

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme : LAOUFI Imene

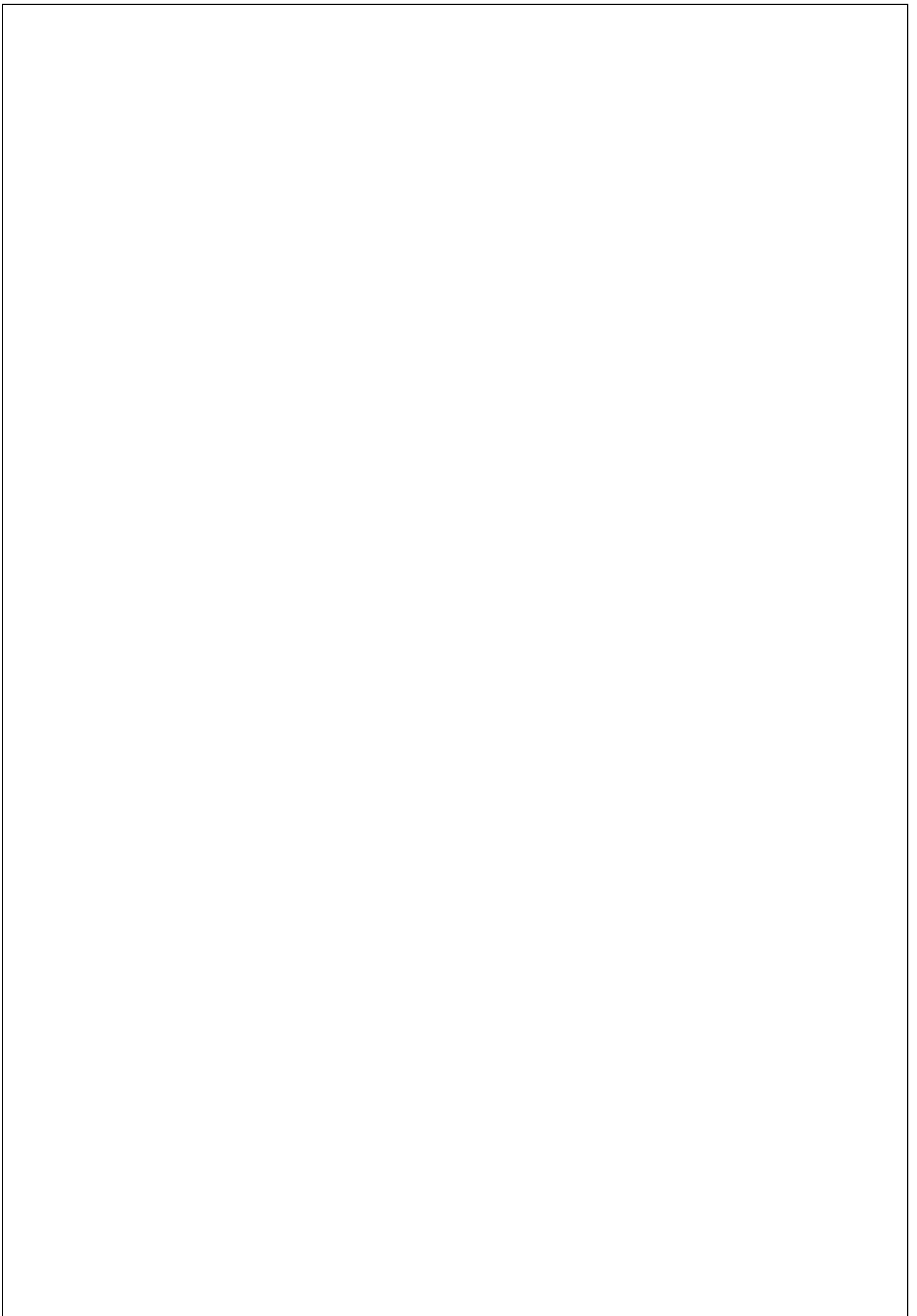
Intitulé de la thèse

Analyse des plaques FGM sous différents types de chargements

Composition du jury :

ADDA BEDIA EL Abbas	Pr	Président	UDL SBA
AMEUR Mohammed	MCA	Directeur de thèse	ENP d'ORAN
BENACHOUR Abdelkader	MCA	Co-directeur de thèse	UDL SBA
TOUNSI Abdelouahed	Pr	Examineur	UDL SBA
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	Examineur	U DE MASCARA
BERRABAH Hamza Madjid	MCA	Examineur	CU de RELIZANE

Année universitaire 2015-2016



REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué dans le **Laboratoire des Matériaux & Hydrologie** du Département du Génie Civil & Travaux Publics de l'Université Djillali Liabes de SIDI BEL ABBES.

Je suis honoré de compter comme président de jury Monsieur **ADDA BEDIA EL Abbas**, Professeur au Département de Génie civil de l'Université Djillali Liabes de SIDI BEL ABBES, qui me fait le grand honneur de juger mon travail et de présider le jury de ma thèse. Je lui exprime ma profonde gratitude.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur **TOUNSI Abdelouahed** Professeur au Département de Génie civil de l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, à Monsieur **HOUARI Mohamed Sid Ahmed** Maître de conférence au département de Génie Civil de l'université de Mascara, ainsi qu'à Monsieur **BERRABAH Hamza Madjid** Maître de Conférence au Département de Génie Civil du centre Universitaire de Relizane, qui m'ont honoré en acceptant d'être membres du jury et d'examiner attentivement ce manuscrit. Je les remercie vivement.

Monsieur **AMEUR Mohammed**, Maître de conférence au département de Génie Civil à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Oran (ENPO), a été l'initiateur de cette étude et a dirigé ma recherche avec beaucoup d'attention ainsi qu'à Monsieur **BENACHOUR Abdelkader**, Maître de conférence au département de Génie Civil de l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, qui a été co-encadreur. Ils ont su m'orienter et me conseiller ce qui m'a permis d'aller plus loin et de progresser tout au long de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude pour leur grande disponibilité.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès et tous mes collègues de l'Université des Sciences et technologie d'Oran.

Enfin, Merci en particulier à mes parents qui sont là depuis le début et n'ont jamais cessé de me soutenir. Je leur dois beaucoup ...: une montagne d'encouragements et une grande

tendresse. Je tiens à remercier vivement ma chère sœur "Yousra", mes chers frères, mon cher mari, et toute ma famille ainsi que ma belle famille. Merci à eux pour leur confiance, leur soutien, leurs encouragements. Je ne pourrais jamais les remercier suffisamment pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. Cette thèse de doctorat n'est pas ma thèse à moi seule mais elle vous appartient tous. Grand merci à vous tous.

Résumé

En utilisant le modèle d'une plaque soumise à une déformation de cisaillement hyperbolique, ainsi que l'interaction plaque-fondation (modèle de Winkler et Pasternak), une méthode d'analyse est développée pour la détermination des distributions de la flèche et la contrainte dans des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées et simplement appuyées, soumises à une charge sinusoïdale, dans des champs de température et d'humidité. Cette théorie satisfait parfaitement aux conditions aux limites de la contrainte appliquée sur le haut et le bas de la plaque.

Aucun facteur de correction de cisaillement transversal n'est nécessaire car une représentation correcte de la contrainte de cisaillement transversal est donnée. Les propriétés des matériaux constituant la plaque (coefficients d'expansion élastique, thermique, et hygrique) sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur, suivant une simple distribution d'une loi de puissance, en fonction des fractions volumiques des constituants. Des exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier la précision de la présente théorie pour prévoir la réponse de la flexion des plaques faites de matériaux fonctionnellement gradués et soumises à une charge sinusoïdale dans un champ de température ainsi qu'une concentration d'humidité. Les effets des propriétés du matériau sur les flèches et les contraintes sont étudiés; ces propriétés sont la température, l'humidité, rapport d'aspect de la plaque, rapport côté sur épaisseur et rapport des coefficients élastiques (céramique-métal). En outre, trois distributions de la température et l'humidité sont étudiées.

Mots-clés: Plaques Fonctionnellement Graduées, Fondation Elastique, Déformation de Cisaillement Hyperbolique, Charge Hygrothermique.

