

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES

LABORATOIRE MATÉRIAUX & HYDROLOGIE



FACULTÉ DE TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL ET DES TRAVAUX PUBLICS

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

**M. EL HASSAR Sidi Mohamed**

Intitulé de la thèse

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT  
MÉCANIQUE DES PLAQUES COMPOSITES « ÉTUDE  
COMPARATIVE ENTRE LES DIFFÉRENTES THÉORIES  
D'ORDRE ÉLEVÉ »**

Soutenu le :    /    /2016    Composition du jury :

M. TOUNSI Abdelouahed	Pr.	UDL SBA	Président
M. BENYOUCEF Samir	MCA	UDL SBA	Directeur de thèse
M. ADDA BEDIA El Abbas	Pr.	UDL SBA	Examineur
M. AIT AMAR Meziane	MCA	U de TIARET	Examineur
M. AMEUR Mohamed	MCA	E.N.P d'Oran	Examineur
M. LAZREG HADJI	MCA	U de TIARET	Examineur

Année universitaire 2015-2016

# **Remerciements**

## REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à M. BENYOUCEF Samir "Maitre de conférences A - Université de Sidi Bel Abbés" de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, sa disponibilité, ses encouragements et son amical soutien qui m'ont grandement aidé à l'achèvement de cette thèse.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à M. TOUNSI Abdelouahed "Professeur - Université de Sidi Bel Abbés" pour son apport constant, sa rigueur scientifique, sa disponibilité, ses conseils pertinents, son encouragement et de m'avoir fait honneur de présider ce jury.*

*J'exprime aussi ma gratitude à M. ADDA BEDIA El Abbas "Professeur - Université de Sidi Bel Abbés" pour sa disponibilité, ses conseils avisés et de m'avoir fait honneur d'examiner cette thèse.*

*Je remercie également tous les membres de mon jury à savoir Messieurs AIT AMAR Meziane "Maitre de conférences A - Université de Tiaret", AMEUR Mohamed "Maitre de conférences A - Université d'Oran" et LAZREG HADJI "Maitre de conférences A - Université de Tiaret" de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.*

*Et pour finir, je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbés pour leurs aides et leurs soutiens tout au long de ce travail.*

# **Dédicaces**

## DÉDICACES

*Je dédie cette Thèse de doctorat,*

*À Mes Chères Parents*

*Autant de phrases ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour votre soutien permanent, votre patience sans fin et votre affection. Je vous dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et que Dieu tout puissant vous préserve.*

*À Ma Chère Épouse*

*Ton encouragement et ton soutien étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments difficiles, merci de m'avoir supporté et d'être toujours ci patiente avec moi. Que Dieu tout puissant vous donne bonheur et prospérité.*

*À ma très chère fille Manal*

*À mon frère sidahmed, mes sœurs et mes beaux frères Fath allah et Mohamed*

*À ma belle famille*

*À mon beau frère Nabil, son épouse et leur fille Mérième*

*À mes neveux et mes nièces*

*Nihal, Mérième, Abd errahmane, Ali, Abd essalam, Kenza, Malak et Abd elhadi*

*Ainsi que à toute Ma famille et mes amis*

*Salim, Réda et Mohamed*

ملخص

## ملخص

هذا البحث يخص دراسة التصرف الميكانيكي و الحراري للصفائح من المواد المتدرجة الخاصة، يهدف بالخصوص إلى دراسة مدى تأثير الأخذ بعين الاعتبار للموضع الصحيح للمساحة المحايدة على تصرفات الصفيحة.

في العادة، تعتبر المساحتان الوسطى و المحايدة كمساحة واحدة، بتعبير آخر، يفترض تطبيق حاصل الإجهاد على مستوى المساحة الوسطى، و لكن في الواقع هو يطبق على مستوى المساحة المحايدة، هذا يؤدي إلى رفع من قيمة عزم القوة، هذه الإضافة هي عزم القوة الناتج عن حاصل ضرب حاصل الإجهاد و الذراع، هذا الذراع ما هو إلى المسافة بين المساحتين.

من اجل تقييم مدى تأثير الأخذ بعين الاعتبار للموضع الصحيح للمساحة المحايدة و لاستخلاص أكبر كم من المعلومات، قمنا بتوسيع نطاق مجال البحث، أولاً، أعطينا نموذج لصفحة موضوعة بشكل بسيط، مكونة من المواد المتدرجة الخاصة ، أين التدرج معرف بصيغة موري- تاناكا، و وضعناها تحت حمل ديناميكي، الحمل عمودي بتوزيع جيبي، معبرة في سلسلة مزدوجة لفورييه و ثانياً، أعطينا نموذج لصفحة موضوعة أم لا على أرض مرنة، محددة بمعالم وينكلر وباسترنالك، مكونة من المواد المتدرجة الخاصة ، أين التدرج معرف بقانون القوة و وضعناها تحت حمل حراري، أين تدرج الحرارة يتغير بصفة معتدلة، خطية و غير خطية، باستخدام نظرية الترتيب العالي المصقولة، بأربعة مجاهل فقط، بتشابه قوي مع النظرية الكلاسيكية للصفائح في العديد من الجوانب، لا تتطلب معامل التصحيح القص، مع دالة القص العرضي زائدية. للتحليل الديناميكي اهتمنا بالتشوهات، التهجير، الضغوط و الاهتزازات الحرة و بنسبة للتحليل الحراري اهتمنا بصفة خاصة بدرجة الحرارة الحرجة، الحرارة التي من بعدها تصل إلى حالة عدم الاستقرار. الدراسة البارامترية ، سمحت لنا بإجراء مقارنة بين النتائج مع ودون الأخذ بعين الاعتبار للموضع الصحيح للمساحة المحايدة، باستعمال خمسة دوال القص.

**الكلمات الرئيسية:** الصفيحة، المواد المتدرجة الخاصة، المساحة المحايدة، نظرية الترتيب العالي المصقولة، دوال القص.

# Résumé

## RESUME

Ce travail de recherche traite le comportement mécanique et thermique des plaques en matériaux à gradient de propriété, il vise en particulier l'étude de l'impact de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre sur les réponses.

Habituellement, il est supposé que les surfaces médiane et neutre ne font qu'un, autrement dit, la résultante des contraintes est supposée appliquer au niveau de la surface médiane, or réellement elle est appliquée au niveau de la surface neutre, cela revient à surestimer le moment fléchissant, en lui additionnant un moment résultant du produit de la résultante des contraintes et le bras de levier, ce bras de levier n'est autre que la distance entre les deux surfaces.

Afin d'évaluer l'impact de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre et dans le souci de tirer un maximum d'information, nous avons élargi le champ de recherche à deux cas de figure, en premier lieu, nous avons modélisé une plaque simplement appuyée, en matériaux à gradient de propriété dont le gradient est défini par la formule de Mori-Tanaka et nous l'avons soumis à un cas de chargement dynamique, soit une charge verticale de distribution sinusoïdale, exprimée en double série de Fourier et en deuxième lieu, nous avons modélisé une plaque prenant appuis ou pas sur un sol élastique, défini par les paramètres de Winkler et de Pasternak, en matériaux à gradient de propriété dont le gradient est défini par la loi de puissance et nous l'avons soumis à un cas de chargement thermique, où la température variée uniformément, linéairement et non linéairement, tout en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables seulement, d'une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects et n'exigeant pas de facteur de correction de cisaillement, la fonction de cisaillement transverse est prise de forme hyperbolique.

Pour l'analyse dynamique, nous nous sommes intéressés aux réponses à savoir les déformations, les déplacements, les contraintes et les vibrations libres et pour l'analyse thermique, nous nous sommes intéressés particulièrement à la température critique, au-delà de laquelle la plaque atteint un état d'instabilité.

L'étude paramétrique, a permis de faire une comparaison entre les résultats avec et sans prise en compte de la position exacte de la surface neutre en utilisant cinq fonctions de cisaillement.

**Mots Clés:** Plaque, matériaux à gradient de propriété, Surface neutre, théorie raffinée d'ordre élevé, fonctions de cisaillement.

# **Abstract**

## Abstract

This research deals with the mechanical and thermal behavior of functionally graded plates, in particular, the use of the neutral surface concept.

Usually, it is assumed that the median and neutral surfaces are one, in other words, the resulting stress is assumed applied at the mid-surface, or actually it is applied at the neutral surface. This leads to an overestimation of bending moment.

To assess the impact of the inclusion of the exact position of the neutral surface and in order to gain maximum information, we have expanded the search field to two cases. In the first one, we have developed a simple higher-order shear deformation theory for free vibration behavior of FG plates. The effective properties for the FG plate are computed using Mori-Tanaka homogenization scheme. In the second case, a shear deformation plate theory based on neutral surface position is developed for thermal instability of functionally graded plates and supported by either Winkler or Pasternak elastic foundations. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use.

The governing equations are derived by employing the Hamilton's principle and the physical neutral surface concept. There is no stretching-bending coupling effect in the neutral surface-based formulation, and consequently, the governing equations and bounding conditions of functionally graded plates based on neutral surface have the simple forms as those of isotropic plates.

For dynamic analysis, we are interested in determining the responses in terms of displacements and stresses. In either case, the objective was to determine the critical temperature of buckling.

The parametric study made it possible to compare the results with and without consideration of the exact position of the neutral surface plane.

**Keywords:** Vibration, bending, FGM, plate theory, elastic foundation, neutral surface position

# **Table des matières**

## **TABLE DES MATIERES**

ملخص

Résumé

Abstract

Table des Matières

Liste des Notations

Liste des Tableaux

Liste des Figures

Introduction Générale

### **CHAPITRE I**

I.1. Introduction	1
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriété	2
I.3. Historique de développement des matériaux à gradient de propriété	4
I.4. Domaine d'application des matériaux à gradient de propriété	6
I.5. Les procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriété	7
I.5.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	7
I.5.1.1. Principe de la méthode	7
I.5.1.2. Les constituants de la barbotine	7
I.5.1.2.1 La poudre	7
I.5.1.2.2 Le solvant	8
I.5.1.2.3 Le dispersant	8
I.5.1.2.4 Le Liant	8
I.5.1.2.5 Le plastifiant	8
I.5.1.3 déliantage	8
I.5.1.4 Frittage	9
I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	9

I.5.2.1. Principe de la méthode	9
I.5.2.2. Le choix des constituants	9
I.5.3. Compaction Sèche des Poudres (Dry powder processing)	10
I.5.3.1. Principe du procédé de fabrication	10
I.5.3.2. Le procédé de fabrication	11
I.5.3.2.1 Le choix et le traitement des poudres	11
I.5.3.2.2 Mise en Forme	12
I.5.3.2.3 Densification	13
I.5.4. Dépôt par centrifugation (Centrifugal casting)	<b>13</b>
I.5.4.1. Centrifugation par sédimentation (Centrifugal sedimentation)	13
I.5.4.2. Centrifugation verticale (Centrifugal powder forming)	13
I.5.5. Dépôt par Électrophorèse (Electrophoretic deposition)	14
I.5.6. Projection Plasma (plasma spraying)	15
I.5.7. Implantation Ionique (Sputtering)	16
I.5.8. Dépôt physique et Dépôt Chimique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition and Chemical Vapor Deposition)	17
I.5.8.1. Dépôt physique en phase vapeur (P.V.D)	17
I.5.8.2. Dépôt Chimique en phase vapeur (C.V.D)	18
I.5.9. Frittage et infiltration (Sintering and infiltration)	18
I.5.10. Frittage Laser Différentiel (Laser Sintering process)	19
I.5.11. Impression 3D	19
I.5.11.1. Différents procédés d'impression 3D	20
I.5.11.1.1. Impression par dépôt sélectif	20
I.5.11.1.2. Impression par solidification sélective	20
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	21
I.6.1. La fonction de loi de puissance (P-FGM)	21

I.6.2. La fonction exponentielle (E-FGM)	21
I.6.3. La fonction sigmoïde (S-FGM)	23
I.6.4. La fonction type Mori-Tanaka	24
I.7. Conclusion	24
<b>CHAPITRE II</b>	
II.1. Introduction	25
II.2. Historique de développement de la théorie des plaques	25
II.3. La théorie Classique des plaques minces de Love-kirchhoff (CPT)	26
II.4. La théorie des plaques épaisses	27
II.4.1. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	27
II.4.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres élevés (HSDT)	30
II.4.2.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	31
II.4.2.2. les différents modèles de fonction de cisaillement transverse	32
II.5. Les fondations élastiques	34
II.5.1. Introduction	34
II.5.1.1. Fondation superficielle souple	35
II.5.2. Modèle de Winkler	36
II.5.3. Modèle du continuum élastique	37
II.5.4. Modèles bi-paramétriques	38
II.5.5.1. Modèle du Filonenko-Borodich	38
II.5.5.2. Modèle d'Hetenyi	39
II.5.5.3. Modèle de Pasternak	40
II.5.5.4. Modèle de Kerr	41
II.5.5.5. Modèle de Reissner	42
II.6. Conclusion	43

## CHAPITRE III

III.1. Introduction	44
III.2. formulation du problème	46
III.3. Le modèle théorique	48
III.3.1. Les hypothèses de bases	48
III.3.2. Cinématique	49
III.3.3. Les relations constitutives	50
III.3.4. Équations de mouvement	50
III.3.4. 1. Énergie de déformation	50
III.3.4.2. Travail des forces extérieures	52
III.3.4.3. Énergie cinétique	52
III.3.5. La solution de Navier pour une plaque simplement appuyée	53
III.4. Conclusion	55

## CHAPITRE IV

IV.1. Introduction	56
IV.2. Formulation du problème	59
IV.2.1. Formulation du problème Plan neutre	59
IV.3. Modèle théorique	61
IV.3.1. Les hypothèses de base	61
IV.3.2. Cinématique	62
IV.3.3. Relation constitutive	63
IV.3.4. les équations de stabilité	64
IV.3.5. Solution Trigonométrique pour un flambement thermique	67
IV.3.6.1. Flambement des plaques FGM sous température uniforme	69
IV.3.6.2. Flambement des plaques FGM sous température à gradient à travers l'épaisseur	70

IV.4.Conclusion	70
-----------------	----

## **CHAPITRE V**

V.1. Introduction	71
V.2. Validation des résultats sous chargement dynamique	71
V.3.Conclusion	79
V.4. Etude paramétrique sous chargement dynamique	80
V.5. Conclusion	97
V.6. Validation des résultats sous chargement thermique	98
V.7. Conclusion	101
V.8. Etude paramétrique sous chargement thermique	101
V.9.Conclusion	112

Conclusion Générale

# **Liste des Tableaux**

## LISTE DES TABLEAUX

### CHAPITRE I

Tableau I.01	Les propriétés du métal et de la céramique	4
--------------	--	---

### CHAPITRE V

Tableau V.01	Contrainte et flexion adimensionnelles - Plaque Carrée – Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	72
Tableau V.02	Contraintes, déplacement et flexion adimensionnels - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (a/h =10)	74
Tableau V.03	Pulsation adimensionnelle $\hat{\omega}$ - Plaque carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	76
Tableau V.04	Contrainte et flexion adimensionnelles - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	81
Tableau V.05	Contraintes, déplacement et flexion adimensionnels - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (a/h =10)	82
Tableau V.06	Pulsation fondamentale adimensionnelle $\bar{\beta}$ - Plaque Carrée – Al/ZrO <sub>2</sub>	84
Tableau V.07	Pulsation adimensionnelle $\hat{\omega}$ - Plaque carrée – Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	84
Tableau V.08	Les deux premières pulsations adimensionnelles $\hat{\omega}$ - Plaque carrée – Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	86
Tableau V.09	Température critique de flambement d'une plaque en gradient de propriété sans fondation, sous une température uniforme avec différents rapports a/b et différents élancements	98
Tableau V.10.a	Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température uniforme avec différentes valeurs de p.	99
Tableau V.10.b	Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température linéaire avec différentes valeurs de p	100
Tableau V.10.c	Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température non-linéaire avec différentes valeurs de p	100
Tableau V.11	Température critique du flambement sous une température uniforme	102

Tableau V.12.a	Température critique du flambement sous une température uniforme	103
Tableau V.12.b	Température critique du flambement sous une température linéaire	104
Tableau V.12.c	Température critique du flambement sous une température non-linéaire	103

## **Liste des Figures**

## **LISTE DES FIGURES**

### **CHAPITRE I**

Figure I.01	Coupe d'un fémur	2
Figure I.02	La microstructure d'un bambou	2
Figure I.03	La distribution composante des matériaux	3
Figure I.04	Matériau à gradient de propriété le MgO-ZrO <sub>2</sub>	3
Figure I.05	Système de protection thermique dans la navette spatiale	5
Figure I.06	Coulage par bande	7
Figure I.07	L'intérêt des poudres agglomérées	12
Figure I.08	Dépôt par processus de Centrifugation par sédimentation	14
Figure I.09	Principe de la Projection Plasma	16
Figure I.10	Principe d'impression 3D	21

### **CHAPITRE II**

Figure II.01	Illustration de la théorie de la plaque de Kirchhoff	27
Figure II.02	Illustration de la théorie de la plaque de Mindlin	30
Figure II.03	Illustration de la théorie des plaques d'ordre élevé	31
Figure II.04	Fondation flexible	35
Figure II.05	Fondation rigide	36
Figure II.06	Déplacement du sol d'après le modèle de Winkler	37
Figure II.07	Tassement du sol dû à une charge concentrée pour le modèle de continuum élastique	38
Figure II.08	Modèle de Filonenko-Borodich	39
Figure II.09	Modèle de d'Hetyenyi	40
Figure II.10	Modèle de Pasternak	40

Figure II.11	Modèle de kerr	42
--------------	----------------	----

### CHAPITRE III

Figure III.01	les positions des surfaces médiane et neutre dans une plaque en FGM	46
Figure III.02	Système de coordonnées et géométrie d'une plaque en gradient de propriété	48

### CHAPITRE IV

Figure IV.01	les positions des surfaces médiane et neutre dans une plaque en FGM	60
Figure IV.02	Système de coordonnées et géométrie d'une plaque reposant sur sol élastique	61

### CHAPITRE V

Figure V.01	Variation du déplacement et des contraintes adimensionnels à travers l'épaisseur - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (a=b=5h, p=4)	77
Figure V.02	Effet de l'exposant P sur la pulsation fondamentale $\bar{\omega}$ - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	78
Figure V.03	Effet du rapport des épaisseurs sur la pulsation fondamentale $\bar{\omega}$ - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	79
Figure V.04	Variation de la position de la surface neutre pour la formule de Mori-Tanaka en fonction du Paramètre matériel p.	80
Figure V.05	Flexion adimensionnelle - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	88
Figure V.06	Contrainte adimensionnelle - Plaque Carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - a=5h	90
Figure V.07	Pulsation adimensionnelle $\bar{\omega}$ - Plaque carrée - Al/ Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	91
Figure V.08	Variation de la position de la surface neutre en fonction de l'indice de loi de puissance	102
Figure V.09.a	La variation de la température critique du flambement pour p=2, Température Uniforme, a/h=10, K <sub>w</sub> =variable, K <sub>g</sub> =10	106
Figure V.09.b	La variation de la température critique du flambement pour p=2, Température linéaire, a/h=10, K <sub>w</sub> =variable, K <sub>g</sub> =10	106
Figure V.09.c	La variation de la température critique du flambement pour p=2, Température non-linéaire, a/h=10, K <sub>w</sub> =variable, K <sub>g</sub> =10	107

Figure V.10.a	La variation de la température critique du flambement pour $p=2$ , Température Uniforme, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable	108
Figure V.10.b	La variation de la température critique du flambement pour $p=2$ , Température linéaire, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable	108
Figure V.10.c	La variation de la température critique du flambement pour $p=2$ , Température non-linéaire, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable	109
Figure V.11.a	La variation de la température critique du flambement pour $p=$ variable, Température Uniforme, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable, $a=b$	110
Figure V.11.b	La variation de la température critique du flambement pour $p=$ variable, Température linéaire, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable, $a=b$	110
Figure V.11.c	La variation de la température critique du flambement pour $p=$ variable, Température non-linéaire, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g=$ variable, $a=b$	111
Figure V.12	La variation de la température critique du flambement pour température non-linéaire, $a/h=10$ , $K_w=10$ , $K_g= 10$ , $a=b$ , $a/h =$ variable.	112

## **Liste Notations**

## LISTE DES NOTATIONS

a	Longueur de la plaque
$a_{ij}$	Les coefficients de la matrice de rigidité pour chargement thermique
$A_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s,$ $H_{ij}^s, A_{44}^s, A_{55}^s$	Les coefficients des matrices de rigidité de la plaque
b	Largeur de la plaque
B	La constante de non-homogénéité
$c_1, c_2$	Deux constantes du modèle Reissner
C	Distance entre la surface neutre et la surface médiane
D	la rigidité à la flexion de la plaque du Modèle d'Hetenyi
$E(z)$	Module d'élasticité de la plaque
$E_c$	Module d'élasticité de la Céramique
$E_m$	Module d'élasticité du métal
$E_s$	Module d'élasticité du sol
$E_p$	Module d'élasticité de la plaque ou de la poutre du Modèle d'Hetenyi
$f(z)$	La fonction de cisaillement
$F(z)$	La fonction de pondération
$f_e$	La densité de la force de réaction de la fondation
$g(z)$	La dérivée de la fonction de cisaillement
G	le module de cisaillement de la couche introduite dans le Modèle de Kerr
$G_s$	module de cisaillement du sol du Modèle de Reissner
h	Epaisseur de la plaque
$h_1$	Coordonnée z de la face inférieure de l'épaisseur inférieure de la plaque sandwich
$h_2$	Coordonnée z de la face inférieure du noyau de la plaque sandwich
$h_3$	Coordonnée z de la face supérieure du noyau de la plaque sandwich
$h_4$	Coordonnée z de la face supérieure de l'épaisseur supérieure de la plaque sandwich
$h_p$	Hauteur de la plaque ou de la poutre du Modèle d'Hetenyi
H	Epaisseur de la couche de sol du modèle Reissner
$I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$	les inerties massiques
i, j	Des nombres entiers
$k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b$	Déformation du au moment de flexion
$k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s$	Déformation du au cisaillement transverse
k	facteur de correction de la théorie du premier ordre
$k_1$	la constante de ressort de la première couche du Modèle de Kerr

$k_2$	la constante de ressort de la deuxième couche du Modèle de Kerr
$K_w$	le coefficient de la réaction de sol de Winkler
$K_g$	Module de cisaillement du sol du Modèle de Pasternak
$\delta K$	la variation de l'énergie de cinétique
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Les moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Les moments de flexion du au cisaillement transverse
$M_x^{bT}, M_y^{bT}$	Les moments de flexion dus à la charge thermique
$M_x^{sT}, M_y^{sT}$	Les moments de flexion du au cisaillement transverse dus à la charge thermique
$m_{ij}$	Les coefficients de la matrice de masse pour chargement dynamique
m, n	Les modes de vibration choisis
$N_x, N_y, N_{xy}$	Les efforts normaux
$N_x^T, N_y^T$	Les efforts normaux dus à la charge thermique
$N_x^0, N_y^0$ et $N_{xy}^0$	Les résultantes des forces de pré-flambement
p	Paramètre matériel
$P_C$	Propriété correspondante à la céramique
$P_M$	Propriété correspondante au métal
P	Charge verticale concentrée
q	Charge statique appliquée
$Q_{mn}$	Distribution de la charge
$Q_{ij}$	les coefficients de rigidité
$S_{ij}$	Les coefficients de la matrice de rigidité
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Les efforts tranchants
T	La charge thermique
$T_s$	Tension dans la membrane élastique du modèle de Filonenko-Borodich
$T_x$	L'effort tranchant total par unité de longueur selon x
$T_y$	L'effort tranchant total par unité de longueur selon y
$T_i$	Température initiale
$T_f$	Température Finale
$\Delta T_{cr}$	la variation de la température critique donnant flambement
t	la variable temps
u	Déplacement dans la direction x
$\dot{u}$	La vitesse dans la direction x
$u_0, u_b, u_s$	Le déplacement du plan neutre, la composante du champ du déplacement en flexion et en cisaillement, par rapport à x
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn},$ $W_{smn}$	les paramètres arbitraires

$U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1,$	les paramètres arbitraires pour le chargement thermique
$W_{smn}^1$	
$u_0^0, v_0^0, w_b^0$ et $w_s^0$	composantes de déplacement dans l'état d'équilibre
$u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1$	composantes de déplacement au voisinage de l'état d'équilibre
$U$	L'énergie totale de déformation
$U_F$	L'énergie de déformation de la fondation élastique de Pasternak
$\delta U$	la variation de l'énergie de déformation
$v$	Déplacement dans la direction y
$\dot{v}$	La vitesse dans la direction y
$v_0, v_b, v_s$	Le déplacement du plan neutre, la composante du champ du déplacement en flexion et en cisaillement, par rapport à y
$V_C$	Fraction de volume adimensionnelle de la céramique
$V^1$	Fraction de volume adimensionnelle de l'épaisseur inférieure pour la plaque sandwich
$V^2$	Fraction de volume adimensionnelle du noyau pour la plaque sandwich
$V^3$	Fraction de volume adimensionnelle de l'épaisseur supérieure pour la plaque sandwich
$V_1$	Fraction de volume adimensionnelle sur l'épaisseur inférieure d'une plaque de classe S-FGM
$V_2$	Fraction de volume adimensionnelle sur l'épaisseur supérieure d'une plaque de classe S-FGM
$V$	L'énergie potentielle totale
$\delta V$	les travaux des forces extérieures
$w$	Déplacement dans la direction z
$\dot{w}$	La vitesse dans la direction z
$w_0$	le déplacement du plan moyen par rapport à l'axe z
$w_b$	Déplacement dans la direction z dû au moment de flexion
$w_s$	Déplacement dans la direction z dû à l'effort tranchant
$\dot{w}_b$	La vitesse dans la direction z dû au moment de flexion
$\dot{w}_s$	La vitesse dans la direction z dû à l'effort tranchant
$w$	Tassement du sol
$x$	Coordonnée selon la longueur de la plaque
$y$	Coordonnée selon la largeur de la plaque
$z$	Coordonnée selon l'épaisseur de la plaque
$z_{ms}$	Coordonnée z prenant comme origine la surface médiane
$z_{ns}$	Coordonnée z prenant comme origine la surface neutre
$\alpha$	
$\alpha_t$	Coefficient de dilatation thermique
$\beta$	
$\gamma$	l'exposant de température
$\gamma_{xy}$	déformations de cisaillement dans le plan xy

$\gamma_{xz}$	déformations de cisaillement dans le plan xz
$\gamma_{yz}$	déformations de cisaillement dans le plan yz
$\gamma_{xy}^0$	déformations de cisaillement dans le plan neutre xy
$\varepsilon_x$ et $\varepsilon_y$	Déformation dans les directions x et y respectivement
$\varepsilon_x^0$ et $\varepsilon_y^0$	Déformation de la surface neutre dans les directions x et y respectivement
$\nu$	Coefficient de poisson
$\nu_s$	Le coefficient de Poisson du sol
$\nu_p$	Coefficient de Poisson de la plaque ou de la poutre du Modèle d'Hetenyi
$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement xz
$\tau_{yz}$	Contrainte de cisaillement yz
$\phi_x$	la rotation de la section de la plaque par rapport à l'axe y
$\phi_y$	la rotation de la section de la plaque par rapport à l'axe x
$\chi$	la demi-longueur d'onde de flexion de la plaque vibrante
$\rho(z)$	Masse volumique de la plaque
$\rho_c$	Masse volumique de la Céramique
$\rho_m$	Masse volumique du métal
$\omega$	la fréquence propre
$\nabla$	le laplacien

# **Introduction Générale**

## **Introduction Générale :**

L'industrie est l'ensemble des activités socio-économiques qui produisent des richesses, soit par la transformation des matières premières tel que les minerais, les métaux, le pétrole et autres ou par l'exploitation des sources d'énergie tel que les hydrocarbures, solaire, éolienne,...etc. L'industrie synonyme de puissance économique et de progrès est le fruit du savoir et de l'innovation.

Depuis la nuit des temps, l'homme surexploite les réserves naturelles, devenues de plus en plus rares et précieuses et pousse ses ambitions au-delà des limites naturelles, à l'heure actuelle où la demande ne cesse de croître une exploitation rationnelle s'impose, d'après différentes projections, d'ici 2030 les besoins énergétiques doubleront par rapport à ceux de 1990. Autrement dit, l'industrie est confrontée à deux enjeux environnementaux importants, le premier concerne l'allègement des structures, notamment pour les secteurs d'aéronautique, naval, d'automobile, de la mécanique, du biomédical,...etc. et le deuxième est le recours aux énergies renouvelables dites propres.

L'avènement du matériau composite comme substituant au matériau conventionnel est l'une des solutions les plus prodigieuses, en effet, un matériau composite est constitué de différents matériaux fortement liés et conférant ainsi au produit fini des qualités mécaniques supérieures à celles si les constituants étaient pris seuls. Avec plus de performance et de légèreté le matériau composite est devenu l'axe de recherche par excellence, c'est ainsi plusieurs laboratoires de recherche à travers le monde se sont intéressés.

Depuis, les matériaux composites se sont diversifiés et ont conquis le secteur de l'industrie spatiale, militaire, aéronautique, mécanique, électronique, génie biomédical, ...etc. ainsi que le secteur des travaux publics et de la construction. De plus en plus mis à l'épreuve, le matériau composite commence à montrer ses limites et ses capacités maximales, car une singularité propre au matériau composite laminaire fait défaut, cette imperfection est au niveau des interfaces, en effet, le passage brutal d'un matériau à l'autre, autrement dit le changement brutal des propriétés physiques d'un milieu à un autre, engendre une forte concentration des contraintes au niveau des

interfaces, causant le décollement des matériaux entre eux, soit le déclenchement du mécanisme d'instabilité et/ou de rupture.

Afin d'empêcher l'apparition de tels faits, une idée encore plus révolutionnaire est celle des matériaux à gradient de propriété, considérée comme une nouvelle génération de matériaux composites, dans lesquels les propriétés varient graduellement et continuellement. Le premier prototype de ce nouveau concept est apparu en 1984 dans le laboratoire aérospatial de Sandai au Japon, ainsi un champ de recherche fructueux pour un matériau très prometteur s'est ouvert aux chercheurs, au point qu'en espace de quelques années, les pièces en matériaux à gradient de propriété sortaient des usines.

Initialement prévu comme bouclier thermique pour les navettes spatiales, les chercheurs et les concepteurs se sont intéressés à une combinaison de deux matériaux le métal et la céramique, l'un pour sa grande résistance à l'usure et à l'oxydation, et l'autre pour sa résistance thermique.

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux plaques en gradient de propriété, ces éléments structuraux, largement utilisés qu'on trouve dans les réacteurs à fusion, les parois des navettes spatiales, les panneaux solaires, les panneaux photovoltaïques...etc., de par leurs légèretés ils garantissent un bon rendement mécanique et thermique. Les travaux de recherche menés jusqu'à ce jour partent d'une pratique très répandue dans le dimensionnement de n'importe quelle section, qu'elle soit constituée de deux matériaux ou plus, il est coutumier de considérer la surface médiane comme surface neutre, or réellement ce n'est pas le cas, autrement dit, la résultante des contraintes est supposée axiale, ce qui engendre théoriquement un moment fléchissant additionnel, ce moment est le produit de la résultante des contraintes avec le bras de levier qui n'est autre que la distance entre les deux surfaces.

Dans le souci de modéliser aux mieux notre plaque, nous avons proposé une nouvelle théorie d'ordre élevé à quatre variables seulement, avec une fonction de cisaillement transverse de forme hyperbolique et cela en injectant la position exacte de la surface neutre, la plaque est soumise indépendamment à deux types de chargement, le chargement dynamique et bien évidemment statique et le chargement thermique et afin de tirer un maximum d'informations, nous avons

utilisé deux gradients, l'un défini par la fonction constitutive de Mori-Tanaka et l'autre par la loi de puissance, comme nous avons utilisé cinq fonctions de cisaillement transverse. Afin d'aboutir aux objectifs visés, nous avons structuré cette thèse en cinq chapitres.

Le premier chapitre, nous l'avant consacré à cette nouvelle génération de matériau composite, dit à gradient de propriété, après un bref passage sur les matériaux composites laminaires où nous avons mis l'accent sur leurs défaut majeur, nous avons exposé cette idée révolutionnaire qui a permis tout d'abord de surpasser cet handicap, qui a ouvert un nouveau champ de recherche aux chercheurs et qui a brisé les limites des matériaux conventionnelles, et afin de se situer, nous avons exposé dans un ordre chronologique l'historique de l'évolution de ce nouveau concept, puis dans le souci d'enrichir cette recherche bibliographique on s'est intéressé aux procédés de fabrication et d'usinage des pièces en gradient de propriété, une présentation simple et explicite appuyée par des schémas et des photos, après cela , nous avons exposé les lois régissant la variation des propriétés matérielles, différents modèles ont été présentés.

Le deuxième chapitre, nous l'avons consacré aux plaques d'ordre général et les plaques en gradient de propriété en particulier, nous avons tout d'abord exposé dans un ordre chronologique l'historique de l'évolution de la théorie des plaques, puis on a passé en revue les trois principales théories celle de Love-kirchhoff ou bien la théorie classique des plaques, celle de Mindlin appelée la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, et la plus représentative celle d'ordre élevé où l'effet de cisaillement transverse est repris plus fidèlement. Une attention particulière a été accordée aux fonctions de cisaillement et celles dites raffinées, car l'étude paramétrique fait référence à cinq d'entre elles. Pour les besoins des développements analytiques des plaques prenant appuis sur le sol, il a été judicieux de s'étaler sur les fondations élastiques et leurs interactions avec le sol.

Le troisième chapitre nous l'avons consacré au développement théorique du calcul statique et dynamique de la réponse des plaques en gradient de propriété, un gradient défini par la formule de Mori-Tanaka et en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé, avec une fonction de cisaillement de forme hyperbolique. La plaque est soumise à une charge verticale de distribution sinusoïdale exprimée en double série de Fourier. En partant du principe d'Hamilton le principe de conservation de l'énergie nous avons déterminé toutes les réponses à savoir les déformations, les

déplacements, les contraintes et les vibrations libres. Ce développement s'est fait en injectant la position exacte de la surface neutre.

Le quatrième chapitre nous l'avons consacré au développement théorique du calcul thermique des plaques en gradient de propriété, un gradient défini par la formule de loi de puissance et en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé, avec une fonction de cisaillement de forme hyperbolique. La plaque est soumise à divers cas de charges thermiques uniforme, linéaire et non linéaire, prenant ou pas appui sur fondation élastique. En partant du principe des travaux virtuels nous avons déterminé la température critique, la température au-delà de laquelle la plaque atteint un état d'instabilité dit le flambement. Ce développement s'est fait en injectant la position exacte de la surface neutre.

Le Cinquième chapitre nous l'avons consacré bien évidemment à l'étude paramétrique, après validation de divers résultats obtenus avec les travaux d'autres auteurs, on s'est lancé dans une étude comparative des réponses, avec et sans prise de la position exacte de la surface neutre, d'une plaque en gradient de propriété défini par la formule de Mori-Tanaka pour le cas dynamique et par la loi de puissance pour le cas thermique. Pour les deux cas nous avons utilisé la théorie classique des plaques et la théorie d'ordre élevé proposée avec cinq fonctions de cisaillement.

En fin, une conclusion générale sur les résultats et les commentaires tirés de ce travail est présentée, suivie de perspectives pour des travaux futures.

**Chapitre I**  
**Généralités sur les matériaux**  
**à gradient de propriétés**

## **I.1. Introduction:**

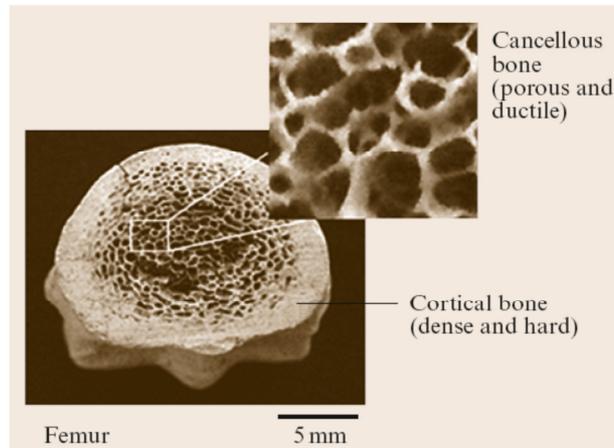
L'avènement du matériau composite comme substituant au matériau conventionnel est l'une des solutions les plus prodigieuses, en effet, un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants non miscibles et dont les propriétés se complètent. Le nouveau matériau ainsi obtenu, possède des qualités mécaniques supérieures à celles des composants pris seuls. Offrant des perspectives d'utilisation forte prometteuses, l'étude et la conception des matériaux composites ont suscité depuis près d'un siècle un grand intérêt dans des domaines multiples et variés [SYLVAIN HALLYNCK 2005].

Le matériau stratifié ou laminaire est l'un des composites les plus couramment utilisés, soit comme des éléments structuraux dans diverses structures d'ingénierie spatiale, civile, mécanique,...etc., ou comme renfort pour des structures existantes nécessitant une modernisation, une réhabilitation ou juste une réparation. Dans ce type de composite l'agent de liaison est le principal composant, qu'il assure la liaison entre différentes couches de matériaux ou bien entre la matrice et le renfort, c'est lui qui maintient l'intégrité de la pièce. En raison d'une interface distincte entre les matériaux, les propriétés matérielles à travers les interfaces subissent un changement soudain, engendrant un saut d'effort provoquant le décollement ou la rupture de l'interface [AIT ATMANE H et al. 2011], parfois avant même d'atteindre les déformations ou les contraintes calculées l'élément ou bien la structure tend vers l'instabilité, c'est la raison pour laquelle une idée encore plus révolutionnaire a germé.

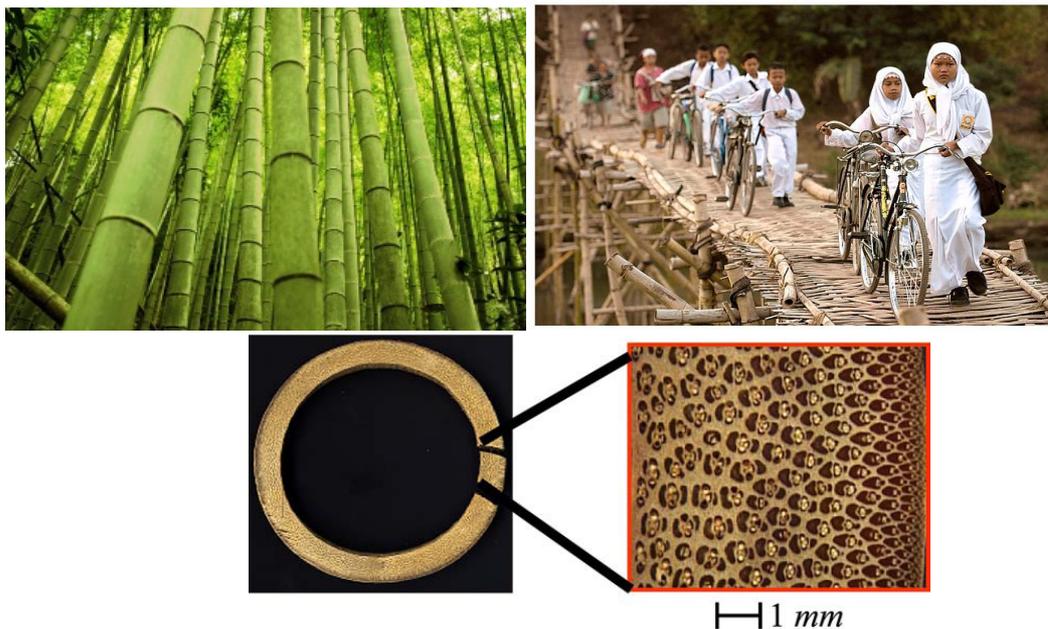
Le matériau à gradient de propriété (Functionally Graded Materials - FGM) est une nouvelle génération de matériau composite, qui se caractérise par une variation graduelle et continue des propriétés physiques, et cela afin d'atténuer la singularité majeure des matériaux composites laminaires, soit le passage direct d'un matériau à l'autre, ce changement brutale des propriétés physique d'un milieu à un autre engendre une forte concentration des contraintes au niveau des interfaces, causant ainsi le décollement des matériaux entre eux, soit le déclenchement du mécanisme d'instabilité et/ou de rupture. Le gradient est généralement créé en variant la composition chimique, l'ordre des atomes [ASTRID ROTA 2006], la microstructure des composants [HOSSEIN ABDIZADEH 1997] ou la porosité [CECILE BARON 2009].

Même si l'idée paraît assez originale et relativement récente, les exemples ne manquent pas dans la nature, les milieux vivants tels les os, les dents, les coquillages, les ailes de certains insectes, le bambou et bien d'autres, possèdent des microstructures à gradient de propriétés [CECILE BARON 2009], c'est cette particularité qui rend les os à la fois légers,

souples et solides et donne à chaque dent une anatomie unique (celle qui sectionne, qui mâche, qui broie et qui déchiquette les aliments) et qui permet d'utiliser le bambou comme matériau de construction, pour la fabrication des meubles ou des cannes à pêche.



**Figure I.01 :** Coupe d'un fémur [CECILE BARON 2009]

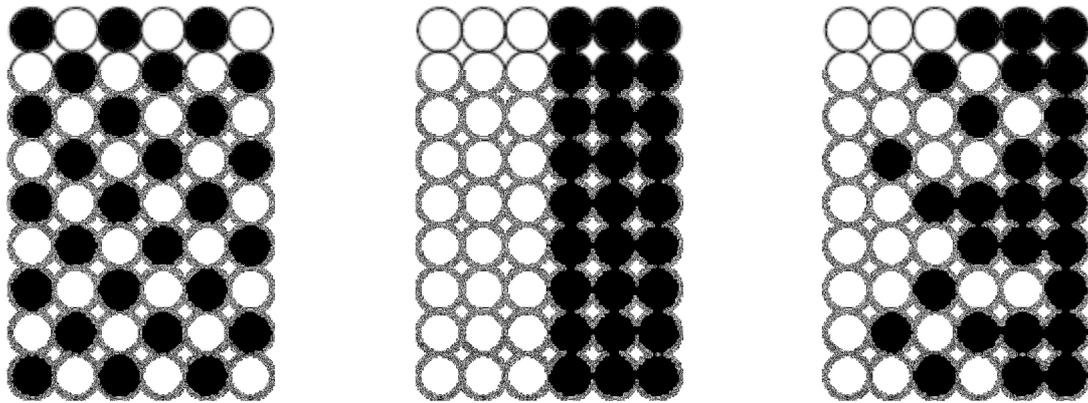


**Figure I.02 :** La microstructure d'un bambou [CECILE BARON 2009]

## I.2. Concept des matériaux à gradient de propriété:

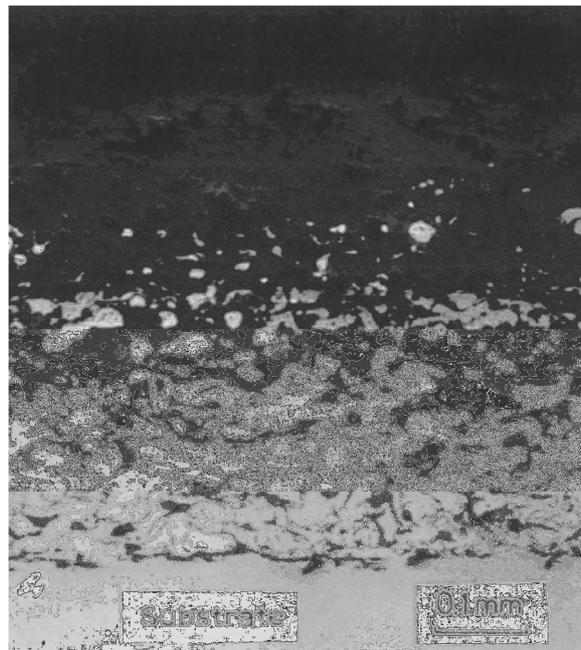
Le matériau à gradient de propriété peut être fabriqué en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs matériaux, ou en variant la microstructure d'un composant, de telles sortes, que le nouveau matériau possèdera les propriétés voulues suivant la direction désirée. C'est

donc un composite, un hétérogène à caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique [HOSSEIN ABDIZADEH 1997] et homogènes à l'échelle microscopique.



