas S.P., 2013.** "NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter". *Composite Structures*. 2013, Vol. 99, 309–326.
- Vallat P. 1945.** Aérospatiale Itw, "Résistance des matériaux appliquée à l'aviation" Tome I, 1945.
- Watanabe Y., Yamanaka N., Fukui Y., Metallkd Z., 1997.** "Orientation of Al₃Ti platelets in Al-Al₃Ti functionally graded material manufactured by centrifugal method". 1997, Vol. 88 N° 09, 717–721.
- Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T., 2004.** "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*. 2004, Vol. 64, 893-908.

- Watremetz B. 2006.** "Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères". *Thèse de doctorat*. Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- Yang Y.Y., Munz D., Schaller W., 1997.** "Effect of the stress jump at the interface of a joint on the failure behavior". *Int. J. Fract.* 1997, Vol. 87, L113–L118.
- Yang Z., Zhang L., Shen Q., Gong D., 2003.** "Theoretical design of sedimentation applied to the fabrication of functionally graded materials". *Metall. Mater. Trans. B Process Metall. Mater. Process. Sci.* 2003, Vol. 34, 605-609.
- Yuki M., Murayama T., Irisawa T., 1991.** "Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating. *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan.* 1991, 203-208.
- Z. Abdelhak., L. Hadji., T.H. Daouadji., and E.A. Bedia., 2015.** "Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory". *Advances in Materials Research.* 2015, Vol. 4(1), 31-44.
- Zdenek .P.B., Luigi C., 2010.** "*Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*". s.l. : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
- Zeng Y.P., Jiang D.L., Watanabe T., 2000.** "Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials". *Journal of the American Ceramic Society.* 2000, Vol. 83, N° 12, 2999-3003.
- Zenkour A.M., and Mashat D.S., 2010.** "Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates". *Natural Science.* 2010, Vol. 2(9), 968-978.
- Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q., 1998.** *Mater J. Sci. Lett.* 17. 1998, 1677-1679.
- Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M., 2009.** "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Composite Structures.* 2009, Vol. 90, 161–171.

ملخص

في هذه المذكرة نتعرض لدراسة الانبعاج الحراري لصفائح ذات خصائص مادية متغيرة في اتجاه الارتفاع وسمك متغير، مرتكزة على دعائم بسيطة، باستعمال طريقة الفروق المحدودة. أولاً نقوم باستخراج المعادلة التفاضلية التي تتحكم في استقرار الانبعاج الحراري للصفحة تحت تأثير حرارة موزعة بانتظام على سمك الصفحة، بعد ذلك نقوم بحل هذه المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة رقمية، وذلك بإدراج طريقة الفروق المحدودة، للتأكد من مدى قدرات هاته الطريقة لحل مثل هاته الحالات نقوم بمقارنتها مع الحل بالطرق التحليلية. بعد التأكد من الطريقة المقترحة باستعمال الفروق المحدودة، نقوم بإدراج خاصية تغير سمك الصفحة في معادلات الفروق المحدودة. لمعرفة مدى ملائمة هذه الطريقة نقوم بمقارنة النتائج المحصل عليها مع النتائج الموجودة باستعمال الطرق التحليلية وقد لاحظنا ان هاته الطريقة المقترحة اعطت نتائج جد مرضية. في الأخير نسرر دراسة و مناقشة مدى تأثير بعض الخصائص مثل الابعاد، السمك و معامل تغير المواد داخل الصفحة على درجة الحرارة الحرجة لحصول انبعاج الصفائح المتدرجة وظيفياً.

الكلمات مفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفياً ذات سمك متغير، الانبعاج الحراري، معاينة الاستقرار، طريقة الفروق المحدودة، الطرق الرقمية.

Résumé

Dans cette recherche une solution numérique en utilisant la méthode des différences finies pour évaluer le flambement thermique d'une plaque FGM simplement appuyée avec une épaisseur variable est présentée. Tout d'abord, l'équation différentielle régissant la stabilité thermique au flambement d'une plaque soumise à une température uniforme à travers l'épaisseur de la plaque est dérivée. Ensuite, l'équation régissant a été résolu en utilisant la méthode des différences finies. Après validation de la méthode numérique présentée à la solution analytique, la formulation des différences finies a été étendue afin d'inclure la variation d'épaisseur. La précision de la méthode des différences finies pour analyser le flambement thermique des plaques avec épaisseur variable a également été comparée aux résultats rapportés à la littérature où un bon accord a été trouvé. En outre, une étude paramétrique a été menée pour analyser l'effet des paramètres matériels et géométriques sur la résistance au flambement thermique des plaques FGM. On a constaté que la variation de l'épaisseur des plaques affecte un peu plus les plaques isotropes que les plaques FGM.

Mots-clés : plaque FGM d'épaisseur variable ; flambement thermique ; analyse de la stabilité ; différences finies ; méthode numérique.

Abstract

A numerical solution using finite difference method to evaluate the thermal buckling of simply supported FGM plate with variable thickness is presented in this research. First, the governing differential equation of thermal stability under uniform temperature through the plate thickness is derived. Then, the governing equation has been solved using finite difference method. After validating the presented numerical method with the analytical solution, the finite difference formulation has been extended in order to include variable thickness. The accuracy of the finite difference method for variable thickness plate has been also compared with the literature results where a good agreement has been found. Furthermore, a parametric study has been conducted to analyze the effect of material and geometric parameters on the thermal buckling resistance of the FGM plates. It was found that the thickness variation affects isotropic plates a bit more than FGM plates.

Keywords: FGM plate with variable thickness; thermal buckling; stability analysis; finite difference; numerical method.