Abstract

Using the hyperbolic shear deformation plate model and including plate-foundation interaction (Winkler and Pasternak model), an analytical method in order to determine the deflection and stress distributions in simply supported rectangular functionally graded plates (FGP) subjected to a sinusoidal load, a temperature and moisture fields. The present theory exactly satisfies stress boundary conditions on the top and the bottom of the plate. No transversal shear correction factors are needed because a correct representation of the transversal shearing strain is given.

Materials properties of the plate (elastic, thermal and moisture expansion coefficients) are assumed to be graded in the thickness direction according to a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Numerical examples are presented and discussed for verifying the accuracy of the present theory in predicting the bending response of FGM plates under sinusoidal load and a temperature field as well as moisture concentration. The effects of material properties, temperature, moisture, plate aspect ratio, side-to-thickness ratio, ratio of elastic coefficients (ceramic-metal) and three distributions for both temperature and moisture on deflections and stresses are investigated and were also compared with other results.

Keywords: FG plates; Elastic foundation; Hyperbolic Shear Deformation; Hygro-thermal load.

الملخص

باستخدام نموذج تشوه القص القطعي و بما في ذلك التفاعل اللوحة-اساس (نموذج وينكلر- باسترناك) و المنهج التحليلي لتحديد الانحناء وتوزيع الاجهادات للوحة المستطيلة المتدرجة وظيفيا الموضوعة على مساند بسيطة الخاضعة لقوة جيبية و لمجال من الحرارة والرطوبة. هذه النظرية ترضي بالضبط شروط الحدود للاجهادات على مستوى السطح العلوي و السفلي من اللوحة .

معاملات التصحيح القص العرضي ليست ضرورية لان التمثيل لاجهادات القص العرضي المعطى صحيحة. الخصائص المادية للصفحة (معاملات المرونة- الحرارة و الرطوبة) تختلف بشكل مستمر باتجاه السمك حسب قانون القوة بدلالة كسور الحجم للمكونات. تعرض نماذج و تناقش للتحقق من دقة هذه النظرية لمعرفة الاجابة الصحيحة للانحناء للصفائح تحت تحميل القوة الجيبية و مجال الحرارة و تركيز الرطوبة.

اثر خصائص المواد الحرارة الرطوبة نسبة نسبة جانب الى العرض نسب معاملات المرونة (السيراميك و الفولاذ) و التوزيعات الثلاث للحرارة و الرطوبة معا على الانحناءات و الاجهادات مدروسة و مقارنة مع نتائج اخرى.

كلمات البحث

لوحات *FGM* - اساس مرن - تشوه القص القطعي- قوى الرطوبة و الحرارة.

Table des matières

Remerciements	I
Résumé	III
Abstract	IV
الملخص	V
Table de matières	VI
Liste des figures	X
Liste des tableaux	XIV
Introduction générale	1
Références bibliographiques	5
Chapitre I: Matériaux composites et matériaux à gradients de propriétés	
I.1 Matériaux composites	8
I.1.1 Introduction	9
I.1.2 Matériaux composites	9
I.1.2.1 Les renforts	10
I.1.2.2 Les matrices	12
I.2 Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	13
I.2.1 Introduction	13
I.2.2 Historique	16
I.2.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés	19
I.2.4 Applications des matériaux FGM	22
I.2.4.1 Aéronautique	22
I.2.4.2 Matières industrielles	22
I.2.4.3 Optoélectronique	22
I.2.4.4 Biomatériaux	23
I.2.4.5 D'autres	23
I.2.5 Des exemples sur des produits de FGM	23

I.2.5.1 Système spatial	23
I.2.5.2 Système de distribution et de transmission	24
I.2.5.3 Fibre optique	24
I.2.5.4 Industriel	24
I.2.5.5 Titanium	25
I.2.5.6 Crampons Baseball	25
I.2.5.7 Lames de rasoir	25
I.2.5.8 D'autres	26
I.2.6 L'intérêt d'utilisation des FGMs	26
I.2.7 la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique	26
I.2.7.1 La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC	27
a/ un réservoir de chaleur gradué(C/C)	27
b/ un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re)	28
c/ Matériel thermoélectrique gradué en PbTe	29
d/ Une électrode symétriquement graduée MoSi ₂ /Al ₂ O ₃ /Ni/Al ₂ O ₃ /MoSi ₂ pour un TEC SiGe	30
e/ matériau radiatif gradué AlN/W	31
I.2.8 Méthodes d'élaboration des FGMs	33
I.2.8.1 Coulage en bande (Tape casting)	34
I.2.8.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	34
I.2.8.3 Dépôt par Electrophorèse	35
I.2.8.4 Compaction Sèche des Poudres	35
I.2.8.5 Projection Plasma	35
I.2.8.6 C. V. D. et P. V. D.	36
I.2.8.7 Frittage et Infiltration	36
I.2.8.8 Frittage Laser Différentiel	36
I.2.8.9 Implantation Ionique (Sputtering)	37
I.2.8.10 Dépôt par Centrifugation	37

I.2.9 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	38
I.2.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	39
I.2.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	39
I.2.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	40
I.3 Conclusion	41
Références bibliographiques	42
Chapitre II: Matériaux à gradient de propriétés en génie civil	
II.1 Introduction	45
II.2 Application de la technologie du FGM en génie civil	45
II.2.1 Le Béton à gradient de propriétés	45
II.2.2 Autres matériaux à gradient de propriétés	47
II.2.3 Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil	48
a) Les chaussées rigides	48
b) Les chaussées souples	49
c) Les grands vitrages dans les zones chaudes	49
d) Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)	49
e) Les joints dans la charpente métallique	49
II.3 Conclusion	49
Références bibliographiques	50
Chapitre III: Les nouvelles théories des plaques FGM	
III.1 Introduction	51
III.2 Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	51
III.2.1 Approche monocouche équivalente	51
III.2.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)	52
III.2.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	53

III.2.1.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur	55
III.2.2 Approche par couche	59
III.2.2.1 Les modèles zig-zag	60
III.2.2.2 Les modèles en couches discrètes	61
III.3 Modèles éléments finis des structures composites	62
III.3.1 Modèles éléments finis 2D	63
III.3.2 Modèles éléments finis 3D	65
III.4 Conclusion	67
Références bibliographiques	68
Chapitre IV: Formulations théoriques	
IV.1 Introduction	71
IV.2 Modèle mathématique et les équations régissantes	72
IV.2.1 Hypothèses de la présente théorie	73
IV.2.2 Cinématique	74
IV.2.3 Equations constitutives	75
IV.2.4 Equations régissant	75
IV.3 Les solutions analytiques pour les plaques de FGM	78
IV.4 conclusion	80
Références bibliographiques	81
Chapitre V: Résultats et discussions	
V.1 Introduction	85
V.2 Résultats numériques et discussions	85
V.3 Conclusion	100
Références bibliographiques	101
Conclusion générale et perspectives	
	102

Liste des figures

Chapitre I: Matériaux composites et matériaux à gradients de propriétés

Figure I.1:	Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre [Billoët, 1993].	10
Figure I.2:	Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN [Billoët, 1993].	11
Figure I.3:	Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.	15
Figure I.4:	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.	18
Figure I.5:	La distribution composante des matériaux: (a) Matériau plan composé, (b) Matériau relié, (c) Matériau à gradient de propriété.	20
Figure I.6:	Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGM).	20
Figure I.7:	Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.	21
Figure I.8:	Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie.	27
Figure I.9:	(a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur.	28
Figure I.9:	(b) un réservoir à chaleur graduée de C/C.	28
Figure I.10:	changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re.	29
Figure I.11:	Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois- couches.	30
Figure I.12:	Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi ₂ /Al ₂ O ₃ /Ni/Al ₂ O ₃ /MoSi ₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe	31
Figure I.13:	schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W.	32
Figure I.14:	La relation entre la conduction thermique et l'émissivité.	32
Figure I.15:	Disposition du procédé frittage laser différentiel.	36
Figure I.16:	Schéma du procédé dépôt par centrifugation.	37
Figure I.17:	Géométrie d'une plaque FGM.	38
Figure I.18:	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	39
Figure I.19:	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	40
Figure I.20:	La variation du module de Young de la plaque E-FGM.	40

Chapitre II: Matériaux à gradient de propriétés en génie civil

Figure II.1:	Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEK	46
Figure II.2:	Essai de flexion à quatre points, source: ILEK	47
Figure II.3:	En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée; En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK	47
Figure II.4:	Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK	48
Figure II.5:	transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK	48