A – Matériau composite      B – Matériau composite laminaire      C – Matériau à gradient de propriété

**Figure I.03:** La distribution composante des matériaux ] [R.BACHIR BOUIADJRA 2015]



**Figure I.04:** Matériau à gradient de propriété le MgO-ZrO<sub>2</sub> [ELISA CANTERGIANI 2012]

Initialement conçus comme des boucliers thermiques pour les navettes spatiales et les réacteurs à fusion, les chercheurs et les concepteurs se sont intéressés à une combinaison de deux matériaux le métal et la céramique, l'un pour sa grande résistance à l'usure et à l'oxydation du côté basse température, et l'autre pour sa résistance thermique du côté haute températures.

L'association de ces deux matériaux permet d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces, contre les agressions extérieures, en effet, la performance de la

céramique à température élevée est plus attractive que celle des métaux, ainsi différentes qualités sont requises simultanément [BENOIT WATREMETZ 2006].

Le tableau I.01 regroupe les propriétés de chaque composant [HOSSEIN ABDIZADEH 1997, HASSEN AIT ATMANE et al. 2013, BESSAIM AICHA 2014]:

	<b>Position</b>	<b>Propriétés</b>
<b>Céramique</b>	Côté haute Température	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faible réactivité chimique, bonne tenue aux corrosions</li> <li>• Haute température de fusion ou de décomposition</li> <li>• Haute dureté</li> <li>• Hauts modules d'élasticité</li> <li>• Charge à la rupture élevée</li> <li>• Coefficient de frottement bas et bonne résistance à l'usure et l'oxydation</li> <li>• Fragiles, très vulnérables aux défauts de petite taille et de caractéristiques dispersées</li> </ul>
<b>Céramique / Métal</b>	Épaisseur intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Réduit les contraintes résiduelles</li> <li>• Pas de problème d'interface.</li> </ul>
<b>Métal</b>	Côté basse Température	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance mécanique.</li> <li>• Conductivité thermique élevée</li> <li>• Très bonne ténacité</li> <li>• Bonne résistance à l'usure et l'oxydation</li> </ul>

**Le Tableau I.01:** Les propriétés du métal et de la céramique

### **I.3. Historique de développement des matériaux à gradient de propriété**

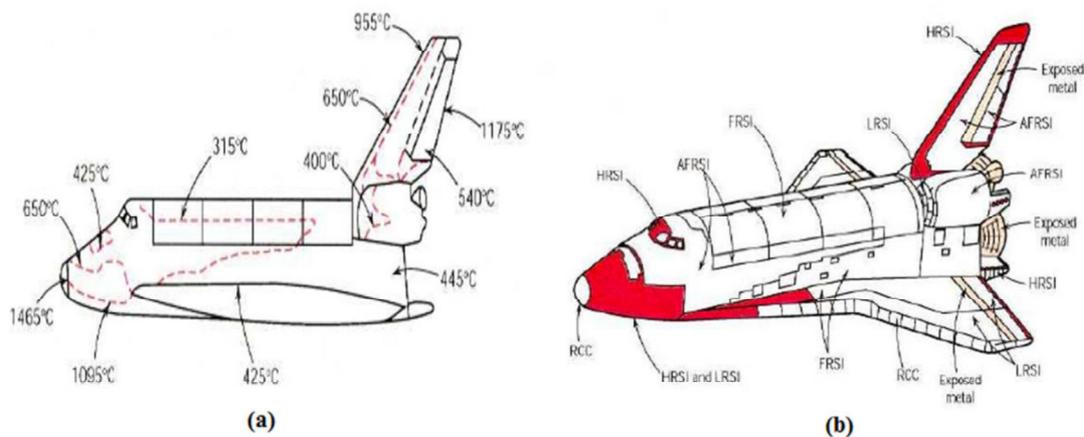
Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquants l'évolution du concept du matériau à gradient de propriété.

La notion du gradient est apparue tout d'abord dans les verres à gradient d'indice, des verres exploitant la propriété de la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable (réfraction et réflexion). Imaginé tout d'abord par James Clerk Maxwell en 1854, la technologie de fabrication de verre et de lentille est arrivée en 1970 à développer et à usiner des verres à gradient d'indice. Ces derniers sont principalement utilisés dans le domaine de la télécommunication avec l'avènement de la fibre optique et dans l'imagerie avec les lentilles usinées dans un matériau à gradient [ASTRID ROTA 2006].

Dans la littérature, la notion de matériau à gradient de propriété a été citée comme pour la première fois, en 1972, par les chercheurs Bever et Duwez puis Shen et Bever [B. KIEBACK et al. 2003] de l'Institut de Technologie de Massachusetts de Boston dans des revues scientifiques de métallurgie, bien que, ces travaux préliminaires avaient été financés par l'agence Américaine de recherche avancée, il n'y avait pas eu un suivi immédiat. Et ce n'est que dix ans après, qu'un certain nombre de conférences a été donné à l'Université Technique

du Michigan à Houghton sur " les Alliages métallique à Gradient " [ASTRID ROTA 2006, B. ILSCHNER 1993].

En même temps, un programme national pour le développement des navettes spatiales supersoniques a été lancé au Japon, la conception des parois des navettes comme bouclier thermique est devenue l'un des objectifs le plus ambitieux pour un très grand nombre de chercheurs, et c'est au laboratoire national d'aérospatial de Sendai, en 1984, qu'un groupe de chercheur dirigé par M. Niino, que ce nouveau concept de matériaux, dit à gradient de propriété a vu le jour. Ainsi, en 1985 le premier brevet a été déposé [HOSSEIN ABDIZADEH 1997, ASTRID ROTA 2006, B. ILSCHNER 1993].



**Figure I.05:** Système de protection thermique dans la navette spatiale  
**A-** La variation de température lors de la rentrée dans l'atmosphère terrestre  
**B -** Emplacement des différents matériaux [MINE USLU UYSAL 2013]

Parallèlement à cela, certains laboratoires se sont intéressés à ce nouveau concept, tel qu'en Suisse 1985 en Allemagne 1986, ainsi que en France, en Belgique et en Finlande. [ASTRID ROTA 2006, B. ILSCHNER 1993].

Le gouvernement Japonais a été le premier à présager l'intérêt qu'il portera à long terme, au point qu'un vaste projet a été lancé, en 1987, intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à Gradient de propriété et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". Entre 1987 et 1989, les chercheurs japonais avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales de 1 à 10 mm d'épaisseur et de 30 mm de diamètre, pouvant résister à des températures maximales de 1727 C° (température de surface) et à un gradient de température de 727 C° [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

Les premières conférences ont été données au Japon, puis ça a été suivi un peu partout dans le monde, ce nouveau concept est si intéressant, que les résultats des travaux de recherches ont été présentés dans les 50 des 70 communications données au "Premier Symposium international sur les MGF" organisé à Sendai, en 1990 [B. ILSCHNER 1993]. Entre 1990 et 1991, les chercheurs japonais tentés de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées auparavant [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

En Octobre 1992, "le deuxième Symposium International sur les MGF" a été organisé, à San Francisco, il a été marqué par une meilleure compréhension et une meilleure maîtrise de ce nouveau concept. Les travaux présentés dans le Symposium ont été publiés dans l'été 1993 dans le journal société Américaine de la céramique [B. ILSCHNER 1993].

Il convient de noter aussi que, même dans le colloque "EUROMAT 93" sur les matériaux avancés et leurs procédés, organisé à Paris en juin 1993, certaines contributions se sont expressément portées sur les matériaux à gradient de propriété [B. ILSCHNER 1993]. Dans la même année, le Japon a lancé son deuxième programme national de recherches [ASTRID ROTA 2006]. Puis en 1994, "le troisième Symposium International sur les MGF a été organisé", à Lausanne (Suisse). En 1995, l'association allemande de recherche DFG a lancé un programme de recherche. En 1996, 67 projets de recherche physico- chimique sur les FGM été en cours au Japon. Ainsi en 1997, une centaine de laboratoires partout dans le monde travaillés sur les Matériaux à Gradient de propriété [ASTRID ROTA 2006].

#### **I.4. Domaine d'application des matériaux à gradient de propriété :**

Possédant un potentiel incontesté, son champ d'application a conquis plusieurs secteurs d'industries [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009, BESSAIM AICHA 2014], à savoir :

**L'aérospatial:** Composants des réacteurs pour fusée et fuselage des avions spatiales

**Ingénierie:** Outils de coupe, composants de moteur thermique et revêtements des réacteurs de fusion.

**L'énergie nucléaire:** Composants des réacteurs nucléaires et pastilles de combustible.

**Conversion d'énergie:** Générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible, les turbines à gaz, les plaques solaires et les plaques photovoltaïques.

**Optiques:** Fibres optiques et lentilles.

**Matières biologiques:** Implants, peau artificielle et les prothèses.

**Chimique:** Les tubes d'échangeurs de chaleur et récipient de réaction.

**Électronique:** Semi-conducteur à bande graduée.

**Produits:** Matériaux de constructions, l'habitacle des voitures et verres de fenêtre

## I.5. Les procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriété :

L'élaboration des matériaux à gradient de propriété est l'une des branches de la science métallurgique, qui n'a cessé de se développer et de se varier, au point qu'actuellement, les procédures sont maîtrisées à l'échelle industrielle. Il ressort de notre étude bibliographique les procédures suivantes:

### I.5.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

#### I.5.1.1. Principe de la méthode :

Le coulage en bande est devenu une technique largement utilisée pour la fabrication des feuilles métalliques ou céramiques, de forme plane [HUSSEIN HAMDAN 2007, THIBAUT REYNIER 2012], elle consiste à couler une barbotine constituée de poudres fines en suspension (aqueuse ou non-aqueuse) dans un milieu comprenant des solvants, des agents de dispersion, des liants et des plastifiants, sur un support lisse et plan, en couches minces et régulières.

L'épaisseur de ces couches est fonction de la hauteur de la lame du sabot, qui fait un mouvement de translation par rapport au support (Doctor blade). Les fines couches obtenues ont des épaisseurs de l'ordre de 25 à 1000  $\mu\text{m}$ . Généralement dans ce procédé on opère par des couches de 200  $\mu\text{m}$ . [ASTRID ROTA 2006]

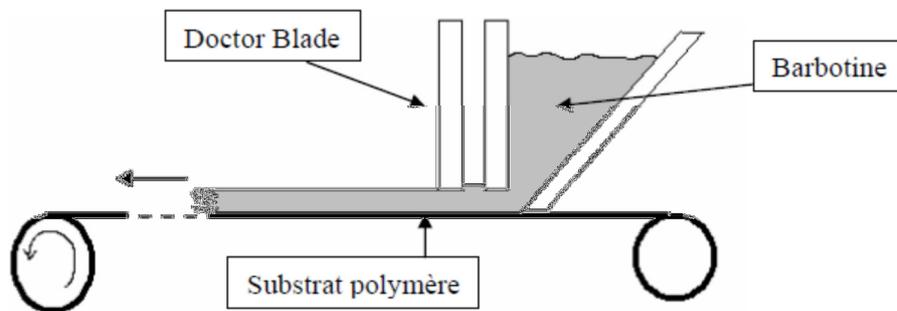


Figure I.06: Coulage par bande [HUSSEIN HAMDAN 2007]

Après un procédé de séchage et d'évaporation du solvant, les fines couches sont soumises à un cycle de frittage afin de brûler le liant, une fois raffermies, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés [HOSSEIN ABDIZADEH 1997, HUSSEIN HAMDAN 2007].

#### I.5.1.2. Les constituants de la barbotine:

##### I.5.1.2.1 La poudre :

La poudre est définie comme un ensemble de particules habituellement plus petites qu'un  $\mu\text{m}$ . Dans ce processus de fabrication, la poudre est l'ingrédient le plus important, c'est elle

qui définit les propriétés finales de la pièce produite. Ainsi la taille, la distribution granulométrique, la forme, l'empilement des particules, la surface spécifique et la densité de la poudre sont des facteurs influençant le comportement rhéologique de la barbotine. Les autres ingrédients, tels que le solvant, le dispersant, le liant et le plastifiant, sont là simplement pour faciliter la mise en œuvre [HUSSEIN HAMDAN 2007, THIBAUT REYNIER 2012].

#### **I.5.1.2.2 Le solvant :**

Les rôles du solvant sont multiples, il dissout le liant et les additifs pour obtenir un liquide homogène, il assure la mouillabilité et ajuste la viscosité de la pâte. Par contre, il doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique.

Le choix du solvant sera déterminé par son coût (en général élevé), ainsi que par sa toxicité, son inflammabilité et son effet nocif sur l'homme et l'environnement [HOSSEIN ABDIZADEH 1997, HUSSEIN HAMDAN 2007].

#### **I.5.1.2.3 Le dispersant :**

Le dispersant est un élément incontournable de la barbotine, en général c'est une molécule avec une chaîne carbonée assez longue (10 à 20 atomes C) et qui contient au moins un site présentant une affinité avec le solvant et un site présentant une affinité avec la particule. En améliorant la dispersion, il permet d'augmenter la proportion de poudre dans la barbotine tout en préservant une viscosité compatible avec les impératifs du coulage. [SYLVAIN HALLYNCK 2005].

#### **I.5.1.2.4 Le Liant:**

Le liant est incontestablement l'ingrédient le plus important de la barbotine, il confère à la bande crue sa résistance mécanique. Le liant forme, après évaporation du solvant, un réseau polymère qui fixe les particules de céramique par adsorption. On peut considérer la bande crue comme une matrice de polymère fortement chargée en particules de céramique [THIBAUT REYNIER 2012].

#### **I.5.1.2.5 Le plastifiant:**

On ajoute généralement un plastifiant au liant, ce dernier permet de rendre la bande crue plus flexible et plus facile à manipuler. En revanche, l'ajout de plastifiant fait chuter la résistance mécanique de la bande. Il s'agit de polymères également mais présentant des masses molaires plus faibles [THIBAUT REYNIER 2012].

#### **I.5.1.3 déliantage:**

L'opération de déliantage permet d'éliminer toute présence de liant et de plastifiant [HOSSEIN ABDIZADEH 1997], sans pour autant induire de contraintes supplémentaires à la

pièce, Le cycle de déliantage se fait dans des fours à chauffage direct au gaz ou électrique. Les paramètres du déliantage dépendent non seulement de la nature du liant mais aussi du type de ou des matériaux utilisés (poudres céramiques ou métalliques). Cette étape est souvent très consommatrice d'énergie et de temps (la cinétique d'élimination des composés organiques est longue). De plus elle est particulièrement délicate car elle peut générer de nombreux défauts : fissures, éclatements et boursoufflure [HUSSEIN HAMDAN 2007].

#### **I.5.1.4 Frittage:**

Le frittage est défini comme un procédé thermique qui accroît la densité de la pièce, soit sa résistance, par soudage de particules adjacentes, autrement dit l'élimination des interfaces solide-vapeur sous température proche de celle de fusion, qui s'accompagne par la réduction des pores et conduit à la formation d'interfaces solide-solide [HUSSEIN HAMDAN 2007].

### **I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)**

#### **I.5.2.1. Principe de la méthode:**

Le coulage séquentiel en barbotine est une procédure traditionnellement utilisée dans l'industrie de la céramique, principalement pour des pièces de formes complexes, le produit fini est obtenu par coulage d'une barbotine directement dans des moules en plâtre ou en polymère de forme voulue, le raffermissement de la barbotine se fait par élimination de la solution à travers les pores du moule, par l'application d'une pression (coulage sous pression) et/ou par les forces de capillarité (coulage classique), ces dernières entraînent la poudre vers les parois du moule, laissant ainsi son empreinte sur la pièce, la barbotine non durcie (celle qui n'est pas en contact avec les parois) est bien évidemment retirée. Après démoulage, la pièce suivra un processus de séchage et de cuisson [ASTRID ROTA 2006, HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

Le gradient est obtenu par un changement de la composition ou par la variation continue des dimensions des grains de la poudre dans la barbotine pendant le processus [ASTRID ROTA 2006, B. KIEBACK et al. 2003].

#### **I.5.2.2. Le choix des constituants:**

Neubrand et al. ont décrit le processus de coulage de gradient céramique/céramique par une variation continue de la composition dans la direction de l'épaisseur, ce procédé est utilisé pour des FGM de type zirconia/alumina et alumina/aluminium.

Tomsia et al. ont examiné le système céramique/métal soit le Mullite( $3\text{Al}_2\text{O}_3, 2\text{SiO}_2$ )/Mo (molybdène) en utilisant deux solutions l'eau et l'alcool. La première expérience avec une barbotine à base d'eau, a conduit à des dépôts répartis de manière homogène, soit aucune

formation de gradient. Dans la deuxième expérience avec une barbotine à base d'alcool, les particules de Mullite et de Mo se déposées à des vitesses différentes en raison de leurs densités différentes ( $10.2 \text{ g/cm}^3$  pour Mo et  $3.16 \text{ g/cm}^3$  pour le mullite), ce qui s'est traduit par la formation d'un gradient continu en teneur de Mo de bas en haut.

Tomsia a aussi examiné le système  $\text{SiO}_2/\text{Mo}$ , dans ce système la barbotine est à base d'eau, par l'application d'une pression pendant le coulage, il a peut obtenir un gradient par sédimentation.

Ces expériences ont démontré que le choix des matériaux de base et de la solution (le milieu liquide) dans le processus de coulage séquentiel, est déterminant pour l'obtention ou pas d'un matériau en gradient de propriété [ASTRID ROTA 2006].

### **I.5.3. Compaction Sèche des Poudres (Dry powder processing)**

#### **I.5.3.1. Principe du procédé de fabrication:**

La compaction sèche des poudres est une technique de base utilisée pour la confection des pièces complexes et généralement denses, elle consiste à empiler successivement, dans un moule en acier, des couches de poudres, dont la composition a été préalablement choisie pour créer un gradient dans la pièce, sur chaque couche versée une faible compression est exercée, ces couches dont l'épaisseur est généralement supérieure à 0.2 mm [ASTRID ROTA 2006] sont soumises à un procédé de densification par compaction et déliantage [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

Les progrès de la technologie d'automatisation au cours de ces dernières décennies ont rendu les processus de compaction des poudres technologiquement et économiquement viable [B. KIEBACK et al. 2003]. Dillmeier et al. ont mis au point un procédé dans lequel un distributeur dépose de façon continue et synchronisée différents mélanges de poudres sur un tapis roulant, ainsi la portion d'un composant (matériau) peut varier de 0 à 100%.

Le gradient dans la pièce est ainsi obtenu en changeant d'une couche à l'autre, les propriétés physiques telle la dimension des grains de poudre, ou la composition chimique soit l'emploi de deux ou plusieurs matériaux (métal-métal, métal-céramique et céramique-céramique).

Outre la composition chimique et les propriétés physiques, le gradient peut être obtenu par la formation graduelle de pores entre les grains, et cela, soit par une présélection des dimensions et des formes des poudres, favorisant leur formation, soit par l'emploi d'une portion de poudre qui disparaît lors du procédé de frittage et laissant apparaître des pores [ASTRID ROTA 2006].

### **I.5.3.2. Le procédé de fabrication :**

L'élaboration de matériau à gradient de propriété par la technique de la compaction sèche des poudres se fait en trois étapes:

#### **I.5.3.2.1 Le choix et le traitement des poudres:**

Afin de produire des pièces de formes homogènes, denses et sans défauts, le recours aux grains fins est inévitable, de plus les propriétés mécaniques de la pièce finale sont meilleures (résistance, dureté...) que ceux d'une pièce confectionnée avec des grains grossiers, toutefois la manipulation des grains grossiers est moins contraignante. Dans ce qui suit nous allons citer certains avantages et inconvénients de chaque type de granule [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

#### **Une poudre fine a les particularités suivantes:**

##### **Avantage**

- Pièce finale dense, compacte et sans irrégularité.
- L'absence d'agrégats dans la poudre fine facilite largement le frittage.

##### **Inconvénient**

- Telle la poussière elle est inhalée par respiration (de ce fait le port de masque est inévitable) et elle s'introduit facilement entre les éléments mécaniques utilisés pour la fabrication.

- Leur fluidité est particulièrement mauvaise à cause des forces d'adhésion entre les particules, qui augmentent lorsque leur taille diminue, et peuvent ainsi devenir supérieures à la force de pesanteur.

- Le remplissage d'un moule a une reproductibilité médiocre.

#### **Une poudre grossière a les particularités suivantes:**

##### **Avantage**

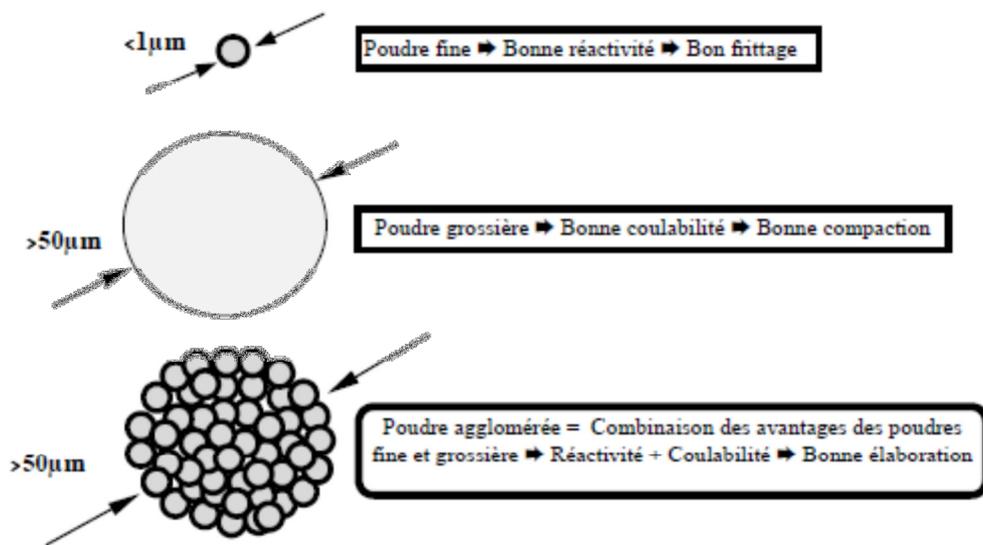
- une bonne fluidité.

##### **Inconvénient**

- Des défauts de compaction qui sont dus soit à des irrégularités entre granules, soit par une destruction incomplète des granules lors de la compaction et qui ne peuvent être éliminés lors du procédé du frittage.

- La présence des agrégats est responsable du ralentissement du frittage.

Dans la technique de la compaction sèche des poudres, le choix de la poudre qu'elle soit fine ou grosse est indispensable, la seule possibilité permettant de profiter des avantages de l'un et de surpasser les inconvénients de l'autre est l'emploi de poudre agglomérée. Tel présenté sur la figure I.07.



**Figure I.07:** L'intérêt des poudres agglomérées [HOSSEIN ABDIZADEH 1997]

### I.5.3.2.2 Mise en Forme :

La compaction est un procédé de mise en forme de poudre ou de matériau granulé enfermé dans un moule rigide ou souple. Largement utilisé en raison de sa reproductibilité et de son aptitude à produire des pièces de grande et de différentes formes, de plus sans retrait au séchage.

Les granules contiennent des liants et des plastifiants qui sont généralement préparés par la technique de "spray drying".

La compaction sèche se fait en trois étapes:

- (1) Remplissage de la matrice;
- (2) Compaction et mise en forme;
- (3) Ejection de la pièce.

La compaction se fait par un mouvement des poinçons, la tolérance entre le poinçon et la matrice pour les poudres fines est de l'ordre de 10-25  $\mu\text{m}$  et pour des poudres granulés plus de 100  $\mu\text{m}$ . La pression maximale utilisée à la compaction sèche est généralement entre 20 et 100 Mpa [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

### **I.5.3.2.3 Densification :**

Le déliantage de la pièce se fait par un procédé de frittage, où la température et la durée du traitement ont un impact direct sur la formation de la microstructure [ASTRID ROTA 2006]. Les conditions de traitement doivent être choisies de sorte à préserver le gradient de toute modification, notamment lorsque y a présence de pores [SYLVAIN HALLYNCK 2005].

Le procédé de déliantage consiste à éliminer les ajouts organiques par un traitement thermique sous une température généralement avoisinant les 600 °C, la température du traitement est principalement liée à la forme, les dimensions de la pièce et le liant utilisé, une élimination rapide peut engendrer des fissures dans la pièce et une élimination lente peut l'emprisonner suite à la fermeture des pores [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

### **I.5.4. Dépôt par centrifugation (Centrifugal casting) :**

Il existe deux types de Dépôt par centrifugation, centrifugation horizontale et verticale [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009].

#### **I.5.4.1. Centrifugation par sédimentation (Centrifugal sedimentation)**

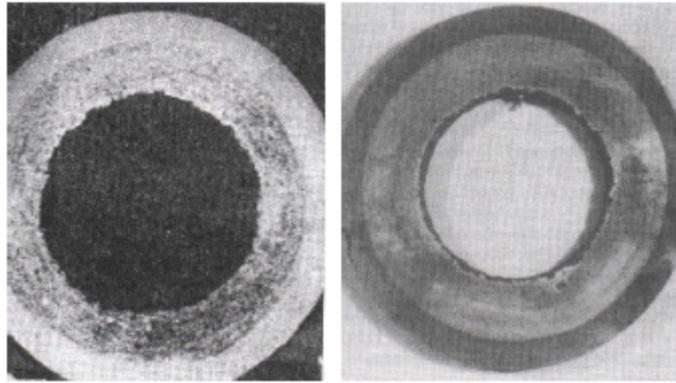
Appelé aussi centrifugation horizontale est un procédé permettant la formation de fines couches, d'épaisseur comprise entre 0,1 et 1 mm [B. KIEBACK et al. 2003], en soumettant une suspension colloïdale relativement diluée, dans des flacons cylindriques, à une force centrifugeuse [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009, HOSSEIN ABDIZADEH 1997]. Les forces de centrifugation engendrent un amincissement de la couche. L'avantage de cette technique est le dépôt d'une faible quantité de poudre sur de grands substrats et dans un temps réduit [ANTHONY GRUNENWALD 2011].

Afin d'obtenir un gradient dans la pièce finie le procédé est répété pour obtenir des multicouches [HOSSEIN ABDIZADEH 1997] en variant la vitesse angulaire, la durée de la centrifugation et la concentration de la poudre dans la suspension d'une couche à l'autre [FABIEN REMONDIERE 2006].

#### **I.5.4.2. Centrifugation verticale (Centrifugal powder forming)**

Un procédé de synthèse de matériaux à gradient de propriété type métal-métal par la soumission d'un mélange de poudres à une force de centrifugation, dans une chambre de fusion [ASTRID ROTA 2006], la poudre est projetée vers la paroi extérieure, ainsi deux zones distinctes de particules enrichies et appauvries sont formées, les particules plus denses sont projetées plus loin que ceux moins denses, ce qui formera progressivement un anneau de

concentration graduée [B. ILSCHNER 1993, B. KIEBACK et al. 2003, T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009]. L'épaisseur de la zone enrichie décroît lorsque la température de coulée et la vitesse de rotation augmentent [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009].



**Figure I.08:** Dépôt par processus de Centrifugation par sédimentation (Al-Graphite)  
[T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009]

#### **I.5.5. Dépôt par Électrophorèse (Electrophoretic deposition) :**

La technique de dépôt par électrophorèse s'appuie sur un phénomène observé par le scientifique russe Ruess en 1809, celui-ci remarqua la migration des particules d'argile en suspension sous l'effet d'un champ électrique. Cependant, il a fallu attendre 1933 pour qu'une application concrète de l'électrophorèse soit réalisée, ainsi le premier brevet a été déposé dans la même année par Harsanyi pour le recouvrement d'une cathode en platine par du tungstène et de la thorie ( $\text{ThO}_2$ ).

Quant à la première étude systématique du phénomène de dépôt électrophorétique date de 1940 et fut rapportée par Hamaker et Verwey.

Le principe de la technique de dépôt par électrophorèse se base sur la migration de particules chargées en suspension colloïdale stable, généré par l'application d'un champ électrique entre deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

La poudre en suspend est généralement composée de deux composants, céramique et métal, le gradient peut être obtenu soit en injectant dans la suspension, au fur et à mesure, un mélange de poudre avec des concentrations différentes, soit en injectant dans la suspension un

des composants à des portions différentes [B. KIEBACK et al. 2003]. La pièce finale aura la forme imposée par l'électrode.

Un des inconvénients majeur de cette technique concerne la vitesse de dépôt, très lente pour atteindre des épaisseurs intéressantes, c'est pourquoi les épaisseurs de couches obtenues par cette méthode dépassent rarement 1 micron, de plus d'une part la large gamme de paramètres spécifiques à fixer tels la tension d'électricité, la surface des électrodes, la distance entre les deux électrodes, la charge des particules et d'autre part le prix élevé du matériel utilisé rendent le recours à cette technique limité [ASTRID ROTA 2006].

#### **I.5.6. Projection Plasma (plasma spraying) :**

Le Procédé de projection thermique par plasma permet de recouvrir la surface d'un objet avec un revêtement métallique, céramique ou polymérique, ce procédé est largement utilisé pour la confection des pièces en matériaux à gradient de propriété, le plasma est un état de matière obtenue on soumettant un gaz à un arc électrique formé entre deux électrodes, les gaz plasmagènes les plus couramment utilisés pour la projection thermique par plasma sont l'argon, l'hydrogène, l'hélium et l'azote, l'argon et l'hélium sont recherchés pour leur viscosité tandis que l'hydrogène, l'hélium et l'azote sont recherchés pour leur conductivité, le matériau a projeté doit être sous forme de poudre fine, essentiellement polycristallin [ASTRID ROTA 2006, B. ILSCHNER 1993, ELISA CANTERGIANI 2012].

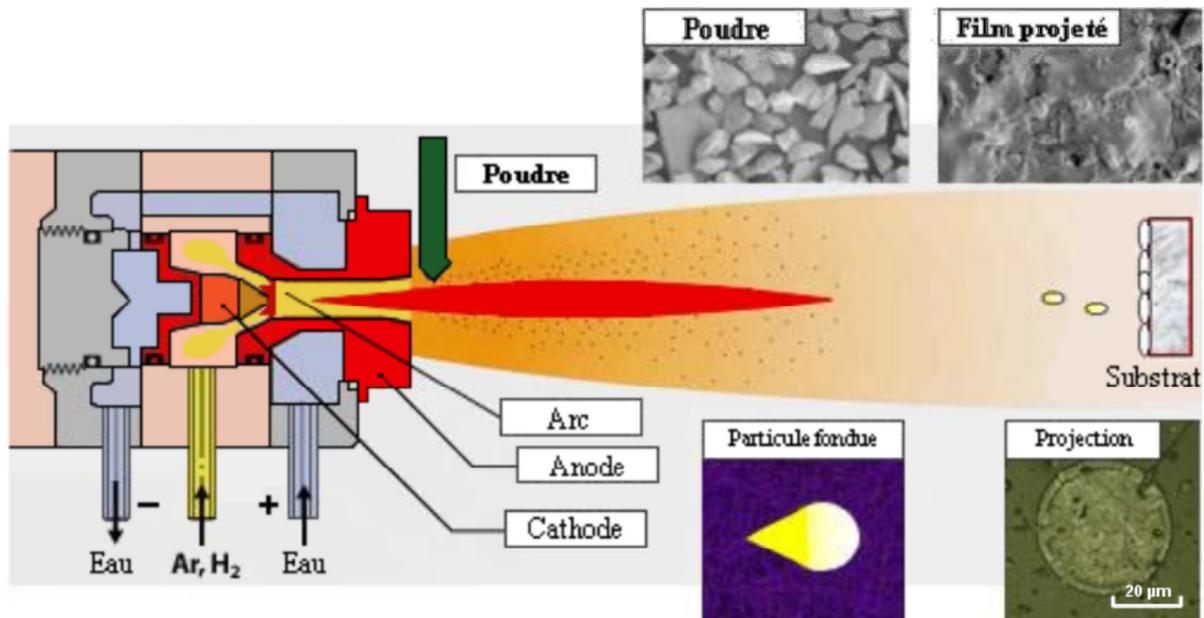
À l'aide d'une torche -appelée aussi un pistolet à gaz ou pistolet à plasma d'arc- la poudre est projetée vers le substrat à recouvrir à grande vitesse dépassant les 200 m/s [ASTRID ROTA 2006], le plasma dont la température peut atteindre 12 000 C°, fait fondre en vole les particules de poudres instantanément, totalement et /ou partiellement, au contact du substrat elles se solidifiées et forment un dépôt dense.

L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie complexe, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux (fusion simultanée) sont les avantages essentiels de cette technique.

D'autre part, parmi les inconvénients de ce procédé, l'optimisation des paramètres de traitement (comme la distance entre le pistolet et le substrat, le taux d'alimentation, la composition du gaz porteur) peuvent différer entre les deux composantes de la pièce en gradient de propriété [BENOIT WATREMETZ 2006].

Le dépôt est chimiquement homogène, cependant, le seul moyen d'obtenir un gradient est de varier la composition de la poudre, en passant du métal, au mélange métal céramique, en

variant graduellement leurs proportions, puis à la céramique, bien évidemment la manipulation est automatique et gérée par un programme informatisé [ASTRID ROTA 2006].



**Figure I.09:** Principe de la Projection Plasma [BENOIT WATREMETZ 2006]

### I.5.7. Implantation Ionique (Sputtering)

L'implantation ionique a vu ses premières applications industrielles au début des années 70, dans le domaine des semi-conducteurs et elle n'a cessé de se développer depuis lors. Ses premières applications industrielles, en tant que traitement de surface datent d'il y a plus de vingt ans [F. TORREGROSA 2004].

Le principe de l'implantation ionique consiste à accélérer des ions par des tensions de quelques kilovolts à quelques centaines de kilovolts et à les faire percuter sur les surfaces des substrats (plastiques, céramiques et métaux), produisant à la fois une modification chimique de la cible et éventuellement un changement dans sa structure cristalline. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [F. TORREGROSA 2004, HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

#### **Parmi les avantages de l'implantation ionique en tant que traitement de surface:**

L'implantation ionique est un traitement à basse température d'où elle ne provoque pas une déformation thermique au substrat.

- Il n'y a pas de variation dimensionnelle. On peut l'appliquer directement sur des pièces finies.

- L'implantation ionique permet d'implanter n'importe quelle espèce dans n'importe quel matériau. Elle permet de dépasser la solubilité limite et d'introduire des éléments non-miscibles dans le substrat.

- Ce n'est pas un dépôt, il n'y a donc pas de surépaisseur ni de risque de délamination.

- Enfin, l'implantation ionique est un procédé très simple, il n'y a que quelques paramètres, tous facilement reproductibles et contrôlables par un courant ou une tension.

**Parmi les inconvénients de l'implantation ionique en tant que traitement de surface :**

- Les surfaces à traiter doivent être externes ou en vue directe du faisceau.

- Les épaisseurs traitées sont faibles ( $<1\mu\text{m}$ ). (Mais les améliorations apportées par l'implantation sont souvent conservées sur des profondeurs supérieures à l'épaisseur traitée.)

**I.5.8. Dépôt physique et Dépôt Chimique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition and Chemical Vapor Deposition):**

Les dépôts physiques ou chimiques en phase vapeur consistent à exposer la surface d'un substrat à un matériau en phase vapeur. Ces techniques de dépôt peuvent être utilisées pour la confection des pièces en gradient de propriété de formes compliquées en contrôlant les taux et / ou la température des flux de gaz. Toutefois ces procédés sont restreints à un nombre réduit de matériaux [HOSSEIN ABDIZADEH 1997, B. ILSCHNER 1993].

**I.5.8.1. Dépôt physique en phase vapeur (P.V.D) :**

Le dépôt physique en phase vapeur est un procédé de revêtement de surface par des atomes ou des molécules d'un matériau à déposer, qui viennent s'adhérer sur le substrat à recouvrir, en passant par un milieu passif (vide ou atmosphère inerte) ou actif (plasma, gaz réactif). Le matériau à déposer tels les métaux, comme le titane, le chrome ou l'aluminium est évaporé par chauffage (effet Joule ou induction) ou par bombardement ionique (tel l'argon, ou néon), électronique ou photonique, faisceau laser ou arc électrique [BENOIT WATREMETZ 2006].

La technique d'évaporation sous vide consiste à chauffer le matériau à déposer sous une température (comprises entre 150 et 500 °C) à laquelle la pression de vapeur est suffisante pour son évaporation ou sublimation. La matière ainsi éjectée perpendiculairement à la cible vient se condenser sur le substrat placé à son voisinage pour former un revêtement.

La technique d'évaporation avec un gaz réactif, consiste à introduire simultanément un gaz réactif tel de l'azote ou un gaz contenant du carbone dans l'enceinte, où il forme avec la vapeur de métal un composé qui se déposera sur le substrat, sous la forme d'une couche mince très adhérente et d'une grande pureté.

Parmi les avantages de cette famille de procédure est la bonne reproductibilité du processus, ainsi que la formation de couches ayant une bonne adhérence et de faibles contraintes internes et cela à de basses températures. De ce fait, cette technologie est très appréciée pour réaliser des dépôts multicouches ou des revêtements à gradient de propriétés. Par contre, elle est coûteuse et lente [BENOIT WATREMETZ 2006].

#### **I.5.8.2. Dépôt Chimique en phase vapeur (C.V.D) :**

Dépôt Chimique en phase vapeur est un processus de déposition de films minces. Le substrat est exposé à un ou plusieurs précurseurs gazeux qui réagissent et/ou se décomposent sur le substrat pour former un film mince. Ces réactions sont activées dans la chambre de réaction soit par une énergie thermique (système classique) à pression atmosphérique ou basse pression, soit par l'apport d'énergie sous forme électromagnétique (source radiofréquence en général), micro-ondes ou de type Laser.

Parmi les avantages de cette technique est le coût de production bas, surtout lorsque l'épaisseur est relativement importante. Par contre, du fait de l'importance des températures de traitement (900 à 1100 °C), cela pourra entraîner une modification des propriétés et de la géométrie de la pièce revêtue [BENOIT WATREMETZ 2006].

#### **I.5.9.Frittage et infiltration (Sintering and infiltration) :**

Tel que son nom l'indique cette technique fait appel à deux procédés le frittage et l'infiltration:

Le frittage est défini comme un procédé thermique qui permis le soudage des particules adjacentes, autrement dit la formation d'interfaces solide-solide sous température proche de celle de fusion, pour la création d'un squelette avec un gradient de pores [HUSSEIN HAMDAN 2007]. Ce gradient de porosité est le résultat de formation des vides entre les particules, dont la présence est proportionnelle à la taille de ces dernières. La température de frittage est choisie de sorte à ce que les particules ne subissent pas de distorsions et le réseau formé par les pores ne soit obstrué [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009]. D'une part la pièce doit être suffisamment poreuse et d'autre part elle doit résister à la pression appliquée lors de l'infiltration [B. KIEBACK et al. 2003].

L'infiltration est un procédé de remplissage des pores avec un matériau, généralement du métal liquide, dont la température de fusion est plus basse que celle de matériau constituant la pièce, avec ou sans l'application de pression [B. KIEBACK et al. 2003].

Cette technique est bien adaptée pour des combinaisons de matériaux chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres, elle est particulièrement attractive pour des gradients de propriété de type métal / céramique et verre / céramique [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009].

#### **I.5.10.Frittage Laser Différentiel (Laser Sintering process) :**

Frittage laser ou ablation par laser est un processus qui exploite les possibilités d'interactions entre la matière et le rayonnement cohérents d'un laser, l'impact d'un faisceau laser sur un matériau à déposer s'explique à l'échelle quantique par le transfert de l'énergie des photons au matériau, ce dernier subira localement de multiples changements d'état appelé frittage différentiel tels la fusion, l'évaporation ou la création d'un plasma [FABIEN REMONDIERE 2006, HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

Le matériau désigné par la cible est vaporisé brutalement et éjecté sous une forme ionisée ou non, dans la direction de la surface du substrat.

Même si le principe paraît assez simple, physiquement le phénomène est assez complexe [ASTRID ROTA 2006], le choix du rayonnement laser (longueur d'onde, densité d'énergie, l'intensité de l'irradiation) ainsi que la distance entre la cible (matériau à déposer) et le substrat, la pression dans l'enceinte et la température du substrat au moment du dépôt détermineront les caractéristiques du film [T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009, FABIEN REMONDIERE 2006].

Yuki et al. ont utilisé cette technique pour élaborer d'un matériau à gradient de propriété PSZ/Mo [HOSSEIN ABDIZADEH 1997].

#### **I.5.11.Impression 3D :**

La fabrication additive ou l'impression 3D -telle est communément appelée depuis 1996- est en passe de s'imposer autant que nouveau moyen de création d'objets. Le progrès de l'informatique et de la robotique a fait apparaître la fabrication assistée par ordinateur, ce procédé consiste à fabriquer des pièces par une machine à commande numérique par ordinateur à partir d'un modèle virtuel développé sur ordinateur [ADNENE SAKLY 2013].

Il est coutumier de façonner des pièces en utilisant des procédés de soustraction de la matière, tel le fraisage ou le découpage, le processus d'impression en 3D est à l'inverse consiste à mettre en forme un objet par ajout de couches successives de matière.

L'impression 3D est un procédé assez récent dans le milieu de l'industrie. En 1984, Carl Deckard et Joe Beaman déposent le premier brevet pour une machine de stéréolithographie, ainsi en 1986 la première machine a vu le jour, cette machine a été Mise au point par 3D Systems [ADNENE SAKLY 2013, ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI 2014].

Dans les années 90, l'impression 3D été restreinte à la réalisation de moule, qui servaient principalement à la réalisation de pièces de fonderie. Dans les années 2000, l'impression 3D commence à être utilisée pour la réalisation des pièces pour la mécanique de précision dans le domaine de l'aéronautique, de l'automobile et de l'espace, ainsi que dans le domaine médical tel les organes fonctionnels, les implants et les prothèses en titane [ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI 2014].

#### **I.5.11.1. Différents procédés d'impression 3D :**

Il existe deux procédés d'impression 3D :

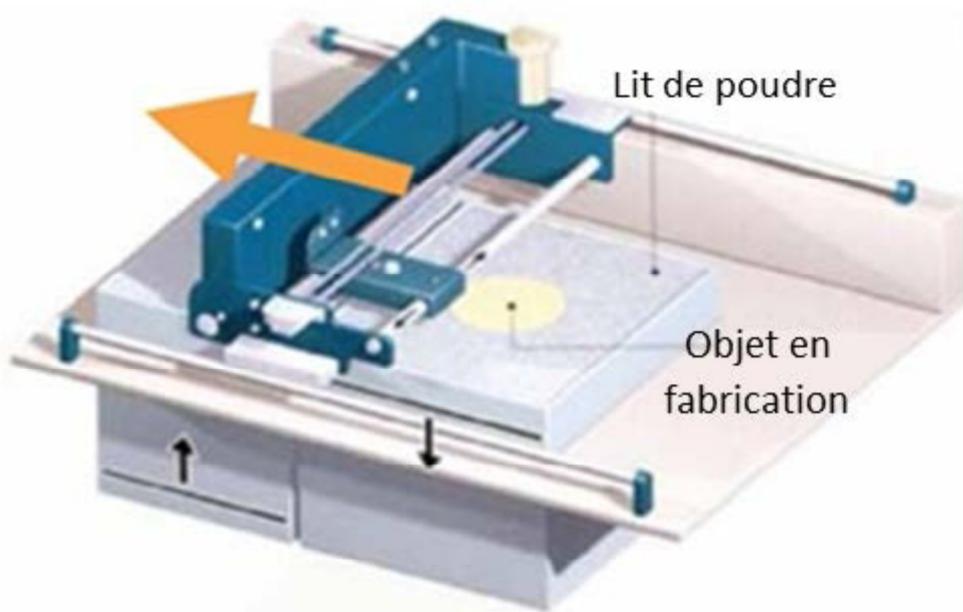
##### **I.5.11.1.1. Impression par dépôt sélectif**

Ce type regroupe toutes les techniques d'extrusion, telle que la FDM (fused deposition modeling), de jet et de spray. Il s'agit alors de déposer la quantité de matière dont on a besoin au bon endroit. Etant donné que ce procédé ne consiste pas à fabriquer un objet dans un volume de poudre ou de liquide uniforme, cette méthode permet de réaliser une impression multi-matière [ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI 2014].

##### **I.5.11.1.2. Impression par solidification sélective**

Ce type regroupe toutes les techniques de solidification par chauffage ou ajout d'un matériau liant, tel que le frittage laser (SLS) et la stéréolithographie (SLA), le laser est orienté vers le liquide ou la poudre qui remplit l'intégralité du bac, les ultra-violets solidifient les minces couche les unes après les autres, potentiellement plus précise elle permet d'étaler de couches de poudres allant de 50 à 200  $\mu\text{m}$ . L'avantage de cette technologie est qu'il y a très peu de déchet et que la poudre non fusionnée (libre non liée) peut être réutilisée par la suite. En revanche, cette méthode est peu adaptée aux objets de grandes dimensions [ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI 2014, ASTRID ROTA 2006].

L'évolution de l'impression 3D a permis la réalisation de pièces de tailles plus importantes et l'apparition d'impression multi-matière a ouvert l'horizon à la réalisation de pièces à base de matériaux à gradient de propriété où le gradient peut varier de 0 à 100%.



**Figure I.10:** Principe d'impression 3D [ADNENE SAKLY 2013]

### **I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :**

Plusieurs modèles d'analyse et de calcul ont été proposés, toutefois, le plus important est lequel de ces modèles est le plus approprié ou le plus représentatif du gradient des propriétés de la matière de la plaque choisie, voici ci-dessous quelques modèles:

#### **1. La fonction de loi de puissance (P-FGM) :**

La fraction volumique adimensionnelle de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance [KACI ABDELHAKIM 2012, BESSAIM AICHA 2014]:

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{I-01}$$

Où  $p$  est le paramètre matériel  $p \geq 0$  et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Ainsi la loi du mélange décrivant les propriétés matérielles de la plaque s'écrit comme suit:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c \quad \text{I-02}$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V_c \quad \text{I-03}$$

Avec :

$E_m$  et  $E_c$  les modules d'élasticité du métal et de la céramique respectivement.

$\rho_m$  et  $\rho_c$  les masses volumiques du métal et de la céramique respectivement.

Il est à noter que la variation des constituants céramique et métal est linéaire lorsque  $p = 1$ . En outre, pour une valeur de  $p = 0$  la plaque est entièrement en céramique [H. SEPIANI et al. 2009]. Et pour une valeur de  $p$  qui tend vers l'infini la plaque est entièrement en métal [H. Nguyen-Xuan et al. 2012].

**a) Structure sandwich avec faces externes en gradient de propriété et cœur homogène [RABIA BENFERHAT et al. 2014] :**

Pour les Structures sandwichs dont les faces extérieures sont en matériaux à gradient de propriété et dont le cœur est homogène. La fraction volumique est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$\begin{aligned} V^1 &= \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^p, & z \in [h_1 - h_2] \\ V^2 &= 1, & z \in [h_2 - h_3] \\ V^3 &= \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^p, & z \in [h_3 - h_4] \end{aligned} \quad \text{I-04}$$

Avec 1, 2 et 3 représentent la numérotation des épaisseurs composantes la plaque,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$  représentent les coordonnées des épaisseurs du bas vers le haut respectivement et  $p$  est le paramètre matériel  $p \geq 0$ .

**b) Structure sandwich avec cœur en gradient de propriété et les faces externes homogènes [RABIA BENFERHAT et al. 2014]:**

L'épaisseur de la plaque en gradient de propriété sert souvent comme une connexion entre deux matériaux homogènes [M. Seveik et al. 2009]. Pour les Structures sandwichs dont le cœur est en matériaux à gradient de propriété et dont les faces extérieures sont homogènes. La fraction volumique est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^1 = 0, \quad z \in [h_1 - h_2]$$

$$V^2 = \left( \frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^p, \quad z \in [h_2 - h_3] \quad \text{I-05}$$

$$V^3 = 1, \quad z \in [h_3 - h_4]$$

## 2. La fonction exponentielle (E-FGM) :

Très apprécié pour sa facile manipulation numérique. La loi du mélange décrivant les propriétés matérielles de la plaque sous fonction exponentielle s'écrit comme [HASSEN AIT ATMANE et al. 2013, M. SEVEIK et al. 2009]:

$$E(z) = E_m e^{B(z+1/2)} \quad \text{I-06}$$

$$\text{Avec : } B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right)$$

$$\rho(z) = \rho_m e^{B(z+1/2)} \quad \text{I-07}$$

$$\text{Avec : } B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{\rho_c}{\rho_m} \right)$$

Où:

$h$  est l'épaisseur de la plaque.  $B$  est la constante de non-homogénéité

$E_m$  et  $E_c$  les modules d'élasticité du métal et de la céramique respectivement.

$\rho_m$  et  $\rho_c$  les masses volumiques du métal et de la céramique respectivement.

## 3. La fonction sigmoïde (S-FGM) :

La fraction volumique de la classe S-FGM obéit à une fonction en loi de puissance qui s'écrit comme suit [KACI ABDELHAKIM 2012, HASSEN AIT ATMANE et al. 2013]:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2z}{h} + 1 \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I-08}$$

$$V_2 = 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{2z}{h} + 1 \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

Où:  $p$  est le paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Ainsi la loi du mélange décrivant les propriétés matérielles de la plaque s'écrit :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I-09}$$

De même

$$\begin{aligned}\rho(z) &= V_1(z)\rho_c + [1 - V_1(z)]\rho_m && \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \\ \rho(z) &= V_2(z)\rho_c + [1 - V_2(z)]\rho_m && \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2\end{aligned}\tag{I-10}$$

$E_m$  et  $E_c$  les modules d'élasticité du métal et de la céramique respectivement.

$\rho_m$  et  $\rho_c$  les masses volumiques du métal et de la céramique respectivement.

#### 4. La fonction type Mori-Tanaka :

La loi du mélange décrivant les propriétés matérielles de la plaque type Mori-Tanaka s'écrit comme suit [HUU-TAI THAI et al. 2013]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{E_c}{E_m} - 1 \right) \frac{(1 + \nu)}{(3 - 3\nu)}}\tag{I-11}$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{\rho_c}{\rho_m} - 1 \right) \frac{(1 + \nu)}{(3 - 3\nu)}}\tag{I-12}$$

$$\text{Avec : } V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p\tag{I-13}$$

Où:  $\nu$  coefficient de Poisson

$p$  le paramètre matériels

$E_m$  et  $E_c$  les modules d'élasticité du métal et de la céramique respectivement.

$\rho_m$  et  $\rho_c$  les masses volumiques du métal et de la céramique respectivement.

#### I.7. Conclusion:

Dans ce premier chapitre, nous avons passé en revue l'essentiel sur le matériau à gradient de propriété, nous avons vu comment en seulement une trentaine d'année son utilisation a conquis divers secteurs, un concept encore nouveau nécessitant une meilleur connaissance et une meilleur maitrise, d'importantes recherches scientifiques ont été faites jusqu'à ce jour, mais beaucoup reste à faire.

Avant d'exposer la thématique de cette recherche, nous avons trouvé judicieux de mettre l'accent sur l'hétérogénéité de ce matériau, une qualité en soit qui n'est pas correctement formulée dans la recherche des réponses des structures.

**Chapitre II**

**Les théories régissant le comportement  
des plaques en matériaux à gradient  
de propriétés**

## **II.1.Introduction :**

D'ordre général, pour modéliser le comportement d'un solide, soumis à un chargement quelconque, il est impératif de connaître le déplacement de chaque point de ce solide, dans les 3 directions de l'espace, par rapport à sa position au repos. Ces déplacements dépendent des propriétés physique du ou des matériaux le constituant (Module d'élasticité, masse, coefficient de poisson, coefficient de dilatation thermique,...etc.), de sa géométrie, de ces conditions aux limites, de la nature et de l'intensité de la charge. La science qui prédit le mouvement de chaque point d'un solide est la mécanique des milieux continus, cette discipline purement théorique est évolutive, il n'est donc pas étrange de voir des corrections, des améliorations, de nouvelles approches ou de nouvelles hypothèses.

Une plaque est un solide dont l'épaisseur est plus petite par rapport aux deux autres dimensions. A priori, il faudrait utiliser les équations dans un espace de trois dimensions pour décrire ses déplacements, mais compte tenu de la géométrie particulière d'un tel solide, il n'est pas écarté de chercher à restreindre le problème à une équation dans un espace de deux dimensions, décrivant le comportement du plan moyen de la plaque, et permettant ainsi de réduire la taille des calculs.

## **II.2.Historique de développement de la théorie des plaques :**

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquants l'évolution de la théorie des plaques.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

En 1764, par analogie aux poutres, Leonhard Euler est arrivé à définir une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration libre de la peau des tambours assimilée à une membrane élastique [CHAOUUCHE Abdellah 2013].

En 1787, Ernst Chladni, physicien allemand, connu pour être le fondateur de l'acoustique moderne, publia ses études expérimentales sur les vibrations des plaques, où il cherchait une méthode de mesure de la vitesse du son dans les corps solides. L'expérience de Ernst Chladni consistée à faire vibrer des plaques de taille, de forme et d'épaisseur différentes, saupoudrées de sable fin, et déposées horizontalement sur un support fixe à leurs centres, à l'aide d'un archet. La vibration des plaques fait migrer les grains de sable des zones de forte vibration

aux zones de faible vibration, faisant apparaître des figures correspondants aux différents modes de vibration des plaques.

En 1811, l'Académie Française des sciences a lancé un concours pour la détermination d'une théorie mathématique expliquant les travaux du physicien Ernst Chladni, et c'est en 1816 que Sophie Germain mathématicienne et philosophe française obtient finalement l'équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler tenant compte des rayons de courbure dans les deux directions perpendiculaires.

En 1821, Henri Navier présente un mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, ces derniers sont considérés comme le fondement de la théorie d'élasticité.

Les travaux de Henri Navier ont été suivi par d'autres travaux tels ceux d'Augustin Louis Cauchy, de Siméon Denis Poisson, de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron.

Gustav Robert Kirchhoff l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, a réussi par ces travaux, à cerner le champ de validité de la solution de Navier, en calculant toutes les composantes du champ de déformation et de contrainte. Et il constata que la solution classique ne satisfaisait pas les conditions aux limites en déplacement pour une plaque d'étendue finie (appuyée ou encastrée), mais précisa que l'écart tend à s'annuler lorsque l'épaisseur relative de la plaque tend vers 0 et c'est en 1850 qu'il arriva à établir de façon correcte des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

En 1888, Augustus Edward Hough Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, pour fonder une théorie des plaques minces.

C'est ainsi que les trois principales théories feront leurs apparitions dans les années qui suivent.

### **II.3. La théorie Classique des plaques minces de Love-kirchhoff (CPT):**

Le modèle de Kirchhoff-Love dit de plaque mince ou théorie classique des plaques (Classical Plate Theory - CPT) est le plus communément utilisé [KACI ABDELHAKIM 2012]. Il s'appuie sur deux hypothèses qui permettent d'approcher ce qui se passe dans l'épaisseur d'une plaque élastique, homogène et isotrope.

I. Une section droite et normale au plan moyen avant déformation, reste droite et normale après déformation.

II. Le plan moyen ne subit pas de déformation dans son plan, on ne considère que le déplacement transversal.

Sous ces deux hypothèses, les déformations à l'effort tranchant, le champ des contraintes normales au plan moyen et l'effet de l'inertie de rotation sont négligés [GIRAULT GRÉGORY 2006].

Le champ de déplacement s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

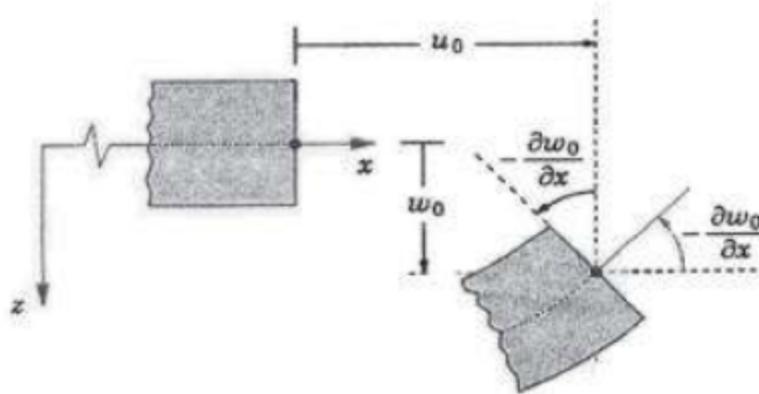
$$v(x, y, z, t) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

II-01

Avec :

$u_0, v_0, w_0$  les déplacements du plan moyen par rapport à l'axe  $x, y$  et  $z$ , respectivement.



**Figure II.01** : Illustration de la théorie de la plaque de Kirchhoff

[KACI ABDELHAKIM 2012]

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élanement de la plaque, plus il est important plus les résultats sont précises.

#### **II.4.La théorie des plaques épaisses :**

##### **II.4.1.La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :**

Il est admis par analogie aux poutres que l'effet de cisaillement transversal et l'effet de l'inertie de rotation sont proportionnels à l'épaisseur de la plaque, Lord Rayleigh en 1877 puis Stephen Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences propres des vibrations calculées, en raison d'une

surestimation de l'inertie de la poutre, et de sa rigidité, du fait de la négligence des déformations induites par l'effet de cisaillement [LUC JAOUEN 2002].

Wittrick a montré que, en négligeant les effets aux frontières, l'erreur engendrée par les approximations de Kirchhoff est de l'ordre de  $(h^2/\chi^2)$  où  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $\chi$  est la demi-longueur d'onde de flexion de la plaque vibrante [MICHEL BARRETTE 2000].

Une extension de la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Hans Jacob Reissner en 1945 dans le cas statique, dans cette dernière il a mis en avant l'effet du cisaillement en introduisant un complément dans l'énergie principale. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin publié 3 ans plus tard en 1951 qui fera date, cette dernière connue sous le nom de théorie améliorée (Improved Plate Theory - IPT) [LUC JAOUEN 2002].

Le théorème de Mindlin s'appuie sur deux hypothèses autres que ceux de la théorie classique des plaques, qui permettent d'approcher ce qui se passe dans l'épaisseur de la plaque épaisse.

I. Une section droite et normale au plan moyen avant déformation, reste droite mais pas forcément normale après déformation.

II. L'effet de l'inertie de rotation est pris en compte.

Toutefois, cette théorie ne manque pas d'imperfection, la prise en compte des contraintes de cisaillement  $\sigma_{zx}$  et  $\sigma_{zy}$  constantes sur toute l'épaisseur de la plaque est en contradiction avec le fait, que leurs valeurs sont nulles sur les surfaces libres, cela a imposé à Mindlin la nécessité d'introduire un facteur de correction.

Pour évaluer ce facteur de correction nommé  $k$ , Mindlin s'est référé à la solution exacte donnée pour la vibration d'une plaque infinie par la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Où il a cherché à égaliser entre la valeur de fréquence fondamentale proposée, en variant les valeurs de  $k$ , avec celle de la théorie d'élasticité tridimensionnelle [KADDOURI DJAMEL EDDINE 2014]. Et il a constaté d'une part que sa valeur est relative au coefficient de Poisson  $\nu$ , ainsi pour un matériau isotrope, le  $k$  varié linéairement de 0.76 pour  $\nu = 0$  à 0.91 pour  $\nu = 0.5$  et il arriva d'autre part à l'exprimer comme la solution de l'équation polynomiale de 3ème degré :

$$k^3 - 8k^2 + \frac{8(2-\nu)k}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0$$

II-02

L'idée de Mindlin revenait à introduire une fonction de pondération  $F(z)$  continue sur l'épaisseur, et où son intégrale permettait d'obtenir une variation parabolique des contraintes

de cisaillement dans l'épaisseur et au même temps de respecter les conditions d'annulation sur les surfaces libres, Et il imposa la fonction suivante [LUC JAOUEN 2002]:

$$F(z) = \frac{5}{4} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad \text{II-03}$$

Cette fonction, dont l'intégrale sur l'épaisseur vaut  $5/6 h$ , et qui donc introduit un facteur de correction de  $5/6$  dans le calcul des résultantes de cisaillement.

Wittrick (1987) a traité des problèmes de flambement et de vibrations libres d'une plaque rectangulaire simplement appuyée, dans les quels, il a proposé une approximation de  $k$ , comme suit [YOSHITAKA SUETAKE 2012]:

$$k = \frac{5}{(6-\nu)} \quad \text{II-04}$$

A ce jour, le facteur  $k$  lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger de son influence sur les résultats [LUC JAOUEN 2002].

Le champ de déplacement s'écrit dans un tel modèle comme suit:

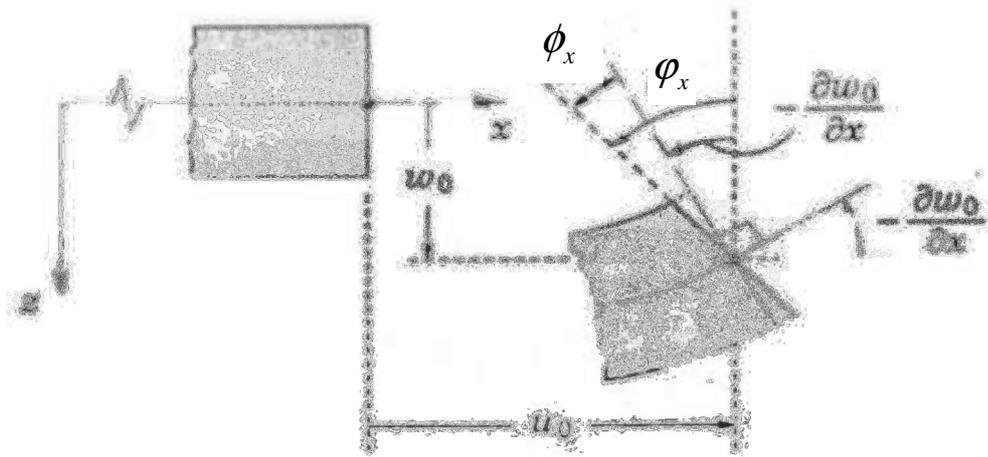
$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z, t) &= v_0 - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{II-05}$$

Avec :

$u_0, v_0, w_0$  les déplacements du plan moyen par rapport à l'axe  $x, y$  et  $z$ , respectivement.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  les rotations de la section de la plaque par rapport à l'axe  $y$  et  $x$ , respectivement.

$$\begin{aligned} \phi_x(x, y) &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \phi_y(x, y) &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \quad \text{II-06}$$



**Figure II.02 :** Illustration de la théorie de la plaque de Mindlin  
[BESSAIM AICHA 2014]

#### II.4.2. La théorie de déformation en cisaillement d'ordres élevés (HSDT) :

Une meilleure modélisation du comportement réel des plaques épaisses, requière une reproduction fidèle de champ de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque, plusieurs théories ont été proposées, où la distribution de champs de cisaillement transverse est d'une part non linéaire et d'autre part les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  s'annulent sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

En général, le champ de déplacement dans la théorie d'ordre élevée s'écrit, comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z, t) &= v_0 - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{II-07}$$

Avec :

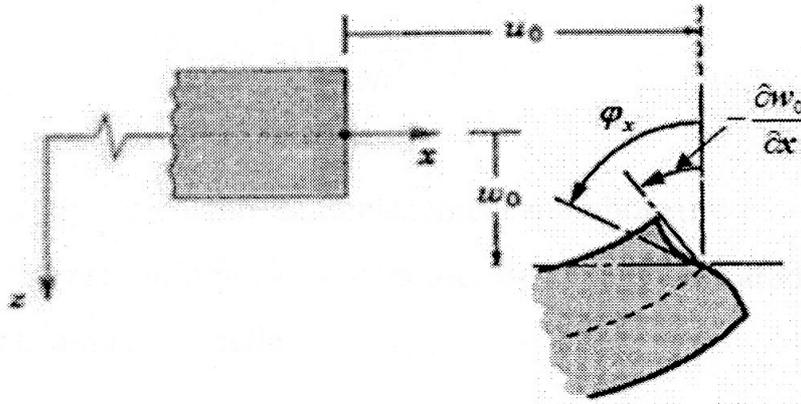
$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \quad \text{II-08}$$

$u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  les déplacements du plan moyen par rapport à l'axe x, y et z, respectivement.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  les rotations de la section de la plaque par rapport à l'axe y et x, respectivement.

$f(z)$  est la fonction de cisaillement caractérisant la théorie d'ordre élevé. On remarque que cette équation est une généralisation de la théorie des plaques, pour une valeur de  $f(z) = 0$ , cela

nous ramène à la théorie classique des plaque minces, pour une valeur de  $f(z) = z$ , cela nous ramène à la théorie du cisaillement du premier ordre.



**Figure II.03 :** Illustration de la théorie des plaques d'ordre élevé

[BESSAIM AICHA 2014]

#### II.4.2.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

En 1949, Hildebrand et al. furent les premiers à proposer une théorie d'ordre élevée, en 1973, Srinivas et Rao ont présenté les résultats d'analyse des plaques rectangulaires et homogènes en trois dimensions sous différentes conditions aux limites, en 1974, Nelson et Lorch ont formulé une théorie avec 09 inconnues pour l'analyse des plaques multicouches, en 1977, Lo et al. ont formulé une théorie avec 11 inconnues, Levinson en 1980 et Reddy en 1984 ont supposé une distribution cubique du champ de déplacement. Reissner en 1983 a formulé également une théorie de la plaque d'ordre élevé. En utilisant la théorie tridimensionnelle d'élasticité, Wittrick en 1987 a examiné les problèmes de flambement et de vibrations libres d'une plaque rectangulaire simplement appuyée. Kaprielian et al. en 1988 puis Mian et Spencer en 1998 abordaient une analyse tridimensionnelle de plaques stratifiés et en gradient de propriété. Vel et Batra en 2004 ont présenté une solution exacte en trois dimensions pour les vibrations libres et forcées des plaques rectangulaires en gradient de propriété, simplement appuyées [YOSHITAKA SUETAKE 2012].

D'autres formes de fonction de cisaillement dites raffinées ont été proposées, en 2002 une première théorie raffinée à deux variables (RPT) a d'abord été développée pour des plaques isotropes par Shimpi, et a été ensuite appliquée aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel puis Kim et al. cette théorie utilise seulement deux fonctions inconnues afin d'obtenir deux équations gouvernantes pour les plaques orthotropes [HASSEN AIT ATMANE et al. 2013].

La théorie de Reddy de troisième ordre de déformation de cisaillement, a été initialement développée pour des plaques composites stratifiées, puis elle a été utilisée par certains chercheurs pour étudier la vibration libre des plaques à gradient de propriété rectangulaires (Cheng 2000, Ferreira 2006, Baftani 2011) [P. MALEKZADEH et M. SHOJAEE 2012].

Matsunaga (2008) a effectué une analyse de la vibration et la stabilité des plaques à gradient de propriété obliques à l'aide de la théorie de déformation d'ordre supérieur à deux dimensions libre. Xiang et al. (2011) et Xiang et Kang (2013) ont proposé une théorie des déformations de cisaillement à n-ordre dans laquelle la théorie de Reddy peut être considéré comme un cas particulier. Afin de réduire le nombre de variables inconnues, Benachour et al. (2011) et MECHAB et al. (2013) ont étendu la théorie du troisième ordre des déformations de cisaillement à deux variables de Shimpi (2002) pour développer une théories de troisième ordre à quatre variables pour la vibration libre des plaques FGM [P. MALEKZADEH et M. SHOJAEE 2012]. Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement [R. BACHIR BOUIADJRA 2015]. Récemment, Tahar Hassaine Daouadji et Abdeouahed Tounsi ont présenté une nouvelle fonction hyperbolique à quatre inconnues [TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2012, TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2013].

#### II.4.2.2. les différents modèles de fonction de cisaillement transverse :

Parmi les théories les plus communément utilisées par la communauté scientifique, celle du Reddy où le champ de cisaillement est cubique, sur un tel modèle la distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur est parabolique, ainsi les conditions sur les surfaces libres sont satisfaites, la fonction de cisaillement dite (Three Shear Déformation Theory –TSDT) s'écrit dans un tel modèle comme suit [ALIREZA DANESHMEHR et al. 2013, SLIMANE MERDACI et al. 2010, J. N. REDDY 2000]:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad \text{II-09}$$

Une autre théorie plus précise que la précédente a été proposée par Touratier, où le champ de cisaillement n'est pas polynomial mais sinusoïdale, la fonction de cisaillement dite (Sinus Shear Déformation Theory –SSDT) s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \quad \text{II-10}$$

Karma et al. ont proposé une autre approche du champ de cisaillement, une approche exponentielle, la fonction de cisaillement dite (Exponential Shear Déformation Plate Theory – ESDPT) s’écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad \text{II-11}$$

Soldatos et al. ont proposé une approche hyperbolique du champ de cisaillement, la fonction de cisaillement dite (Hyperbolic Shear Déformation Plate Theory –HSDPT) s’écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{II-12}$$

Mantari et al. ont proposé une autre approche sinusoïdale du champ de cisaillement, la fonction de cisaillement dite (New Sinus Shear Déformation Plate Theory –NSSDPT) s’écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II-13}$$

On cite aussi les théories d’ordre élevé de:

- Ambartsumian (1958):

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{II-14}$$

- Parabolique de Levinson (1980):

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \quad \text{II-15}$$

- Parabolique de Reissner (1975):

$$f(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \quad \text{II-16}$$

- Exponentielle de Aydogdu (2009):

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \alpha}} \quad \text{Avec: } \alpha > 0 \quad \text{II-17}$$

- J. L. Mantari:

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II-18}$$

- N. Grover et al.:

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) \quad \text{Avec } r=3 \quad \text{II-19}$$

- Ait Atmane H et Tounsi A [AIT ATMANE H et al. 2011]:

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{II-20}$$

- El Meiche et al.:

$$f(z) = \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right) - 1}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{II-21}$$

- Tahar Hassaine Daouadji et Abdeouahed Tounsi [TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2012, TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2013]:

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \quad \text{II-22}$$

Avec le fonction  $\operatorname{sec}=1/\cos$

- Hebali et al. (2014):

$$f(z) = \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right) - z}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{II-23}$$

## II.5. Les fondations élastiques :

### II.5.1. Introduction :

Les fondations superficielles sont des éléments structuraux permettant la transmission des charges de la superstructure au sol, de très nombreux travaux leurs ont été consacrés depuis près d'un siècle pour établir, valider et améliorer leurs méthodes de calcul. La performance d'une fondation superficielle au cours de sa durée de vie dépend à la fois de l'action de la superstructure et de la réponse du sol. L'interdépendance du comportement mécanique des deux est appelée interaction sol-structure [EMILE YOUSSEF 1994, EMAD JAHANGIR

2011, MOHAMED EL-HEBIB GUELLIL 2010, AD. C. PRONK et MARION E. VAN DEN BOL 1998].

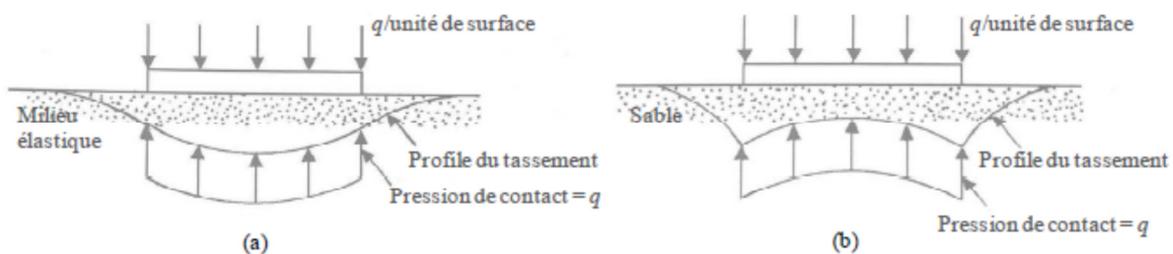
La charge exercée par la superstructure engendre des déformations et une redistribution des contraintes dans le sol sous et au voisinage de la fondation. Cette redistribution des contraintes dépend de la rigidité de la fondation, des propriétés de l'interface et de la nature du sol.

La connaissance de l'état de contrainte au contact sol-fondation est nécessaire pour un dimensionnement adéquat qui prend en compte le seuil de capacité portante du sol. Dans ce qui suit, les différents cas de figures de redistribution des contraintes sous la fondation seront exposés [EMAD JAHANGIR 2011].

### II.5.1.1. Fondation superficielle souple :

Quand une fondation souple est soumise à un chargement uniforme et prenant appuis sur un sol, la réaction du ce dernier sur la fondation est par conséquence uniforme. La Figure II.04 montre une fondation souple sur les sols fins et granulaires. La différence du profil de tassement est due au manque de cohésion pour le cas des sols sableux.

Il est à noter que la fondation souple se déplace et se déforme avec le terrain sans modifier l'état de contrainte dans le sol.



**Figure II.04 :** Fondation flexible **a-** Matériaux élastique fins **b-** Matériaux granulaires

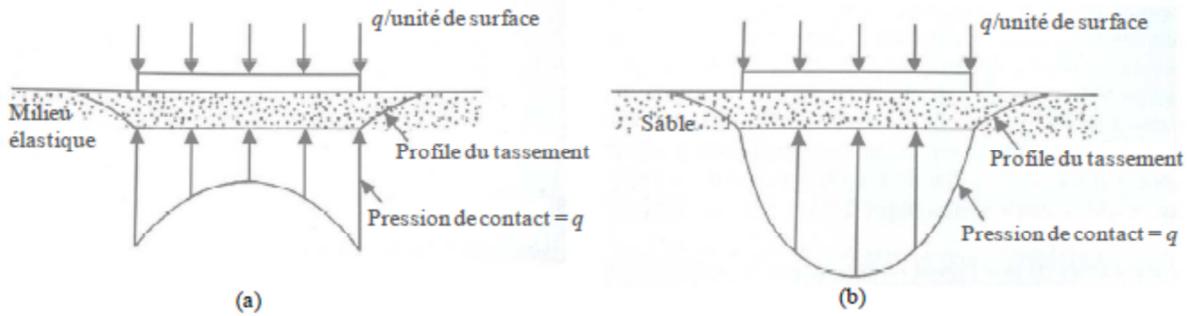
[EMAD JAHANGIR 2011]

#### A- Cas d'une fondation superficielle rigide

Quand une fondation rigide est soumise à un chargement uniforme et prenant appuis sur un sol, la réaction du ce dernier sur la fondation est par conséquence non-uniforme. En général, la fondation rigide ramène la contrainte vers les extrémités et la réaction est donc maximale aux extrémités.

Pour un matériau granulaire, la réaction est concentrée au milieu de la fondation à cause du manque de cohésion et par conséquent le confinement aux extrémités.

On notera que la fondation rigide résiste aux déformations du terrain et modifie l'état de contrainte de contact.



**Figure II.05:** Fondation rigide **a-** Matériaux élastique fins **b-**Matériaux granulaires

[EMAD JAHANGIR 2011]

En réalité, le comportement d'une fondation est entre les deux cas théorique. La différence de raideur entre le sol et la fondation fait intervenir des phénomènes d'interaction sol-structure. La pression du contact sera donc proportionnelle à la rigidité relative de la fondation et du terrain.

Depuis le 19<sup>ème</sup> siècle, une importance particulière a été accordée à la modélisation physique du milieu sol, plusieurs modèles ont été proposés, afin de représenter l'effet de l'interaction sol-structure sous chargement statique. On citera ici les modèles proposés.

### II.5.2. Modèle de Winkler :

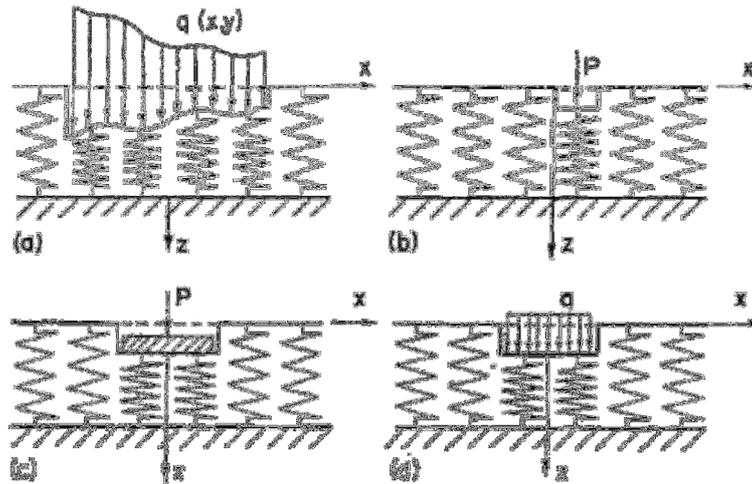
La modélisation des propriétés physique du sol a été proposée pour la première fois par Winkler en 1867, connue pour être la plus simple, elle suppose le milieu sol comme une série de ressorts de raideur constante  $K_w$ , infiniment rapprochés, indépendants les uns des autres, linéaires et élastiques. Autrement dit, la réaction du sol  $q$  à n'importe quelle coordonnées  $(x, y)$  est proportionnelle au tassement  $w$  à la même coordonnée  $(x, y)$  et indépendante de tous autres tassements, par conséquent, tous tassements se trouvant en dehors de la surface de chargement sont supposés nuls.

Donc, on peut écrire:

$$q(x, y) = K_w \cdot w(x, y)$$

II-24

Où :  $K_w$  est le coefficient de la réaction de sol ou le module de sol



**Figure II.06:** Déplacement du sol d'après le modèle de Winkler

a- Charge quelconque b- Charge concentrée c- Fondation rigide d- Fondation flexible

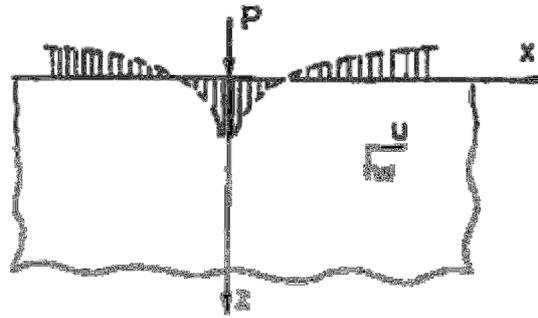
[EMILE YOUSSEF 1994]

### II.5.3. Modèle du continuum élastique :

Contrairement au modèle de Winkler, dans le présent modèle le tassement s'étend aux zones adjacentes à la surface de chargement, le sol est modélisé comme un milieu continu, semi-infini, isotrope et élastique, caractérisé par deux paramètres, le module d'élasticité  $E_s$  et le coefficient de Poisson  $\nu_s$ .

Les premiers travaux sont attribués à Joseph Boussinesq, qui en 1885 a étudié le problème d'un milieu semi-infini, homogène, isotrope, linéaire et élastique, soumis à une charge verticale concentrée  $P$ .

En général, l'application de la théorie du continuum élastique pour résoudre le problème de l'interaction sol-fondation est mathématique extrêmement complexe, cela a limité son adaptation dans la pratique de plus il a été constaté que les tassements réels du sol hors la zone de chargement s'atténuent avant ceux calculés. Cependant, Certaines solutions ont été proposées telles celles de Gorbunov-Pasadov en 1941-1949, Galin en 1961, Lur'e en 1964, Harr en 1966, Popov en 1971, ...etc.



**Figure II.07:** Tassement du sol dû à une charge concentrée pour le modèle de continuum élastique [EMILE YOUSSEF 1994]

#### II.5.4. Modèles bi-paramétriques:

Ce nouveau modèle est la conséquence d'une modélisation simple mais grossière du milieu sol par Winkler et d'une complexité mathématique handicapante du modèle du continuum élastique, ce troisième modèle est défini par deux constantes élastiques indépendantes. On distingue deux approches de modèles bi-paramétriques.

La première approche reprend le modèle de Winkler en éliminant son comportement discontinu par l'introduction d'une interaction mécanique entre les ressorts. Ces modèles physiques de comportement du sol ont été proposés par Filonenko-Borodich en 1940- 1945, Hetenyi en 1946 et Pasternak en 1954 où l'interaction entre les ressorts est assurée respectivement par des membranes élastiques, poutres élastiques ou couches élastiques capables d'avoir des déformations tangentielles.

La seconde approche reprend le modèle du continuum élastique en introduisant des contraintes ou des hypothèses simplificatrices par rapport à la distribution des déplacements et des contraintes, Ces modèles physiques de comportement du sol ont été proposés par Reissner en 1958, Vlazov et Leontiev en 1949-1966.

##### II.5.5.1. Modèle du Filonenko-Borodich :

Le modèle proposé par Filonenko-Borodich en 1940-1945 assure la connectivité entre les ressorts du modèle de Winkler en les reliant à une membrane élastique fine sous une tension constante  $T_s$ . Cette membrane est attachée aux extrémités supérieures des ressorts. L'expression de la réaction du sol  $q$  reliée au tassement  $w$  est exprimée comme suit :

$$q(x, y) = K_w \cdot w(x, y) - T_s \cdot \nabla^2 w(x, y)$$

II-25

Avec :

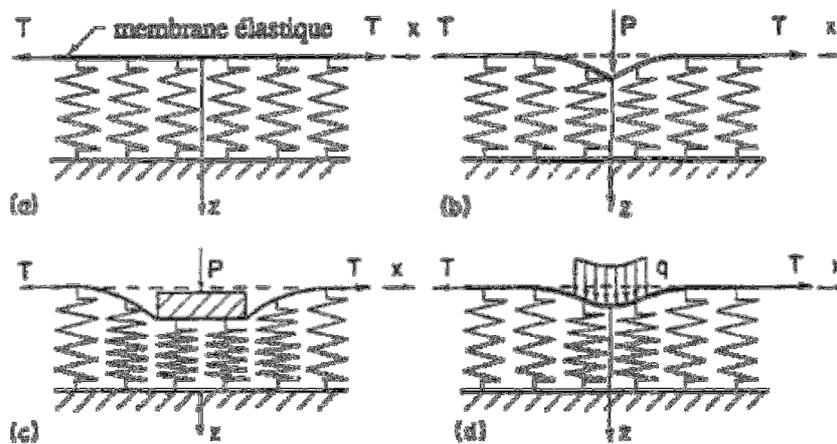
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{II-26}$$

Dans le cas d'un problème en une dimension, on peut écrire [EMAD JAHANGIR 2011]:

$$q(x) = K_w \cdot w(x) - T_s \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad \text{II-27}$$

Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $K_w$  et la tension  $T_s$ .

La figure suivante montre des exemples de profils du tassement dans le cas d'une charge concentrée et d'une charge uniformément répartie sur fondation rigide et fondation flexible.



**Figure II.08:** Modèle de Filonenko-Borodich [EMILE YOUSSEF 1994]

### II.5.5.2. Modèle d'Hetenyi :

Dans le modèle proposé par Hetenyi en 1946, la connectivité entre les ressorts indépendants du modèle de Winkler se fait dans le cas tridimensionnel par l'intermédiaire d'une plaque élastique et dans le cas bidimensionnel par une poutre élastique.

Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $K_w$  et la rigidité à la flexion  $D$  de la plaque. L'expression de la réaction du sol  $q$  liée au tassement  $w$  est exprimée comme suit:

$$q(x, y) = K_w \cdot w(x, y) - D \cdot \nabla^4 w(x, y) \quad \text{II-28}$$

Avec:

$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad \text{II-29}$$

Dans le cas d'un problème à deux dimensions, on peut écrire [EMAD JAHANGIR 2011]:

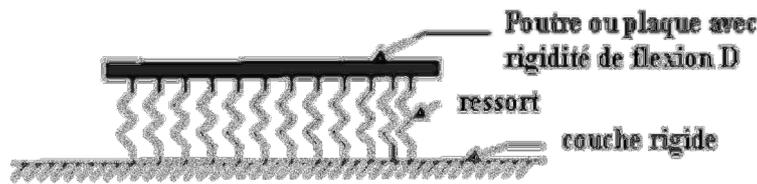
$$q(x, y) = K_w \cdot w(x, y) - \frac{E_p h_p^3}{12} \cdot \frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} \quad \text{II-30}$$

Avec :

$E_p$  Module d'élasticité de la plaque ou de la poutre.

$h_p$  Hauteur de la plaque ou de la poutre.

$\nu_p$  Coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque ou la poutre.