Chapitre III: Les nouvelles théories des plaques FGM

Figure III.1:	Cinématique de Love-Kirchhoff.	52
Figure III.2:	Cinématique de Reissner-Mindlin.	54
Figure III.3:	Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3)=x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.	55
Figure III.4:	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.	56
Figure III.5:	Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	58
Figure III.6:	Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	58
Figure III.7:	Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique	59
Figure III.8:	Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.	59
Figure III.9:	Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.	60
Figure III.10:	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur	61
Figure III.11:	Elément « sinus » triangulaire à 6 nœuds de [Polit 2002].	64
Figure III.12:	Elément quadrilatère de type Lagrange a 9 nœuds.	64
Figure III.13:	Elément quadrilatère de type Lagrange a 16 nœuds [Nguyen 2004].	64
Figure III.14:	Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z	65
Figure III.15:	Elément brique à 20 nœuds	66

Figure III.16:	Elément singulier à 15 nœuds.	66
Figure III.17:	Etudes du problème de bord libre par EF 3D.	66
Figure III.18:	Elément brique mixte à 18 nœuds.	66
Figure III.19:	Elément d'interface.	67
Chapitre IV: Formulations théoriques		
Figure IV.1:	Configuration de la plaque rectangulaire FGM reposant sur fondation élastique.	72
Chapitre V: Résultats et discussions		
Figure V.1:	La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport de coté de la plaque b/a pour la plaque FGM reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.	91
Figure V.2:	La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport d'élanement a/h pour la plaque de FGM reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.	92
Figure V.3:	Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle dans le plan (S_{11}) à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire de FGM sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.	93
Figure V.4:	Variation de contrainte tangentielle longitudinale adimensionnelle (S_{12}) à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire de FGM sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.	93
Figure V.5:	Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle (S_{13}) à travers l'épaisseur de la plaque de FGM rectangulaire reposant sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.	94
Figure V.6:	La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport de l'élanement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.	95
Figure V.7:	La contrainte axiale adimensionnelle \bar{S}_{11} en fonction du rapport de l'élanement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.	96
Figure V.8:	La contrainte tangentielle longitudinale adimensionnelle \bar{S}_{12} en fonction du rapport de l'élanement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.	96
Figure V.9:	La contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle \bar{S}_{13} en fonction du rapport de l'élanement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.	97
Figure V.10:	La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$).	98
Figure V.11:	La contrainte axiale adimensionnelle \bar{S}_{11} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports	98

E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$).

- Figure V.12:** Contrainte tangentielle adimensionnelle longitudinale \bar{S}_{12} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 98
- Figure V.13:** Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle \bar{S}_{13} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 98
- Figure V.14:** La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 99
- Figure V.15:** La contrainte axiale adimensionnelle \bar{S}_{11} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 99
- Figure V.16:** Contrainte tangentielle adimensionnelle longitudinale \bar{S}_{12} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 99
- Figure V.17:** Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle \bar{S}_{13} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de MGF pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2, a / h = 10$). 99

Liste des tableaux

Chapitre I: Matériaux composites et matériaux à gradients de propriétés

- Tableau I.1:** Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules). 11
- Tableau I.2:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. 21

Chapitre V: Résultats et discussions

- Tableau V.1:** Propriétés Matériels de la plaque FGM 85
- Tableau V.2:** Effet de la fraction volumique exposant sur les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une plaque carrée FGM ($a/h=10$, $b = a = 1$, $K_w = K_p = 0$, $q_0 = 1$, $T = C = 0$). 86
- Tableau V.3** Effets de la fraction volumique exposant sur les déplacements adimensionnels et les contraintes d'une plaque carrée MGF ($a/h=10$, $b = a = 1$, $K_w = K_p = 0$, $q_0 = 1$, $T = C = 0$). 87
- Tableau V.4:** Les propriétés des matériaux utilisés dans la plaque de MGF 88
- Tableau V.5:** Effets de la fraction volumique et les paramètres de fondation élastiques sur les déplacements et les contraintes adimensionnelles d'une plaque rectangulaire FGM ($a/h=10$, $b = 3a$, $q_0 = 100$, $t_1 = t_3 = 0$, $t_2 = 10$, $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 100$). 89
- Tableau V.6:** Effets de la fraction volumique et les paramètres de fondation élastiques sur les déplacements et les contraintes adimensionnelles d'une plaque rectangulaire FGM ($a/h=10$, $b = 3a$, $q_0 = 100$, $t_1 = 0$, $t_2 = t_3 = 10$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 100$). 90

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble [Ait Atmane, 2011].

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM); Un type de matériau composite fabriqué en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé ; ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs avantages, puisqu'ils réduisent la disparité dans les propriétés matérielles et les contraintes thermiques.

L'idée d'un matériau à graduation fonctionnelle n'est pas nouvelle. Des exemples de matériaux à gradient sont évidents dans la nature: os, coquille, bois de balsa et de bambou ont tous leur plus grande force à l'extérieur, où la plus grande protection est nécessaire [Suresh et Mortensen 1998]. Toutefois, il a fallu attendre les années 1980 au Japon que l'idée d'un matériau à gradation fonctionnelle a été activement recherché afin d'obtenir des avancées dans les applications aéronautiques à haute température [Koizumi, 1993].

Depuis, les matériaux à gradient de propriétés ont généralement été conçu spécifiquement pour leur application. Le FGM est adapté pour diverses applications, telles que des revêtements thermiques de barrière pour les engins de céramique, des turbines à gaz, des fusions nucléaires, des couches minces optiques, électroniques biomatériaux, etc. Les propriétés du FGM varient en continu d'une interface à l'autre dans la direction de l'épaisseur [Javaheri et Eslami 2002].

Ces structures possèdent des avantages de module élevé, de haute résistance et de faible poids, sans concentration des efforts ou de délaminage dans les matériaux composites. Les plaques rectangulaires en FGM sont souvent employées dans le cadre des structures de génie. Ces structures de plaques peuvent être trouvés dans différents types d'applications industrielles comme: radiers, des réservoirs de stockage, des piscines, et dans la plupart des constructions de génie civil. Un à deux modèles paramétriques, pour le sol sous la plaque, sont introduits pour modéliser la fondation.

Liu et ses collègues [Tani et Liu 1993, Liu et Tani 1994, Liu et al 1999, Liu et al, 2001, Liu et al 2003, Dai et al 2005] ont donné une bonne partie de la revue de l'histoire sur la simulation de structures en FGM. Leurs propriétés de résistance et de rigidité supérieures, cependant, sont souvent compromises par l'environnement dans lequel ils sont exposés. Une discussion générale de l'effet de l'environnement sur le comportement de la structure des matériaux de FGM a été présentée par de nombreux chercheurs.

Comme une élévation des concentrations de température et d'humidité, le module d'élasticité et la résistance des FGM se dégradent. L'analyse de la déformation et de l'effort des différentes structures de plaques soumis à l'humidité et la température a fait l'objet de l'intérêt de la recherche de nombreux chercheurs [Whitney et Ashton 1971, Patel et al, 2002, Bahrami et noster 2007, Benkhedda et al 2008, Shen 2001, Rao et Sinha 2004, Wang et al 2005, Lo et al 2010, Zenkour 2010].

Récemment, une nouvelle théorie à quatre variables des plaques raffinées qui ne comporte que quatre fonctions inconnues et encore prend en compte les déformations de cisaillement qui ont été mis au point par Tounsi et collaborateurs [Benachour et al 2011] pour l'analyse des vibrations libres, [Bourada et al 2012, Khalfi et al 2014 et Ait Amar Meziane et al 2014] pour le flambement et l'analyse de vibration libre, [Tounsi et al 2013, et Houari et al 2013] pour l'analyse la flexion thermo-élastique, [Said et al 2014, Bourada et al 2015 et Belabed et al 2014] pour la nouvelle théorie des déformations de cisaillement, [Zidi et al 2014 et Bousahla et al 2014] pour l'analyse de la flexion, [Bouchafa et al 2015] analyse des contraintes et des déformations thermiques, [Bessaim et al 2013, Mahi et al 2015 et Hebali et al 2014], pour le pliage et l'analyse de vibration libre, [Ait Atmane 2016] pour l'étude de l'effet de l'épaisseur d'étirement et de la porosité de la réponse mécanique, [Ait Yahia 2015] pour la propagation des ondes dans des plaques de FGM avec porosités utilisant diverses théories d'ordre supérieur de déformation de cisaillement de la plaque. Cette nouvelle théorie à quatre variables des plaques raffinées est basée sur l'hypothèse que le plan et les déplacements transversaux sont constitués de flexion et des composants de cisaillement, dans lequel les éléments de flexion ne contribuent pas envers des forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas envers des moments de flexion.