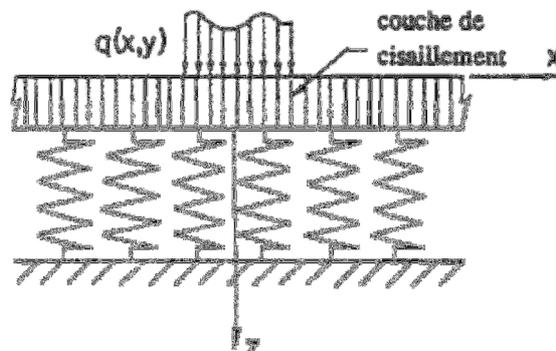


**Figure II.09:** Modèle de d'Hetenyi [MOHAMED EL-HEBIB GUELLIL 2010]

### II.5.5.3. Modèle de Pasternak :

Tous les modèles proposés ci-dessus stipulés l'inexistence d'une résistance au cisaillement du sol, comme si le milieu sol est simulé à un liquide, or, il admit que le sol présente une résistance au cisaillement.

Le modèle proposé par Pasternak en 1954, suppose en plus d'une rigidité, l'existence d'une interaction de cisaillement entre les ressorts. Cela est possible en reliant les ressorts à une couche d'éléments verticaux incompressibles qui peuvent subir uniquement des déformations tangentielles.



**Figure II.10:** Modèle de Pasternak [EMILE YOUSSEF 1994]

En supposant que la couche de cisaillement est isotrope dans le plan (x, y) avec un module

de cisaillement  $G_x = G_y = K_g$  [EMAD JAHANGIR 2011], on peut écrire:

$$\tau_{xz} = K_g \cdot \gamma_{xz} = K_g \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \tau_{yz} = K_g \cdot \gamma_{yz} = K_g \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{II-31}$$

L'effort tranchant total par unité de longueur de la couche de cisaillement est :

$$T_x = \int_0^1 \tau_{xz} \cdot dz = K_g \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad T_y = \int_0^1 \tau_{yz} \cdot dz = K_g \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{II-32}$$

Pour l'équilibre des forces dans la direction de z :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q - K_w w = 0 \quad \text{II-33}$$

En intégrant on aura l'expression de la réaction du sol  $q$  reliée au tassement  $w$  comme suit:

$$q(x, y) = K_w \cdot w(x, y) - K_g \cdot \nabla^2 w(x, y) \quad \text{II-34}$$

Les deux constantes élastiques du modèle de Pasternak sont le coefficient de réaction  $K_w$  et le module de cisaillement  $K_g$ .

On remarque, qu'il suffit juste de substituer  $K_g$  par  $T_s$  dans l'équation, pour avoir l'expression proposée par Filonenko-Borodich, physiquement cela veut dire que les tassements ont un profil identique pour les deux modèles. D'autre part, lorsque les trois constantes  $T_s$ ,  $D$  et  $K_g$  s'annulent, les équations II.25, II.28 et II.34 se réduisent à celle de Winkler.

#### II.5.5.4. Modèle de Kerr :

Proposé en 1964, Kerr a introduit une couche de cisaillement au modèle de Winkler et a supposé que les constantes de ressort au-dessus et au-dessous de cette couche sont différentes. La Fig. II.11 montre la représentation physique de ce modèle mécanique. L'équation de ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)P = \frac{G}{k_1} \cdot \nabla^2 \cdot P + k_2 \cdot w(x, y) - G \cdot \nabla^2 w(x, y) \quad \text{II-35}$$

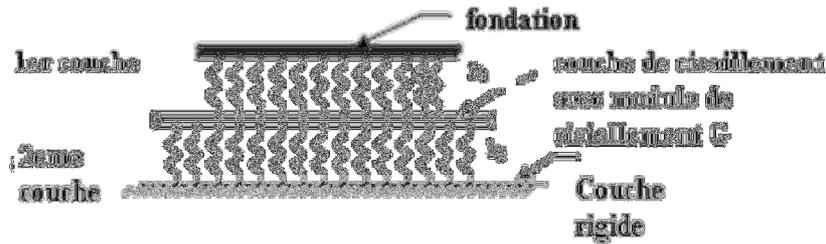
Où :  $k_1$  la constante de ressort de la première couche

$k_2$  la constante de ressort de la deuxième couche

$w$  la déflexion de la première couche

$G$  le module de cisaillement de la couche introduite.

$P$  la charge appliquée



**Figure II.11:** Modèle de kerr [MOHAMED EL-HEBIB GUELLIL 2010]

### II.5.5.5. Modèle de Reissner :

En partant du modèle du continuum élastique, Reissner en 1958 a proposé un autre modèle bi-paramétrique, où il a introduit des hypothèses supplémentaires sur les déplacements et les contraintes, afin de simplifier la résolution des équations de base d'un milieu continu isotrope élastique et linéaire.

Les contraintes normales et tangentielles appliquées sur les faces d'un élément du sol sont supposées négligeables, la couche du sol d'épaisseur  $H$ , repose sur un substratum rigide, les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , respectivement dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sont définis de la façon suivante:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \quad \text{II-36}$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{au substratum rigide (z=H)} \quad \text{II-37}$$

$$u = v = 0 \quad \text{à la surface du sol (z=0)}$$

L'expression de la réaction du sol  $q$  reliée au tassement  $w$  est donnée comme suit:

$$c_1 w - c_2 \nabla^2 w = q - \frac{c_2}{4c_1} \cdot \nabla^2 q \quad \text{II-38}$$

Où  $c_1$  et  $c_2$  sont les deux constantes du modèle définies par :

$$c_1 = \frac{E_s}{H} \quad c_2 = \frac{HG_s}{3} \quad \text{II-39}$$

Avec :

$E_s$  module d'Young du sol

$G_s$  module de cisaillement du sol

$H$  épaisseur de la couche de sol

### **II.6.Conclusion:**

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue l'évolution de la théorie des plaques, puis nous avons exposé les trois principales théories, la théorie classique des plaques, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et celle d'ordre élevé, dont le degré de précision, le domaine de validité et la complexité les distinguent. Faisant partie d'une des cas de figures étudiées on s'est intéressé à l'interaction sol-fondation.

Cette recherche bibliographique est un aperçu de l'état actuel des connaissances et un fondement indispensable pour les cheminements mathématiques développés dans les chapitres suivants.

**Chapitre III**

**Étude analytique de la flexion et de la  
vibration libre des plaques en matériaux  
à gradient de propriétés  
en utilisant la théorie raffinée d'ordre élevé**

### III.1. Introduction :

Les matériaux à gradient de propriété ont été principalement développés en tant que matériaux résistant à la chaleur, utilisés en génie aérospatial [LIU D.Y. et al 2010]. Actuellement, ils sont développés pour une utilisation plus générale en tant que composants structurels dans des environnements à haute température, et par conséquent, de nombreuses études sur les vibrations des plaques ont été élaborées [PRAVEEN GN. et REDDY JN.1998, YANG J. et SHEN H-S. 2002 et 2010 et VEL S.S. et BATRA R.C.2004].

Lin et Tseng (1998) analysés la vibration libre d'une plaque polaire, orthotrope, circulaire et annulaire en utilisant la théorie en cisaillement du premier ordre avec des éléments à huit nœuds. Liew et Yang (2000) et Hosseini Hashemi et al. (2008) employés la méthode de Ritz à trois dimensions pour l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses et annulaires avec différentes conditions aux bords. Sundararajan et al. (2005) ont étudié les vibrations libres non linéaires des plaques obliques et rectangulaires à gradient de propriété dans des environnements thermiques. Lee et al. (1998) analysés la vibration libre et la réponse dynamique transitoire d'une plaque rotative, annulaire et multicouche par la méthode des éléments finis, les équations gouvernantes le mouvement sont dérivées en utilisant la théorie du zigzag avec un champ de déformation en cisaillement d'ordre élevé et un déplacement linéaire local. Li et al. (2009) ont analysé la vibration libre des plaques rectangulaires à gradient de propriété dans un environnement thermique, en se basant sur la théorie d'élasticité à trois dimensions, les deux conditions aux limites simplement appuyées et encastées sont considérées, les résultats sont obtenus pour les différentes distributions de température. Huang et Shen (2004) ont étudié les vibrations non linéaires et la réponse dynamique des plaques à gradient de propriété dans des environnements thermiques, les formulations sont basées sur la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et l'équation générale de type Von Karman, ce qui prend en compte les effets thermiques.

Allahverdizadeh et al. (2008) ont développé une approche semi-analytique pour la détermination des vibrations libres et forcées, non linéaires, des plaques minces à gradient de propriété, de forme circulaires et axisymétriques, la formulation est basée sur la théorie classique des plaques (CPT), la cinématique et la non-linéarité géométrique sont incorporées dans le principe de Von-Karman. Woo et al. (2006) ont fournit une solution analytique pour la vibration libre non-linéaire des plaques à gradient de propriété, les équations gouvernantes pour des plaques minces à gradient de propriété sont obtenues en utilisant la théorie de Von-

Karman pour une grande déflexion transversale, et l'analyse en séries de Fourier est utilisée pour obtenir la solution.

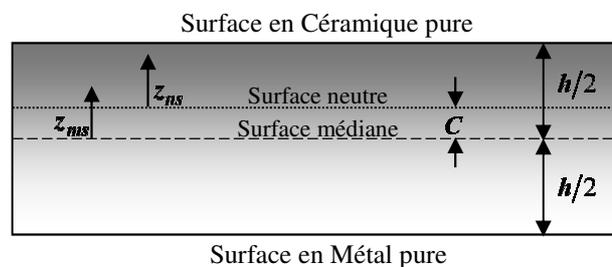
Shufrin et Eisenberger (2005) ont utilisé la méthode Kantorovich pour l'analyse de la stabilité et la vibration des plaques, sur la base des théories du premier et d'ordre élevé de cisaillement, ils ont obtenu les équations de vibrations et de stabilité pour une plaque isotrope et ont proposé aussi une méthode pour obtenir les fréquences et la charge critique de flambement, en comparant les résultats des théories, ils ont conclu que la théorie du premier ordre fournis des résultats assez proche que ceux de la théorie d'ordre élevé. Sur la base de la théorie des plaques du troisième ordre de Reddy, des solutions exactes et plus explicites ont été représentées par Hosseini-Hashemi et al. (2011a) pour l'analyse des vibrations transversales des plaques épaisses, rectangulaires, ayant deux bords simplement appuyés. Amini et al. (2009) ont étudié la vibration libre des plaques à gradient de propriété sur des fondations élastiques en utilisant les trois théories de l'élasticité linéaire. Ait Atmane Hassan et al. (2010) ont également analysé la vibration libre des plaques à gradient de propriété, sur appuis simples et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé. En utilisant une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables, Hadji et al. (2011) ont étudié la vibration libre des plaques sandwich à gradient de propriété et de forme rectangulaire, la théorie présentée est variationnelle et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, elle ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à la variation transversale de la contrainte de cisaillement, de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales variées de manière parabolique à travers l'épaisseur et satisfaisaient les conditions de la surface libre de la contrainte de cisaillement. Benachour et al. (2011) ont développé un modèle pour l'analyse des vibrations libres des plaques en matériaux à gradient arbitraire de propriété, en utilisant la formule de Navier, les fréquences fondamentales sont obtenues en résolvant le problème des valeurs propres. El Metiche et al. (2011) ont développé une théorie hyperbolique raffinée des plaques sandwich à gradient de propriété pour le calcul du flambement et des vibrations. Zaidi et al. (2014) ont étudié la réponse en flexion des plaques en gradient de propriété reposant sur fondation élastique et soumises à un chargement hygro-thermomécanique. Tounsi et al. (2013) ont présenté une théorie trigonométrique raffinée de plaque sandwich en gradient de propriété pour la flexion thermo-élastique. Les mêmes théories ont été utilisées pour étudier le comportement mécanique des plaques en gradient de propriété [BOUDERBA B. et al. 2012, BACHIR BOUIADJRA M. et al. 2012,

KETTAF F.Z.et al. 2013, KHALFI Y.et al. 2014, ATTIA A.et al. 2014, BOUDERBA B. et al. 2013, AIT AMAR MEZIANE et al. 2014, DRAICHE K. et al. 2014, NEDRI K.et al. 2014, SADOUNE M. et al.2014].

Du fait que, les propriétés des matériaux à gradient de propriété constituant la plaque variées à travers la direction de l'épaisseur, il est évident que la surface neutre de cette plaque ne peut coïncider avec sa surface médiane. Par conséquent, les déformations en étirement et en flexion de la plaque sont couplées. Dans Certaines publications [MORIMOTO T.et al.2006, ABRATE S 2008, ZHANG D.G. et ZHOU Y.H. 2008, SAIDI A.R. et JOMEHZADEH E.2009, YAHOABI H. et FERAIDOON A. 2010, BACHIR BOUIADJRA M.et al. 2012, ELTAHER M.A.et al. 2014] les chercheurs ont démontré qu'il n'y a pas de couplage d'étirement-flexion dans les équations constitutives si la surface de référence est choisie de manière appropriée.

### III.2. formulation du problème :

Considérant une plaque en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur  $h$ , une longueur  $a$  et une largeur  $b$ , constituée d'un mélange de deux matériaux soit un métal et la céramique. Les  $x$  et  $y$  sont les coordonnées planes et  $z$  est la coordonnée selon l'épaisseur. La face supérieure est constituée uniquement de la céramique et la surface inférieure est constituée uniquement du métal. Pour de telles plaques il est évident que la surface neutre ne coïncide pas avec la surface géométrique. Pour des fins pratiques, les forces de compression sont supposées agir sur la surface médiane et non sur la surface neutre, alors que les contraintes dans le plan agissent le long de la surface neutre. La non-coïncidence entre la ligne d'action des contraintes et celles des forces de compression engendre le couple schématisé comme suit:



**Figure III.01 :** les positions des surfaces médiane et neutre dans une plaque en FGM

Ici, deux surfaces de référence différentes sont considérées pour la mesure de  $z$ , notamment,  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  mesurées par rapport à la surface médiane et par rapport à la surface neutre, respectivement.

L'expression de la fraction du volume de la céramique  $V_c$  est basée sur les coordonnées  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$ , soit:

$$V_c = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{III-01}$$

Où  $p$  est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et  $C$  est la distance entre la surface médiane et la surface neutre.

Les propriétés du matériau non homogène de la plaque en FGM peuvent être obtenues par le biais de la règle de mélange de Voigt [SURESH, S. et MORTENSEN 1998]. En utilisant l'équation III-01, toutes les propriétés de la plaque peuvent être écrites tel que proposé par Mori-Tanaka [HUU T. T et al. 2013], comme :

$$P(z) = P_M + (P_C - P_M) \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(P_C / P_M - 1)(1 + \nu)/(3 - 3\nu)} \quad \text{III-02}$$

Où  $P_M$  et  $P_C$  correspondent aux propriétés du métal et de la céramique, respectivement. Dans ce travail, le module d'élasticité  $E$  et la densité du matériau  $\rho$  sont supposés définis par l'équation III-02, tandis que le coefficient de poisson  $\nu$  est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque.

La position de la surface neutre dans une plaque en matériau à gradient de propriété est celle qui satisfait l'annulation du moment statique, pour un tel module d'élasticité, la formule est donnée comme suit [ZHANG D.G. et ZHOU Y.H. 2008, BACHIR BOUIADJRA M. et al. 2012] :

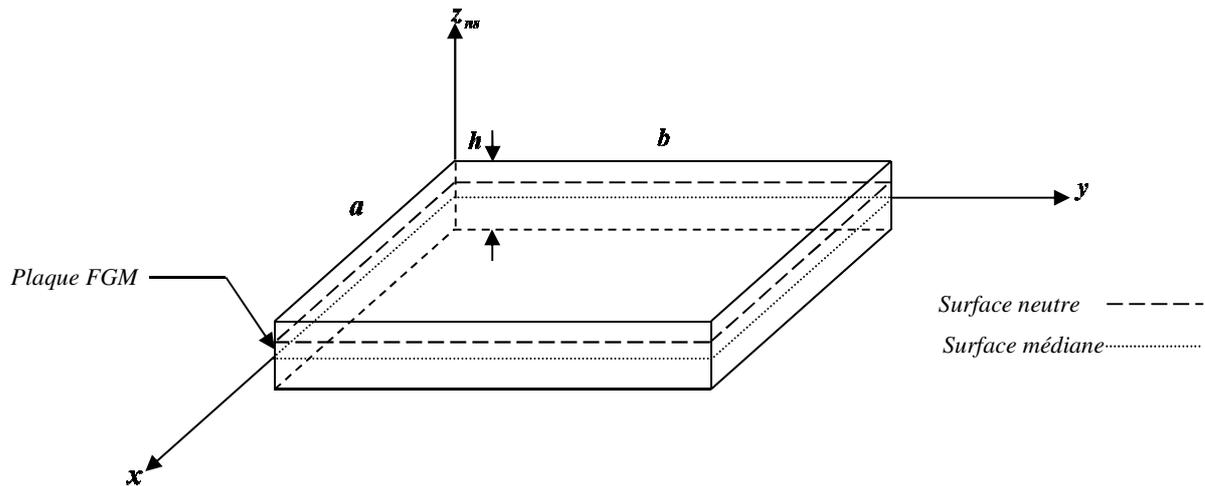
$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad \text{III-03}$$

Ainsi, la position de la surface neutre par rapport à la surface médiane peut être obtenue comme suit :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad \text{III-04}$$

### III.3. Le modèle théorique :

Contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement conventionnelle, la théorie présentée est variationnelle. Elle n'a que quatre inconnues et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions aux limites, soit l'annulation des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et cela sans la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement.



**Figure III.02:** Système de coordonnées et géométrie d'une plaque en gradient de propriété

#### III.3.1. Les hypothèses de bases :

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- (i) L'origine des coordonnées cartésiennes du système coïncide avec la surface neutre de la plaque FGM.
- (ii) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et leurs déformations sont infinitésimales.
- (iii) Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes, celle du moment fléchissant  $w_b$  et celle de cisaillement  $w_s$ , ces composantes sont indépendantes de  $z$ .

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad \text{III-05}$$

- (iv) La contrainte normale au plan  $\sigma_z$  est négligeable en-là comparant à  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- (v) Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  sont dus à l'extension, le moment et la composante de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad \text{III-06}$$

Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées identiques à celles données par la théorie classique des plaques. Les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  sont données comme suit :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \text{III-07}$$

Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  engendrées conjointement avec  $w_s$ , la variation parabolique des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  dues aux contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  dans l'épaisseur de la plaque, ces dernières sont nulles sur la face supérieure et inférieure. Par conséquent, les expressions de  $u_s$  et  $v_s$  peuvent être données par :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{III-08}$$

Où  $f(z_{ns})$  est une fonction parabolique qui s'écrit comme suit :

$$f(z_{ns}) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h}(z_{ns} + C)\right) - (z_{ns} + C)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad \text{III-09}$$

### III.3.2. Cinématique

En se basant sur les hypothèses précédentes, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations III-05 à III-09 comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}, t) &= u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}, t) &= v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{III-10}$$

Les relations cinématique peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad \text{III-11}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III-12a}$$

et

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \quad \text{III-12b}$$

### III.3.3. Les relations constitutives

Les relations constitutives linéaires sont:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad \text{III-13}$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les contraintes et les déformations respectivement.

### III.3.4. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton ou le principe de la conservation de l'énergie est utilisé pour dériver les équations de mouvement. Le principe peut être formulé analytiquement comme suit :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad \text{III-14}$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation,  $\delta K$  est la variation de l'énergie de cinétique et  $\delta V$  représente les travaux extérieurs.

#### III.3.4.1. Énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est comme suit :

$$\delta U = \int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz_{ns} \quad \text{III-15}$$

Remplaçant les équations III-11 et III-13 dans l'équation III-15 et intégrant sur toute l'épaisseur de la plaque, l'équation III-15 peut être réécrite comme suit:

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + S_{xz}^s \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + S_{yz}^s \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \end{array} \right\} dA \quad \text{III-16}$$

Les résultantes des contraintes N, M et S sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad \text{III-17a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad \text{III-17b}$$

Utilisant l'équation III-13 dans l'équation III-17, les contraintes résultantes dans la plaque en gradient de propriété peuvent être reliées aux déformations totales par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E} \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad \text{III-18}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad \text{III-19a}$$

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad \text{III-19b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad \text{III-19c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad \text{III-19d}$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad \text{III-19e}$$

Où

$A_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s$  et  $H_{ij}^s$  sont les rigidités de la plaque définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} Q_{11} (1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns} \quad \text{III-20a}$$

Avec : 
$$Q_{11} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} \quad \text{III-20b}$$

et 
$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad \text{III-20c}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns} \quad \text{III-20d}$$

### III.3.4.2. Travail des forces extérieures :

Le travail des forces extérieures est exprimé comme suit :

$$\delta V = \int_A q \delta (w_b + w_s) dA \quad \text{III-21}$$

Avec :  $q$  charge transversale.

### III.3.4.3. Énergie cinétique:

La variation de l'énergie cinétique est exprimée comme suit :

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z_{ns}) dA dz_{ns}$$

$$\delta K = \int_A \left[ \begin{aligned} & I_0 \left[ \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right] - I_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & - J_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] + I_2 \left[ \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \\ & + K_2 \left[ \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right] + J_2 \left[ \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \end{aligned} \right] dA \quad \text{III-22}$$

Où le point représente la dérivée par rapport à la variable temps  $t$ ,  $\rho(z)$  est la masse volumique, et  $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les inerties massiques.

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} (1, z_{ns}, f, z_{ns}^2, z_{ns} f, f^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad \text{III-23}$$

Remplaçant les expressions de  $\delta U$ ,  $\delta K$  et  $\delta V$  des équations III-16, III-21 et III-22 dans l'équation III-14 et intégrant par partie, puis collectant les coefficients selon  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations de mouvement s'écrivent:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad \text{III-24}$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

En remplaçant les équations III-18 dans les équations III-24, les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements  $(u_0, v_0, w_b, w_s)$  comme :

$$A \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad \text{III-25a}$$

$$A \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial y} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad \text{III-25b}$$

$$B \nabla^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - D \nabla^4 w_b - D^s \nabla^4 w_s + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad \text{III-25c}$$

$$B^s \nabla^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - D^s \nabla^4 w_b - H^s \nabla^4 w_s - A_s \nabla^2 w_s + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad \text{III-25d}$$

### III.3.5. La solution de Navier pour une plaque simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte des équations III-25, pour une plaque en gradient de propriété simplement appuyée. Les fonctions de déplacement suivantes sont choisies de sorte à satisfaire les conditions aux limites de la plaque et sont définis en série de Fourier:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad \text{III-26}$$

Avec:  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\omega$  est la fréquence propre,  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont les paramètres arbitraires (les inconnus) à déterminer.

La charge  $q$  est exprimée en double série de Fourier par :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad \text{III-27}$$

$$\text{Avec: } Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad \text{III-28}$$

Le coefficient  $Q_{mn}$  est donné pour certains chargements par:

$$Q_{mn} = q_0 \quad \text{pour une distribution sinusoïdale} \quad \text{III-29-a}$$

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{nm\pi^2} \quad \text{pour une distribution uniforme} \quad \text{III-29-b}$$

Remplaçant l'équation III-26 dans l'équation III-25, les valeurs propres peuvent être obtenues ainsi comme suit :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{III-30}$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_{11} &= A\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2}A\beta^2, \quad S_{12} = \frac{1+\nu}{2}A\alpha\beta, \quad S_{13} = -B\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \quad S_{14} = -B^s\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \\ S_{22} &= \frac{1-\nu}{2}A\alpha^2 + A\beta^2, \quad S_{23} = -B\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad S_{24} = -B^s\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad S_{33} = D(\alpha^2 + \beta^2)^2, \\ S_{34} &= D^s(\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad S_{44} = H^s(\alpha^2 + \beta^2)^2 + A^s(\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{11} &= m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = -\alpha J_1, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = -\beta J_1, \quad m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2), \\ m_{34} &= I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned} \quad \text{III-31}$$

#### III.4. Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons illustré la procédure à entreprendre pour aboutir à des résultats prenant en compte la thématique posée, en effet, du fait que le matériau est hétérogène, la position de la surface neutre ne peut coïncider avec la surface médiane, pour des éléments structuraux conçus en matériaux nécessitant un traitement aussi laborieux une telle simplification est inadmissible.

Pour un premier cas de figures, le développement théorique s'est fait sous chargement statique et dynamique, avec un gradient défini par la formule de Mori-Tanaka et en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé, à quatre inconnues seulement de forme hyperbolique. La charge est verticale de distribution sinusoïdale exprimée en double série de Fourier. En

partant du principe d'Hamilton le principe de conservation de l'énergie nous avons déterminé toutes les réponses de la plaque.

## **Chapitre IV**

# **Étude analytique de l'instabilité Thermique des plaques solaires et photovoltaïque en matériaux à gradient de propriétés sur Fondations élastiques**

#### **IV.1. Introduction :**

Les plaques solaires sont utilisées pour concentrer le rayonnement solaire sur un absorbeur, positionné au point focal d'une antenne parabolique pour fournir l'énergie solaire, le collecteur du concentrant solaire est composé de réfracteur pour panneau solaire, un absorbeur, le cadre et le boîtier. La performance des plaques solaires se résume dans leurs efficacités, leurs précisions et leurs durées de vie. L'alignement optique dépend des conditions matérielles et d'exploitation. Normalement, les plaques solaires peuvent être fabriquées à partir de matériau pur poli ou bien des plaques revêtues d'une couverture spéciale [HOWELL A. et BERENY J.1997]. Cependant, pour certaines applications spécifiques telles pour les antennes solaires, les tours et les moteurs thermiques d'énergie solaire, les plaques doivent être de faible poids et travaillant dans des environnements à haute température. La grande résistance thermique fourni une rigidité nécessaire pour éviter des déformations excessives ou imprévues et garantie un meilleur alignement optique. Ces plaques doivent être fabriquées en utilisant un matériau spécial, tel les matériaux à gradient de propriété avec une combinaison d'acier et de la céramique [SHAJRERDI A.et al.2010, KHALFI Y.et al.2014, HADJI L. et al.2014,TOUNSI A.et al.2013c,BOUDERBA B.et al. 2013, ATTIA A.et al. 2014].

Les plaques reposant sur une fondation élastique trouvent un large champ d'application dans l'ingénierie industrielle, l'ingénierie civile et les travaux publiques, tel les radiers pour bâtiments, les réservoirs de stockage, les piscines, les socles pour générateur électrique, les pistes d'atterrissage des avions (les plaques Marsden), les dalles de transition des ponts, ...etc. Pour décrire l'interaction entre plaque et sol, plusieurs modèles ont été proposés, le plus simple est celui de Winkler où le sol est défini par un seul paramètre [WINKLER E. 1867]. Cependant, ce modèle est incapable de représenter la continuité de la déformation du sol or la zone d'application des charges, en d'autre termes il nie la présence de la cohésion. Et afin de remédier à cette représentation primitive, beaucoup de modèles à deux paramètres ont été proposés, tel celui de Pasternak [PASTERNAK P.L. 1954] où la cohésion est introduite en modélisant le sol par des ressorts interconnectés. Ce dernier est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique d'interaction sol-structure. Benyoucef et al. (2010) ont étudié la réponse en flexion pour des plaques épaisses en gradient de propriété reposant sur un sol élastique de type Pasternak. Ait Atmane et al. (2010) ont présenté une analyse des vibrations libres des plaques en gradient de propriété, reposant sur un sol décrit par deux paramètres, en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé. Kiani et Eslami (2012) étudiés le flambement

thermique et la réponse en poste flambement des plaques sandwich à gradient de propriété sur fondation élastique. Sobhy (2013) étudié le flambement et la vibration libre des plaques sandwich, avec un gradient exponentiel, reposant sur une fondation élastique sous diverses conditions aux limites. Zidi et al (2014) étudiés la réponse en flexion sous conditions hygothermique d'une plaque en gradient de propriété, reposant sur une fondation élastique. Ait Amar Meziane et al (2014) étudiés le comportement en flexion et en vibration libre d'une plaque sandwich, en gradient exponentielle de propriété, sous différentes conditions aux limites et reposant sur fondation élastique. Zenkour et al (2014) étudiés l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement en flexion, d'une plaque en gradient de propriété, sur fondation élastique. Yaghoobi et al (2014) présentés une étude analytique en post-flambement et en vibration libre non-linéaire, d'une poutre en gradient de propriété, sur une fondation élastique non-linéaire, sous chargement thermomécanique en utilisant VIM. Tebboune et al. (2015) ont discuté le comportement en flambement thermique, des plaques en gradient de propriété, sur une fondation élastique basée sur une simple théorie trigonométrique de déformation en cisaillement. Bounouara et al. (2016) examinés la vibration libre des plaques en gradient de propriétés nanométriques, reposant sur une fondation élastique, en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro. Salima et al. (2016) étudiés les vibrations libres des plaques rectangulaires, en gradient de propriété, sur fondation élastique de Winkler-Pasternak, en utilisant une simple théorie en cisaillement d'ordre élevé.

Dans les structures composites stratifiées, la combinaison permet d'obtenir des propriétés mécaniques et thermiques désirées [DRAICHE K.et al. 2014, CHATTIBI F.et al. 2015]. Cependant, le changement brusque des propriétés des matériaux au niveau de ou des interfaces peut entraîner de fortes contraintes menant au délaminage, fissuration, et d'autres mécanismes d'endommagement. Pour remédier à ce défaut majeur, les matériaux à gradient de propriété ont été proposés [KOIZUMI M.1997].

Le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriété est très important dans les domaines de la recherche et de l'industrie. [TALHA M. et SINGH B.N.2010, BELABED Z. et al. 2014, BENACHOUR A. et al. 2011, PRADHAN K.K. et CHAKRAVERTY S.2015, AIT YAHIA S.et al. 2015, AREFI M. 2015, BENNAI R.et al. 2015, SALLAI B.et al.2015, TAGRARA S.H et al.2015, EBRAHIMI F. et DASHTI S.2015, BELKORISSAT I et al. 2015, MAHI A.et al.2015, AIT ATMANE H.et al. 2015, KAR V.R. et PANDA S.K.2015, LARBI CHAHT F.et al.2015, ZENKOUR A.M. et ABOUELREGAL

A.E.2015, DARILMAZ K 2015, BENNOUN M.et al. 2016, AIT ATMANE H.et al. 2016]. Bourada et al (2012) ont présenté de nouvelles théories raffinées à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique, des plaques sandwichs en gradient de propriété. Hamidi et al. (2015) proposés une théorie sinusoïdale à cinq variables, avec prise de l'effet de l'étirement transversal pour l'étude du comportement thermomécanique de plaques sandwichs en gradient de propriété. Bouchafa et al. (2015) étudiés les contraintes thermiques et la déflexion des plaques sandwichs en gradient de propriété, en utilisant une nouvelle théorie raffinée hyperbolique. Akbas (2015) présenté une solution élastique pour une poutre courbée, faite en gradient de propriété avec différentes sections. Nguyen et al (2015) examinés la flexion, la vibration et la réponse en flambement des plaques sandwich en gradient de propriété, en utilisant une théorie d'ordre élevé raffinée.

Les plaques solaires en gradient de propriété sont couramment utilisées dans des environnements thermiques, ils peuvent flambées sous des charges thermiques et mécaniques. Alors, l'étude du flambement de ces plaques est essentielle pour assurer une conception efficace et fiable. En utilisant une approche analytique, on obtient des expressions pour les charges de flambement. Shahrjerdi et al. (2010) utilisés une théorie de déformation en cisaillement du deuxième ordre pour l'analyse de la distribution des contraintes, dans une plaque solaire à gradient de propriété. En utilisant aussi la théorie du deuxième ordre, Shahrjerdi et al. (2011 ab) analysés la vibration des plaques solaires à gradient de propriété dépendante de la température. Lanhe (2004) analysé la température critique et la différence de la température critique pour une plaque rectangulaire à gradient de propriété, modérément épaisse et simplement appuyée, en se basant sur la théorie du premier ordre dans le sens de Von Karman. Pour des plaques à gradient de propriété et modérément épaisses, il a été constaté que le cisaillement transversal a des effets considérables sur la différence de température critique de flambement. Le flambement thermique des plaques obliques à gradient de propriété, simplement appuyées a été étudié par la théorie des déformations en cisaillement du premier ordre par Ganapathi et Prakash (2006), les effets du rapport des épaisseurs, de la puissance du gradient et de l'angle d'inclinaison sur la différence de la température critique ont été présentés. Na et Kim (2006) enquêtés sur le post-flambement thermique des plaques à gradient de propriété, en utilisant la méthode des éléments finis à trois dimensions. Zhao et al. (2009) puis Zhao et Liew (2009) analysés le comportement des plaques à gradient de propriété en flambement et en post-flambement en invoquant la méthode sans élément kp-Ritz. Matsunaga (2009) présenté une théorie d'ordre élevé pour le

flambement thermique des plaques à gradient de propriété, en utilisant la méthode de l'expansion en série de puissances de composantes de déplacement, un ensemble d'équations fondamentales de plaques rectangulaires à gradient de propriété a été dérivé. La théorie en déformation de cisaillement trigonométrique a été utilisée par Zenkour et Sobhy (2011) pour étudier le flambement thermique des plaques à gradient de propriété, reposant sur des fondations élastique définit par deux paramètres. Bouazza et al. (2010) ont étudié le flambement thermo-élastique des plaques à gradient de propriété en utilisant la théorie du premier ordre. Les effets de changements de caractéristiques de la plaque, de la composition de matériau et de la fraction volumique des matériaux le constituant, sur la différence de température critique des plaques à gradient de propriété, simplement appuyés, sont également étudiés. Yaghoobi et Torabi (2013) présentés une solution exacte pour un flambement thermique de plaques à gradient de propriété reposant sur fondation élastique avec changement des conditions aux limites. Akil et al (2014) étudiés la réponse en post-flambement pour une poutre sandwich en gradient de propriété à l'aide d'une théorie cohérente d'ordre élevée. Bakora et al. (2015) examinés le comportement thermomécanique en post-flambement de plaques à gradient de propriété, reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Hadji et al (2015) présentés une théorie raffinée d'ordre  $n$  à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques à gradient de propriété.

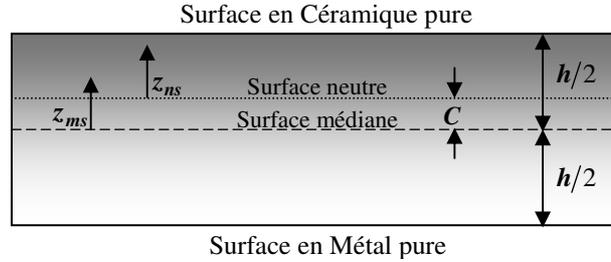
Du fait que les propriétés des matériaux des plaques à gradient de propriété variées à travers la direction de l'épaisseur, il est évidant que la surface neutre de cette plaque ne peut coïncider avec la surface médiane. Par conséquent, les déformations en étirement et en flexion de la plaque sont couplées. Dans Certaines publications [MORIMOTO T. et al. 2006, ABRATE S 2008, ZHANG D.G. et ZHOU Y.H. 2008, SAIDI A.R. et JOMEHZADEH E. 2009, OULD LARBI L. et al. 2013, BOUSAHLA A. et al. 2014, FEKRAR A. et al. 2014, BOURADA M. et al. 2015] les chercheurs ont démontré qu'il n'y a pas de couplage d'étirement-flexion dans les équations constitutives si le plan de référence est choisi de façon appropriée.

## **IV.2. Formulation du problème :**

### **IV.2.1. Formulation du problème Plan neutre :**

Dans cette étude, la plaque en gradient de propriété est composée d'un mélange du métal et de la céramique et les propriétés sont supposées varier selon l'épaisseur de la plaque. Du fait de l'asymétrie des propriétés des matériaux par rapport à la surface médiane, les équations de traction et ou de compression sont couplées au moment fléchissant. Mais, si on considère

la surface neutre comme origine les propriétés des matériaux de la plaque deviennent symétriques, pour définir la position exacte de la surface neutre, deux surfaces sont à considérer pour mesurer  $z$ , on les nomme,  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  qui sont la mesure par rapport à la surface médiane et par rapport à la surface neutre respectivement.



**Figure IV.01:** les positions des surfaces médiane et neutre dans une plaque en FGM

La fraction de volume de la céramique  $V_C$  est exprimée en se basant sur les coordonnées  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  comme :

$$V_C = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{IV-01}$$

Où  $p$  est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à 0, et  $C$  est la distance entre la surface neutre et la surface médiane, les propriétés du matériau non homogène de la plaque en FGM peuvent être obtenues par le biais de la règle de mélange de Voigt.

En utilisant l'équation IV-01, les propriétés du matériau non-homogène de la plaque P-FGM est fonction des coordonnées de l'épaisseur et prennent la forme :

$$P(z) = P_M + (P_C - P_M) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{IV-02}$$

Où  $P_M$  et  $P_C$  sont les propriétés correspondantes au métal et à la céramique, respectivement.

Dans ce travail, nous supposons que le module d'élasticité  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_t$ , sont décrits par l'équation IV-02, le coefficient de Poisson  $\nu$  est considéré constant sur toute l'épaisseur. La position de la surface neutre dans une plaque en matériau à gradient de propriété est celle qui satisfait l'annulation du moment statique, pour un tel module d'élasticité, la formule est donnée comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad \text{IV-03}$$

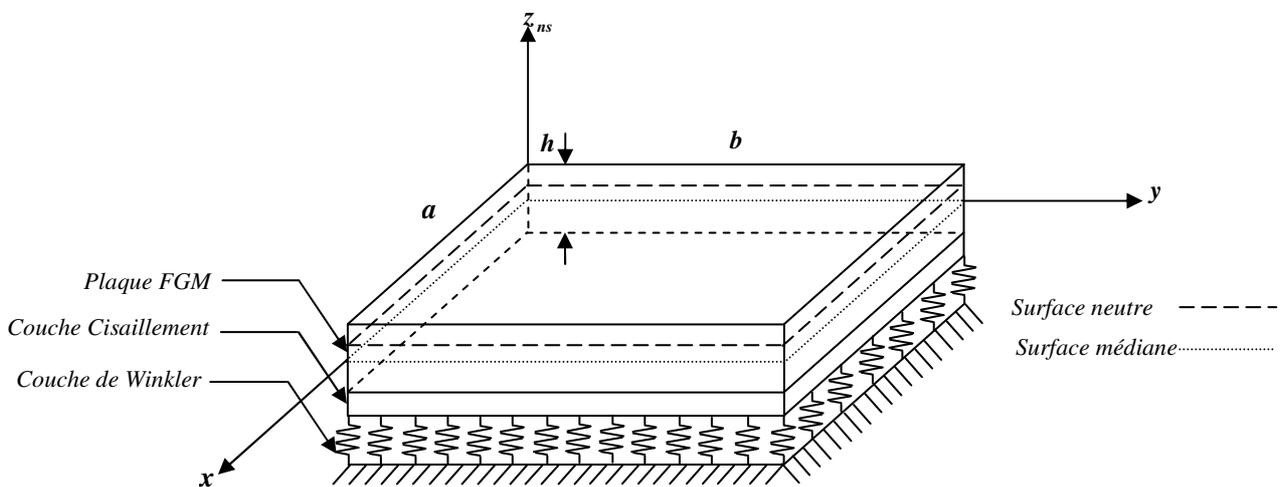
Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue comme :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad \text{IV-04}$$

Il est clair que le paramètre "C" prend la valeur de 0 pour une plaque homogène isotrope.

### IV.3. Modèle théorique :

Considérons une plaque en FGM de forme rectangulaire de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$ , reposant sur une fondation élastique défini par deux paramètres comme indiqué sur la figure IV.02. Contrairement à d'autres théories d'ordre élevé, nous avons quatre inconnus seulement pour la fonction de cisaillement hyperbolique.



**Figure IV.02:** Système de coordonnées et géométrie d'une plaque reposant sur sol élastique

#### IV.3.1. Les hypothèses de base :

- (i) L'origine des coordonnées cartésiennes du système coïncide avec la surface neutre de la plaque FGM.

(ii) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et leurs déformations sont infinitésimales.

(iii) Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes, celle du moment fléchissant  $w_b$  et celle de cisaillement  $w_s$ , ces composantes sont indépendante de  $z$ .

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad \text{IV-05}$$

(iv) La contrainte normale au plan  $\sigma_z$  est négligeable en-là comparant à  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

(v) Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  sont dus à l'extension, le moment et la composante de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad \text{IV-06}$$

(vi) Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées identiques à celles données par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  sont données comme suit:

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \text{IV-07}$$

Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  engendrées conjointement avec  $w_s$ , la variation parabolique des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont dues au contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  dans l'épaisseur de la plaque, et qui sont nulles sur les faces supérieure et inférieure. Par conséquence, l'expression de  $u_s$  et  $v_s$  peut être donnée par :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{IV-08}$$

Où  $f(z_{ns})$  est une fonction parabolique qui s'écrit comme suit :

$$f(z_{ns}) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h}(z_{ns} + C)\right) - (z_{ns} + C)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad \text{IV-09}$$

### IV.3.2. Cinématique :

En se basant sur les précédentes hypothèses, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations IV-05 à IV-09 comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z_{ns}) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV-10}$$

Les équations déformation - déplacement non linéaire de Von Karman sont comme suit :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} & \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{IV-11}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Et

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}
 \tag{IV-12}$$

### IV.3.3. Relation constitutive:

La plaque est soumise à une charge thermique  $T(x, y, z_{ns})$ . La relation constitutive linéaire est :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_t T \\ \varepsilon_y - \alpha_t T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{IV-13}$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les contraintes et les déformations, respectivement. Utilisant les propriétés des matériaux définis dans l'équation IV-02, les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2} \quad \text{IV-14a}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2} \quad \text{IV-14b}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} \quad \text{IV-14c}$$

#### IV.3.4. les équations de stabilité:

Les équations d'équilibre des plaques en gradient de propriétés, reposant sur une fondation élastique de Pasternak, sous chargement thermique, peuvent résulter de l'énergie potentielle stationnaire. L'énergie potentielle totale  $V$  de la plaque, s'écrit comme suit:

$$V = U + U_F \quad \text{IV-15}$$

Où  $U$  est l'énergie totale de déformation, exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha_t T) + \sigma_y (\varepsilon_y - \alpha_t T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dz_{ns} dy dx \quad \text{IV-16}$$

Et  $U_F$  est l'énergie de déformation de la fondation élastique de Pasternak, donné par :

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f_e (w_b + w_s) dy dx \quad \text{IV-17}$$

Où  $f_e$  est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation de Pasternak :

$$f_e = K_w (w_b + w_s) - K_g \nabla^2 (w_b + w_s) \quad \text{IV-18}$$

Où  $K_w$  est la rigidité de la fondation de Winkler et  $K_g$  est une constante prenant en compte l'effet de l'interaction de cisaillement des éléments verticaux.