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est que cela représente une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et qui satisfait les conditions aux limites de zéro traction sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. D'autres chercheurs [Hamidi et al 2015,

Tekrar et al 2014, Zenkour 2006, Benoun et al 2016] ont développé leurs travaux à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé avec cinq variables.

A partir la documentation examinée, il peut être constaté que la recherche sur le comportement mécanique et hygrothermique des plaques à gradient de propriétés, en utilisant une théorie de déformation hyperbolique semble faire défaut, ce qui est le problème à résoudre dans le présent document.

L'objectif de cette enquête est de présenter une formulation hygrothermique générale pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique [Said et al 2014].

Par conséquent, le but de cette étude est d'étendre les quatre variables de la théorie de plaques raffinées au comportement hygro-thermo-mécanique de flexion des plaques rectangulaires en FGM. Les coefficients d'élasticité, thermique et d'humidité des plaques sont supposés être classés dans le sens de l'épaisseur. Les influences jouées par nombreux paramètres tels que la déformation de cisaillement transversale, la répartition de la fraction volumique, la concentration d'humidité, le rapport de l'élancement (largeur/épaisseur) et les paramètres de la fondation élastique sur la réponse de la structure seront étudiées en détails.

Le plan de la présente thèse est organisé en cinq chapitres répartis comme suit:

Dans le premier chapitre, on définit les matériaux à gradient de propriétés "FGM" comme étant des matériaux composites innovant, un aperçu a été exposé sur leurs développement, leurs concept, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication ainsi que les domaines de leur application. Nous avons évoqué les lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGMs. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Une revue montrant quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil, est l'objet du second chapitre.

Le chapitre trois expose les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique et explique aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarté.

Le quatrième chapitre fait l'objet de présenter une formulation hygrothermique générale pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une nouvelle théorie dite la *théorie de distribution de déformation de cisaillement hyperbolique*.

Dans le chapitre cinq, l'analyse de flexion des plaques de FGM rectangulaires simplement appuyées en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement hyperbolique est suggéré pour enquête. Des comparaisons sont faites avec des solutions disponibles dans la littérature. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, certains exemples numériques sont résolus.

Enfin, l'étude se conclura par une conclusion relative à ce travail de recherche ainsi que les perspectives envisagées pour les travaux futurs.

Références bibliographiques

A

[Ait Atmane, 2016]: **Ait Atmane**, “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, in press, 2016.

[AitYahia et al., 2015]: **AitYahia, S., AitAtmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1143 – 1165, 2015.

B

[Bahrami et noster 2007]: **A. Bahrami and A. Nosier**, 'Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates. *Int J Solids Struct*; **44**:8119–8142, 2007.

[Belabed et al., 2014]: **Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O.**, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283, 2014.

[Benachour et al., 2011]: **A. Benachour, H.D. Tahar, , H. Ait Atmane, A. Tounsi, and S.A. Meftah**, “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites,*” Part B **42** 1386–1394, 2011.

[Benkhedda et al 2008]: **A. Benkhedda, A. Tounsi and E.A. Addabedia**, “Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates,” *Compos Struct*; **82**:629–35, 2008.

[Bennoun et al., 2016]: **Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23(4)**, 423 – 431, 2016.

[Bessaim et al., 2013]: **Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., AddaBedia, E.A.**, “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15**, 671–703, 2013.

[Bouchafa et al., 2015]: **Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18(6)**, 1493 – 1515, 2015.

[Bourada et al., 2012]: **M. Bourada, , Tounsi, A., Houari, M.S.A. and AddaBedia, E.A.**, “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates,” *J. Sandw. Struct.Mater.***14 (1)** 5–33, 2012.

[Bourada et al., 2015]: **Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 409 – 423, 2015.

[Bousahla et al., 2014]: **Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A.**, “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, **11(6)**, 1350082, 2014.

D

[Dai et al 2005]: **K. Y. Dai, G. R. Liu, X. Han and K. M. Lim**, “Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method,” *Computers & Structures*, **83(17-18)**, 1487 – 1502, 2005.

H

[Hamidi et al., 2015]: **Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A.**, “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235 – 253, 2015.

[Hebali et al., 2014]: **Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., AddaBedia, E.A.**, “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, 140, 374 – 383, 2014.

[Houari et al., 2013]: **Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O.**, “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 76, 467 – 479, 2013.

J

[Javaheri et Eslami 2002]: **R. Javaheri and M. R. Eslami**, “Thermal buckling of functionally graded plates,” *AIAA J.* **40** 162-168, 2002.

K

[Khalfi et al., 2014]: **Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.**, 'A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation,” *Int. J. Comput. Methods* **11 (5)** 1350077.

[Koizumi, 1993]: **M. Koizumi**, 'The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*' **34**, pp. 3-10,1993.

L

[Liu et Tani 1994]: **G. R. Liu and J. Tani**, “Surface-waves in functionally gradient piezoelectric plates,” *Journal of Vibration and Acoustics*, **116(4)**, 440 – 448, 1994.

[Liu et al 1999]: **G. R. Liu, X. Han and K. Y. Lam**, “Stress waves in functionally gradient materials and its use for material characterization,” *Composites Part B-Engineering*, **30(4)**, 383 – 394, 1999.

[Liu et al., 2001]: **G. R. Liu X. Han and K. Y. Lam**, “An integration technique for evaluating confluent hypergeometric functions and its application to functionally graded materials,” *Computers & Structures*, **79(10)**, 1039 – 1047, 2001.

[Liu et al., 2003]: **G. R. Liu, K. Y. Dai, X. Han and T. Ohyoshi**, “Dispersion of waves and characteristic wave surfaces in functionally graded piezoelectric plates,” *Journal of Sound and Vibration*, **268(1)**, 131 – 147, 2003.

[Lo et al., 2010]: **S. H. Lo, W. Zhen, Y. K. Cheung, and C. Wanji**, “Hygrothermal effects on multilayered composite plates using a refined higher order theory,” *Compos. Struct.* **92**, 633–646, 2010.

M

[Mahi et al., 2015]: **Mahi, A., AddaBedia, E.A., Tounsi, A.**, "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508, 2015.

P

[Patel et al, 2002]: **B. P. Patel, M. Ganapathi and D. P. Makhecha**, "Hygrothermal effects on the structural behavior of thick composite laminates using higher-order theory," *Compos Struct*; **56**:25–34, 2002.

R

[Rao et Sinha 2004]: **V. V. S. Rao, and P. K. Sinha**, "Bending characteristic of thick multidirectional composite plates under hygrothermal environment," *J. Reinf.Plast.Compos.***23**, 1481–1495, 2004.

S

[Said et al., 2014]: **Said, A., Ameer, M., Bousahla, A.A. and Tounsi, A.**, "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations," *Int. J. Comput. Methods* **11 (6)** 1350098, 2014.

[Shen 2001]: **H. S. Shen**, "Hygrothermal effects on the post buckling of shear deformable laminated plates," *Int. J. Mech. Sci.* **43**, 1259–1281, 2001.

T

[Tani et Liu 1993]: **J. Tani, and G. R. Liu**, "SH surface-waves in functionally gradient piezoelectric plates," *JSME International Journal Series A-Mechanics and Material Engineering*, **36(2)**, 152 – 155, 1993.

[Tounsi et al., 2013]: **Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and AddaBedia, E.A.**, "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates," *Aerosp. Sci. Technol.* **24 (1)** 209–220, 2013.

W

[Wang et al 2005]: **X. Wang, K. Dong, and X.Y. Wang**, "Hygrothermal effect on dynamic interlaminar stresses in laminated plates with piezoelectric actuators," *Compos. Struct.***71**, 220–228, 2005.

[Whitney et Ashton 1971]: **J.M Whitney and J.E. Ashton**, "Effect of environment on the elastic response of layered composite plates," *AIAA J*; **9**:1708–13, 1971.

Z

[Zenkour AM. 2006]: **Zenkour AM.**, "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates," *Appl Math Modelling*; **30**:67-84, 2006.