Utilisant les équations VI-11, VI-12 et VI-13 et en appliquant le principe des travaux virtuels pour minimiser l'énergie potentielle totale, résultante des expressions des équations d'équilibre de la plaque reposant sur une fondation élastique de Pasternak, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} - f_e &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} - f_e &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV-19}$$

Avec

$$\bar{N} = \left[ N_x \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right]
 \tag{IV-20}$$

Et

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}
 \tag{IV-21a}$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}
 \tag{IV-21b}$$

Utilisant les équations VI-13 et VI-21, les résultantes des contraintes de la plaque en gradient de propriété peuvent être associées aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma
 \tag{IV-22}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t
 \tag{IV-23a}$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t
 \tag{IV-23b}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t
 \tag{IV-23c}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}
 \tag{IV-23d}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad \text{IV-23e}$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad \text{IV-23f}$$

Avec  $A_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s$  et  $H_{ij}^s$  sont les coefficients de rigidité, définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h-c}{2}}^{\frac{h+c}{2}} Q_{11}(1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns} \quad \text{IV-24a}$$

$$\text{Et} \quad (A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad \text{IV-24b}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{\frac{h-c}{2}}^{\frac{h+c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns} \quad \text{IV-24c}$$

Les contraintes et les moments résultants de la charge thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h-c}{2}}^{\frac{h+c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu} \alpha_t(z_{ns}) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns} \quad \text{IV-25}$$

Avec :  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$  et  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$

Les équations de stabilité des plaques à gradient de propriété peuvent être obtenues par le biais du critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque sous charges thermique est défini en termes de composantes de déplacement par  $u_0^0, v_0^0, w_b^0$  et  $w_s^0$ , les composantes de déplacement au voisinage de l'état d'équilibre diffère sont définis par  $u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1$  par rapport à de la position d'équilibre.

Alors, les déplacements totaux à l'état adjacent sont donnés comme suit:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1 \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1 \quad w_b = w_b^0 + w_b^1 \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad \text{IV-26}$$

En conséquence, la résultante des contraintes est divisée en deux termes représentant l'état d'équilibre stable et l'état voisin. Les résultantes des contraintes avec indice 1 sont des fonctions linéaires de déplacement d'indice 1. Considérant ces mentions et utilisant les équations IV-19 et IV-26, les équations de stabilité deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{IV-27}$$

Avec

$$\bar{N}^1 = \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad \text{IV-28a}$$

$$f_e^1 = K_w (w_b^1 + w_s^1) - K_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) \quad \text{IV-28b}$$

Les termes  $N_x^0$ ,  $N_y^0$  et  $N_{xy}^0$  sont les résultantes des forces de pré-flambement obtenues.

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha_t(z_{ns}) E(z_{ns}) T}{1-\nu} dz_{ns} \quad \text{et} \quad N_{xy}^0 = 0 \quad \text{IV-29}$$

### IV.3.5. Solution Trigonométrique pour un flambement thermique:

Considérant une plaque rectangulaire, simplement appuyée, utilisant la solution exacte de l'équation VI-27. Les conditions aux limites suivantes sont retenues pour la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$\text{À } x=0, a \quad \text{nous avons} \quad v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad \text{IV-30a}$$

$$\text{À } y=0, b \quad \text{nous avons} \quad u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \quad \text{IV-30b}$$

La solution approximative suivante satisfait les deux équations différentielles et les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn}^1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{smn}^1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{IV-31}$$

Où  $U_{mn}^1$ ,  $V_{mn}^1$ ,  $W_{bmn}^1$  et  $W_{smn}^1$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$  et  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ .

Substituant les équations IV-22 et IV-31 dans IV-27, on obtient :

$$[K]\{\Delta\} = 0 \quad \text{IV-32}$$

Avec

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\}^t \quad \text{IV-33}$$

Et  $[K]$  est la matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{IV-34}$$

Dans la quelle

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\ a_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= 0 \\ a_{14} &= \alpha[B_{11}^s\alpha^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\beta^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \\ a_{23} &= 0 \\ a_{24} &= \beta[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2 + B_{22}^s\beta^2] \\ a_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + N_x^0\alpha^2 + N_y^0\beta^2 + K_g(\alpha^2 + \beta^2) + K_w) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 + N_x^0\alpha^2 + N_y^0\beta^2 + K_g(\alpha^2 + \beta^2) + K_w) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 + N_x^0\alpha^2 + N_y^0\beta^2 + \\ &\quad K_g(\alpha^2 + \beta^2) + K_w) \end{aligned} \quad \text{IV-35}$$

En appliquant l'approche de condensation pour éliminer les coefficients associés avec des déplacements dans le plan, l'équation IV-32 peut s'écrire comme :

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV-36}$$

Où

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad [K^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{14} \\ 0 & a_{24} \end{bmatrix} \quad [K^{22}] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{IV-37a}$$

$$\Delta^1 = \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \\ V_{mn}^1 \end{Bmatrix} \quad \Delta^2 = \begin{Bmatrix} W_{bmn}^1 \\ W_{smn}^1 \end{Bmatrix} \quad \text{IV-37b}$$

L'équation IV-36 présente une paire de deux équations de matrice

$$[K^{11}]\Delta^1 + [K^{12}]\Delta^2 = 0 \quad \text{IV-38a}$$

$$[K^{12}]^T \Delta^1 + [K^{22}]\Delta^2 = 0 \quad \text{IV-38b}$$

Résolvant l'équation IV-38a pour  $\Delta^1$  et substituant le résultat dans l'équation IV-38b, les équations suivantes sont obtenues :

$$[\bar{K}^{22}]\Delta^2 = 0 \quad \text{IV-39}$$

Où

$$[\bar{K}^{22}] = [K^{22}] - [K^{12}]^T [K^{11}]^{-1} [K^{12}] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & b_{44} \end{bmatrix} \quad \text{IV-40a}$$

Et

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= a_{33} & \bar{a}_{34} &= a_{34} & \bar{a}_{43} &= a_{34} & b_{44} &= a_{44} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0} \\ b_0 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 & b_1 &= a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24} & b_2 &= a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14} \end{aligned} \quad \text{IV-40b}$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients de rigidité, équation IV-39 doit être nul. Cela donne l'expression suivante de la force de flambement thermique.

$$N_x^0 = N_y^0 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad \text{IV-41}$$

#### IV.3.6.1. Flambement des plaques FGM sous température uniforme

La température initiale de la plaque est supposée  $T_i$ , la température augmente uniformément jusqu'à la température finale  $T_f$  à la quelle la plaque flambe. Donc, la température variée de  $\Delta T = T_f - T_i$ . Utilisant cette distribution de température, la variation de la température critique donnant flambement  $\Delta T_{cr}$  est obtenue en utilisant les équations IV-29 et IV-41.

$$\Delta T_{cr} = \frac{1}{\beta_1(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad \text{IV-42}$$

Où

$$\bar{\beta}_1 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha_t(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} dz_{ns}. \quad \text{IV-43}$$

### IV.3.6.2. Flambement des plaques FGM sous température à gradient à travers l'épaisseur

On suppose que la température à la face supérieure (Céramique pure) soit  $T_M$  et que la température varie par rapport à cette dernière, posons la variation de la température suivant une loi de puissance à travers l'épaisseur, si sur la face inférieure la température atteint  $T_M$  la plaque flambe. Dans ce cas, la température à travers l'épaisseur proposée par (Zenkour et Sobhy, 2010 et 2011) est modifiée en considérant la position exacte de la surface neutre.

$$T(z_{ns}) = \Delta T \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_M \quad \text{IV-44}$$

Où la différence de température de flambement  $\Delta T = T_C - T_M$  et  $\gamma$  est l'exposant de température ( $0 < \gamma < \infty$ ). Notons que lorsque la valeur de  $\gamma$  est égale à l'unité, la température change linéairement à travers l'épaisseur, et lorsque la valeur de  $\gamma$  est supérieure à l'unité la température change non-linéairement à travers l'épaisseur.

Similairement, la variation de la température critique donnant flambement  $\Delta T_{cr}$  est obtenue en utilisant les équations IV-29 et IV-41.

$$\Delta T_{cr} = \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2 + T_M \bar{\beta}_1 (\lambda^2 + \mu^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})}{\bar{\beta}_2 (\alpha^2 + \beta^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})} \quad \text{IV-45}$$

Où

$$\bar{\beta}_2 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha_t(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma dz_{ns} \quad \text{IV-46}$$

### IV.4. Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons illustré la procédure à entreprendre pour aboutir à des résultats prenant en compte la thématique posée, dans ce deuxième cas de figures, le développement théorique s'est fait sous chargement thermique, la plaque a un gradient défini par la formule de loi de puissance et nous avons utilisé une théorie raffinée d'ordre élevé, à quatre inconnues seulement de forme hyperbolique. La plaque prend ou pas appui sur fondation élastique. En partant du principe des travaux virtuels nous avons déterminé la température critique.

**Chapitre V**

**Étude paramétrique des plaques  
en matériaux à gradient de propriétés  
sous chargement dynamique et thermique**

### V.1. Introduction :

Afin de confirmer l'exactitude des approches analytiques proposées, nous allons procéder à une étude comparative, en utilisant des exemples numériques, la comparaison se fera sur divers réponses avec ceux des travaux d'autres auteurs, après authentification, on se lancera dans une étude paramétrique où nous comparerons les réponses de la plaque avec et sans prise de la position exacte du plan neutre, en utilisant la théorie classique des plaques et la théorie d'ordre élevé avec cinq fonctions de cisaillement.

### V.2. Validation des résultats sous chargement dynamique :

Les tableaux V.01 à V.03 et les figures V.01 à V.03 présentent une étude comparative des résultats obtenus en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variable seulement et avec une fonction de cisaillement transverse de forme hyperbolique, en prenant en compte la position exacte de la surface neutre avec ceux des travaux d'autres auteurs, où la surface médiane est considérée comme surface neutre, on s'est intéressé aux réponses statique et dynamique, à savoir les contraintes, les déformations et les fréquences des vibrations libres, ces tests de validation témoignent de l'exactitude du développement.

Dans ce qui suit la plaque est constituée du métal l'aluminium Al et la céramique l'Alumina  $Al_2O_3$ , soit Al/  $Al_2O_3$  ou de l'aluminium Al et la céramique Zirconia  $ZrO_2$ , soit Al/  $ZrO_2$ , la loi régissant la variation des propriétés matérielles est celle de loi de puissance, la plaque est simplement appuyée, soumise à une charge verticale de distribution sinusoïdale exprimée par une double série de Fourier.

Les propriétés des matériaux constituant les plaques étudiées sont comme suit :

La céramique (Alumina,  $Al_2O_3$ ),  $E_C = 380$  GPa,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 3800$  kg/m<sup>3</sup>.

La céramique (Zirconia,  $ZrO_2$ ),  $E_C = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 5700$  kg/m<sup>3</sup>.

Le métal (Aluminium, Al),  $E_m = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_m = 2702$  kg/ m<sup>3</sup>.

Dans les études comparative et paramétrique on s'est intéressé aux paramètres adimensionnels suivants:

$$\bar{u}(z) = \frac{100E_c h^3}{q_0 a^4} u(0, \frac{b}{2}, z) \quad , \quad \bar{w} = \frac{100E_c h^3}{q_0 a^4} w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}), \quad \bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}(0, \frac{b}{2}, z)$$

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \bar{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

**Tableau V.01** : Contrainte et flexion adimensionnelles - Plaque Carrée – Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

P=1	$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode	a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h=100
Quasi-3D <sup>(a)</sup>	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
Quasi-3D <sup>(b)</sup>	0.5910	1.4917	14.9440	0.7020	0.5868	0.5648
Quasi-3D <sup>(c)</sup>	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
Quasi-3D <sup>(d)</sup>	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
Quasi-3D <sup>(e)</sup>	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
FSDT <sup>(d)</sup>	0.8060	2.0150	20.1500	0.7291	0.5889	0.5625
CPT <sup>(d)</sup>	0.8060	2.0150	20.1500	0.5623	0.5623	0.5623
Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.5812	1.4898	14.9676	0.7284	0.5890	0.5625
Présente	0.5820	1.4901	14.9675	0.7283	0.5889	0.5625
P=4	$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode	a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h=100
Quasi-3D <sup>(a)</sup>	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
Quasi-3D <sup>(b)</sup>	0.4340	1.1593	11.7380	1.1095	0.8698	0.8241
Quasi-3D <sup>(c)</sup>	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
Quasi-3D <sup>(d)</sup>	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
Quasi-3D <sup>(e)</sup>	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
FSDT <sup>(d)</sup>	0.6420	1.6049	16.0490	1.1125	0.8736	0.8286
CPT <sup>(d)</sup>	0.6420	1.6049	16.0490	0.8281	0.8281	0.8281
Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.4449	1.1794	11.9209	1.1599	0.8815	0.8287
Présente	0.4470	1.1802	11.9210	1.1573	0.8810	0.8286
P=10	$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode	a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h=100
Quasi-3D <sup>(a)</sup>	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
Quasi-3D <sup>(b)</sup>	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
Quasi-3D <sup>(c)</sup>	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
Quasi-3D <sup>(d)</sup>	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
Quasi-3D <sup>(e)</sup>	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361

FSDT <sup>(d)</sup>	0.4796	1.1990	11.9900	1.3178	0.9966	0.9360
CPT <sup>(d)</sup>	0.4796	1.1990	11.9900	0.9354	0.9354	0.9354
Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.3259	0.8785	8.9060	1.3909	1.0087	0.9362
Présente	0.3279	0.8793	8.9060	1.3888	1.0083	0.9361

<sup>(a)</sup> : les résultats sont pris de NEVES AMA et al. 2012

<sup>(b)</sup> : les résultats sont pris de FERREIRA AJM 2012

<sup>(c)</sup> : les résultats sont pris de CARRERA E 2012

<sup>(d)</sup> : les résultats sont pris de BRISCHETTO S 2008

<sup>(e)</sup> : les résultats sont pris de CINEFRA M 2011

<sup>(f)</sup> : les résultats sont pris de HUU-TAI THAI et al. 2013

Le tableau V.01 présente une étude comparative de la contrainte axiale adimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  et de la flexion maximale adimensionnelle  $\bar{w}$  au centre de la plaque, de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse avec trois valeurs d'indice de puissance  $p=1, 4$  et  $10$ .

Les résultats sont comparés avec ceux de quasi-3D donnés par Neves et al. pour une fonction de cisaillement sinusoïdale [NEVES AMA et al. 2012], hyperbolique [FERREIRA AJM 2012] et cubique [CARRERA E 2012] et de quasi-3D donnés par Carrera et al. par développement analytique [BRISCHETTO S 2008] et par éléments finis [CINEFRA M 2011], ceux de la théorie classique des plaques et ceux du premier ordre donnée par Carrera et al. [BRISCHETTO S 2008], ainsi que ceux donnée par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013].

Les résultats sont tous semblables, encore plus pour une valeur d'indice de puissance  $p=1$  où le C est relativement moins important les résultats sont identiques, d'autre part lorsque la plaque est plus élancées les résultats converges vers la même valeur.

**Tableau V.02** : Contraintes, déplacement et flexion adimensionnels - Plaque Carrée – Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - (a/h =10)

p	Méthode	a/h= 10				
		$\bar{u}$ (-h/4)	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$ (h/3)	$\bar{\sigma}_{xy}$ (-h/3)	$\bar{\sigma}_{xz}$ (h/6)
1	Quasi-3D <sup>(d)</sup>	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D <sup>(g)</sup>	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT <sup>(h)</sup>	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT <sup>(i)</sup>	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT <sup>(g)</sup>	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2599
	Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
	Présente	0.6416	0.5889	1.4901	0.6111	0.2589
2	Quasi-3D <sup>(d)</sup>	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D <sup>(g)</sup>	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT <sup>(h)</sup>	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT <sup>(i)</sup>	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT <sup>(g)</sup>	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
	Présente	0.8988	0.7571	1.3965	0.5443	0.2707
4	Quasi-3D <sup>(d)</sup>	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D <sup>(g)</sup>	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT <sup>(h)</sup>	1.0941	0.8819	1.1783	0.5666	0.2580
	HSDT <sup>(i)</sup>	1.0457	0.8814	1.1755	0.5666	0.2623
	TSDT <sup>(g)</sup>	1.0502	0.8815	1.1794	0.5666	0.2519
	Huu-Tai <sup>(f)</sup>	1.0502	0.8815	1.1794	0.5666	0.2537
	Présente	1.0509	0.8810	1.1802	0.5671	0.2494
8	Quasi-3D <sup>(d)</sup>	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D <sup>(g)</sup>	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SSDT <sup>(h)</sup>	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT <sup>(i)</sup>	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT <sup>(g)</sup>	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	Huu-Tai <sup>(f)</sup>	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088

	Présente	1.0772	0.9740	0.9486	0.5860	0.2054
--	----------	--------	--------	--------	--------	--------

<sup>(d)</sup> : les résultats sont pris de BRISCHETTO S 2008

<sup>(f)</sup> : les résultats sont pris de HUU-TAI THAI et al. 2013

<sup>(g)</sup> : les résultats sont pris de WU CP et al. 2011

<sup>(h)</sup> : les résultats sont pris de ZENKOUR AM 2006

<sup>(i)</sup> : les résultats sont pris de MANTARI JL 2012

Le tableau V.02 présente une étude comparative des contraintes adimensionnelles axiale  $\overline{\sigma_x}$ , dans le plan  $\overline{\sigma_{xy}}$  et transversale  $\overline{\sigma_{xz}}$  ainsi que le déplacement  $\overline{u}$  et la flexion maximale  $\overline{w}$ , d'une plaque de forme carrée, relativement épaisse avec quatre valeurs d'indice de puissance  $p=1, 2, 4$  et  $8$ , ces valeurs sont calculées à l'origine du repère de la plaque  $(x, y) = (0, 0)$ .

Les résultats sont comparés avec ceux de quasi-3D donnés par Carrera et al. par développement analytique [BRISCHETTO S 2008] et ceux de Wu et al. [WU CP et al. 2011], par ceux prédits par la théorie sinusoïdale de déformation en cisaillement [ZENKOUR AM 2006], par ceux de la théorie d'ordre élevé [MANTARI JL 2012], par ceux de la théorie du troisième ordre [WU CP et LI HY 2011], ainsi que ceux donnée par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013].

Les résultats sont tous semblables. Pour une valeur d'indice de puissance  $p=1$  où le C est relativement moins important les résultats sont identiques. D'autre part, une exception est faite pour les résultats donnés par la contrainte adimensionnelle transversale  $\overline{\sigma_{xz}}$  pour le cas de Quasi-3D où l'effet de l'étirement transversal est pris en considération  $\varepsilon_z \neq 0$ .

**Tableau V.03:** Pulsation adimensionnelle  $\hat{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

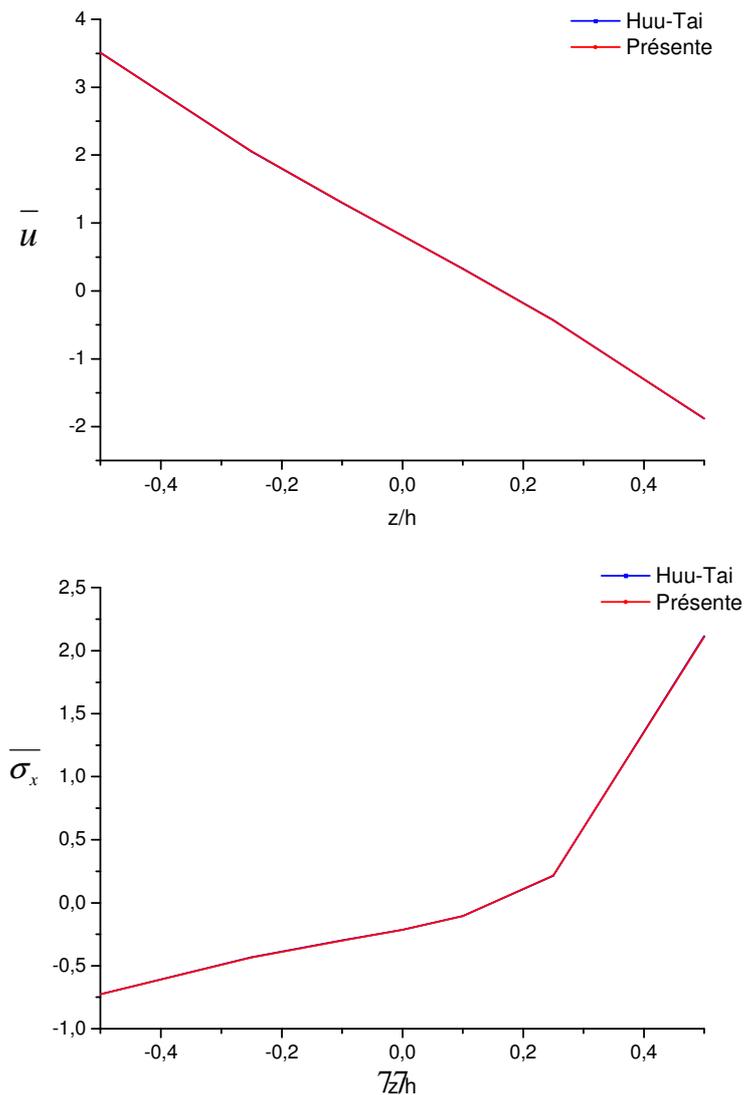
a/h	Mode (m,n)	Méthode	p				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Présente	0.2112	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301
	2(1,2)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Présente	0.4622	0.3988	0.3606	0.2982	0.2772
	3(2,2)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Présente	0.6687	0.5801	0.5253	0.4288	0.3950
10	1(1,1)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Présente	0.0576	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
	2(1,2)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Présente	0.1376	0.1173	0.1059	0.0902	0.0856
	3(2,2)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Présente	0.2112	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301
20	1(1,1)	TSDT <sup>(i)</sup>	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT <sup>(k)</sup>	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Huu-Tai <sup>(f)</sup>	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Présente	0.0147	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

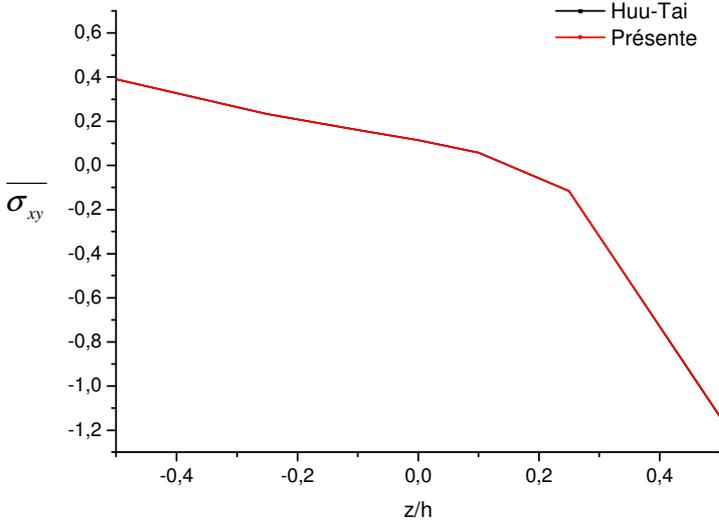
- (f) : les résultats sont pris de HUU-TAI THAI et al. 2013
- (j) : les résultats sont pris de HOSSEINI HASHEMI et al. 2011b
- (k) : les résultats sont pris de HOSSEINI HASHEMI et al. 2011c

Le tableau V.03 présente une étude comparative des fréquences adimensionnelles des trois premiers modes, d'une plaque de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse avec cinq valeurs d'indice de puissance  $p=0, 0.5, 1, 4$  et  $10$ .

Les résultats sont comparés avec la théorie d'ordre élevé TSDT et celle du premier ordre FSDT, ainsi que ceux donnée par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013]. Les résultats obtenus sont identiques.

**Figure V.01:** Variation du déplacement et des contraintes adimensionnels à travers l'épaisseur - Plaque Carrée - Al/ Al2 O3 ( $a=b=5h, p=4$ )

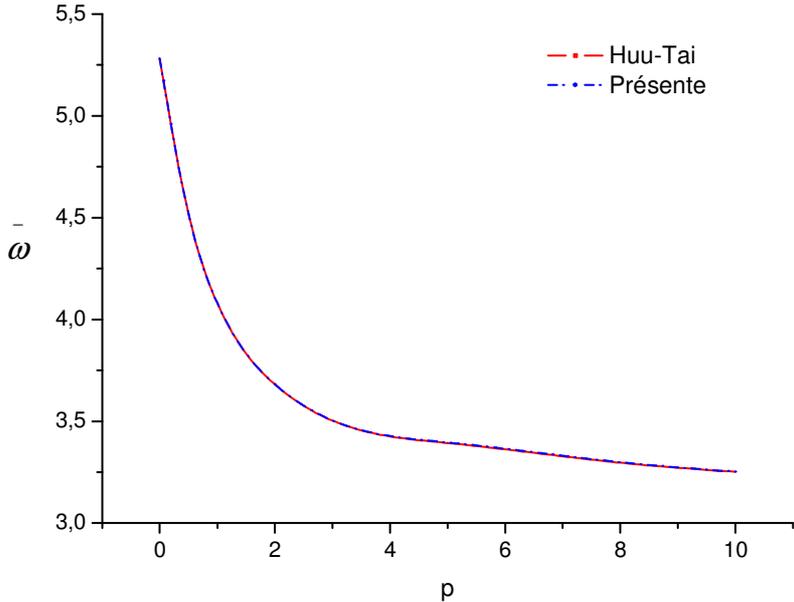




les figures V.01 sont une représentation graphique de la variation à travers l'épaisseur du déplacement normal adimensionnel  $\bar{u}$  des contraintes adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_{xy}$ , d'une plaque en Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de forme Carrée, épaisse avec une valeurs d'indice de puissance p=4.

Les résultats sont comparés avec ceux donnés par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013]. Les deux représentations graphiques se superposent.

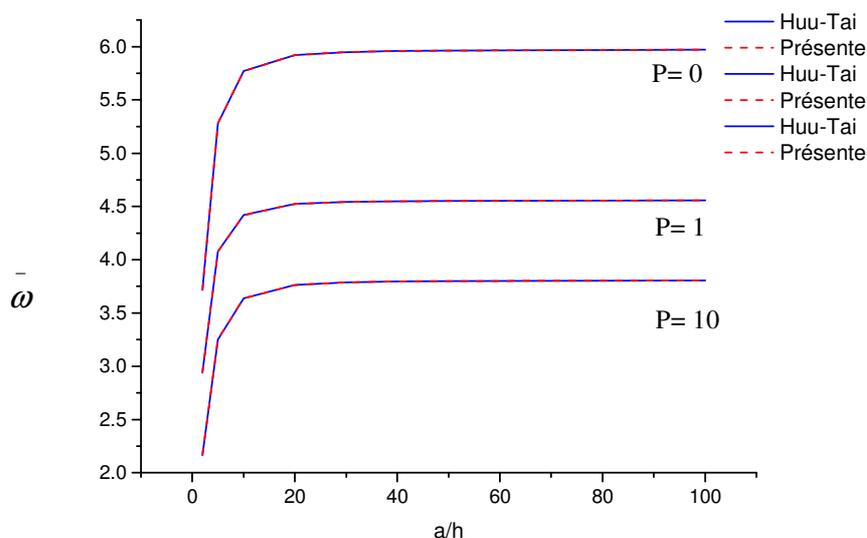
**Figure V.02:** Effet de l'exposant P sur la pulsation fondamentale  $\bar{\omega}$  - Plaque Carrée - Al/ Al<sub>2</sub> O<sub>3</sub> - a/h=5



La figure V.02 est une représentation graphique de la fréquence adimensionnelle du premier mode, d'une plaque de forme carrée, épaisse  $a/h=5$ , avec des valeurs d'indice de puissance  $p$  allant de 0 à 10.

Les résultats sont comparés avec ceux donnée par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013]. Les deux représentations graphiques se superposent.

**Figure V.03:** Effet du rapport des épaisseurs sur la pulsation fondamentale  $\bar{\omega}$  - Plaque Carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



De même, la figure V.03 est une représentation graphique de la fréquence adimensionnelle du premier mode, d'une plaque de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse, pour des valeurs d'élanement allant de 4 à 100, avec des valeurs d'indice de puissance  $p=0, 1$  et 10.

Les résultats sont comparés avec ceux donnée par Huu-Tai et al. [HUU-TAI THAI et al. 2013]. Les deux représentations graphiques se superposent.

### V.3. Conclusion:

Enfin, les études comparatives actuelles montrent que les résultats obtenus à partir de la méthode proposée concordent bien avec les résultats analytiques existants dans la littérature, ce qui valide la fiabilité et la précision de l'approche analytique actuelle. Il convient de noter que la théorie raffinée de la plaque hyperbolique proposée sur la base de la position exacte de la surface neutre, implique quatre inconnues seulement. De ce fait, on peut se lancer dans l'étude paramétrique.

#### V.4. Etude paramétrique sous chargement dynamique :

Les tableaux du V.04 à V.08 et les figures V.05 à V.07 présentent une étude paramétrique avec divers fonction de déformation en cisaillement transverse avec et sans prise en compte de la position exacte du plan neutre. Les fonctions de cisaillement utilisées sont :

$$\text{T.P.T} : f(z) = \frac{4}{3h^2} z^3$$

$$\text{E.P.T} : f(z) = z - ze^{-2(z/h)^2}$$

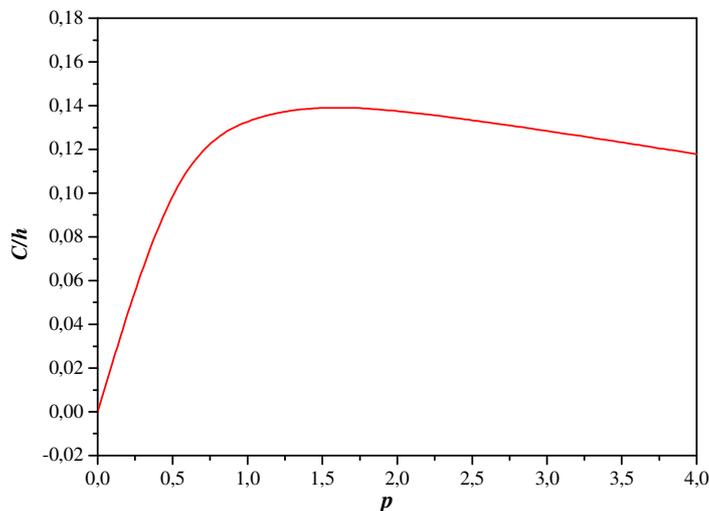
$$\text{H.P.T} : f(z) = h - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{S.P.T} : f(z) = h - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$\text{Hebali} : f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$$

Dans ce qui suit la plaque est constituée du métal l'aluminium Al et la céramique l'Alumina  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , soit Al/  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , puis de l'oxyde Zirconium  $\text{ZrO}_2$ , soit Al/  $\text{ZrO}_2$ , la loi régissant la variation des propriétés matérielles est celle de Mori-Tanaka, la plaque est simplement appuyée, soumise à une charge verticale de distribution sinusoïdale exprimée en double série de Fourier.

**Figure V.04:** Variation de la position de la surface neutre pour la formule de Mori-Tanaka en fonction du Paramètre matériel  $p$ .



On observe sur ce graphe que pour  $p$  compris entre 0 et 1.5 le "C" est ascendant, au-delà de  $p=1.5$  le "C" est descendant. Pour ce qui suit la valeur maximale de  $p$  sera de 4.

**Tableau V.04:** Contrainte et flexion adimensionnelles - Plaque Carrée – Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

P=1		$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode		a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h =100
CPT - C=0		0.5245	1.3112	13.1129	0.7225	0.7225	0.7225
TPT - C=0		0.5001	1.3015	13.1119	0.9724	0.7627	0.7229
Présente	CPT	0.5245	1.3112	13.1129	0.7225	0.7225	0.7225
	TPT	0.5079	1.3046	13.1122	0.9171	0.7539	0.7229
	Hebali	0.5015	1.3020	13.1120	0.9717	0.7625	0.7229
	SPT	0.5056	1.3036	13.1121	0.9193	0.7543	0.7229
	HPT	0.5081	1.3047	13.1122	0.9168	0.7538	0.7229
	EPT	0.5032	1.3027	13.1120	0.9205	0.7545	0.7229
P=2		$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode		a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h =100
CPT - C=0		0.4573	1.1432	11.4329	0.8441	0.8441	0.8441
TPT - C=0		0.4287	1.1318	11.4317	1.1802	0.8981	0.8446
Présente	CPT	0.4573	1.1432	11.4329	0.8441	0.8441	0.8441
	TPT	0.4414	1.1369	11.4322	1.0948	0.8845	0.8445
	Hebali	0.4305	1.1325	11.4318	1.1788	0.8978	0.8446
	SPT	0.4390	1.1359	11.4321	1.0992	0.8852	0.8445
	HPT	0.4417	1.1369	11.4322	1.0943	0.8844	0.8445
	EPT	0.4364	1.1348	11.4320	1.1020	0.8857	0.8445
P=4		$\bar{\sigma}_x$ (h/3)			$\bar{w}$		
Méthode		a/h =4	a/h =10	a/h =100	a/h =4	a/h =10	a/h =100
CPT - C=0		0.3967	0.9919	9.9192	0.9411	0.9411	0.9411
TPT - C=0		0.3680	0.9804	9.9181	1.3652	1.0093	0.9418
Présente	CPT	0.3967	0.9919	9.9192	0.9411	0.9411	0.9411
	TPT	0.3795	0.9850	9.9185	1.2850	0.9966	0.9417
	Hebali	0.3699	0.9811	9.9182	1.3636	1.0090	0.9418
	SPT	0.3768	0.9839	9.9184	1.2912	0.9976	0.9417
	HPT	0.3798	0.9851	9.9186	1.2844	0.9965	0.9417
	EPT	0.3740	0.9827	9.9183	1.2955	0.9984	0.9417

Le tableau V.04 présente une étude comparative de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et de la flexion maximale  $\bar{w}$  adimensionnelles au centre de la plaque, de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse avec trois valeurs d'indice de puissance  $p=1, 2$  et  $4$ .

Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la contrainte axiale ou la flexion.
- Les valeurs données par CPT sont grossières excepté pour des élancements importants.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$ , qui devient plus importante lorsque le rapport a/h diminue et devient insignifiante lorsque le rapport a/h devient important. Inversement, pour la flexion maximale  $\bar{w}$  elle se réduit lorsque le rapport a/h diminue et elle devient insignifiante lorsque le rapport a/h est important.
- D'autre part lorsque l'indice de puissance p croit, la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  s'amplifie et la flexion maximale  $\bar{w}$  se réduit.

**Tableau V.05:** Contraintes, déplacement et flexion adimensionnels - Plaque Carrée – Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (a/h =10)

p	Méthode	a/h= 10					
		$\bar{u}$ (-h/4)	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$ (h/3)	$\bar{\sigma}_{xy}$ (-h/3)	$\bar{\sigma}_{xz}$ (h/6)	
1	CPT - C=0	0.8752	0.7225	1.3112	0.5803	0	
	TPT - C=0	0.8700	0.7627	1.3015	0.5784	0.2563	
	Présente	CPT	0.8752	0.7225	1.3112	0.5803	0
		TPT	0.8718	0.7539	1.3046	0.5813	0.2282
		Hebali	0.8705	0.7625	1.3020	0.5785	0.2535
		SPT	0.8720	0.7543	1.3036	0.5817	0.2374
		HPT	0.8718	0.7538	1.3047	0.5813	0.2273
EPT	0.8722	0.7545	1.3027	0.5820	0.2463		
2	CPT - C=0	1.0296	0.8441	1.1432	0.5754	0	
	TPT - C=0	1.0223	0.8981	1.1318	0.5730	0.2437	
	Présente	CPT	1.0296	0.8441	1.1432	0.5754	0
		TPT	1.0240	0.8845	1.1369	0.5760	0.2096
		Hebali	1.0230	0.8978	1.1325	0.5732	0.2405
		SPT	1.0242	0.8852	1.1359	0.5764	0.2195
		HPT	1.0240	0.8844	1.1369	0.5760	0.2087
EPT	1.0244	0.8857	1.1348	0.5767	0.2289		
3	CPT - C=0	1.0729	0.9016	1.0487	0.5859	0	
	TPT - C=0	1.0645	0.9643	1.0369	0.5832	0.2307	
	Présente	CPT	1.0729	0.9016	1.0487	0.5859	0
		TPT	1.0656	0.9502	1.0421	0.5861	0.2041

		Hebali	1.0653	0.9640	1.0377	0.5834	0.2276
		SPT	1.0656	0.9511	1.0410	0.5865	0.2142
		HPT	1.0656	0.9501	1.0422	0.5861	0.2032
		EPT	1.0657	0.9518	1.0399	0.5868	0.2238
4	CPT - C=0		1.0875	0.9411	0.9919	0.5943	0
	TPT - C=0		1.0785	1.0093	0.9804	0.5915	0.2209
	Présente	CPT	1.0875	0.9411	0.9919	0.5943	0
		TPT	1.0790	0.9966	0.9850	0.5942	0.2032
		Hebali	1.0794	1.0090	0.9811	0.5917	0.2181
		SPT	1.0789	0.9976	0.9839	0.5946	0.2142
		HPT	1.0790	0.9965	0.9851	0.5942	0.2023
		EPT	1.0788	0.9984	0.9827	0.5949	0.2227

Le tableau V.05 présente une étude comparative des contraintes adimensionnelles axiale  $\overline{\sigma}_x$ , dans le plan  $\overline{\sigma}_{xy}$  et transversale  $\overline{\sigma}_{xz}$  ainsi que le déplacement  $\overline{u}$  et de la flexion maximale  $\overline{w}$ , d'une plaque de forme carrée, relativement épaisse avec quatre valeurs d'indice de puissance  $p=1, 2, 3$  et  $4$ , ces valeurs sont calculées à l'origine du repère de la plaque  $(x, y) = (0,0)$ .

Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur les contraintes et les déplacements.
- Les valeurs données par CPT sont grossières.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée les déplacements normaux pour une valeur de  $p=1$ , cette amplification s'atténue pour des valeurs de  $p > 1$  et elle devient insignifiante pour des valeurs de  $p > 4$ .
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre réduit la flexion maximale  $\overline{w}$  cette réduction devient insignifiante pour des valeurs de  $p > 4$ .
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$  et la contrainte dans le plan  $\overline{\sigma}_{xy}$ , qui s'atténuent pour des valeurs de  $p > 4$ .
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre réduit la contrainte transversale  $\overline{\sigma}_{xz}$ , qui devient insignifiante lorsque le  $p$  est important.

**Tableau V.06:** Pulsation fondamentale adimensionnelle  $\bar{\beta}$  - Plaque Carrée – Al/ZrO<sub>2</sub>

Méthode		p = 0		p = 1		a/h = 5			
		a/h = $\sqrt{10}$	a/h = 10	a/h = 5	a/h = 10	a/h = 20	p = 2	p = 3	p = 4
CPT - C=0		0.6442	0.0689	0.2450	0.0627	0.0157	0.2468	0.2487	0.2495
TPT - C=0		0.5379	0.0671	0.2238	0.0610	0.0156	0.2237	0.2243	0.2245
Présente	CPT	0.6442	0.0689	0.2450	0.0627	0.0157	0.2468	0.2487	0.2495
	TPT	0.5379	0.0671	0.2256	0.0612	0.0156	0.2260	0.2263	0.2261
	Hebali	0.5379	0.0671	0.2238	0.0610	0.0156	0.2238	0.2244	0.2246
	SPT	0.5381	0.0671	0.2255	0.0612	0.0156	0.2258	0.2262	0.2260
	HPT	0.5379	0.0671	0.2256	0.0612	0.0156	0.2260	0.2263	0.2261
	EPT	0.5387	0.0671	0.2255	0.0612	0.0156	0.2258	0.2261	0.2259

Le tableau V.06 présente une étude comparative de la fréquence adimensionnelle du premier mode, d'une plaque de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse avec différentes valeurs d'indice de puissance p.

Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la fréquence adimensionnelle.
- Les valeurs données par CPT sont grossières.
- Bien évidemment pour une valeur de p = 0, soit une plaque entièrement en céramique, la surface neutre coïncide avec la surface médiane, les résultats ne sont pas affectés.
- Pour une valeur de p = 1, la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur pour une plaque épaisse et s'atténue pour une plaque mince.
- Pour un rapport d'élanement a/h = 5, la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur.

**Tableau V.07:** Pulsation adimensionnelle  $\hat{\omega}$  - Plaque carrée – Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

a/h	Mode (m,n)	Méthode	p				
			0	0.5	1	4	
5	(1,1)	CPT - C=0		0.2314	0.1691	0.1561	0.1438
		TPT - C=0		0.2112	0.1566	0.1429	0.1285
		Présente	CPT	0.2314	0.1691	0.1561	0.1438
			TPT	0.2112	0.1573	0.1454	0.1310
			Hebali	0.2112	0.1556	0.1429	0.1286

10		SPT	0.2112	0.1572	0.1453	0.1308	
		HPT	0.2112	0.1573	0.1455	0.1310	
		EPT	0.2113	0.1572	0.1453	0.1306	
	(1,2)	CPT - C=0		0.5535	0.4029	0.3710	0.3418
		TPT - C=0		0.4622	0.3593	0.3125	0.2756
		Présente	CPT	0.5535	0.4029	0.3710	0.3418
			TPT	0.4622	0.3491	0.3229	0.2853
			Hebali	0.4622	0.3422	0.3126	0.2758
			SPT	0.4624	0.3488	0.3224	0.2845
			HPT	0.4622	0.3491	0.3229	0.2854
	EPT	0.4628	0.3488	0.3222	0.2840		
	(2,2)	CPT - C=0		0.8503	0.6164	0.5665	0.5217
		TPT - C=0		0.6688	0.5532	0.4523	0.3943
		Présente	CPT	0.8503	0.6164	0.5665	0.5217
			TPT	0.6688	0.5096	0.4715	0.4119
			Hebali	0.6687	0.4969	0.4525	0.3945
			SPT	0.6693	0.5091	0.4707	0.4105
			HPT	0.6688	0.5097	0.4716	0.4120
	EPT	0.6702	0.5090	0.4702	0.4096		
	(1,1)	CPT - C=0		0.0592	0.0433	0.0401	0.0369
		TPT - C=0		0.0576	0.0423	0.0390	0.0357
Présente		CPT	0.0592	0.0433	0.0401	0.0369	
		TPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359	
		Hebali	0.0576	0.0423	0.0390	0.0357	
		SPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359	
		HPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359	
EPT		0.0577	0.0424	0.0392	0.0359		
(1,2)		CPT - C=0		0.1463	0.1070	0.0989	0.0911
		TPT - C=0		0.1376	0.1014	0.0931	0.0844
		Présente	CPT	0.1463	0.1070	0.0989	0.0911
			TPT	0.1376	0.1020	0.0943	0.0855
			Hebali	0.1376	0.1012	0.0931	0.0844
	SPT		0.1376	0.1019	0.0942	0.0854	
	HPT		0.1376	0.1020	0.0943	0.0855	
EPT	0.1377	0.1019	0.0942	0.0853			
(2,2)	CPT - C=0		0.2314	0.1691	0.1561	0.1438	
	TPT - C=0		0.2112	0.1566	0.1429	0.1285	
	Présente	CPT	0.2314	0.1691	0.1561	0.1438	
		TPT	0.2112	0.1573	0.1454	0.1310	
		Hebali	0.2112	0.1556	0.1429	0.1286	
		SPT	0.2112	0.1572	0.1453	0.1308	
		HPT	0.2112	0.1573	0.1455	0.1310	
EPT	0.2113	0.1572	0.1453	0.1306			
20	(1,1)	CPT - C=0		0.0149	0.0109	0.0100	0.0093
		TPT - C=0		0.0149	0.0108	0.0100	0.0092
	Présente	CPT	0.0149	0.0109	0.0100	0.0093	

			TPT	0.0147	0.0108	0.0100	0.0092
			Hebali	0.0147	0.0108	0.0100	0.0092
			SPT	0.0147	0.0108	0.0100	0.0092
			HPT	0.0147	0.0108	0.0100	0.0092
			EPT	0.0148	0.0108	0.0100	0.0092

Le tableau V.07 présente une étude comparative des fréquences adimensionnelles des trois premiers modes, d'une plaque de forme carrée, mince, relativement épaisse et épaisse avec quatre valeurs d'indice de puissance  $p=0, 0.5, 1$  et  $4$ .

Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la fréquence adimensionnelle.
- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour un élancement important.
- Pour une valeur de  $p = 0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la surface neutre coïncide avec la surface médiane, les résultats ne sont pas affectés.
- Pour une valeur de  $p = 0.5$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur juste pour le premier mode et elle se réduit pour les modes supérieurs.
- Pour une valeur de  $p \geq 1$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur pour une plaque épaisse et s'atténue pour une plaque mince, quelque soit le mode. Ainsi elle est plus importante lorsque le  $p$  est plus important.
- Pour un rapport d'élancement  $a/h = 20$ , soit une plaque mince, la fréquence adimensionnelle n'est pas affectée.

**Tableau V.08:** Les deux premières pulsations adimensionnelles  $\hat{\omega}$  - Plaque carrée – Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Mode	a/h	Méthode	p					
			0	0.5	1	4		
1	2	CPT - C=0		1.2570	0.9058	0.8302	0.7642	
		TPT - C=0		0.9297	0.8352	0.6294	0.5424	
		Présente	CPT		1.2570	0.9058	0.8302	0.7642
			TPT		0.9297	0.7147	0.6618	0.5717
			Hebali		0.9293	0.6932	0.6294	0.5425
			SPT		0.9307	0.7140	0.6604	0.5695
			HPT		0.9296	0.7148	0.6619	0.5720
		EPT		0.9326	0.7139	0.6597	0.5682	
	5	CPT - C=0		0.2314	0.1691	0.1561	0.1438	
		TPT - C=0		0.2112	0.1566	0.1429	0.1285	

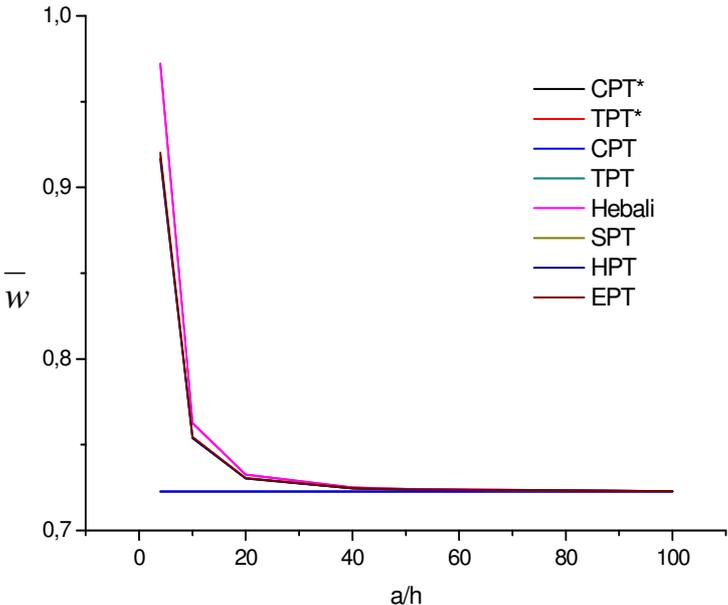
		Présente	CPT	0.2314	0.1691	0.1561	0.1438	
			TPT	0.2112	0.1573	0.1454	0.1310	
			Hebali	0.2112	0.1556	0.1429	0.1286	
			SPT	0.2112	0.1572	0.1453	0.1308	
			HPT	0.2112	0.1573	0.1455	0.1310	
			EPT	0.2113	0.1572	0.1453	0.1306	
	10	CPT - C=0		0.0592	0.0433	0.0401	0.0369	
		TPT - C=0		0.0576	0.0423	0.0390	0.0357	
		Présente	CPT	0.0592	0.0433	0.0401	0.0369	
			TPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359	
			Hebali	0.0576	0.0423	0.0390	0.0357	
			SPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359	
	HPT	0.0576	0.0424	0.0392	0.0359			
	EPT	0.0577	0.0424	0.0392	0.0359			
	2	2	CPT - C=0		2.1783	1.6896	1.5405	1.2904
			TPT - C=0		1.7232	1.6896	1.1721	0.9892
			Présente	CPT	2.1783	1.6896	1.5405	1.2904
				TPT	1.7232	1.3482	1.2516	1.0615
Hebali				1.7206	1.2951	1.1707	0.9879	
SPT				1.7283	1.3473	1.2487	1.0573	
HPT		1.7229	1.3484	1.2520	1.0620			
EPT		1.7356	1.3481	1.2479	1.0553			
5		CPT - C=0		0.5535	0.4029	0.3710	0.3418	
		TPT - C=0		0.4622	0.3593	0.3125	0.2756	
		Présente	CPT	0.5535	0.4029	0.3710	0.3418	
			TPT	0.4622	0.3491	0.3229	0.2853	
			Hebali	0.4622	0.3422	0.3126	0.2758	
			SPT	0.4624	0.3488	0.3224	0.2845	
HPT		0.4622	0.3491	0.3229	0.2854			
EPT		0.4628	0.3488	0.3222	0.2840			
10		CPT - C=0		0.1463	0.1070	0.0989	0.0911	
		TPT - C=0		0.1376	0.1014	0.0931	0.0844	
	Présente	CPT	0.1463	0.1070	0.0989	0.0911		
		TPT	0.1376	0.1020	0.0943	0.0855		
		Hebali	0.1376	0.1012	0.0931	0.0844		
		SPT	0.1376	0.1019	0.0942	0.0854		
HPT	0.1376	0.1020	0.0943	0.0855				
EPT	0.1377	0.1019	0.0942	0.0853				

Le tableau V.08 présente une étude comparative des fréquences adimensionnelles des deux premiers modes, d'une plaque de forme carrée, avec des rapports d'élancement  $a/h=2, 5$  et  $10$  avec quatre valeurs d'indice de puissance  $p=0, 0.5, 1$  et  $4$ .

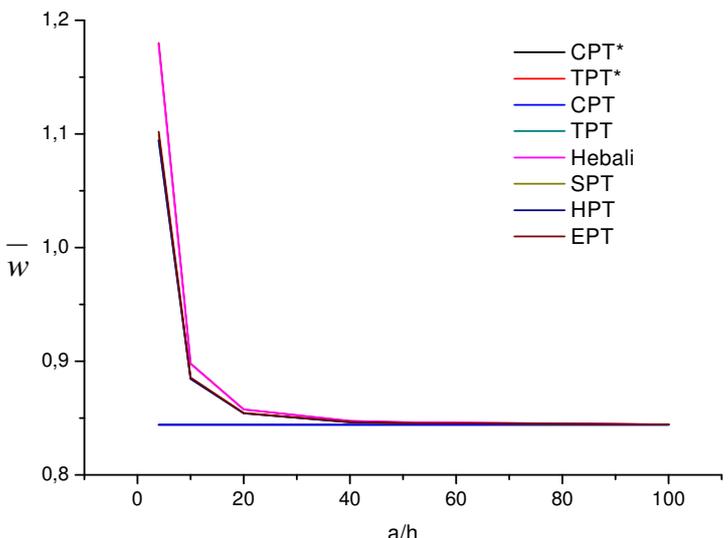
Les résultats montrent :



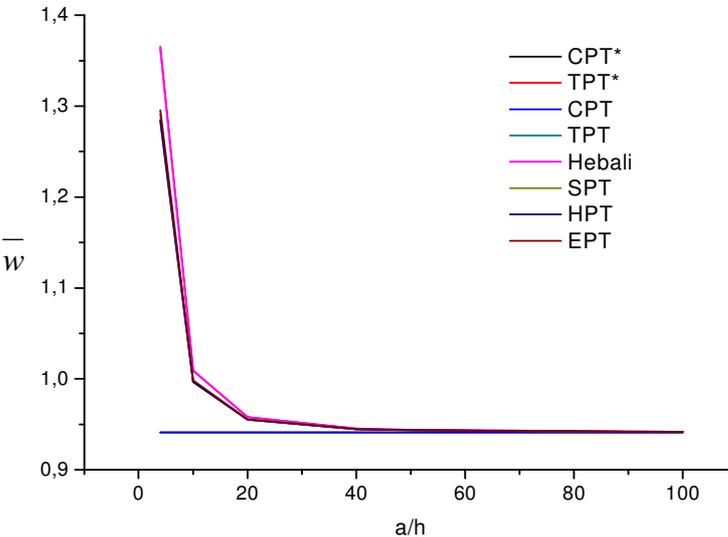
p= 1



p= 2



p= 4



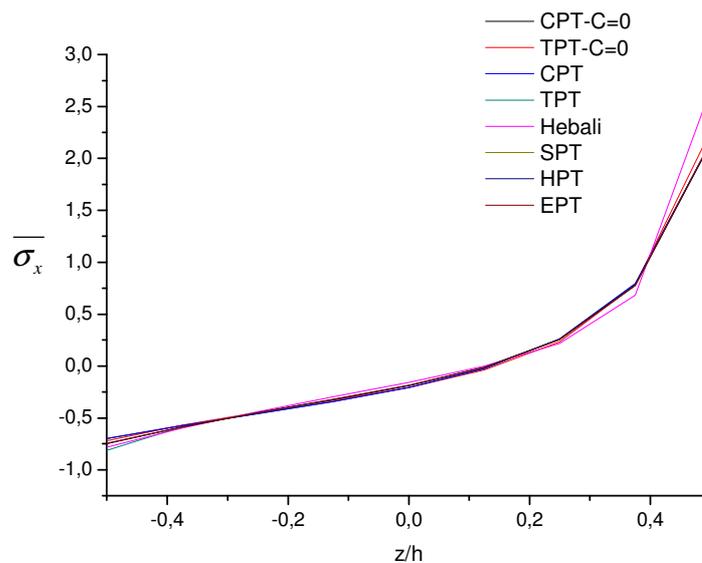
**Figure V.06:** Contrainte adimensionnelle - Plaque Carrée – Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – a=5h

Les figures V.06 sont une représentation graphique de la variation de la contrainte  $\overline{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur, d'une plaque en Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de forme Carrée, épaisse avec trois valeurs d'indice de puissance p=1, 2 et 4.

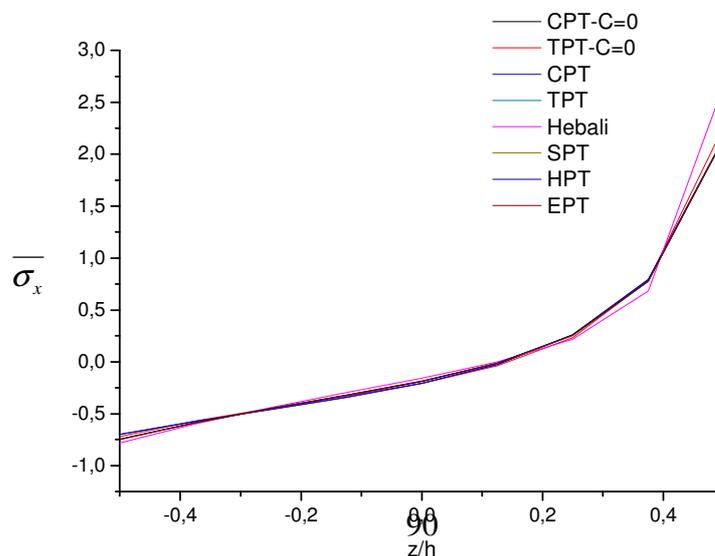
Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la fréquence adimensionnelle.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$ .
- Lorsque l'indice de puissance p croit, la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$  s'amplifie et elle s'atténue pour des valeurs de p > 4.

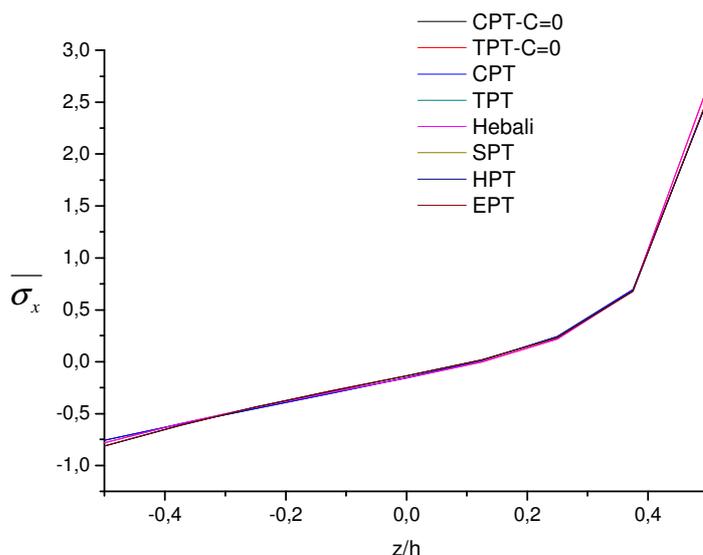
Pour P=1:



Pour P=2:



Pour P=4:



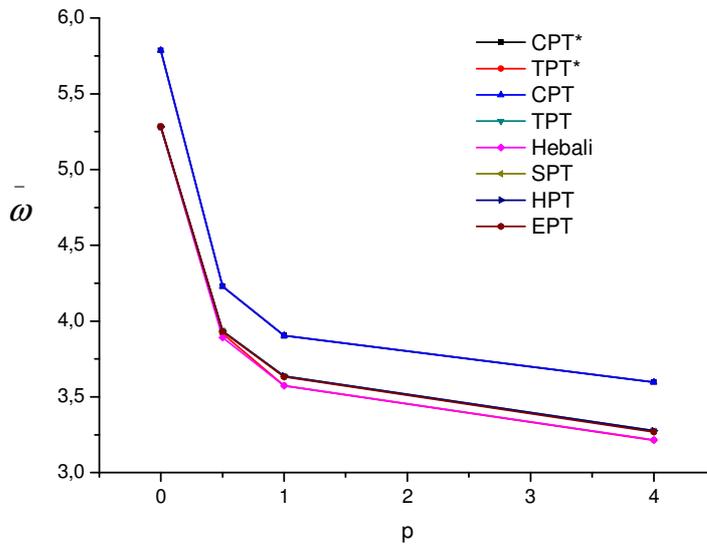
**Figure V.07:** Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée – Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Les figures 07 présentent une étude comparative des fréquences adimensionnelles des sept premiers modes, d'une plaque de forme carrée, pour des rapports d'élancement  $a/h=5, 10$  et  $100$  avec quatre valeurs d'indice de puissance  $p=0, 0.5, 1$  et  $4$ .

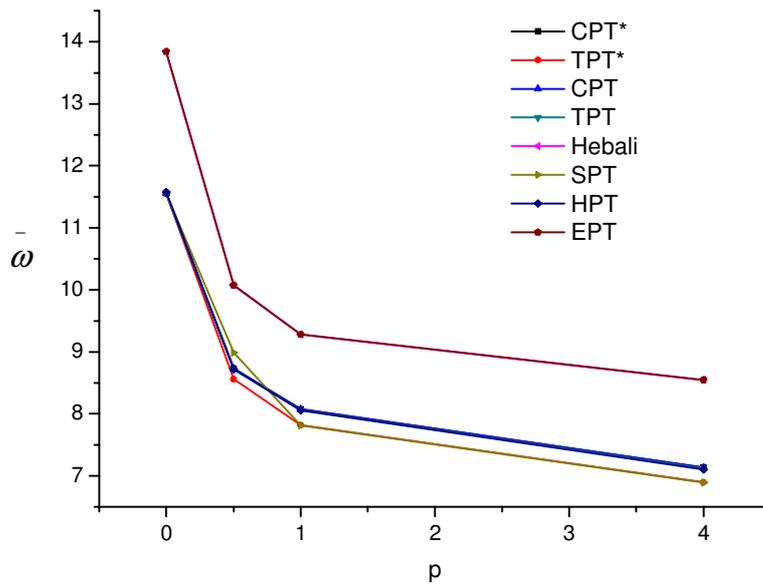
Les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la fréquence adimensionnelle.
- Les valeurs données par CPT se joignent aux valeurs données par les théories d'ordre élevé que pour des élancements importants.
- Pour une valeur de  $p = 0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la surface neutre coïncide avec la surface médiane, les résultats ne sont pas affectés.
- Pour une valeur de  $p = 0.5$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur juste pour le premier mode et elle se réduit pour les autres, cette réduction est encore plus ressentie pour les modes supérieurs.
- Pour une valeur de  $p \geq 1$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur quelque soit le mode, cette amplification est encore plus ressentie pour les modes supérieurs. ainsi elle est plus importante lorsque le  $p$  est plus important.
- Pour des rapports d'élancement important, soit une plaque mince, la fréquence adimensionnelle n'est pas affectée quelque soit le mode.

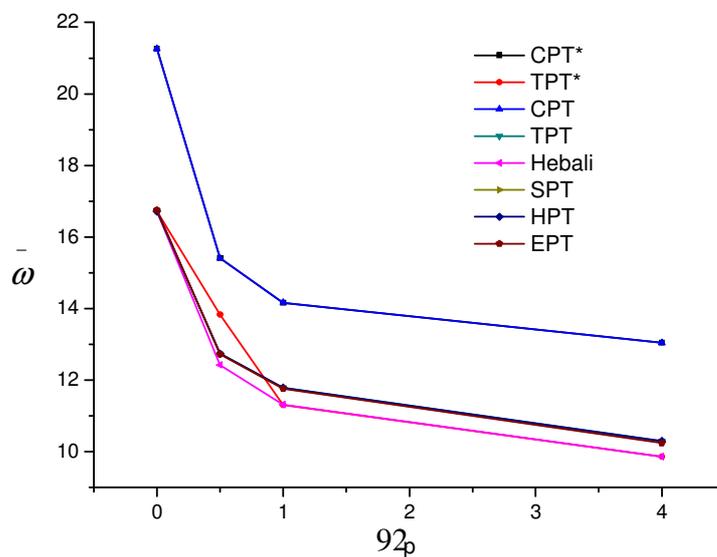
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 5, mode 1(1,1)



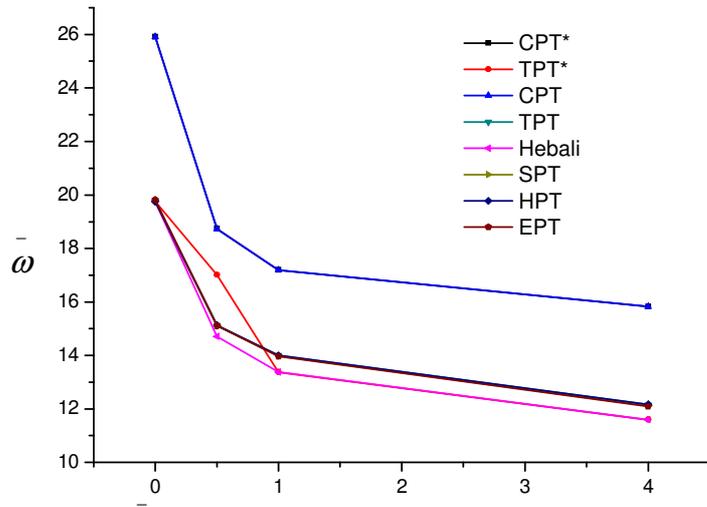
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 5, mode 2(1,2)



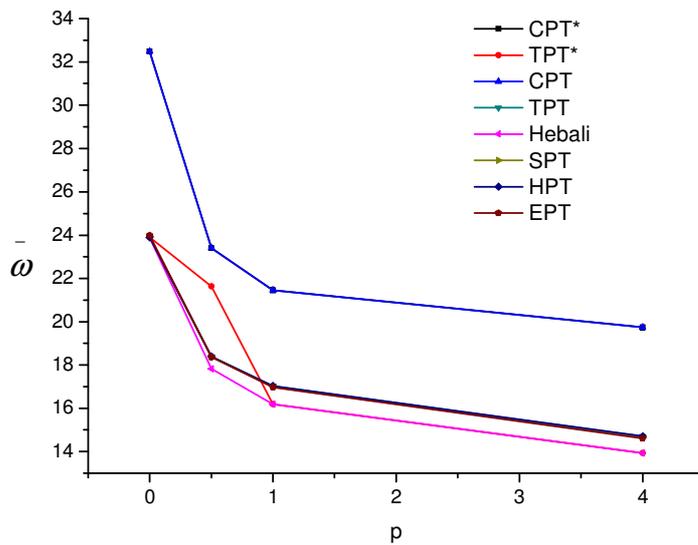
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 5, mode 4(2,2)



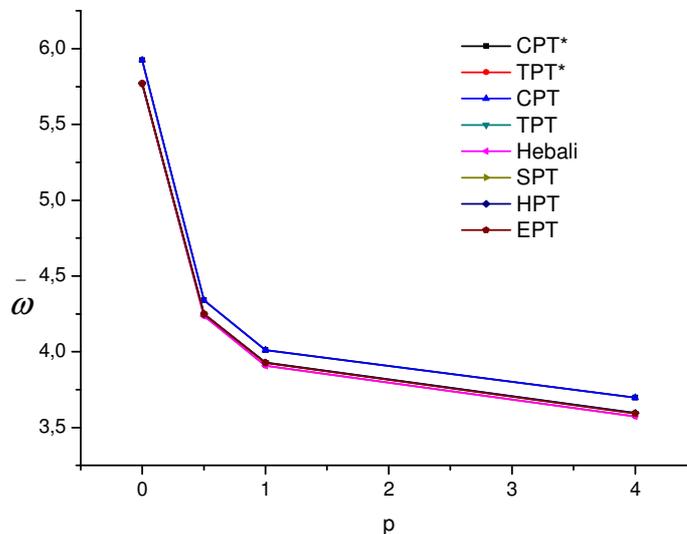
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 5, mode 5(3,1)



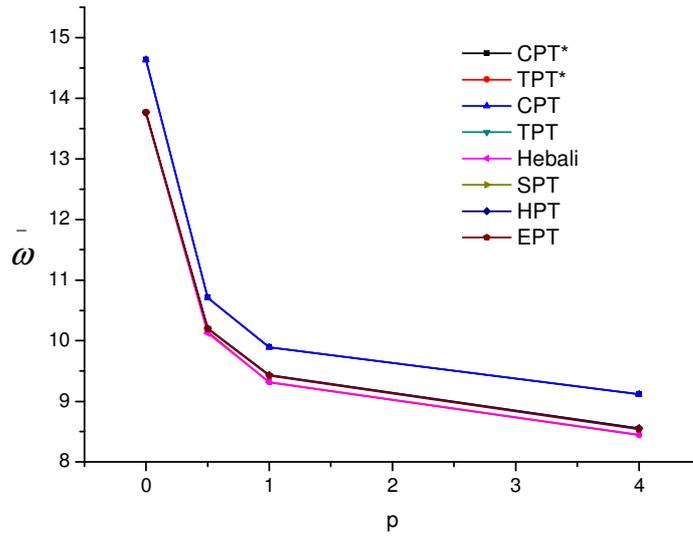
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 5, mode 7(3,2)



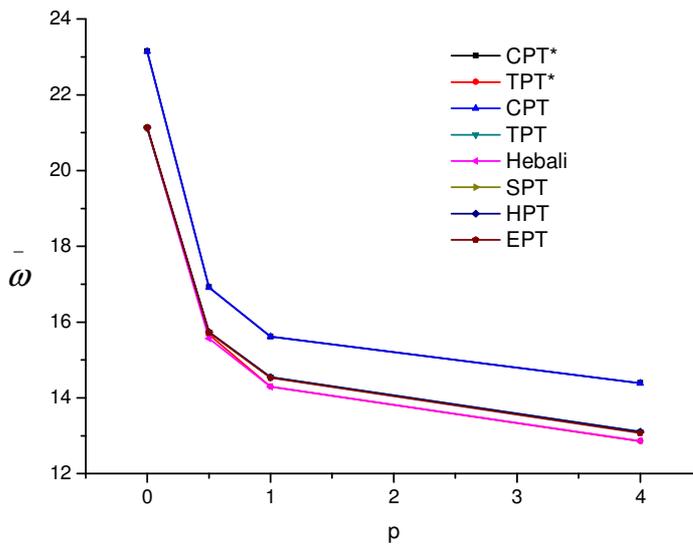
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 10, mode 1(1,1)



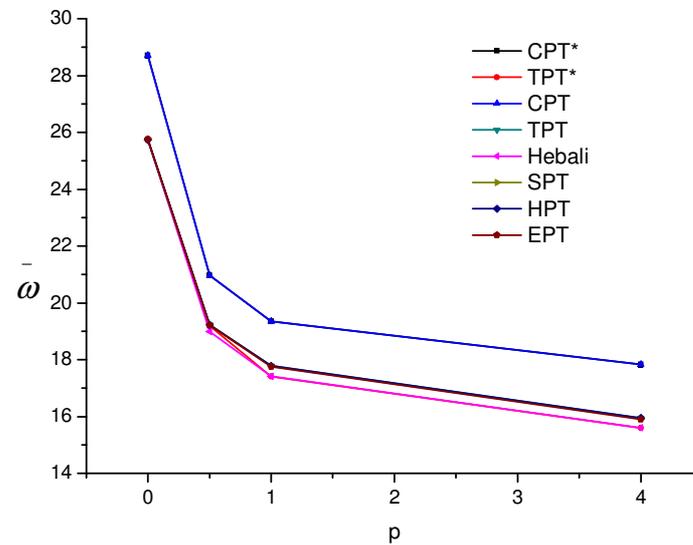
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 10, mode 2(1,2)



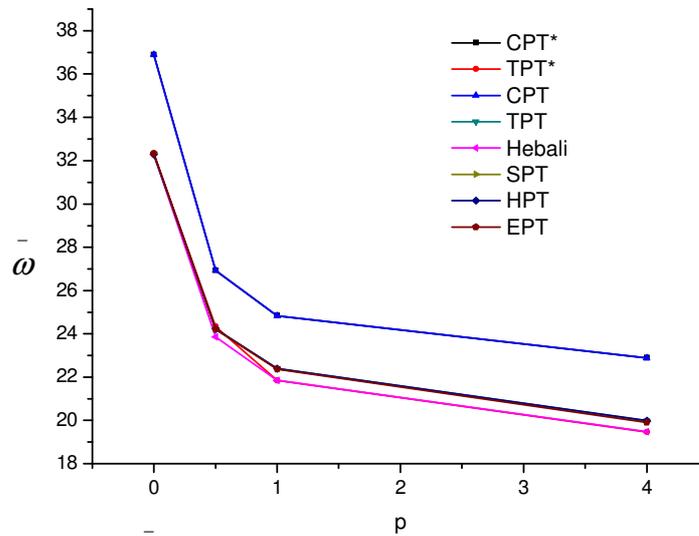
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 10, mode 4(2,2)



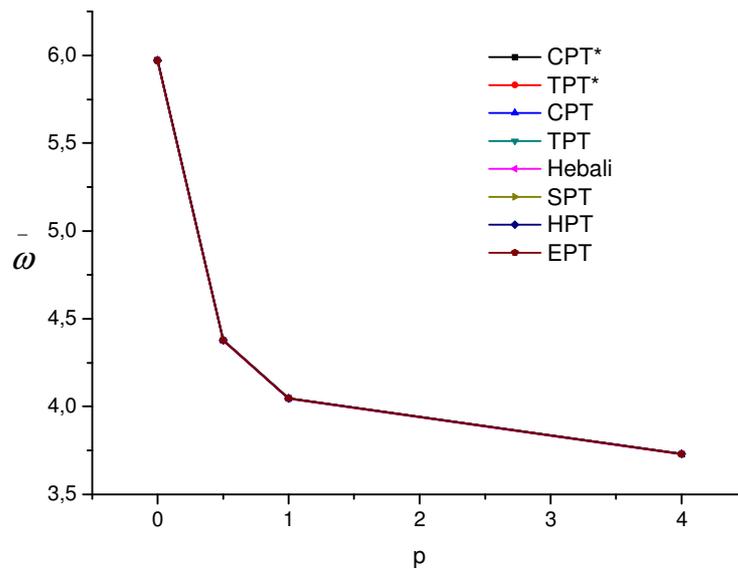
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 10, mode 5(1,3)



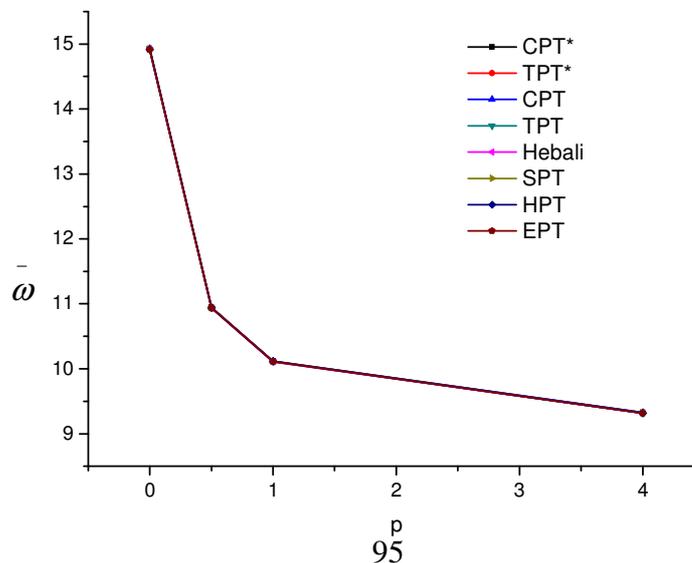
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 10, mode 7(2,3)



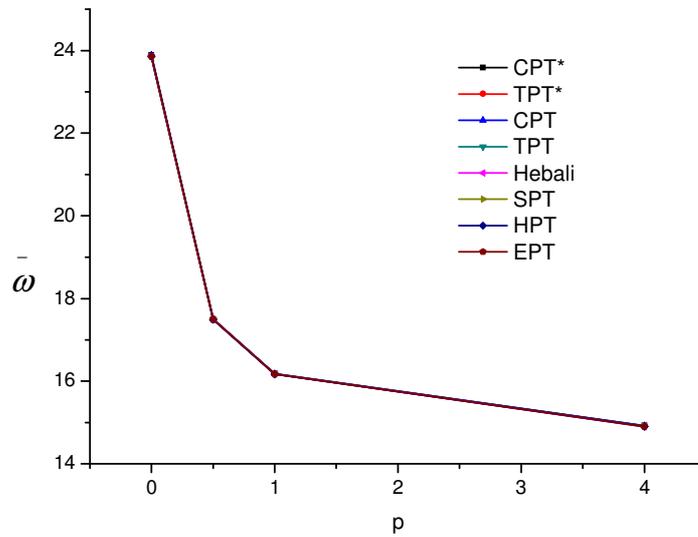
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 100, mode 1(1,1)



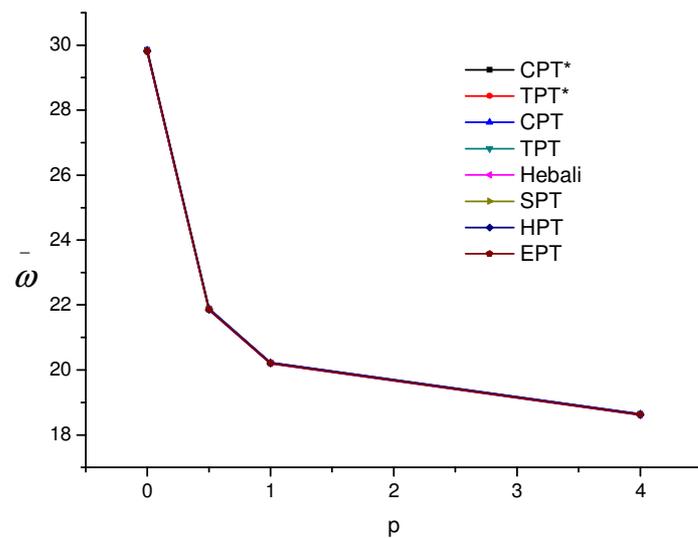
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 100, mode 2(1,2)



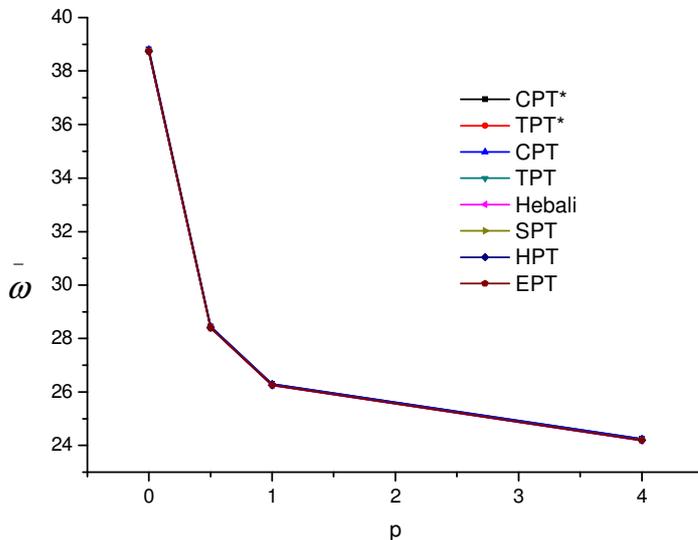
Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 100, mode 4(2,2)



Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 100, mode 5(1,3)



Pulsation adimensionnelle  $\bar{\omega}$  - Plaque carrée - Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - a/h = 100, mode 7(2,3)



### V.5. Conclusion :

D'après cette étude paramétrique relative à l'impact de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre sur l'ensemble des réponses de la plaque, en utilisant la théorie classique des plaques et celle d'ordre élevé en ayant recours à cinq fonction de cisaillement, les résultats ont révélés ce qui suit:

- Pour une valeur de  $p = 0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la surface neutre coïncide avec la surface médiane, les résultats ne sont pas affectés.
- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte du plan neutre ou pas n'a pas d'influence sur les résultats.
- Les valeurs données par CPT sont grossières excepté pour des élancements importants.
- La prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$ , qui devient plus importante lorsque le rapport  $a/h$  diminue et devient insignifiante lorsque le rapport  $a/h$  devient important. D'autre part, lorsque l'indice de puissance  $p$  croit la contrainte axiale  $\overline{\sigma}_x$  s'amplifier cette amplification s'atténue pour des valeurs de  $p > 4$ .
- Inversement, la prise en compte de la position exacte de la surface neutre réduit la flexion maximale  $\overline{w}$  lorsque le rapport  $a/h$  diminue et elle devient insignifiante lorsque le rapport  $a/h$  est important. D'autre part, lorsque l'indice de puissance  $p$  croit la flexion maximale  $\overline{w}$  se réduit cette réduction devient insignifiante pour des valeurs de  $p > 4$ .
- La prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée les déplacements normaux pour une valeur de  $p=1$ , cette amplification s'atténue pour des valeurs de  $p > 1$  et elle devient insignifiante pour des valeurs de  $p > 4$ .
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifié la contrainte dans le plan  $\overline{\sigma}_{xy}$ , qui s'atténue pour des valeurs de  $p > 4$ .
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre réduit la contrainte transversale  $\overline{\sigma}_{xz}$ , qui devient insignifiante lorsque le  $p$  est important.
- Pour une valeur de  $p = 0.5$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur juste pour le premier mode et elle se réduit pour les modes supérieurs.

- Pour une valeur de  $p \geq 1$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur pour une plaque épaisse et s'atténue pour une plaque mince, quelque soit le mode. Ainsi elle est plus importante lorsque le  $p$  est plus important.
- Pour des rapports d'élanement important, soit une plaque mince, la fréquence adimensionnelle n'est pas affectée quelque soit le mode.

### V.6. Validation des résultats sous chargement thermique :

Les tableaux V.09 et V.10 présentent une étude comparative des résultats obtenus en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables seulement, avec une fonction de cisaillement transverse de forme hyperbolique, en prenant en compte la position exacte de la surface neutre, avec ceux des travaux d'autres auteurs, où la surface médiane est considérée comme surface neutre, on s'est intéressé à la température critique, ces tests de validation témoignent de l'exactitude du développement.

Dans ce qui suit la plaque est constituée du métal l'aluminium Al et la céramique l'Alumina  $Al_2O_3$ , soit Al/  $Al_2O_3$ , la loi régissant la variation des propriétés matérielles est celle de loi de puissance, la plaque prend ou pas appui sur fondation élastiques à un ou deux paramètres. La plaque est soumise à trois cas de chargement thermique uniforme, linéaire et non-linéaire

Les propriétés des matériaux constituant les plaques étudiées sont comme suit :

La céramique (Alumina,  $Al_2O_3$ ),  $E_C = 380$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha_C = 7.4 \cdot 10^{-6}/^\circ C$  et  $k_C = 10.4$  m/Mk.  
Le métal (Aluminium, Al),  $E_m = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6}/^\circ C$  et  $k_m = 204$  W/mK.

**Tableau V.09:** Température critique de flambement d'une plaque en gradient de propriété sans fondation, sous une température uniforme avec différents rapports a/b et différents élanements

$a / b$	Théorie	$a / h = 10$	$a / h = 20$	$a / h = 40$	$a / h = 60$	$a / h = 80$	$a / h = 100$
1	Présente	0.758423	0.196267	0.049501	0.022037	0.0124029	0.0079400
	TPT <sup>(a)</sup>	0.758451	0.196269	0.049502	0.022037	0.012403	0.007940
	HPT <sup>(a)</sup>	0.758396	0.196265	0.049502	0.022037	0.012403	0.007940
	CPT <sup>(a)</sup>	0.794377	0.198594	0.049649	0.022066	0.012412	0.007944
2	Présente	1.77567	0.482196	0.123208	0.054983	0.0309729	0.0198359
	TPT <sup>(a)</sup>	1.775899	0.482206	0.123209	0.054984	0.030973	0.019836
	HPT <sup>(a)</sup>	1.775555	0.482184	0.123208	0.054984	0.030973	0.019836
	HPT <sup>(b)</sup>	1.7756	0.48218	0.12321	0.05498	0.03097	0.01984
	FPT <sup>(c)</sup>	1.8072	0.48451	0.12336	0.05501	0.03098	0.01984
	CPT <sup>(a)</sup>	1.985943	0.496486	0.124121	0.055165	0.031030	0.019859
	Présente	3.212203	0.937430	0.244617	0.109608	0.0618316	0.0396248

3	TPT <sup>(a)</sup>	3.213338	0.937475	0.244620	0.109609	0.061838	0.039625
	HPT <sup>(a)</sup>	3.211975	0.937389	0.244614	0.109608	0.061831	0.039625
	CPT <sup>(a)</sup>	3.971886	0.992972	0.248243	0.110330	0.062061	0.039719
4	Présente	4.81864	1.53365	0.411643	0.185484	0.1048428	0.0672509
	TPT <sup>(a)</sup>	4.822477	1.533805	0.411650	0.185485	0.104843	0.067251
	HPT <sup>(a)</sup>	4.818675	1.533556	0.411634	0.185482	0.104842	0.067251
	HPT <sup>(b)</sup>	4.8187	1.5336	0.41163	0.18548	0.10484	0.06725
	FPT <sup>(c)</sup>	5.0530	1.5571	0.41333	0.18583	0.10495	0.06730
CPT <sup>(a)</sup>	6.752207	1.688052	0.422013	0.187561	0.105503	0.067522	

(a) Résultats prises de ZENKOUR et SOBHY 2011

(b) Résultats prises de SAMSAM SHARIAT et ESLAMI 2007

(c) Résultats prises de LANHE W. 2004

Le tableau V.09 présente les résultats d'une plaque en gradient de propriété, ne prenant pas appui sur une fondation et soumise à une température uniforme, en utilisant la présente théorie qui n'a besoin que de quatre inconnues, contrairement à celles présentées dans [SAMSAM SHARIAT B.A. et ESLAMI M.R.2007, LANHE W. 2004, ZENKOUR A.M. et SOBHY M.2011] pour les quelles cinq inconnues sont nécessaires. On observe que les résultats sont identiques. Cette haute précision valide la procédure.

**Tableau V.10.a:** Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température uniforme avec différentes valeurs de p.

T <sub>cr</sub>		k <sub>w</sub> = 0    k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10    k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10    k <sub>g</sub> = 10		
p	Théorie	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20
0	TPT <sup>(a)</sup>	5.58556	1.61882	0.42154	5.76109	1.66270	0.43252	9.22610	2.52896	0.64908
	HPT <sup>(a)</sup>	5.58344	1.61868	0.42154	5.75899	1.66257	0.43251	9.22398	2.52882	0.64907
	FPT <sup>(a)</sup>	5.58069	1.61862	0.42153	5.75622	1.66251	0.43251	9.22123	2.52876	0.64907
	CPT <sup>(a)</sup>	6.83964	1.70991	0.42748	7.01519	1.75380	0.43845	10.48019	2.62005	0.65501
	Présente	5.58393	1.61875	0.42154	5.75947	1.66263	0.43251	9.22448	2.52888	0.64907
1	TPT <sup>(a)</sup>	2.67241	0.75845	0.19627	2.83603	0.79935	0.20649	6.06558	1.60674	0.40834
	HPT <sup>(a)</sup>	2.67153	0.75840	0.19627	2.83515	0.79930	0.20649	6.06470	1.60669	0.40835
	FPT <sup>(a)</sup>	2.67039	0.75837	0.19626	2.83400	0.79930	0.20649	6.06356	1.60667	0.40834
	CPT <sup>(a)</sup>	3.17751	0.79438	0.19859	3.34112	0.83528	0.20882	6.57068	1.64267	0.41067
	Présente	2.67173	0.758423	0.19626	2.83534	0.79932	0.20649	6.06491	1.60671	0.40834
5	TPT <sup>(a)</sup>	2.27131	0.67895	0.17851	2.49808	0.73564	0.19268	6.97440	1.85472	0.47245
	HPT <sup>(a)</sup>	2.27501	0.67931	0.17854	2.50179	0.73600	0.19271	6.97810	1.85508	0.47248
	FPT <sup>(a)</sup>	2.35948	0.68678	0.17905	2.58625	0.74348	0.19322	7.06257	1.86255	0.47229
	CPT <sup>(a)</sup>	2.90629	0.72657	0.18164	3.13305	0.78326	0.19582	7.60938	1.90234	0.47559
	Présente	2.27935	0.679719	0.17856	2.50612	0.73641	0.19273	6.98244	1.85549	0.47250
10	TPT <sup>(a)</sup>	2.27551	0.69254	0.18313	2.53146	0.75653	0.19913	7.58356	2.01955	0.51489
	HPT <sup>(a)</sup>	2.27678	0.69269	0.18314	2.53273	0.75668	0.19914	7.58483	2.01970	0.51490
	FPT <sup>(a)</sup>	2.36822	0.70108	0.18373	2.62417	0.76507	0.19972	7.67626	2.02809	0.51548
	CPT <sup>(a)</sup>	2.98770	0.74693	0.18673	3.24365	0.81091	0.20273	8.29575	2.07394	0.51848
	Présente	2.27936	0.69295	0.18316	2.53530	0.75694	0.19915	7.58740	2.01996	0.51491

(a) Résultats prises de ZENKOUR et SOBHY 2011

**Tableau V.10.b:** Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température linéaire avec différentes valeurs de p.