[Zenkour 2010]: **A.M. Zenkour**, "Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations," *Compos.Struct.***93**, 234–238, 2010.

[Zidi et al., 2014]: **Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., AddaBedia, E.A., Anwar Bég, O.**, "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerospace Science and Technology*, 34, 24–34, 2014.

CHAPITRE I:

Matériaux Composites et Matériaux à Gradients de Propriétés

I.1 Matériaux composites

I.1.1 Introduction:

La conception d'une structure est inévitablement liée à la nature de ses matériaux. De ce fait la technologie moderne exige des matériaux qu'ils soient à la fois résistants, rigides, légers et surtout adaptable à des utilisations spécifiques. Rares sont les matériaux qui répondent d'une façon intégrale à ces exigences. Les matériaux traditionnels limitent les champs d'action de par leurs propriétés mécaniques et leurs techniques de mise en œuvre.

La naissance de nouveaux produits tels que les matériaux composites ouvre un large éventail d'application, et répond à des utilisations bien spécifiques.

I.1.2 Matériaux composites

Un matériau composite est défini comme étant un assemblage d'au moins deux constituants non miscibles, mais ayant une forte capacité d'adaptation. Les qualités respectives des constituants associés se complètent pour former un matériau aux performances mécaniques, thermiques, électriques et/ou physico-chimiques améliorées. Le développement des matériaux composites ayant une ou plusieurs de ces propriétés particulières répond généralement à un besoin spécifique. Il est ainsi possible de créer des matériaux hétérogènes permettant par exemple, de réduire la masse d'une pièce, tout en améliorant ses propriétés mécaniques, grâce à l'association d'un renfort fibreux et d'une résine organique. L'adaptabilité de ce matériau en fait un atout incontestable qui explique son utilisation de plus en plus répandue, notamment dans l'industrie du transport (aérien, maritime et ferroviaire), des sports et loisirs, et depuis peu dans l'industrie du bâtiment.

Le matériau composite est constitué d'un renfort, qui contribue aux propriétés mécaniques de la pièce, et d'un liant, appelé matrice. Le rôle de la matrice est d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort, mais aussi de transférer les flux d'efforts entre les plis, de garantir la tenue à l'environnement (corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température. Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites qui peuvent être classés suivant différents critères. La nature de la matrice est un de ces critères qui permet de répartir les composites en trois grandes familles :

- les Composites à Matrices Organiques (CMO), telles que les polymères organiques (résine thermodurcissable ou thermoplastique) ;
- les Composites à Matrices Céramiques (CMC) réservés aux applications à haute température ;
- les Composites à Matrice Métallique (CMM).

Ces matériaux peuvent aussi être classés selon la nature du renfort, détaillée ci après ou selon l'objectif recherché via leurs utilisations. Si l'optimisation des coûts est le principal objectif, on parlera de composites 'grande diffusion'. En revanche, pour une utilisation dans le but d'optimiser les performances mécaniques ou thermiques, liées à une réduction de poids, on parlera de composite 'hautes performances' [Billoët, 1993].

I.1.2.1 Les renforts

Le renfort du matériau composite est le constituant qui va supporter la plus grosse partie des efforts mécaniques. Il peut se présenter sous différentes formes [Chrétien, 1986] :

- particulaire, charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écailles ou de poudre micro ou nano particulaire,
- fibres courtes, pour les renforts surfaciques non texturés tel que le mat,
- fibres continues pour les renforts texturés tels que les tissus (taffetas, sergé et satin,...), ou les renforts unidirectionnels tels que les nappes.

Il existe des architectures fibreuses complexes multidirectionnelles 2D, 3D voir même 4D. Le type de tissu est choisi en fonction de sa drapabilité, c'est à dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi et surtout choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce.

Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

Les fibres de verre qui sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (bâtiment, nautisme et autres applications non structurales aéronautiques). Leur fabrication se fait en général par étirage décrit par la figure I.1. Les oxydes minéraux constituant la matière première (silice, alumine etc...) sont mélangés en proportion voulue suivant le type de fibre de verre désiré. Ce mélange est ensuite porté à très haute température (>1550°C) afin d'être liquéfié pour être étiré à travers une filière sous forme de filaments de

diamètres calibrés. Ces filaments isotropes sont ensimés pour optimiser l'adhésion de la matrice, puis assemblés pour former les fils, eux mêmes stockés sous forme de bobine appelée gâteau. Le gâteau est alors étuvé, pour éliminer l'eau résiduelle et pour stabiliser l'ensimage. Les fibres de verre ainsi obtenues sont amorphes, ce qui leur confère des caractéristiques mécaniques parfaitement isotropes. Cependant, leur faible module d'élasticité, ainsi que leur densité supérieure aux fibres de carbone limitent leur utilisation pour la fabrication de pièces structurales.

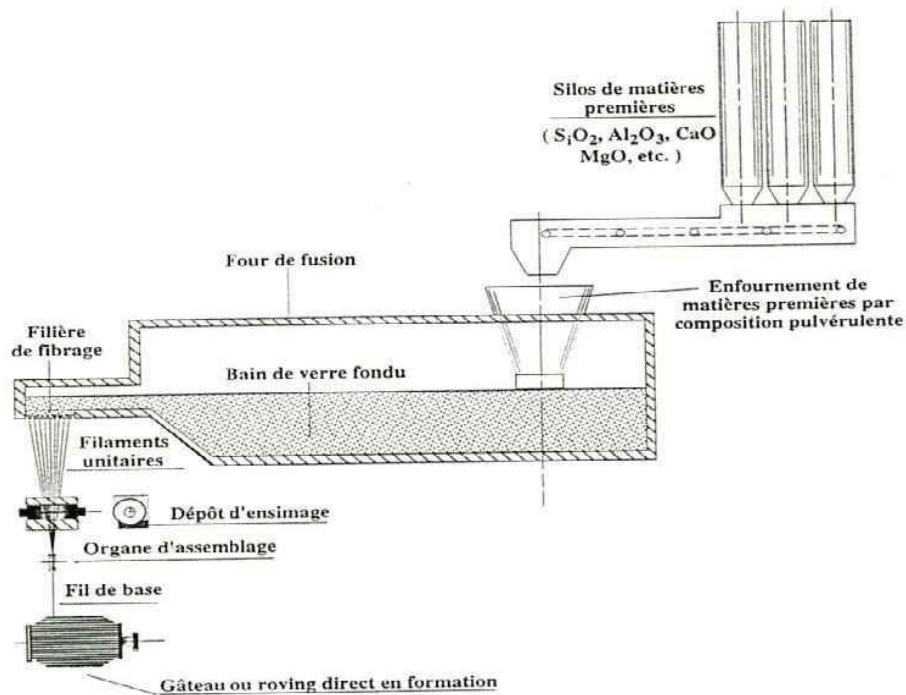


Figure I.1 : Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre [Billoët, 1993].

Les fibres de carbone qui sont utilisées pour des applications structurales telles que les panneaux monolithiques du caisson central de l'A380. Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée figure I.2. Le plus utilisé de ces précurseurs est le PolyAcryloNitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300°C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500°C. Il ne subsiste alors que la structure lamellaire hexagonale 2-D d'atomes de carbone. Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de 7 µm de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) (5,5 µm de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de 3000°C, sous argon. Cette

graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres.

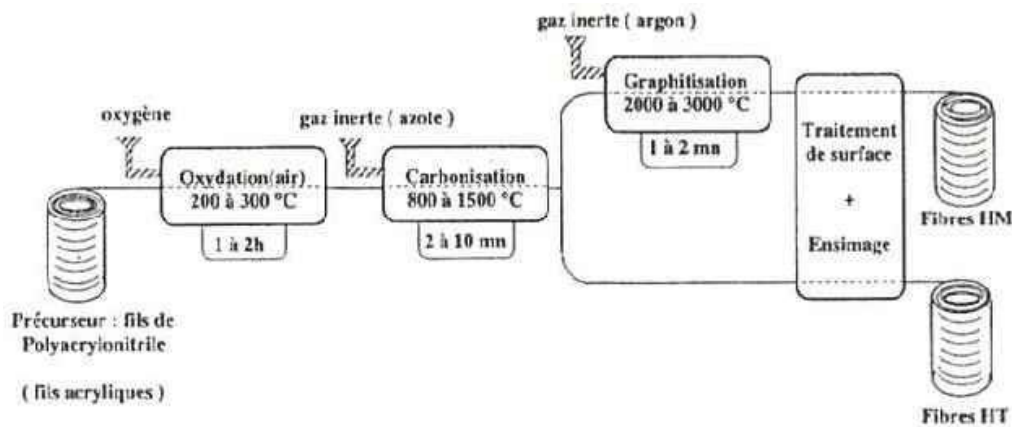


Figure I.2 : Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN [Billoët, 1993].