T <sub>cr</sub>		k <sub>w</sub> = 0 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 10		
p	Théorie	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20
0	TPT <sup>(a)</sup>	11.16112	3.22764	0.83309	11.51220	3.31541	0.85503	18.44220	5.04791	1.28816
	HPT <sup>(a)</sup>	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	FPT <sup>(a)</sup>	11.15138	3.22725	0.833306	11.50246	3.31502	0.85501	18.43246	5.04752	1.28814
	CPT <sup>(a)</sup>	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.86690	20.95037	5.23009	1.30002
	Présente	11.15787	3.22750	0.83308	11.5089	3.31527	0.85502	18.43896	5.04777	1.28814
1	TPT <sup>(a)</sup>	5.00264	1.41307	0.35872	5.30948	1.48978	0.37789	11.36642	3.00402	0.75645
	HPT <sup>(a)</sup>	5.00099	1.41297	0.35871	5.30784	1.48968	0.37789	11.36477	3.00391	0.75645
	FPT <sup>(a)</sup>	4.99885	1.41292	0.35871	5.30570	1.48964	0.37789	11.36263	3.00387	0.75645
	CPT <sup>(a)</sup>	5.94993	1.48045	0.36308	6.25678	1.55716	0.38226	12.31372	3.07140	0.76082
	Présente	5.00137	1.41302	0.358715	5.30822	1.48973	0.37789	11.36515	3.00396	0.756451
5	TPT <sup>(a)</sup>	3.90098	1.6006	0.28966	4.29132	1.25765	0.32306	11.99637	3.18391	0.80462
	HPT <sup>(a)</sup>	3.90735	1.16069	0.29871	4.29770	1.25827	0.32310	12.00275	3.18453	0.80467
	FPT <sup>(a)</sup>	4.05274	1.17354	0.29959	4.44308	1.27113	0.32399	12.14816	3.19739	0.80555
	CPT <sup>(a)</sup>	4.99396	1.24204	0.30405	5.38430	1.33962	0.32845	13.08936	3.26588	0.81002
	Présente	3.91482	1.16138	0.29875	4.30516	1.25897	0.32315	12.01022	3.18523	0.80471
10	TPT <sup>(a)</sup>	4.02350	1.21837	0.31566	4.47705	1.33176	0.34401	13.42969	3.56992	0.90355
	HPT <sup>(a)</sup>	4.02576	1.21864	0.31568	4.47930	1.33203	0.34403	13.43194	3.57019	0.90357
	FPT <sup>(a)</sup>	4.18778	1.23350	0.31672	4.64132	1.34688	0.34506	13.59396	3.58504	0.90460
	CPT <sup>(a)</sup>	5.28555	1.31474	0.32204	5.73910	1.42813	0.35039	14.691174	3.66629	0.90993
	Présente	4.03031	1.21910	0.31571	4.48386	1.33249	0.34406	13.43650	3.57065	0.90360

(a) Résultats prises de ZENKOUR et SOBHY 2011

**Tableau V.10.c:** Température critique de flambement d'une plaque carrée en gradient de propriété, avec et sans fondation, sous une température non- linéaire avec différentes valeurs de p.

T <sub>cr</sub>		k <sub>w</sub> = 0 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 10		
p	Théorie	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20
0	TPT <sup>(a)</sup>	22.32223	6.45528	1.66618	23.02439	6.63082	1.71006	36.88440	10.09582	2.57631
	HPT <sup>(a)</sup>	22.31376	6.45473	1.66614	23.01592	6.63027	1.71003	36.87594	10.09527	2.57628
	FPT <sup>(a)</sup>	22.30276	6.45450	1.66614	23.00491	6.63003	1.71002	36.86493	10.09527	2.57627
	CPT <sup>(a)</sup>	27.33857	6.81964	1.68991	28.04073	6.99518	1.73380	41.90074	10.46019	2.60005
	Présente	22.31575	6.45501	1.66616	23.01791	6.63055	1.71004	36.87792	10.09555	2.57629
1	TPT <sup>(a)</sup>	10.00817	2.82696	0.71764	10.62205	2.98043	0.75601	22.73943	6.00978	1.51334
	HPT <sup>(a)</sup>	10.00488	2.82676	0.71763	10.61875	2.98022	0.75600	22.73614	6.00957	1.51333
	FPT <sup>(a)</sup>	10.00060	2.82667	0.71763	10.61447	2.98014	0.75600	22.73185	6.00948	1.51333
	CPT <sup>(a)</sup>	11.90332	2.96176	0.72637	12.51719	3.11523	0.76474	24.63458	6.14457	1.52207
	Présente	10.00565	2.82686	0.71763	10.61952	2.98033	0.75600	22.73691	6.00967	1.51334
5	TPT <sup>(a)</sup>	6.77655	2.01520	0.51882	7.45464	2.18472	0.56120	20.83942	5.53091	1.39775
	HPT <sup>(a)</sup>	6.78763	2.01628	0.51889	7.46571	2.18580	0.56127	20.85050	5.53199	1.39782
	FPT <sup>(a)</sup>	7.04019	2.03861	0.52043	7.71827	2.20813	0.56281	21.10305	5.55433	1.39936
	CPT <sup>(a)</sup>	8.67523	2.15759	0.52819	9.35331	2.32711	0.57057	22.73809	5.67331	1.40711
	Présente	6.80061	2.01749	0.51897	7.47869	2.18701	0.56135	20.86347	5.53321	1.39790
10	TPT <sup>(a)</sup>	6.92562	2.09717	0.54335	7.70631	2.29235	0.59214	23.11642	6.14487	1.55531
	HPT <sup>(a)</sup>	6.92950	2.09763	0.54338	7.71019	2.29281	0.59218	23.12029	6.14533	1.55531
	FPT <sup>(a)</sup>	7.20839	2.12321	0.54516	7.98908	2.31838	0.59396	23.39918	6.17091	1.55709
	CPT <sup>(a)</sup>	9.09798	2.26306	0.55433	9.87867	2.45823	0.60312	25.28877	6.31075	1.56625
	Présente	6.93735	2.09843	0.54344	7.71804	2.29360	0.59223	23.12814	6.14613	1.55536

(a) Résultats prises de ZENKOUR et SOBHY 2011

Une autre étude comparative pour l'évaluation de la température critique de flambage entre la théorie présentée, sur la base de la position exacte de la surface neutre et une solution analytique développée par Zenkour et Sobhy (2011) sur la base d'une fonction de cisaillement TPT, FPT et du CPT, est présentée dans les tableaux V.10.a à V.10.c.

En effet, les tableaux V.10.a à V.10.c présentent la différence de température critique de flambement de la plaque en gradient de propriété, de forme carrée, prenant ou pas appui sur fondation élastiques à un ou deux paramètres. La plaque est soumise à trois cas de chargement thermique uniforme, linéaire et non-linéaire, les valeurs d'indice de puissance  $p=0, 1, 5$  et  $10$ .

D'après les résultats présentés dans les tableaux V.10.a à V.10.c, on constate que les résultats ont une bonne concordance. Notez également que les résultats de flambement critique en utilisant la théorie actuelle sont très proches de ceux de HPT [ZENKOUR A.M. et SOBHY M.2011]. Il est clair que les résultats présentent des différences significatives entre les théories d'ordre élevé et ceux de la plaque classique, ce qui certifie l'effet de déformation de cisaillement.

### V.7. Conclusion :

Enfin, les études comparatives actuelles montrent que les résultats obtenus à partir de la méthode proposée concordent bien avec les résultats analytiques existants dans la littérature, ce qui valide la fiabilité et la précision de l'approche analytique actuelle. Il convient de noter que la théorie raffinée proposée sur la base de la position exacte de la surface neutre implique quatre inconnues au lieu de cinq tel il est le cas dans les autres théories de déformations en cisaillement TPT, HPT et FPT.

### V.8. Etude paramétrique sous chargement thermique :

Les tableaux V.11 et V.12 les figures V.09 à V.12 présentent une étude paramétrique avec divers fonctions de déformation en cisaillement transverse avec et sans prise en compte de la position exacte de la surface neutre. Les fonctions de cisaillement utilisées sont :

$$\text{T.P.T : } f(z) = \frac{4}{3h^2} z^3$$

$$\text{E.P.T : } f(z) = z - ze^{-2(z/h)^2}$$

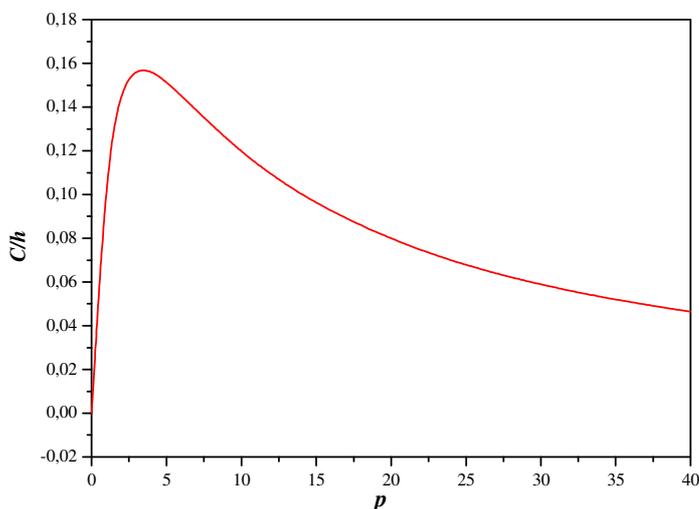
$$\text{H.P.T : } f(z) = h - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{S.P.T : } f(z) = h - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$\text{Hebali: } f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$$

Dans ce qui suit la plaque est constituée du métal l'aluminium Al et la céramique l'Alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, soit Al/ Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, la loi régissant la variation des propriétés matérielles est celle de loi de puissance, la plaque prend ou pas appui sur fondation élastiques à un ou deux paramètres, soumise à trois cas de température uniforme, linéaire et non-linéaire.

**Figure V.08:** Variation de la position de la surface neutre en fonction de l'indice de loi de puissance



On observe sur ce premier graphe que pour p compris entre 0 et 4 le "C" est ascendant, au-delà de p=4 le "C" est descendant. Pour ce qui suit la valeur maximale de p sera de 10.

**Tableau V.11:** Température critique du flambement sous une température uniforme

a / b	Théories		a / h = 10	a / h = 20	a / h = 40	a / h = 60	a / h = 80	a / h = 100
1	C=0	TPT	0.758451	0.196269	0.049502	0.022037	0.012403	0.007940
		CPT	0.794377	0.198594	0.049649	0.022066	0.012412	0.007944
	Présentes C ≠ 0	CPT	0.794377	0.198594	0.049648	0.022066	0.012412	0.007943
		TPT	0.762913	0.196566	0.049520	0.022040	0.012404	0.007940
		Hebali	0.758423	0.196267	0.049501	0.022037	0.012402	0.007940
		SPT	0.762765	0.196556	0.049520	0.022040	0.012404	0.007940
		HPT	0.762931	0.196567	0.049520	0.022040	0.012404	0.007940
EPT	0.762727	0.196553	0.049520	0.022040	0.012404	0.007940		
2	C=0	TPT	1.775899	0.482206	0.123209	0.054984	0.030973	0.019836
		CPT	1.985943	0.496486	0.124121	0.055165	0.031030	0.019859
	Présentes C ≠ 0	CPT	1.985943	0.496485	0.124121	0.055165	0.031030	0.019859
		TPT	1.800560	0.484005	0.123326	0.055007	0.030980	0.019838

		Hebali	1.775670	0.482196	0.123208	0.054983	0.030972	0.019835
		SPT	1.799766	0.483945	0.123322	0.055006	0.030980	0.019838
		HPT	1.800661	1.800662	0.123326	0.055007	0.030980	0.019838
		EPT	1.799588	0.483929	0.123321	0.055006	0.030980	0.019838
3	C=0	TPT	3.213338	0.937475	0.244620	0.109609	0.061838	0.039625
		CPT	3.971886	0.992972	0.248243	0.110330	0.062061	0.039719
	Présentes C ≠ 0	CPT	3.971886	0.992971	0.248242	0.110330	0.062060	0.039718
		TPT	3.294997	0.944301	0.245082	0.109701	0.061861	0.039637
		Hebali	3.212203	0.937430	0.244617	0.109608	0.061831	0.039624
		SPT	3.292505	0.944076	0.245066	0.109698	0.061860	0.039636
		HPT	3.295321	0.944330	0.245084	0.109701	0.061861	0.039637
		EPT	3.292092	0.944020	0.245062	0.109697	0.061859	0.039636
4	C=0	TPT	4.822477	1.533805	0.411650	0.185485	0.104843	0.067251
		CPT	6.752207	1.688052	0.422013	0.187561	0.105503	0.067522
	Présentes C ≠ 0	CPT	6.752206	1.688051	0.422012	0.187561	0.105503	0.067522
		TPT	5.008772	1.552166	0.412960	0.185751	0.104928	0.067285
		Hebali	4.818640	1.533650	0.411643	0.185484	0.1048428	0.067250
		SPT	5.003540	1.551570	0.412917	0.185742	0.104925	0.067284
		HPT	5.009476	1.552241	0.412966	0.185752	0.104928	0.067286
		EPT	5.003175	1.551432	0.412905	0.185739	0.104924	0.067284

Le tableau V.11 présente la Température critique du flambement d'une plaque en gradient de propriété, ne prenant pas appui sur fondation et soumise à une température uniforme, avec différents rapports a/b et différents élancements a/h et pour p=1, les résultats montrent :

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la température critique de flambement.
- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des élancements importants.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque le rapport d'élancement a/h est petit et elle devient insignifiante lorsque le rapport a/h devient important
- D'autre part lorsque le rapport a/b devient important la température critique devient importante.

**Tableau V.12.a :** Température critique du flambement sous une température uniforme

T <sub>cr</sub>		k <sub>w</sub> = 0    k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10    k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10    k <sub>g</sub> = 10			
p	Théories	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	
0	C=0	TPT	5.58556	1.61882	0.42154	5.76109	1.66270	0.43252	9.22610	2.52896	0.64908
		CPT	6.83964	1.70991	0.42748	7.01519	1.75380	0.43845	10.48019	2.62005	0.65501
	Présentes C ≠ 0	CPT	6.839642	1.709910	0.42748	7.01519	1.75380	0.43845	10.48019	2.62005	0.65501
		TPT	5.583442	1.618681	0.421535	5.758981	1.662566	0.432506	9.223984	2.528817	0.649069
		Hebali	5.58393	1.61875	0.42154	5.75947	1.66263	0.43251	9.22448	2.52888	0.64907
		SPT	5.585558	1.618820	0.421543	5.761097	1.662704	0.432515	9.226101	2.528955	0.649077
		HPT	5.58340	1.61868	0.42153	5.758939	1.662566	0.432506	9.223943	2.528817	0.649069

		EPT	5.590910	1.619225	0.421570	5.766449	1.663110	0.432541	9.231453	2.529360	0.649104
1	C=0	TPT	2.67241	0.75845	0.19627	2.83603	0.79935	0.20649	6.06558	1.60674	0.40834
		CPT	3.17751	0.79438	0.19859	3.34112	0.83528	0.20882	6.57068	1.64267	0.41067
	Présentes C ≠ 0	CPT	3.17751	0.79438	0.19859	3.34112	0.83528	0.20882	6.57068	1.64267	0.41067
		TPT	2.728648	0.762913	0.762913	2.892260	0.803816	0.206791	6.121822	1.611206	0.408639
		Hebali	2.67173	0.758423	0.19626	2.83534	0.79932	0.20649	6.06491	1.60671	0.40834
		SPT	2.726894	0.762765	0.196556	2.890506	0.803668	0.803668	6.120068	1.611058	0.408629
		HPT	2.72887	0.76293	0.196567	2.892486	0.803834	0.206793	6.122048	1.611225	0.408640
EPT	2.726561	0.762727	0.196553	2.890172	0.803630	0.206779	6.119735	1.611020	0.408626		
5	C=0	TPT	2.27131	0.67895	0.17851	2.49808	0.73564	0.19268	6.97440	1.85472	0.47245
		CPT	2.90629	0.72657	0.18164	3.13305	0.78326	0.19582	7.60938	1.90234	0.47559
	Présentes C ≠ 0	CPT	2.90629	0.72657	0.18164	3.13305	0.78326	0.19582	7.60938	1.90234	0.47586
		TPT	2.447197	0.693858	0.179524	2.673970	0.750551	0.193697	7.150289	1.869631	0.473467
		Hebali	2.27935	0.679719	0.17856	2.50612	0.73641	0.19273	6.98244	1.85549	0.47250
		SPT	2.437864	0.693092	0.179472	2.664637	0.749785	0.193645	7.140956	1.868865	0.473415
		HPT	2.448200	0.693940	0.179529	2.674973	0.750633	0.193702	7.151291	1.869712	0.473472
EPT	2.431718	0.692579	0.179437	2.658491	0.749272	0.193611	7.134810	1.868352	0.473381		
10	C=0	TPT	2.27551	0.69254	0.18313	2.53146	0.75653	0.19913	7.58356	2.01955	0.51489
		CPT	2.98770	0.74693	0.18673	3.24365	0.81091	0.20273	8.29575	2.07394	0.51848
	Présentes C ≠ 0	CPT	2.98770	0.74693	0.18673	3.24365	0.81091	0.20273	8.29575	2.07394	0.518484
		TPT	2.385466	0.702379	0.183813	2.641408	0.766364	0.199810	7.693504	2.029388	0.515566
		Hebali	2.27936	0.69295	0.18316	2.53530	0.75694	0.19915	7.58740	2.01996	0.51491
		SPT	2.373992	0.701354	0.183742	2.629934	0.765340	0.199739	7.682029	2.028364	0.515495
		HPT	2.382146	0.702053	0.183787	2.625135	0.765613	0.199787	7.678095	2.028845	0.515539
EPT	2.365339	0.700568	0.183688	2.621282	0.764553	0.199684	7.673377	2.027577	0.515440		

Tableau V.12.b : Température critique du flambement sous une température linéaire

$T_{cr}$		$k_w = 0 \quad k_g = 0$			$k_w = 10 \quad k_g = 0$			$k_w = 10 \quad k_g = 10$			
p	Théories	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	
0	C=0	TPT	11.16112	3.22764	0.83309	11.51220	3.31541	0.85503	18.44220	5.04791	1.28816
		CPT	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.86690	20.95037	5.23009	1.30002
	Présentes C ≠ 0	CPT	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.86690	20.95037	5.23009	1.30002
		TPT	11.156884	3.227363	0.833070	11.507962	3.315133	0.855012	18.437969	5.047635	1.288138
		Hebali	11.15787	3.22750	0.83308	11.5089	3.31527	0.85502	18.43896	5.04777	1.28814
		SPT	11.161117	3.227640	0.833087	11.512195	3.315409	0.855030	18.442202	5.047911	1.288155
		HPT	11.156800	3.227363	0.833070	11.507879	3.315133	0.855013	18.437886	5.047634	1.288138
EPT	11.171820	3.228450	0.833141	11.522899	3.316220	0.855083	18.452906	5.048721	1.288209		
1	C=0	TPT	5.00264	1.41307	0.35872	5.30948	1.48978	0.37789	11.36642	3.00402	0.75645
		CPT	5.94993	1.48045	0.36308	6.25678	1.55716	0.38226	12.31372	3.07140	0.76082
	Présentes C ≠ 0	CPT	5.94993	1.48045	0.36308	6.25678	1.55716	0.38226	12.31372	3.07140	0.76082
		TPT	5.108111	1.421440	0.359275	5.414959	1.498152	0.378453	11.471894	3.012386	0.757012
		Hebali	5.00137	1.41302	0.358715	5.30822	1.48973	0.37789	11.36515	3.00396	0.756451
		SPT	5.104821	1.421163	0.359257	5.411669	1.497875	0.378435	11.468604	3.012109	0.756993
		HPT	5.108535	1.421475	0.359278	5.415383	1.498187	0.378456	11.472318	3.012421	0.757014
EPT	5.104195	1.421091	0.359252	5.411043	1.497803	0.378430	11.467979	3.012037	0.756988		
5	C=0	TPT	3.90098	1.6006	0.28966	4.29132	1.25765	0.32306	11.99637	3.18391	0.80462
		CPT	4.99396	1.24204	0.30405	5.38430	1.33962	0.32845	13.08936	3.26588	0.81002
	Présentes C ≠ 0	CPT	4.99396	1.24204	0.30405	5.38430	1.33962	0.32845	13.08936	3.26588	0.81002
		TPT	4.203735	1.185726	0.300406	4.594078	1.283312	0.324803	12.299131	3.209575	0.806369
		Hebali	3.91482	1.16138	0.29875	4.30516	1.25897	0.32315	12.01022	3.18523	0.80471
		SPT	4.187670	1.184408	0.300318	4.578012	1.281993	0.324714	12.283065	3.208256	0.806280
		HPT	4.205460	1.185867	0.300416	4.595803	1.283452	0.324812	12.300856	3.209716	0.806378
EPT	4.177092	1.183525	0.300258	4.567434	1.283452	0.324654	12.272487	3.207373	0.806220		
10	C=0	TPT	4.02350	1.21837	0.31566	4.47705	1.33176	0.34401	13.42969	3.56992	0.90355
		CPT	5.28555	1.31474	0.32204	5.73910	1.42813	0.35039	14.691174	3.66629	0.90993

Présentes C ≠ 0	CPT	5.28555	1.31474	0.32204	5.73910	1.42813	0.35039	14.691174	3.66629	0.90993
	TPT	4.218339	1.235800	0.316869	4.671884	1.349187	0.345215	13.624522	3.587346	0.904755
	Hebali	4.03031	1.21910	0.31571	4.48386	1.33249	0.34406	13.43650	3.57065	0.90360
	SPT	4.198005	1.233985	0.316744	4.651551	1.347371	0.345090	13.604189	3.585531	0.904630
	HPT	4.216763	1.234469	0.316822	4.666001	1.348390	0.345175	13.622910	3.586569	0.904687
	EPT	4.182673	1.232591	0.316647	4.636219	1.345977	0.344994	13.588857	3.584137	0.904533

**Tableau V.12.c :** Température critique du flambement sous une température non- linéaire

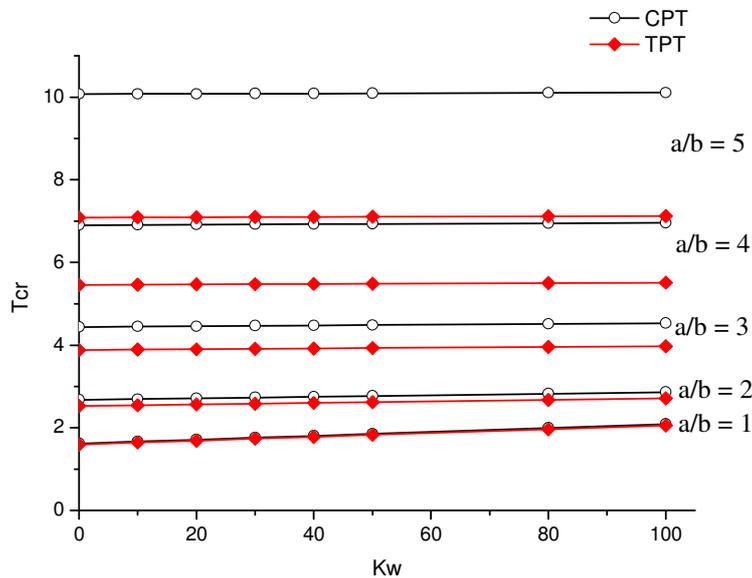
T <sub>cr</sub>		k <sub>w</sub> = 0 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 0			k <sub>w</sub> = 10 k <sub>g</sub> = 10			
p	Théories	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	a/h = 5	10	20	
0	C=0	TPT	22.32223	6.45528	1.66618	23.02439	6.63082	1.71006	36.88440	10.09582	2.57631
		CPT	27.33857	6.81964	1.68991	28.04073	6.99518	1.73380	41.90074	10.46019	2.60005
	Présentes C ≠ 0	CPT	27.33857	6.81964	1.68991	28.04073	6.99518	1.73380	41.90074	10.46019	2.60005
		TPT	22.313769	6.454727	1.666141	23.015925	6.630266	1.710025	36.875939	10.095270	2.576276
		Hebali	22.31575	6.45501	1.66616	23.01791	6.63055	1.71004	36.87792	10.09555	2.57629
		SPT	22.322234	6.455280	1.666175	23.024390	6.630819	1.710060	36.884404	10.095822	2.576311
		HPT	22.313601	6.454727	1.666141	23.015758	6.630266	1.710026	36.875772	10.095269	2.576276
		EPT	22.343641	6.456901	1.666282	23.045798	6.632440	1.710167	36.905812	10.097443	2.576418
1	C=0	TPT	10.00817	2.82696	0.71764	10.62205	2.98043	0.75601	22.73943	6.00978	1.51334
		CPT	11.90332	2.96176	0.72637	12.51719	3.11523	0.76474	24.63458	6.14457	1.52207
	Présentes C ≠ 0	CPT	11.90332	2.96176	0.72637	12.51719	3.11523	0.76474	24.63458	6.14457	1.52207
		TPT	10.219187	2.843705	0.718760	10.833061	2.997174	0.757127	22.950446	6.026520	1.514463
		Hebali	10.00565	2.82686	0.71763	10.61952	2.98033	0.75600	22.73691	6.00967	1.51334
		SPT	10.212604	2.843151	0.718722	10.826478	2.996619	0.757089	22.943864	6.025966	1.514426
		HPT	10.220035	2.843775	0.718764	10.833909	2.997244	0.757132	22.951294	6.026590	1.514468
		EPT	10.211354	2.843008	0.718712	10.825228	2.996477	0.757079	22.942613	6.025823	1.514416
5	C=0	TPT	6.77655	2.01520	0.51882	7.45464	2.18472	0.56120	20.83942	5.53091	1.39775
		CPT	8.67523	2.15759	0.52819	9.35331	2.32711	0.57057	22.73809	5.67331	1.40711
	Présentes C ≠ 0	CPT	8.67523	2.15759	0.52819	9.35331	2.32711	0.57057	22.73809	5.67331	1.40711
		TPT	7.302491	2.059776	0.521849	7.980572	2.229297	0.564229	21.365353	5.575492	1.400778
		Hebali	6.80061	2.01749	0.51897	7.47869	2.18701	0.56135	20.86347	5.53321	1.39790
		SPT	7.274583	2.057486	0.521695	7.952664	2.227006	0.564075	21.337445	5.573202	1.400624
		HPT	7.305489	2.060021	0.521866	7.983570	2.229541	0.564246	21.368352	5.575736	1.400795
		EPT	7.256207	2.055952	0.521592	7.934288	2.225473	0.563972	21.319070	5.571668	1.400521
10	C=0	TPT	6.92562	2.09717	0.54335	7.70631	2.29235	0.59214	23.11642	6.14487	1.55531
		CPT <sup>a</sup>	9.09798	2.26306	0.55433	9.87867	2.45823	0.60312	25.28877	6.31075	1.56625
	Présentes C ≠ 0	CPT	9.09798	2.26306	0.55433	9.87867	2.45823	0.60312	25.28877	6.31075	1.56625
		TPT	7.260994	2.127174	0.545424	8.041679	2.322345	0.594217	23.451785	6.174871	1.557349
		Hebali	6.93735	2.09843	0.54344	7.71804	2.29360	0.59223	23.12814	6.14613	1.55536
		SPT	7.225995	2.124049	0.545209	8.006680	2.319220	0.594001	23.416785	6.171746	1.557133
		HPT	7.259597	2.125966	0.545358	7.997731	2.321818	0.594144	23.421274	6.172417	1.557282
		EPT	7.199603	2.121649	0.545042	7.980288	2.316821	0.593835	23.390394	6.169347	1.556967

Les tableaux V.12.a, b et c présentent les résultats d'une plaque en gradient de propriété, de forme carrée, prenant ou pas appui sur fondation élastiques à un ou deux paramètres. La plaque est soumise à trois cas de chargement thermique uniforme, linéaire et non-linéaire, les valeurs d'indice de puissance sont p=0, 1, 5 et 10, et les valeurs des élancements sont a/h= 5, 10 et 20, les résultats montrent :

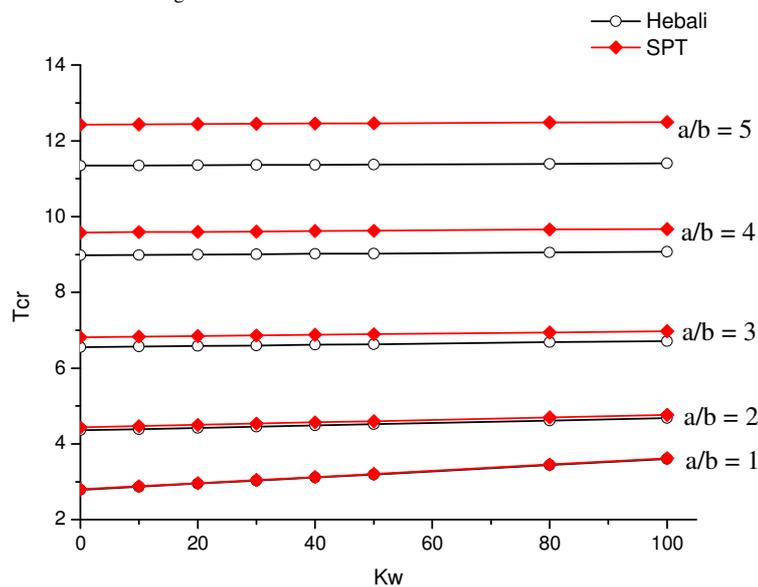
- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la température critique de flambement.

- Les valeurs données par CPT sont grossières excepté pour des élancements importants.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque l'indice de puissance  $p$  est plus important.
- D'autre part la présence de la fondation avec un puis deux paramètres amplifiée d'avantage la température critique de flambement.

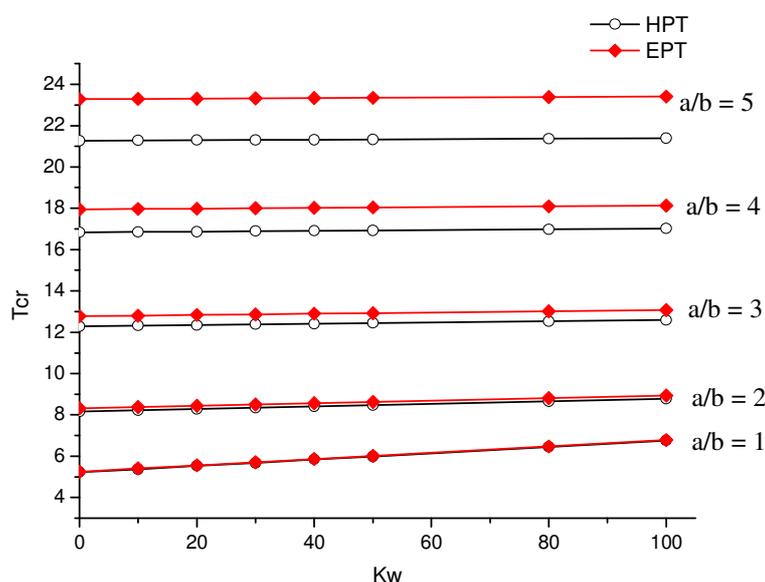
**Figure V.09.a:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température Uniforme,  $a/h=10$ ,  $K_w$ =variable,  $K_g=10$



**Figure V.09.b:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w$ =variable,  $K_g=10$



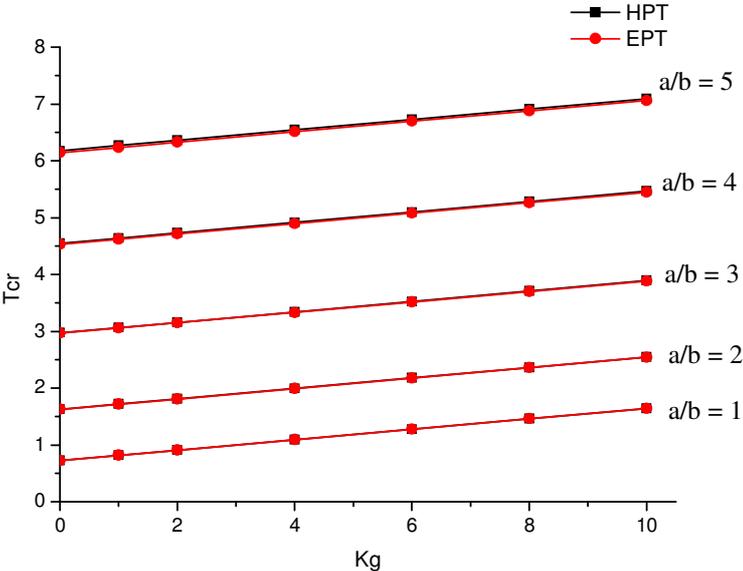
**Figure V.09.c:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température non-linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w$ =variable,  $K_g=10$



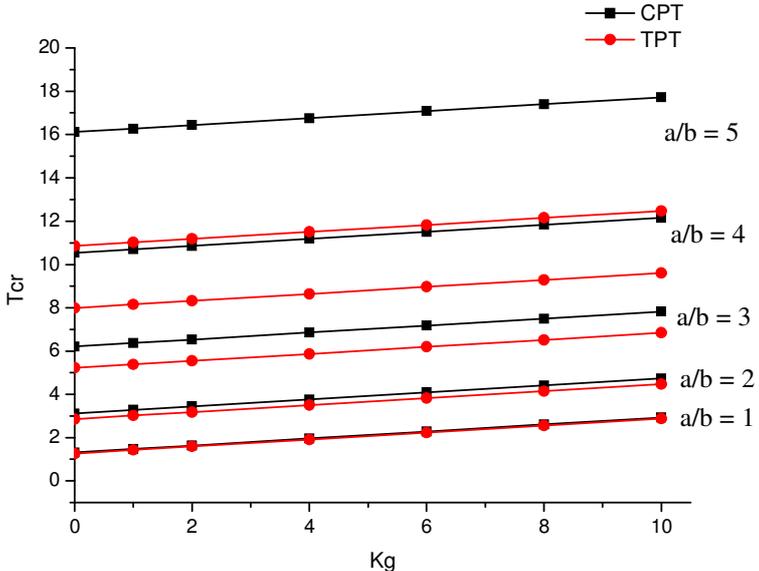
Les figures V.09 présentent la variation de la température critique du flambement d'une plaque en gradient de propriété, prenant appui sur fondation de type Pasternak où le coefficient de Winkler est variable soit entre 0 et 100 et le coefficient de Pasternak est constant soit 10, la plaque est soumise à une température uniforme, linéaire et non-linéaire pour différents rapports  $a/b$  et pour un indice de puissance  $p=2$ , les résultats montrent :

- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des rapports  $a/b$  compris entre 1 et 2.
- Quel que soit le type de chargement, plus le rapport  $a/b$  est important plus la température critique du flambement est importante.
- Quel que soit le type de chargement, lorsque le paramètre de Winkler augmente il affecte juste les plaques de rapport  $a/b$  compris entre 1 et 3, au-delà sont influence est insignifiante sur la température critique du flambement.

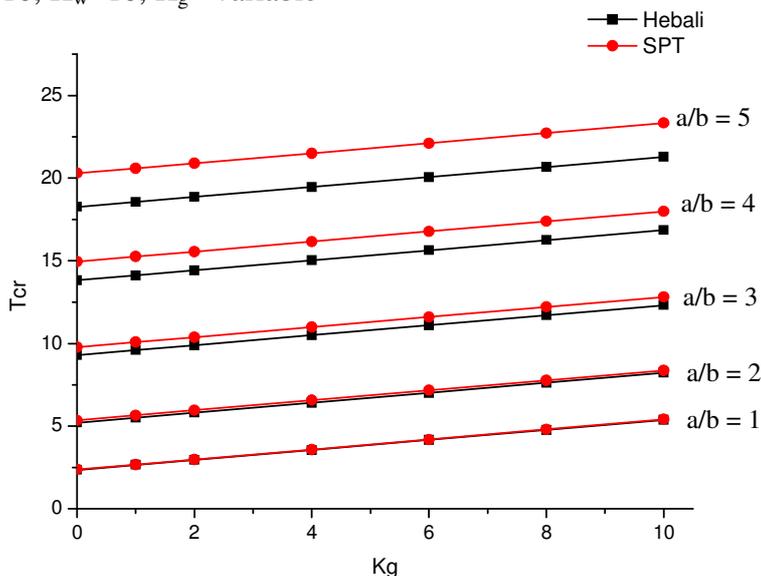
**Figure V.10.a:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température Uniforme,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g=$  variable



**Figure V.10.b:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g=$  variable



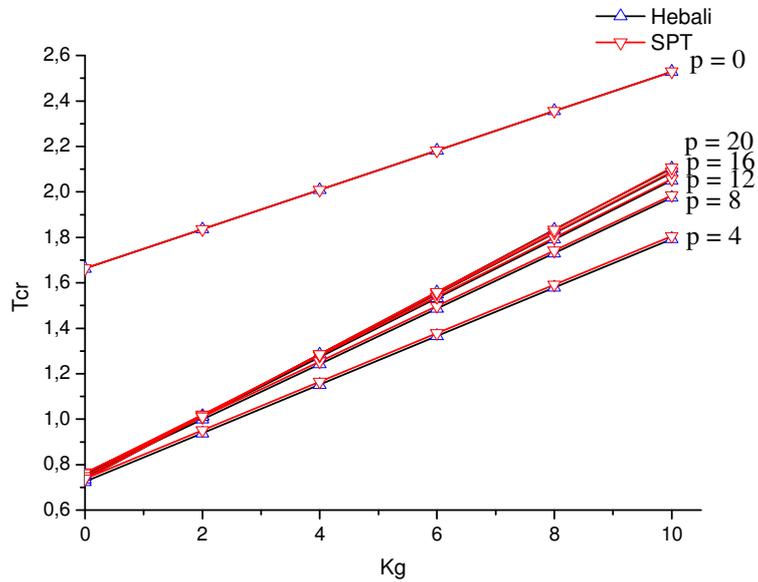
**Figure V.10.c:** La variation de la température critique du flambement pour  $p=2$ , Température non-linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g=$  variable



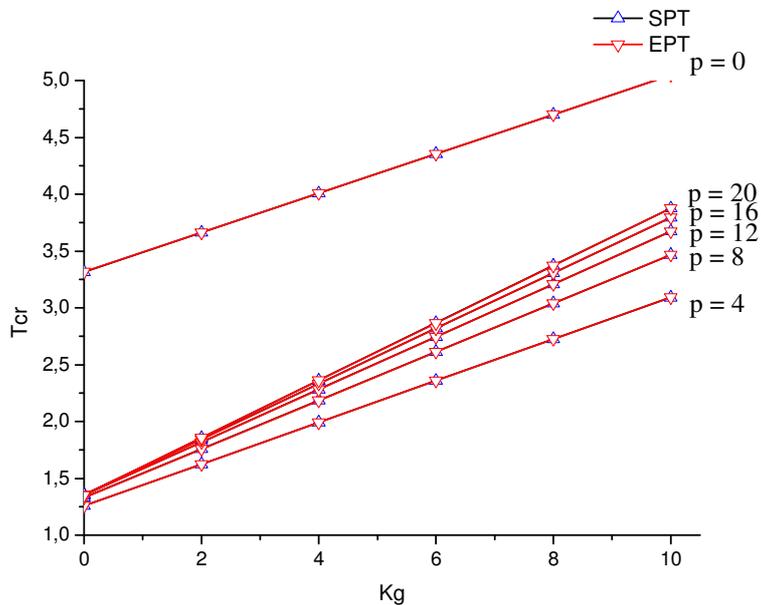
Les figures V.10 présentent la variation de la température critique du flambement d'une plaque en gradient de propriété, prenant appui sur fondation de type Pasternak où le coefficient de Winkler est pris constant soit 10 et le coefficient de Pasternak varie entre 0 et 10, la plaque est soumise à une température uniforme, linéaire et non-linéaire pour différents rapports  $a/b$  et pour un indice de puissance  $p=2$ , les résultats montrent :

- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des rapports  $a/b$  compris entre 1 et 2.
- Quel que soit le type de chargement, plus le rapport  $a/b$  est important plus la température critique du flambement est importante.
- Quel que soit le type de chargement, lorsque le paramètre de Pasternak augmente la température critique du flambement augmente.

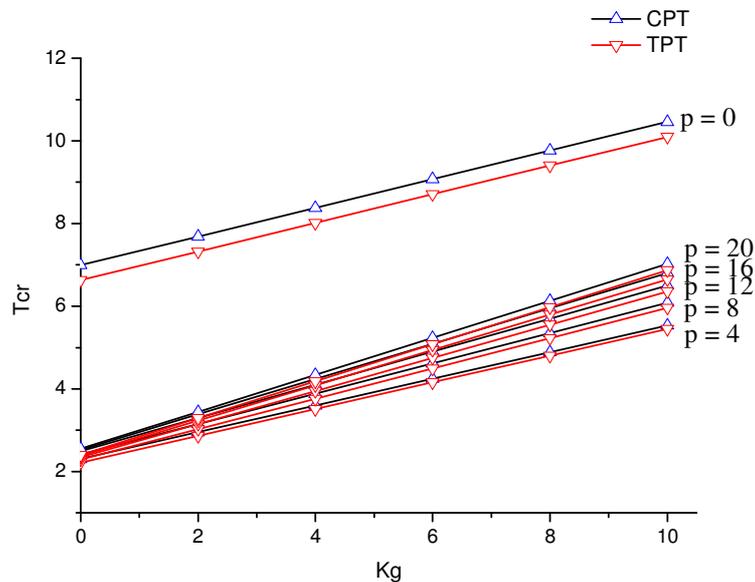
**Figure V.11.a:** La variation de la température critique du flambement pour  $p$ =variable, Température Uniforme,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g$ = variable,  $a=b$ .



**Figure V.11.b:** La variation de la température critique du flambement pour  $p$ = variable, Température linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g$ = variable,  $a=b$ .