Les propriétés mécaniques de ces différentes fibres sont données par le tableau I.1. De même que pour les filaments de verre, les filaments de carbone sont soumis à un traitement de surface (imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer les propriétés d'adhérence fibre/matrice. Ce traitement de surface est suivi par un procédé d'ensimage textilo-plastique qui facilite l'accrochage de la matrice organique, qui protège les fibres contre l'abrasion et qui favorise l'agglomération des filaments lors de la fabrication des mèches. Il est important de noter que les fibres de carbone sont sensibles à l'oxygène dès 400°C, et qu'elles présentent une mauvaise résistance aux chocs. Enfin, le prix de ces fibres reste relativement élevé mais il n'a cessé de diminuer avec l'augmentation des volumes de production.

Type de fibre	Module élastique E_1 (GPa)	Contrainte à rupture σ_R (Mpa)	Exemple de fibre
Haute Résistance (HR)	$E_1 < 265$	3500	P-30X (Cytec), F1
Module Intermédiaire (IM)	$265 < E_1 < 320$	5600	P-55S (Cytec), F2
Haut Module (HM)	$320 < E_1 < 440$	4400	M40J (Torayca)
Très Haut Module (THM)	$E_1 > 440$	3900	P-75S (Cytec), M55J (Torayca)

Tableau I.1 : Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules).

Les fibres d'aramide (plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar®, Twaron®, Technora®, Nomex®, etc...) [Billoët, 1993], [Chrétien, 1986], qui sont utilisées pour des applications bien plus ciblées, telle que la protection balistique (gilets pare-balles) ou pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1 par exemple.

Les fibres végétales [Balay et al., 2004], [Billoët, 1993], qui présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques car mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin, ou le bambou. Ces fibres au prix modeste sont de plus en plus utilisées pour la fabrication des composites dits « d'entrée de gamme ».

I.1.2.2 Les matrices

La matrice a pour principal objectif de transmettre les efforts mécaniques au renfort. Elle doit aussi assurer la protection du renfort vis à vis des diverses conditions environnementales (corrosion, oxydation, vieillissement humide...). Ces résines synthétiques résultent de composés chimiques obtenus par réticulation d'une macromolécule (association de molécules appelées monomères), sous l'action de la chaleur et/ou d'un catalyseur. Trois catégories de ces matières plastiques peuvent cependant être distinguées :

- les polymères thermoplastiques (cristallins, semi-cristallins ou amorphes) ;
- les polymères thermodurcissables (amorphes) ;
- les élastomères (amorphes).

Les résines thermoplastiques sont des polymères à chaînes linéaires ou ramifiées, c'est à dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. Les résines thermoplastiques présentent le gros avantage de pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui permet de faciliter leur moulage par viscoplasticité. Cette transformation est par ailleurs réversible, ce qui permet de recycler ce matériau. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes, et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Renforcées avec des fibres courtes ou avec des fibres longues, l'utilisation de ces résines se développe fortement notamment comme matrice des composites "structuraux". Parmi les résines thermoplastiques utilisées dans les composites aéronautiques on peut citer le polyéther-imide (PEI), le polyphénylsulfure (PPS), le polyéther-éther-cétone (PEEK), le polyéther-cétone-cétone (PEKK).

Les élastomères sont des polymères naturels ou synthétiques dont la structure particulière confère une importante élasticité (jusqu'à 500% d'allongement par rapport à la taille initiale). A titre d'exemple, nous pouvons citer les élastomères suivants : les silicones d'élastomères, les polyuréthanes, le néoprène, le latex, etc....

Les résines thermodurcissables sont les produits les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Généralement associées avec des fibres longues, elles sont liquides ou liquides visqueuses et réticulent sous l'action thermiquement activée d'un catalyseur et d'un durcisseur. La transformation est irréversible et forme un produit infusible et insoluble. Actuellement, les résines thermodurcissables principalement utilisées sont les suivantes :

- Les résines époxydes qui possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Les résines de classe 180°C, réticulant à 180°C, sont souvent utilisées avec un renfort en fibres de carbone pour la réalisation de pièces structurales aéronautiques.
- Les résines phénoliques utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils. Ces polymères auto-extinguibles présentent le désavantage d'être peu résistants aux sollicitations mécaniques.
- Les résines polyamides sont elles aussi très onéreuses, mais présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température. En dépit de leurs bonnes tenues mécaniques, ces résines sont très sensibles aux chocs. Afin de palier cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant avant polymérisation à des résines thermoplastiques.

I.2 Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.2.1 Introduction

Les matériaux composites légers, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance

mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique.

Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées dues à leur faible dureté. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière. Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Hirai, 1999; Chan, 2001; Uemura, 2003]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.3 [Yin, 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope. En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

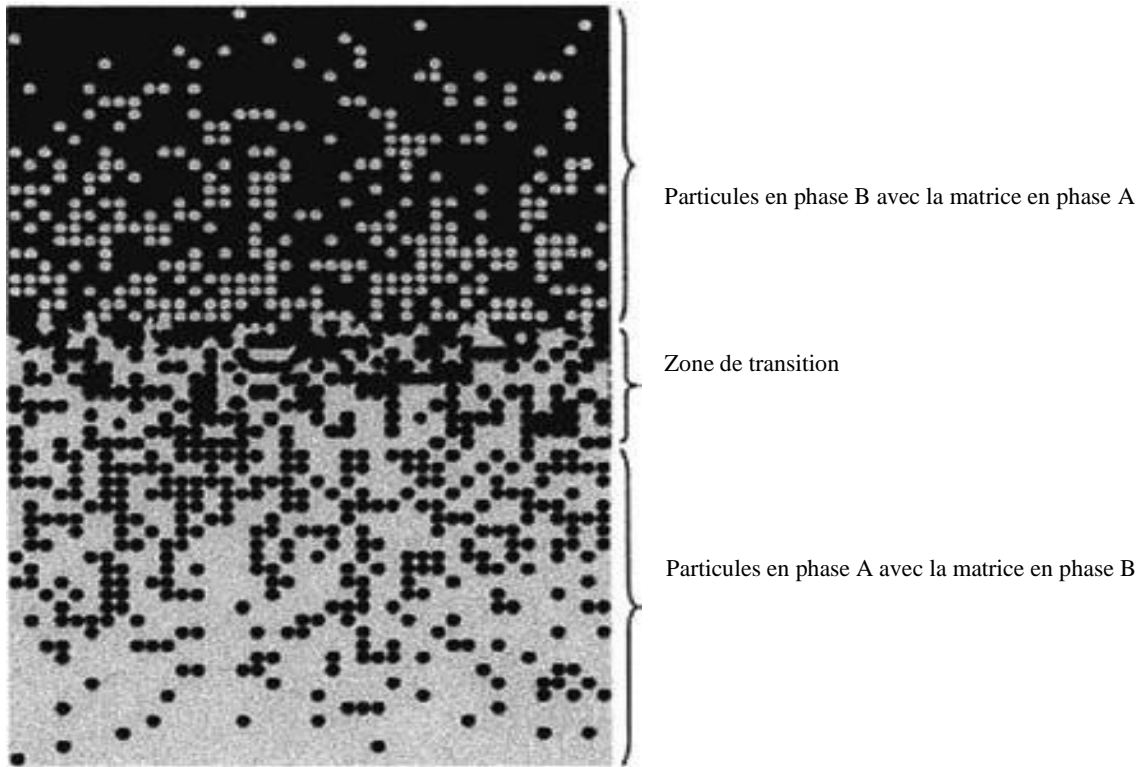


Figure I.3 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [Yin 2004]

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc ... [Nguyen, 2004]. D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapportées dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [Müller, 2003], des déclencheurs [Qiu, 2003], des armures metal/ceramic [Liu, 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkievicz, 2008] et des implants dentaires [Watari 2004]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériaux ont été éditées pendant les deux dernières décennies [Fuchiyama 1995, Markworth 1995, Tanigawa 1995, Noda 1999, Paulino 2003]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [Hui 2009].

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen [Shen 2004]. Récemment, Birman et Byrd [Birman 2007] ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la

distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient de propriétés.

I.2.2 Historique

Actuellement, les structures fonctionnellement classées se trouvent en abondance dans la nature. Nous pouvons les rencontrer dans le bio tissu des plantes et des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. Ces derniers sont dotés de plusieurs caractéristiques de qualité supérieure, ils sont légers, solides et élastiques, celles-ci sont dues à leurs nœuds qui créent une hiérarchie et donnent naissance à l'activité de structure.

Dans la même perspective, les feuilles de noix de coco sont soufflées par le vent et transportées librement à n'importe quelle direction, alors qu'une partie très rigide reste en s'adoptant à son milieu de vie.

De même, une simple comparaison entre les plantes qui vivent sur une surface plane et celles poussant sur une pente, nous concluons que leur comportement varie en fonction des environnements dynamiques.

Tous ces exemples, ouvrent la porte vers la biométrie qui tente d'appliquer les caractéristiques de conception de la nature dans les sciences industrielles et médicales.

Les FGMs ont connu une évolution importante dans le temps. D'abord, ils ont été proposés en 1984 par deux chercheurs dont l'un étudiait l'aéronautique et l'autre s'intéresse aux matériaux avancés. Ces deux chercheurs parlaient de leur rêve concernant un avion spatial exposé à un environnement à très haute température (1700° C).

Ils discutaient la problématique de la résistance à de graves écarts de la température entre l'intérieur et l'extérieur et ils se confrontent à la réalité suivante: Il n'existe pas de matériau unique supportable à une telle condition. A partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGMs, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Pour ce faire, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température, cependant pour la surface intérieure, ils ont opté pour utiliser des matériaux conducteurs de chaleur.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire intitulé " la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques" traitant ces FGMs. A partir de cette mise en valeur du projet, plusieurs autres chercheurs, 17 laboratoires nationaux, des universités et des entreprises ont initié leur recherche en discutant les méthodes de développement des FGMs, la conception des matériaux, leur production et leur évolution.

Enfin, une contrainte thermique relaxant matériau FGM a vu le jour lors d'une première conférence internationale qui s'est tenue à Sendai en 1990, ceci a conduit à fonder toute une technologie, qui est devenue, même, de recueillir les attentions, non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondial.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Reddy, 1997].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger,1959].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGMs a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température), (voir figure I.4).

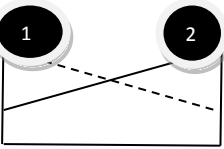
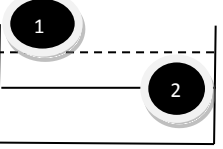
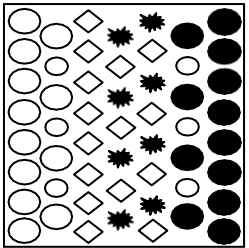
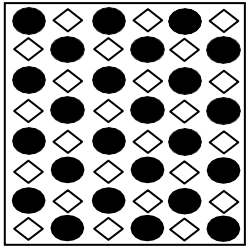
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.4: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D,
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système "SICZS_2010" Symposium International sur la Construction en Zone Sismique Université Hassiba Benbouali de Chlef (Algérie), 26 – 27 octobre 2010 3 TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Ciarlet, 1997].

Dans la seconde étape (1990-19991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres

applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... . On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau.

Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations. Le but de ce travail consiste à la mise au point d'une approche unifiée qui propose une solution aux problèmes de la non homogénéité des plaques en FGM (céramique/métal) après cela on a étudié la proportionnalité entre la variation de la température critique de flambement de la plaque homogène et celle des P-FGM. Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette proportionnalité dans les calculs des matériaux FGM en utilisant les résultats des plaques homogènes.

I.2.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Les applications balistiques de cette classe des matériaux sont également très attrayantes.

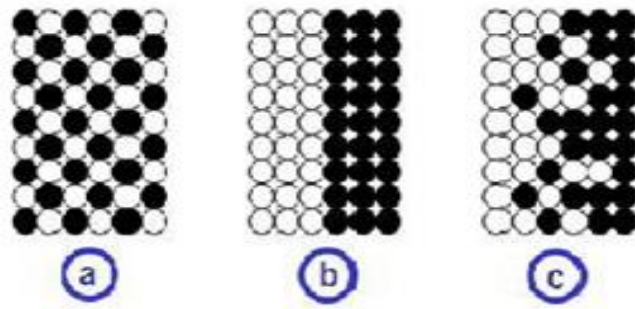


Figure I.5: La distribution composante des matériaux: (a) Matériau plan composé, (b) Matériau relié, (c) Matériau à gradient de propriété.

En général, les différentes combinaisons matérielles utilisées dans la fabrication des matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont des coefficients de dilatation thermique différents qui peuvent conduire à la génération des contraintes résiduelles significatives chaque fois que la pièce est exposée à un cycle thermique (par exemple, pendant le traitement). Des contraintes résiduelles sont généralement considérées comme une nuisance ou même un danger potentiel pour l'intégrité de la pièce. Dans certains cas, toutefois, elles peuvent avoir un effet bénéfique sur les performances d'un composant. Un certain nombre de concepts bien définis sont disponibles qui permettent à l'ingénieur de parvenir à un tel état de contrainte résiduelle avantageux. Le concept de FGM offre une méthode alternative pour concevoir une pièce bien défini, construit en état de contrainte. En adaptant judicieusement la composition et la microstructure, les contraintes thermiques peuvent être dispersés ou réduits au minimum pendant le cycle de traitement et l'utilisation en service. Alternativement, ils peuvent même être utilisés pour augmenter les performances d'une pièce, par exemple, par la génération des contraintes compressives sur la surface.

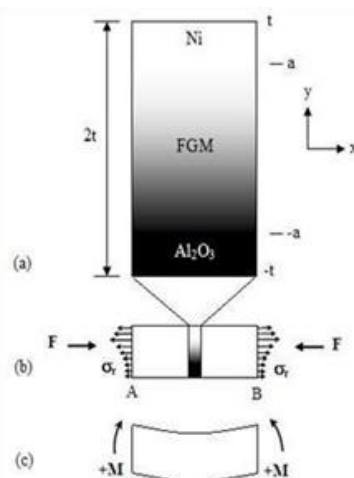


Figure I.6: Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGM).

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.2.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.2: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

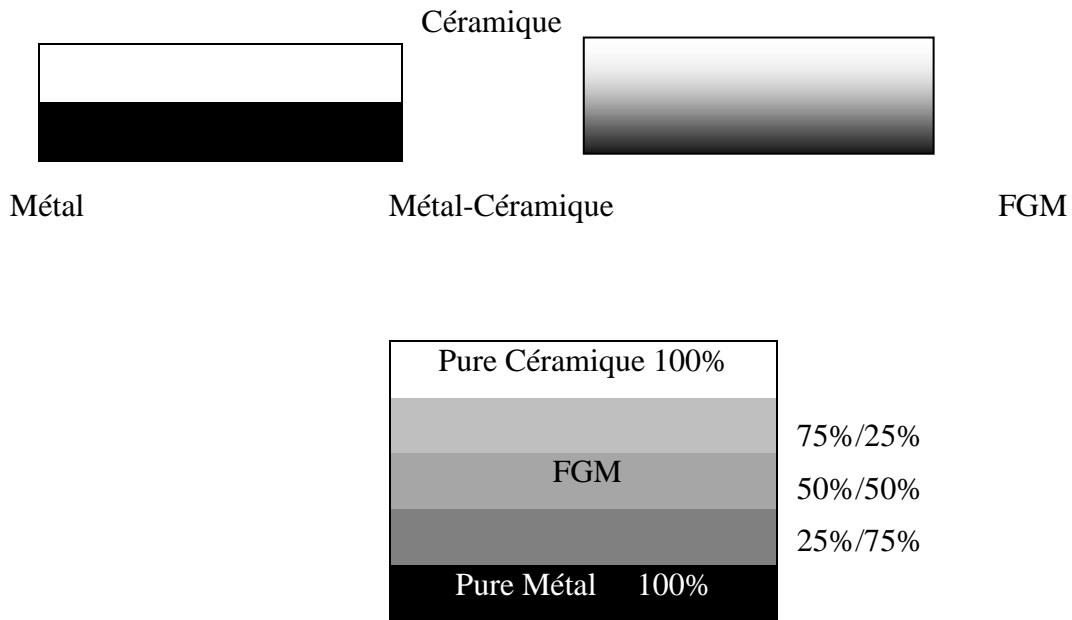


Figure I.7: Un type d'un matériau FGM en céramique et métal [Bouderba, 2014]

I.2.4 Applications des matériaux FGM:

I.2.4.1 Aéronautique

Le concept de FGMs a été initialement conçu pour ce champ. Il peut exister deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et la propriété de barrière thermique dans un matériau. À l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et est applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structure, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGMs sont également applicables à la paroi externe de l'avion spatial et des parties de moteur des fusées.