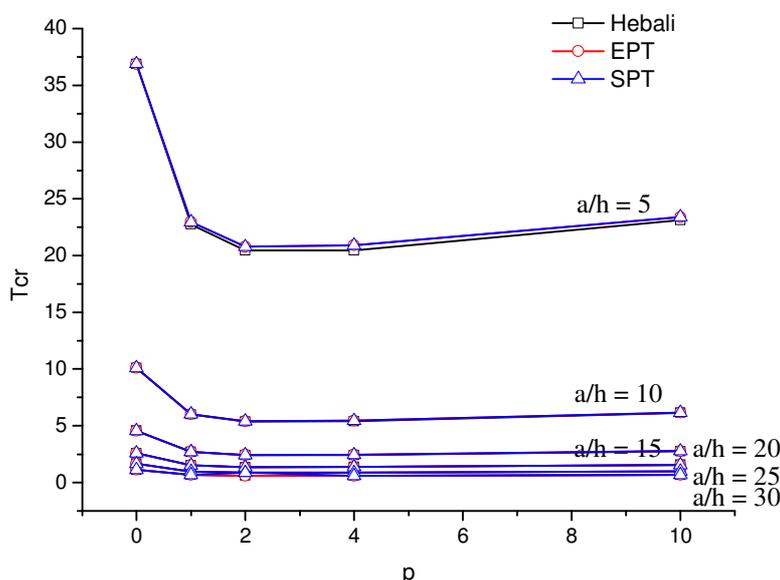
**Figure V.11.c:** La variation de la température critique du flambement pour  $p =$  variable, Température non-linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g =$  variable,  $a=b$ .



Les figures V.11 présentent la variation de la température critique du flambement d'une plaque en gradient de propriété, de forme carrée, prenant appui sur fondation de type Pasternak où le coefficient de Winkler est pris constant soit 10 et le coefficient de Pasternak varie entre 0 et 10, la plaque est soumise à une température uniforme, linéaire et non-linéaire pour différentes valeurs d'indice de puissance  $p$ , les résultats montrent :

- Pour  $p=0$ , soit une plaque entièrement en céramique, soit  $C=0$ , le coefficient de Pasternak a moins d'influence sur la température critique du flambement que pour  $p > 0$ .
- Plus la valeur d'indice de puissance  $p$  est importante plus la température critique du flambement est importante.
- Plus la valeur d'indice de puissance  $p$  est importante plus l'influence du coefficient de Pasternak sur la température critique du flambement est importante.

**Figure V.12:** La variation de la température critique du flambement pour température non-linéaire,  $a/h=10$ ,  $K_w=10$ ,  $K_g= 10$ ,  $a=b$ ,  $a/h = \text{variable}$ .



La figure V.12 présente la variation de la température critique du flambement d'une plaque en gradient de propriété, de forme carrée, prenant appui sur fondation de type Pasternak où le coefficient de Winkler est pris égale à 10 et le coefficient de Pasternak est pris égale à 10, la plaque est soumise à une température non-linéaire pour différents rapports d'élancement  $a/h$  et pour différentes valeurs d'indice de puissance  $p$ , les résultats montrent :

- Pour un indice de puissance  $p=0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la température critique du flambement est plus importante lorsque le rapport d'élancement  $a/h$  est moins important.
- Plus le rapport d'élancement  $a/h$  est important moins l'indice de puissance  $p$  affecte la température critique du flambement.

### V.9.Conclusion :

D'après cette étude paramétrique relative à l'impact de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre sur la température critique du flambement, en utilisant la théorie classique des plaques et celle d'ordre élevé en ayant recours à cinq fonctions de cisaillement, les résultats ont révélés ce qui suit:

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la température critique de flambement.

- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des élancements importants.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque le rapport d'élancement  $a/h$  est petit et elle devient insignifiante lorsque le rapport  $a/h$  devient important
- D'autre part lorsque le rapport  $a/b$  devient important la température critique devient importante.
- Pour les théories d'ordre élevé la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque l'indice de puissance  $p$  est plus important.
- D'autre part la présence de la fondation avec un puis deux paramètres amplifiée d'avantage la température critique de flambement.
- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des rapports  $a/b$  compris entre 1 et 2.
- Quel que soit le cas de chargement, plus le rapport  $a/b$  est important plus la température critique du flambement est importante.
- Quel que soit le cas de chargement, lorsque le paramètre de Winkler augmente il affecte juste les plaques de rapport  $a/b$  compris entre 1 et 3, au-delà sont influence est insignifiante.
- Quel que soit le cas de chargement, lorsque le paramètre de Pasternak augmente la température critique du flambement augmente.
- Pour  $p=0$ , soit une plaque entièrement en céramique, soit  $C=0$ , le coefficient de Pasternak à moins d'influence sur la température critique du flambement que pour  $p > 0$ .
- Plus la valeur d'indice de puissance  $p$  est importante plus l'influence du coefficient de Pasternak sur la température critique du flambement est important.  
Plus le rapport d'élancement  $a/h$  est important moins l'indice de puissance  $p$  affecte la température critique du flambement.

## **Conclusion Générale**

### **Conclusion générale:**

Les plaques en matériaux à gradient de propriété suscitent depuis une trentaine d'années beaucoup d'intérêt, largement utilisées dans divers secteurs industriels, ils font constamment de l'actualité scientifique. Compte tenu de leurs géométries particulières, leurs légèretés et la fonction structurelle qu'elles accomplissent, la précision dans leurs modélisations est la principale qualité recherchée.

Dans cette thèse, on s'est intéressé à l'effet de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre dans l'évaluation des réponses de la plaque en matériaux à gradient de propriété, en effet, le fait qu'elle est hétérogène et dissymétrique dans la direction de l'épaisseur, il est évident d'avoir deux surfaces distinctes, la distance entre les deux surfaces est un bras de levier, associé à la résultante des contraintes engendre un moment de flexion additionnel, surestimant le moment de flexion réel.

Donc, pour se rendre à l'évidence, nous avons repris l'enchaînement mathématique pour le calcul des réponses, en introduisant une nouvelle théorie d'ordre élevé à quatre inconnues seulement, avec une fonction de cisaillement transverse de forme hyperbolique, tout en injectant la position exacte de la surface neutre, la plaque est soumise indépendamment à deux types de chargement, le chargement dynamique et bien évidemment statique et le chargement thermique et afin de tirer un maximum d'informations, nous avons utilisé deux gradients, l'un défini par la fonction constitutive de Mori-Tanaka et l'autre par la loi de puissance et pour élargir l'étude paramétrique nous avons utilisé cinq fonctions de cisaillement transverse.

D'une part, l'étude comparative a montré que les résultats obtenus à partir de la méthode proposée concordent bien avec les résultats analytiques existants dans la littérature, que ce soit pour le cas dynamique ou thermique, ce qui valide la fiabilité et la précision de l'approche analytique suivie. Il convient aussi de noter que les théories proposées par d'autres auteurs impliquent cinq inconnues ou plus. Et d'autre part, l'étude paramétrique a révélé l'influence de la prise en compte de la position exacte de la surface neutre sur l'ensemble des réponses de la plaque, Pour le cas vibratoire :

- Pour une valeur de  $p = 0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la surface neutre coïncide avec la surface médiane, les résultats ne sont pas affectés.
- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur les résultats.
- Les valeurs données par CPT sont grossières excepté pour des élancements importants.
- La prise en compte de la position exacte de la surface neutre affecte les contraintes, les déplacements et les fréquences propres cette influence est d'autant plus importante lorsque elle est moins élancée (épaisse).
- La prise en compte de la position exacte de la surface neutre affecte les contraintes et les déplacements cette influence est d'autant plus importante lorsque la valeur de  $p$  croit, cette influence s'atténue pour des valeurs de  $p > 4$ .
- Pour une valeur de  $p = 0.5$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur juste pour le premier mode et elle se réduit pour les modes supérieurs.
- Pour une valeur de  $p \geq 1$ , la fréquence adimensionnelle prend de l'ampleur pour une plaque épaisse et s'atténue pour une plaque mince, quel que soit le mode. Ainsi elle est plus importante lorsque le  $p$  est plus important.

Pour le cas thermique:

- Pour la CPT la prise en compte de la position exacte de la surface neutre ou pas n'a pas d'influence sur la température critique de flambement.
- Les valeurs données par CPT sont grossières, excepté pour des élancements importants.
- Pour un indice de puissance  $p = 0$ , soit une plaque entièrement en céramique, la température critique du flambement est plus importante lorsque le rapport d'élancement  $a/h$  est moins important.
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque le rapport d'élancement  $a/h$  est petit et elle devient insignifiante lorsque le rapport  $a/h$  devient important.
- la prise en compte de la position exacte de la surface neutre amplifiée la température critique du flambement, cette amplification est d'autant plus importante lorsque l'indice de puissance  $p$  est plus important.

- La présence de la fondation avec un puis deux paramètres amplifiée d'avantage la température critique de flambement.
- Quel que soit le type de chargement, plus le rapport  $a/b$  est important plus la température critique du flambement est importante.
- Quel que soit le type de chargement, lorsque le paramètre de Winkler augmente il affecte juste les plaques de rapport  $a/b$  compris entre 1 et 3, au-delà son influence est insignifiante sur la température critique du flambement.
- Quel que soit le type de chargement, lorsque le paramètre de Pasternak augmente la température critique du flambement augmente.
- Plus la valeur d'indice de puissance  $p$  est importante plus l'influence du coefficient de Pasternak sur la température critique du flambement est importante.
- Plus le rapport d'élancement  $a/h$  est important moins l'indice de puissance  $p$  affecte la température critique du flambement.

En perspective, nous suggérant de reprendre la même démarche en changeant les conditions aux limites et en passant à d'autres formes géométriques, nous proposons aussi d'étendre le modèle d'ordre élevé pour le cas des plaques présentant des défauts de fabrication telle la porosité.

En fin, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans l'élaboration des modèles analytiques pour l'étude de comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés sous chargements dynamiques et thermiques.

## **Références bibliographique**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ABDELHAK Z. et al. 2015] ABDELHAK Z., HADJI L., DAOUADJI T.H., BEDIA E.A., “Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory”, *Advances in Materials Research*, 4(1), 2015

[ABRATE S 2008] ABRATE S. (2008), “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Compos. Part B-Eng.*, 39, 151-158.

[AD. C. PRONK et MARION E. VAN DEN BOL 1998] AD. C. PRONK et MARION E. VAN DEN BOL, Winkler- Pasternak-Kerr Foundations – Notes on boundary conditions, BCRA’98 conference in Trondheim, 1998

[ADNENE SAKLY 2013] ADNENE SAKLY, Fabrication additive de pièces à base d’alliages métalliques complexes, Thèse de doctorat, L’UNIVERSITE DE LORRAINE, 2013

[A. FEKRAR et al. 2010] A. FEKRAR, H.AIT ATMANE, A. TOUNSI, EA ADDA BEDIA, Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes sous charge thermique, Symposium International sur la Construction en Zone Sismique Université, Hassiba Benbouali (Chlef), Algérie, 2010

[AICHA BESSAIM et al. 2013] AICHA BESSAIM, MOHAMMED SA HOUARI, ABDELOUAHED TOUNSI, SR MAHMOUD AND EL ABBES ADDA BEDIA, A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15(6) 671–703, 2013

[AIT AMAR MEZIANE et al. 2014] AIT AMAR MEZIANE, M., ABDELAZIZ, H.H., TOUNSI, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions” *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293 – 318.

[AIT AMAR MEZIANE M. et al. 2010] AIT AMAR MEZIANE M., Abdelaziz H.H., Tounsi, A., “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318, 2014

[AIT AMAR MEZIANE et al. 2010] AIT ATMANE, H., TOUNSI, A., MECHAB, I., ADDA BEDIA E.A.,” Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak

elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6, Issue 2, pp 113-121, 2010

[AIT ATMANE H et al. 2011] AIT ATMANE H, TOUNSI A , EL ABBES ADDA BEDIA , Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement, Séminaire International, Innovation & valorisation en génie civil & matériaux de construction, Raba , Maroc, 2011

[AIT ATMANE H.et al. 2015] AIT ATMANE H., TOUNSI A., BERNARD F., MAHMOUD S.R., “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369-384, 2015

[AIT ATMANE H.et al. 2016] AIT ATMANE H., TOUNSI A., BERNARD F. , “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (In press), 2016

[AIT ATMANE H.et al. 2010] AIT ATMANE H., TOUNSI A., ADDA BEDIA E.A., “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int J Mech Mater Des*, 6(2), 113 – 121, 2010

[AIT YAHIA S.et al. 2015] AIT YAHIA S., AIT ATMANE H., HOUARI M.S.A., Tounsi A., “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1143 – 1165, 2015

[AIT YAHIA S et al. 2014] AIT YAHIA S., AIT ATMANE H., HOUARI, M.S.A., TOUNSI A., Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, 2014

[AKBAŞ Ş.D. 2015] AKBAŞ Ş.D., “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, 19(6), 1421-1447, 2015

[AKIL A. 2014] AKIL A., “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”, *Int. J. Civil Struct. Environ. Infrastr. Eng. Res. Develop.*, 4(2), 59-64, 2014

[AL-BASYOUNI K.S.et al. 2015] AL-BASYOUNI K.S., TOUNSI A. AND MAHMOUD S.R., “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos.Struct.*, 125, 621-630, 2015

[ALIREZA DANESHMEHR et al. 2013] ALIREZA DANESHMEHR, MOHSEN HEYDARI et MAJID AKBARZADEH KHORSHIDI, Post-buckling analysis of FGM beams according to different shear deformation theories, *International Journal of Multidisciplinary and Current*, July-August-2013

[ALLAHVERDIZADEH A et al. 2008] ALLAHVERDIZADEH A., NAEI M.H., NIKKHAH BAHRAMI M., "Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates", *J. Sound Vib.*, 310, 966–984, 2008

[AMINE MH. et al. 2009] AMINE MH., SOLEIMANI M., RASTGOO A., "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation". *Smart. Mater. Struct.*, 18:1–9, 2009

[ANTHONY GRUNENWALD 2011] ANTHONY GRUNENWALD, Dépôt et caractérisation de couches minces diélectriques poreuses à porosité ordonnée obtenues par voies sol-gel et plasma, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Montpellier, 2011

[AREFI M. 2015] AREFI M., "Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections", *Steel and Composite Structures*, 18(3), 569 – 672, 2015

[ASTRID ROTA 2006] ASTRID ROTA, Technologie and controlled tailoring of FGM – Part 2, 2006

[ATTIA A. et al. 2014] ATTIA A., TOUNSI A., ADDA BEDIA E.A., MAHMOUD S.R., "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and Composite Structures*, 2014

[BACHIR BOUIADJRA M. et al. 2012] BACHIR BOUIADJRA M., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory", *Journal of Thermal Stresses*, 35, 677 – 694, 2012

[BAKORA A. et TOUNSI A. 2015] BAKORA A. et TOUNSI A., "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, 56(1), 85-106, 2015

[BELABED Z. et al. 2014] BELABED Z., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., MAHMOUD S.R. et ANWAR BÉG, O., "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, 60, 274-283, 2014

[BELKORISSAT I et al. 2015] BELKORISSAT I., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., ADDA BEDIA E.A. et MAHMOUD, S.R., "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel and Composite Structures*, 18(4), 1063-1081, 2015

[BENACHOUR A. et al. 2011] BENACHOUR A., DAOUADJI H. T., AIT ATMANE H., TOUNSI A., MEFTAH S.A., "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B-Eng.*, 42, 1386–1394, 2011

[BENNAI R.et al. 2015] BENNAI R., AIT ATMANE H., TOUNSI A., “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams” *Steel and Composite Structures*, 19(3), 521-546, 2015

[BENNOUN M.et al. 2016] BENNOUN M., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423 – 431, 2016

[BENOIT WATREMETZ 2006] BENOIT WATREMETZ, *Modele Thermomecanique 3d D'un Matériau A Gradient De Propriétés A L'aide De Techniques Multigrilles. Application Aux Moules D'injection De Polymeres*, Thèse de doctorat, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon, 2006

[BENYOUCEF S.et al. 2010] BENYOUCEF S., TOUNSI A., FEKRAR A., AIT ATMANE H., ADDA BEDIA E.A., “Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Mechanics of Composite Materials*, 46(4), 425 – 434, 2010

[BESSAIM AICHA 2014] BESSAIM AICHA, *Etude de l'influence de cisaillement transverse et de la déformation normale sur le comportement statique et dynamique des structures FGM*, Thèse de doctorat, Université de Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès, Algérie, 2014

[B. ILSCHNER 1993] B. ILSCHNER, *Structural and compositional gradients : basic idea, preparation, applications*, *JOURNAL DE PHYSIQUE IV*, Colloque C7, supplément au Journal de Physique III, Volume 3, 1993, P 763-772

[B. KIEBACK et al. 2003] B. KIEBACK, A. NEUBRAND, H. RIEDEL, *Processing techniques for functionally graded materials*, *Materials Science and Engineering A362*, ELSEVIER, 2003, P 81–105

[BOUAZZA M.et al. 2010] BOUAZZA M., TOUNSI A., ADDA-BEDIA E.A., MEGUENI, A., “Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach”, *Computational Materials Science*, 49, 865–870, 2010

[BOUCHAFA A.et al. 2015] BOUCHAFA A., BACHIR BOUIADJRA M., HOUARI M.S.A., TOUNSI A. “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, 18(6), 1493 – 1515, 2015

[BOUDERBA B. et al. 2013] BOUDERBA B., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, 14(1), 85 – 104, 2013

[BOUDERBA B. et al. 2012] BOURADA M., TOUNSI A., HOUARI M.S.A., ADDA BEDIA E.A., “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, J. Sandwich Structures Materials, 14, 5 – 33, 2012

[BOUNOUARA F. et al. 2016] BOUNOUARA F., BENRAHOU K.H., BELKORISSAT I., TOUNSI A., “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, Steel and Composite Structures, (In press), 2016

[BOURADA M. et al. 2012] BOURADA M., TOUNSI A., HOUARI M.S.A. et ADDA BEDIA E.A., “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, J. Sandw. Struct. Mater., 14(1), 5-33, 2012

[BOURADA M. et al. 2015] BOURADA M., KACI A., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, Steel and Composite Structures, 18(2), 409 – 423, 2015

[BOUSAHLA A. et al. 2014] BOUSAHLA A., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., ADDA BEDIA E.A., “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, International Journal of Computational Methods, 11(6), 1350082, 2014

[BRISCHETTO S 2008] BRISCHETTO S, CARRERA E, ROBALDO A. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. AIAA Journal 2008; 46(1):194-203.

[CARRERA E 2012] CARRERA E, NEVES AMA, FERREIRA AJM, CINEFRA M, ROQUE CMC, JORGE RMN et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. Composites Part B: Engineering 2012; doi:10.1016/j.compositesb. 2012. 01.089.

[CECILE BARON 2009] CECILE BARON, L'os et le bambou, Journée de rencontre Jean Le Rond D'Alembert, Lions, 2009

[CHAOUCHE Abdellah 2013] CHAOUCHE Abdellah, Analyse Vibratoire Des Plaques Minces Sous Différentes Conditions Aux Limites, Master Professionnel, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA, 2013

[CHATTIBI F. et al. 2015] CHATTIBI F., BENRAHOU K.H., BENACHOUR A., NEDRI K., TOUNSI A., “Thermomechanical effects on the bending of antisymmetric cross-ply composite plates using a four variable sinusoidal theory”, Steel and Composite Structures, 19(1), 93 – 110, 2015

[CINEFRA M 2011] CARRERA E, BRISCHETTO S, CINEFRA M, SOAVE M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering* 2011; 42(2):123-133.

[DARILMAZ K 2015] DARILMAZ K., “Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 395 – 408, 2015

[DRAICHE K. et al. 2014] DRAICHE K., TOUNSI A. et KHALFI Y., “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69-81, 2014

[EBRAHIMI F. et DASHTI S.2015] EBRAHIMI F. et DASHTI S.,” Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam”, *Steel and Composite Structures*, 19(5), 1279 – 1298, 2015

[ELISA CANTERGIANI 2012] ELISA CANTERGIANI, functionally graded composites: carbon gradient inside interstitial free steel, 2012

[EL MEICHE N. et al. 2014] EL MEICHE N., TOUNSI A., ZIANE N., MECHAB I. ET ADDA BEDIA E.A., “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, 53(4), 237-247, 2011

[ELTAHER M.A. et al. 2014] ELTAHER M.A., ALSHORBAGY A.E. et MAHMOUD F.F., “Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams”, *Compos. Struct.*, 99, 193-201, 2013

[EMAD JAHANGIR 2011] EMAD JAHANGIR, Phénomènes d'interaction sol-structure vis-à-vis de l'aléa retrait-gonflement pour l'évaluation de la vulnérabilité des ouvrages, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2011

[EMILE YOUSSEF 1994] EMILE YOUSSEF, Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux, Thèse de doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées, France, 1994

[FABIEN REMONDIERE 2006] FABIEN REMONDIERE, Utilisation de la voie chimique pour le dépôt de films minces de matériaux ferroélectriques de structure perovskite, Thèse de doctorat, Université De Limoges, 2006

[FEKRAR A. et al. 2014] FEKRAR A., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., MAHMOUD S.R., “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, 49, 795 – 810, 2014

[FERREIRA AJM 2012] FERREIRA AJM, NEVES AMA, CARRERA E, CINEFRA M, ROQUE CMC, JORGE RMN et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 2012;94(5):1814-1825.

[F. TORREGROSA 2004] F. TORREGROSA, Application de l'implantation ionique en traitement des surfaces 2, 2004

[GANAPATHI M. et PRAKASH T. 2006] GANAPATHI M. et PRAKASH T., "Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates", Compos Struct, 74(2), 247 – 250, 2006

[GIRAULT GRÉGORY 2006] GIRAULT GRÉGORY, Réponse d'une plaque couplée à un liquide et soumise à une pression mobile. Aspects Théoriques et expérimentaux en détonique, Thèse de doctorat, Université D'orleans, 2006

[HADJI. L. et al. 2011] HADJI. L, A. ATMANE H., TOUNSI. A, MECHAB. I, ADDA BEDIA E.A., "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory" Appl. Math. Mech. -Engl. Ed., 32(7), 925–942, 2011

[HADJI L. et al.2014] HADJI L., DAOUADJI T.H., TOUNSI A., BEDIA E.A., "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam", Steel and Composite Structures, 16(5), 507 – 519, 2014

[HAMIDI A. et al.2015] HAMIDI A., HOUARI M.S.A., MAHMOUD S.R., TOUNSI A., "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", Steel and Composite Structures, 18(1), 235 – 253, 2015

[HASSEN AIT ATMANE et al. 2013] HASSEN AIT ATMANE, ABDELOUAHED TOUNSI, EL ABBES ADDA BEDIA, Etude analytique des plaques à caractéristiques matérielles aléatoires en utilisant une théorie raffinée, 31èmes Rencontres de l'AUGC, E.N.S. Cachan, 2013

[HEBALI H. et al.2014] HEBALI H., TOUNSI A., HOUARI M.S.A., BESSAIM A., ADDA BEDIA E.A., "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", ASCE J. Engineering Mechanics, 140, 374 – 383, 2014

[H. NGUYEN-XUAN et al. 2012] H. NGUYEN-XUAN, LOC V. TRAN, CHIEN H. THAI B, T. NGUYEN-THOI, Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing, Thin-Walled Structures 54 (2012) 1–18

[HOSSEIN ABDIZADEH 1997] HOSSEIN ABDIZADEH, Elaboration et Caractérisation de Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'alumine», Thèse de Doctorat, L'institut National des Sciences appliquées de Lyon, 1997

[HOSSEINI HASHEMI et al. 2014] HOSSEINI HASHEMI. SH, ROKNI DAMAVANDI TAHER. H, OMIDI. M., "3-D free vibration analysis of annular plates on Pasternak elastic foundation via p-Ritz method", J. Sound. Vib., 311, 1114–1140, 2008

[HOSSEINI HASHEMI et al. 2011a] HOSSEINI-HASHEMI. S., FADAEI. M., ROKNI. D. et TAHER HOSSEIN. , " Exact solutions for free flexural vibration of Levy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory", Appl. Math. Model., 35:708–27, 2011a

[HOSSEINI HASHEMI et al. 2011b] HOSSEINI-HASHEMI S., FADAEI M., ATASHIPOUR S.R., "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", Compos. Struct., 93(2), 722–735, 2011b

[HOSSEINI HASHEMI et al. 2011c] HOSSEINI-HASHEMI S., FADAEI M., ATASHIPOUR S.R., "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates". Int. J. Mech. Sci., 53(1), 11–22, 2011c

[HOWELL A. et BERENY J.1997] HOWELL A. et BERENY J., "Engineer's Guide to Solar Energy", (Solar Energy Information Services, USA), 1997

[H. SEPIANI et al. 2009] H. SEPIANI, F. EBRAHIMI ET H. KARIMIPOUR, A mathematical model for smart functionally graded beam integrated with shape memory alloy actuators, Journal of Mechanical Science and Technology 23 (2009) 3179~3190

[HUANG X.L. et SHEN H.S. 2004] HUANG X.L. et SHEN H.S., "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", Int. J. Solids Struct., 41, 2403–2427, 2004

[HUSSEIN HAMDAN 2007] HUSSEIN HAMDAN, Coulage en bande: Élaboration d'une barbotine à base de cuivre/bronze renforcée par des particules améliorant le frottement à sec, 2007

[HUU T. T et al. 2013] HUU T. T., TAEHYO P., DONG-HO C., "An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates", Arch. Appl. Mech., 83, Issue 1, pp 137-149, 2013

[HUU-TAI THAI et al. 2013] HUU-TAI THAI, SEUNG-EOCK KIM, A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates, Composite Structures, Elsevier, Volume 96, Seoul Republic of Korea, Composite Structures, (In press), 2013

[HUU-TAI THAI et DONG-HO CHOI 2013] HUU-TAI THAI, DONG-HO CHOI, Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates, Composites: Part B 56 (2014) 705–716, 2013

[J. N. REDDY 2000] J. N. REDDY, Analysis of functionally graded plate, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2000, P 663-684

[JYOTI VIMAL et al. 2014] JYOTI VIMAL, R K SRIVASTAVA, A D BHATT AND AVADESH K SHARMA, Free vibration analysis of moderately thick functionally graded skew plates, *Engineering Solid Mechanics* 2 (2014) 229-238

[KACI ABDELHAKIM 2012] KACI ABDELHAKIM, Étude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique, Thèse de doctorat, Université de Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès, Algérie, 2012

[KADDOURI DJAMEL EDDINE 2014] KADDOURI DJAMEL EDDINE, Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel, Thèse de Magister, Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen, 2014

[KAR V.R. et PANDA S.K.2015] KAR V.R. et PANDA S.K., "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel and Composite Structures*, 18(3), 693-709, 2015

[KETTAF F.Z.et al. 2013] KETTAF F.Z., HOUARI M.S.A., BENGUEDIAB M. et TOUNSI A., "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423, 2013

[KHALFI Y.et al.2014] KHALFI Y., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, 11(5), 135007, 2014

[KIANI Y. et ESLAMI MR.2014] KIANI Y. et ESLAMI MR., "Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation", *Arch Appl Mech*, 82(7), 891–905, 2012

[KOIZUMI M.1997] KOIZUMI M., "FGM Activities in Japan", *Compos. Part B*, 28, 1–4, 1997

[LARBI CHAHT F.et al.2015] LARBI CHAHT F., KACI A., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., ANWAR BÉG O., MAHMOUD S.R., "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 425 – 442, 2015

[LANHE W. 2004] LANHE W., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate," *Compos. Struct.*, 64(2), 211 – 218, 2004

[LEE D.et al. 2013] LEE D., WAAS A.M, KARNOPP B.H, 1998, "Analysis of a rotating multi layer annular plate modeled via layer wise zig-zag theory: free vibration and transient analysis", *Comput. Struct.*, 66, 313–335, 1998

[LI Q.et al. 2013] LI Q., IU V.P. et KOU K.P. , "Three dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment", *J. Sound. Vib.*, 324:733–50, 2009

[LIEW K.M. et YANG B. 2013] LIEW K.M. et YANG B., "Elasticity solutions for free vibrations of annular plates from three-dimensional analysis", J. Sound. Vib., 37, 7689–7702, 2000

[LIN C.C. et TSENG C.S. 2013] LIN C.C. et TSENG C.S., "Free vibration of polar orthotropic laminated circular and annular plates", J. Sound. Vib., 209, 797–810, 1998

[LIU D.Y. et al 2010] LIU D.Y., WANG C.Y. AND CHEN W.Q., "Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity", Compos. Struct., 92, 1047–1051, 2010

[LUC JAOUEN 2002] LUC JAOUEN, Vibrations de flexion des plaques, Université de Sherbrooke, 2002

[MAHMOUD S.R. et al. 2014] MAHMOUD S.R., ABD-ALLAH A.M., TOUNSI A., MARIN M., "The problem of wave propagation in magneto-rotating orthotropic non-homogeneous medium", Journal of Vibration and Control, (In press), 2014

[MAHI A. et al. 2015] MAHI A., ADDA BEDIA E.A. et TOUNSI A., "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", Appl. Math. Model., 39(9), 2489-2508, 2015

[MANTARI JL 2012] MANTARI JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. Composite Structures 2012;94(2):714-723.

[MASSAMAESSO BILASSE 2010] MASSAMAESSO BILASSE, Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à ame viscoélastique, Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine – Metz, 2010

[MATSUNAGA H. 2008] MATSUNAGA H. , "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", Compos. Struct., 82(4), 499–512, 2008

[MATSUNAGA H. 2009] MATSUNAGA H., "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", Composite Structures, 90, 76 – 86, 2009

[MERADJAH M. et al. 2015] MERADJAH M., KACI A., HOUARI M.S.A., TOUNSI A. et MAHMOUD S.R., "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", Steel and Composite Structures, 18(3), 793 – 809, 2015

[MICHEL BARRETTE 2000] MICHEL BARRETTE, analyse vibroacoustique de la plaque raidie avec les éléments finis hiérarchiques trigonométrique, Mémoire de maîtrise es-science appliqués, Sherbrooke, Québec, CANADA, 2000

[MINE USLU UYSAL 2013] MINE USLU UYSAL, Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering Vol:7 No:11, 2013

[MOHAMED EL-HEBIB GUELLIL 2010] MOHAMED EL-HEBIB GUELLIL, Modélisation du comportement des plaques reposant sur sol élastique par la méthode des éléments finis, Mémoire de Magister, Université Hassiba Ben Bouali de Chlef , 2010

[MORIMOTO T. et al. 2006] MORIMOTO T., TANIGAWA Y. AND KAWAMURA R., “Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating”, Int. J. Mech. Sci., 48, Issue 9, Pages 926-937, 2006

[M. SEVEIK et al. 2009] M. SEVEIK, P. HUTAI, L. NAHLIK, Z. KNESL, An evaluation of the stress intensity factor in functionally graded materials, Applied and Computational Mechanics 3 (2009) 401–410

[NA K.S. et KIM J.H. 2006] NA K.S. et KIM J.H., “Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method,” Finite Elem. Anal. Des., 42, 749 – 756, 2006

[NEDRI K. et al. 2014] NEDRI K., EL MEICHE N., TOUNSI A., “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, Mechanics of Composite Materials, 49(6), 641 – 650, 2014

[NEVES AMA et al. 2012] NEVES AMA, FERREIRA AJM, CARRERA E, ROQUE CMC, CINEFRA M, JORGE RMN et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. Composites Part B: Engineering 2012; 43(2):711-725.

[NGUYEN K.T. et al. 2015] NGUYEN K.T., THAI T.H. et VO T.P., “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, Steel and Composite Structures, 18(1), 91 – 120, 2015

[NUTTAWIT W. et VARIDDHI U. 2014] NUTTAWIT W., VARIDDHI U., “Linear and non linear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, Aerosp. Sci. Technol., 32, Issue 1, Pages 111-120, 2014

[OULD LARBI L. et al. 2013] OULD LARBI L., KACI A., HOUARI M.S.A. et TOUNSI A., “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 41, 421–433, 2013

[PASTERNAK P.L. 1954] PASTERNAK P.L., "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literatury po Stroitelstvu i Arkhitekture, 1:1–56, 1954

[P. MALEKZADEH et M. SHOJAEE 2012] P. MALEKZADEH, M. SHOJAEE, A unified formulation for free vibration of functionally graded plates, International Journal of Advanced Engineering Applications, Vol.5, Iss.4, pp.71-84, 2012

[PRADHAN K.K. et CHAKRAVERTY S.2015] PRADHAN K.K. et CHAKRAVERTY S., "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports", Struct. Eng. Mech., 53(2), 337-354, 2015

[PRAVEEN GN. et REDDY JN.1998] PRAVEEN GN., REDDY JN., "Non linear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic metal plates", Int. J. Solids. Struct., 35, 4457–76,1998

[RABBAB BACHIR BOUIADJRA et al. 2013] RABBAB BACHIR BOUIADJRA, E.A. ADDA BEDIA ET ABDELOUAHED TOUNSI, Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 48, No. 4, 2013

[R. BACHIR BOUIADJRA 2015] BACHIR BOUIADJRA RABBAB, Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur fondations Elastiques, Thèse de doctorat, Université de des sciences et de la technologie d'ORAN MOHAMED BOUDIAF, 2015

[RABIA BENFERHAT et al. 2014] RABIA BENFERHAT, TAHAR HASSAINE DAOUADJI, MOHAMED SAID MANSOUR, ABDELAZIZ HADJ HENNI, Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM, Revue « Nature & Technologie ». A- Sciences fondamentales et Engineerié, N°12/ Janvier 2014. Pages 24 à 44

[ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI 2014] ROBERT LEROY et LÉDA DIMITRIADI, Matériaux gradué de grande échelle obtenue par fabrication additive, Clément GOSSELIN-M2-ENSAPM, 2014

[ROHIT SAHA et MAITI. P.R 2012] ROHIT SAHA, MAITI. P.R, Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial loa, International Journal Of Civil And Structural Engineering, Volume 2, No 4, 2012

[SADOUNE M. et al.2014] SADOUNE M., TOUNSI A., HOUARI M.S.A., ADDA BEDIA E.A., "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", Steel and Composite Structures, 17(3), 321-338, 2014

[SAIDI A.R. et JOMEHZADEH E.2009] SAIDI A.R. et JOMEHZADEH E., “On analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported”, Proc. I. Mech. E., Part C: J. Mech. Eng. Sci., 223, 2009-2016, 2009

[SALIMA A.et al.2009] SALIMA A., FEKRAR A., HEIRECHE H., SAIDI H., TOUNSI A., Adda Bedia E.A., “An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler–Pasternak elastic foundations”, Wind and Structures, (Accepted), 2016

[SALLAI B.et al.2015] SALLAI B., HADJI L., HASSAINE DAOUADJI T. et ADDA BEDIA E.A., “Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam”, Steel and Composite Structures, 19(4), 829-841, 2015

[SAMSAM SHARIAT B.A. et ESLAMI M.R.2007] SAMSAM SHARIAT B.A. et ESLAMI M.R., “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads,” Compos. Struct., 78, 433 – 439, 2007

[SHUFRIN I. et EISENBURGER M.2005] SHUFRIN I., EISENBURGER M., ”Stability and vibration of shear deformable plates- first order and higher order analysis”, Int. J. Solid Struct., 42, 1225–1251, 2005

[SHAHRJERDI A.et al.2010] SHAHRJERDI A., BAYAT M., MUSTAPHA F., SAPUAN S.M. et ZAHARI, R., “Second order shear deformation theory to analyze stress distribution for solar functionally graded plates,” Mech. Des. Struct. Mach., 38, 348–361,2010

[SHAHRJERDI A.et al.2011a] SHAHRJERDI A., MUSTAPHA F., BAYAT M. et MAJID D.L.A., “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, Journal of Mechanical Science and Technology, 25(9), 2195 – 2209, 2011a

[SHAHRJERDI A.et al.2011b] SHAHRJERDI A. , MUSTAPHA F., SAPUAN S.M., BAYAT M., ABDUL MAJID D.L.A.ET ZAHARI R., "Thermal Free Vibration Analysis of Temperature-Dependent Functionally Graded Plates Using Second Order Shear Deformation", Key Engineering Materials, 471-472, 133-139, 2011b

[SLIMANE MERDADI et al. 2010] SLIMANE MERDADI · ABDELOUAHED TOUNSI · MOHAMMED SID AHMED HOUARI · ISMAIL MECHAB · HABIB HEBALI · SAMIR BENYOUCEF, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, 2010

[SUNDARARAJAN N. et al. 2005] SUNDARARAJAN N., PRAKASH T., GANAPATHI M. , ”Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environments”, Finite. Elem. Anal. Des., 42:152–68, 2005

[SURESH, S. et MORTENSEN 1998] SURESH, S. et MORTENSEN, A., “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, (IOM Communications Ltd., London), 1998

[SOBHAY M.2013] SOBHAY M., “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos Struct*, 99,76–87, 2013

[SURESH S. et MORTENSEN A.1998] SURESH S. et MORTENSEN A., “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, (IOM Communications Ltd., London), 1998

[SYLVAIN HALLYNCK 2005] SYLVAIN HALLYNCK, Élaboration et caractérisations de composites chargés en ferrite spinelle à morphologie contrôlée pour utilisations micro-ondes, Thèse de doctorat, Université Strasbourg I – Louis Pasteur, 2005

[TAGRARA S.H et al.2015] TAGRARA S.H., BENACHOUR A., BACHIR BOUIADJRA M. et TOUNSI A., “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel and Composite Structures*, 19(5), 1259-1277, 2015

[TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2012] TAHAR HASSAINE DAOUADJI, ABDEOUAHED TOUNSI, LAZREG HADJI, ABDELAZIZ HADJ HENNI, ADDA BEDIA EL ABBES, a theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates, *Materials Physics and Mechanics* 14 (2012) 110-128, 2012

[TAHAR HASSAINE DAOUADJI et al. 2013] TAHAR HASSAINE DAOUADJI, ABDELOUAHED TOUNSI, EL ABBES ADDA BEDIA, Analytical solution for bending analysis of functionally graded plates, *Scientia Iranica B* (2013) 20 (3), 516\_523, 2013

[TALHA M. et SINGH B.N.2010] TALHA M. et SINGH B.N., “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, *Appl. Math. Model*, 34(12), 3991-4011, 2010

[TEBBOUNE W. et al.2015] TEBBOUNE W., BENRAHOU K.H., HOUARI M.S.A., TOUNSI A., “Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 443 – 465, 2015

[THIBAUT REYNIER 2012] THIBAUT REYNIER, Élaboration et maîtrise de la structure d'une cellule de pile à combustible à base de zircone scandée, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012

[TOUNSI A.et al. 2013] TOUNSI A., HOUARI MOHAMMED S. A., BENYOUCEF S., ADDA BEDIA E.A., “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24, 209–220, 2013

[T.P.D. RAJAN AND B.C. PA 2009] T.P.D. RAJAN AND B.C. PA, Development In Manufacturing Processes Of Functionally Graded Materials, IJAEA, Volume 2, Issue 5, P 64-74, 2009

[VEL S.S. et BATRA R.C.2004] VEL S.S. et BATRA R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates". J. Sound. Vib., 272:703–30, 2004

[WINKLER E. 1867] WINKLER E., "Die lehre von der elasticitaet und festigkeit", Prag Dominicus, 1867

[WOO. J.et al. 2006] WOO. J., MEGUID S.A, ONG. L.S., "Nonlinear free vibration of functionally graded plates", J. Sound Vib., 289, 595–611, 2006

[WU CP et al. 2011] WU CP, CHIU KH, WANG YM. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates. Composite Structures 2011;93(2):923-943.

[WU CP et LI HY 2011] WU CP, LI HY. An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. Composite Structures 2010;92(10):2591-2605.

[YAHOOBI H. et FERAIDOON A. 2010] YAHOOBI H. et FERAIDOON A., "Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load", World Appl. Sci. J., 10(3), 337-341, 2010

[YAGHOOBI H. et TORABI M.2013] YAGHOOBI H. et TORABI M., "Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions", J. Therm. Stress., 36, 869-894, 2013

[YAGHOOBI H. et al.2014] YAGHOOBI H., VALIPOUR M.S., FEREIDOON A. et KHOSHNEVISRAD P., "Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM", Steel and Composite Structures, 17(5), 753 – 776, 2014

[YAGHOOBI H. et al.2014] ZENKOUR A.M. (2009), "The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations", International Journal of Mechanical Sciences, 51, 869–880.

[YANG J. et SHEN H-S. 2010] YANG J. et SHEN H-S., "Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates", Compos. Struct., 54:497–508, 2001

[YANG J. et SHEN H-S. 2002] YANG J. et SHEN H-S., "Vibration characteristic and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environment", J. Sound. Vib., 255:579–602, 2002

[YOSHITAKA SUETAKE 2012] YOSHITAKA SUETAKE, three-dimensional elastic analysis of rectangular plates under lateral load and shear tractions, 12th pan-American Congress of applied mechanics, Spain, 2012

[ZENKOUR AM 2006] ZENKOUR AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 2006;30(1):67-84.

[ZENKOUR A.M. et SOBHY M.2010] ZENKOUR A.M. et SOBHY M., “Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates”, *Composite Structures*, 93, 93–102, 2010

[ZENKOUR A.M. et SOBHY M.2011] ZENKOUR A.M. et SOBHY M., “Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory”, *Journal of Thermal Stresses*, 34, 1119–1138, 2011

[ZENKOUR A.M. et al.2014] ZENKOUR A.M., ALLAM M.N.M. et RADWAN A.F., “Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading”, *International Journal of Applied Mechanics*, 6(5), 1450063, 2014

[ZENKOUR A.M. et ABOUELREGAL A.E.2015] ZENKOUR A.M. et ABOUELREGAL A.E., “Thermoelastic interaction in functionally graded nanobeams subjected to time-dependent heat flux”, *Steel and Composite Structures*, 18(4), 909 – 924, 2015

[ZHANG D.G. et ZHOU Y.H. 2008] ZHANG D.G. et ZHOU Y.H., “A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface”, *Comp. Mater. Sci.*, 44, 716-720, 2008

[ZHAO X.et al.2009] ZHAO X., LEE Y.Y. et LIEW K.M., “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates,” *Compos. Struct.*, 90, 161 – 171, 2009

[ZHAO X. et LIEW K.M. 2009] ZHAO X. et LIEW K.M., “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method,” *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198, 2796 – 2811, 2009

[ZHANG D.G.et ZHOU Y.H.2008] ZHANG D.G.et ZHOU Y.H., “A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface”, *Computational Materials Science*, 44, 716 – 720, 2008

[ZIDI M. et al. 2014] ZIDI M., TOUNSI A., HOUARI MOHAMMED S. A., ADDA BEDIA E. A., ANWAR BÉG O., “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24–34, 2014

[ZIDI M.et al.2008] ZIDI M., TOUNSI A., HOUARI M.S.A., ADDA BEDIA E.A.et ANWAR BÉG, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, 34, 24