I.2.4.2 Matières industrielles

De nombreuses applications de FGMs ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifiés en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergétique de réduction et de la forme, la demande de nouveaux matériaux pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.2.4.3 Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long de la longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. L'application de FGMs aux fibres optiques plastiques permet d'assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.2.4.4 Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et qui a une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. La technologie des FGMs est applicable aux os artificiels, aux articulations et aux dents.

La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

I.2.4.5 D'autres Applications

Le téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus léger. La technologie FGM est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille, l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification pouvant être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et de la chimie, les FGMs sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées. En outre, de nouvelles recherches ont également développé de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nano-technologie de classification de haut niveau.

I.2.5 Des exemples sur des produits de FGM

I.2.5.1 Système spatial

Les FGMs ont été appliqués pour les cartouches, pour les matériels de test appareil sur la station spatiale Kibo et aux moteurs de fusée réutilisable. Prenons l'exemple du moteur de la fusée réutilisable ici. La plupart des roquettes sont jetables à l'heure actuelle. De nombreuses nations ont étudié sur la fusée réutilisable. Les navettes sont les seules fusées réutilisables que nous avons à l'heure actuelle, cependant, un seul modèle nommé Obita a été maintes fois utilisé. L'objectif du développement de la navette spatiale doit être entièrement réutilisable comme un système entier. Advanced Space Technology Corporation a été engagée dans le développement et la production d'une chambre de moteur à combustion application de la

technologie de galvanoplastie. La chambre de combustion construite pour des démonstrations ont été l'objet d'essais à plusieurs reprises et a vérifié que la technique de galvanoplastie serait prometteuse.

I.2.5.2 Système de distribution et de transmission

La technologie des FGMs a été utilisée pour la commutation à isolation gazeuse (GIS). Le GIS est un appareillage complexe, constitué d'un disjoncteur, un sectionneur et un parafoudre. Power and Industrial Systems Research and Development Center, Toshiba Corp. ont construit un élément d'arrêt pour l'éclairage afin d'avoir une structure cristalline classée dans le centre à l'extérieur et à l'intérieur, résultant en une gestion du stress thermique et une amélioration considérable dans la capacité d'adsorption de l'énergie.

I.2.5.3 Fibre optique

Asahi Glass Company a publié un Graded Index CYTOP™ de fibre optique, Lucina MC, depuis Juin 2000. Les fibres optiques plastiques (POF) peuvent facilement augmenter une fibre de taille dû à la propriété en plastique tout en maintenant leur flexibilité, ce qui entraîne la réduction du coût de l'installation grâce à un câblage facile. D'ailleurs, en ayant GI-type de distribution et l'utilisation de l'indice de réfraction CYTOP, qui est une matière claire et perfluorés, de données à haute vitesse de communication est devenu disponible. À présent, Lucina™ a réalisé la transmission à haute vitesse de grande taille de données allant jusqu'à 10 Gbit / s qui est équivalent à 200.000 lignes téléphoniques et a également atteint plusieurs centaines de mètres de distance de transmission. Dans le présent, de nombreuses constructions ont été réalisées principalement dans les hôpitaux et les écoles, et les demandes sont encore en croissance.

I.2.5.4 Industriel

La substance se comportant à la fois résistance à l'usure supérieure et de la ténacité est nécessaire pour produire des outils idéaux industriels. Mitsubishi Material Corp a fabriqué un matériau revêtu CVD, UE6020. Il a une structure de surface classée, pour lesquelles le concept de la FGM a été appliqué. Un outil revêtu CVD a été préparé avec succès pour une application pratique et les caractéristiques remarquablement améliorées, telles que de porter en soi et de rupture, qui est contradictoires entre eux.

En outre, Mitsubishi Material Corp Ltd applique la technique de la FGM au carbure outils. Autres différentes applications sont également possibles, par exemple, le carbure de composition classés / matériel en acier articulé est applicable aux instruments de plastique formant (coup de poing par exemple, de matrices et de moules), des outils pour le développement urbain (bit par exemple) et les pièces de machines (p.ex. garniture mécanique et manette des gaz tige de valve). En outre, des diamants dispersés carbure est applicable au centre des lames et des outils de roulement et résistant à l'usure des outils industriels tels que des centres de tournage.

I.2.5.5 Titanium

Le titane est utilisé pour une caisse de voir car il est la lumière matérielle pondérée et non allergique, mais il a une faible dureté et est inférieur en résistance aux dégâts. Par conséquent, le durcissement de surface de titane, une nouvelle technique a évolué pour améliorer la qualité des eaux de surface par traitement thermique à basse pression et H₂O atmosphère de gaz mixtes. Cette technique permettra à la surface dure de maintien surface de miroir sans couleur. Une nouvelle marque de montre avec le corps en titane traitée par le durcissement de surface.

I.2.5.6 Crampons Baseball

La technique d'excision est utilisée pour tasseaux. Le traitement thermique des aciers industriels utilisés doit être utilisé avant. Toutefois, il n'était pas facile de résister à l'usure à partir d'argile et de sable, et des clous en l'habitude d'avoir de nombreux échecs. Par conséquent, une nouvelle chaussure de base-ball a été conçue pour avoir des taquets de forme particulière avec des conseils en alliage de carbure de ciment et d'aciers au carbone constitué par la méthode de soudage par résistance. Ils n'avaient reçu aucune réclamation pour les défauts ou de fissures pour le moment.

I.2.5.7 Lames de rasoir

Mitsubishi Material Corp Ltd a commercialisé avec succès des lames de rasoir à dureté convenable. elles ont été utilisé à haute résistance et à ténacité inox pour un substrat et des composés de haute dureté intermétallique pour une couche de surface. La fabrication d'une lame qui a une structure à haute adhérence peut avoir une composition classée.

I.2.5.8 D'autres exemples sur des produits de FGM

Comme mentionné ci-dessus, il existe d'autres exemples sur des produits de FGM: les outils industriels, les fibres optiques, les pièces et composants électroniques de précision sur le marché. Nous pouvons voir de nombreuses applications de la FGM 's concept dans diverses recherches et les domaines industriels, il s'avère que l'application de la FGM se propage tranquillement, peu à peu.

I.2.6 L'intérêt d'utilisation des FGMs

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.2.7 la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique

Puisqu'on s'attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoïoniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La figure I.8 montre ce programme continu; Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de $\sim 2000^{\circ}\text{K}$ à $\sim 300^{\circ}\text{K}$. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

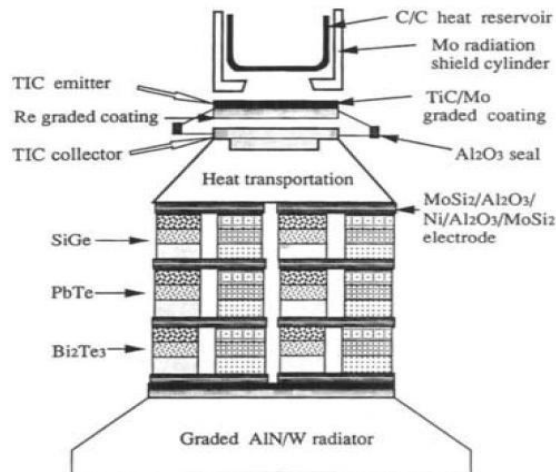


Figure I.8 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie [Ichiro, 1996].

1.2.7.1 La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC

Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

a/ un réservoir de chaleur gradué(C/C)

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon Oil Company Ltd. [Ichiro 1996]. Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent, l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes. Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La figure I.9 (a) montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la figure I.9 (b) est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand

miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.

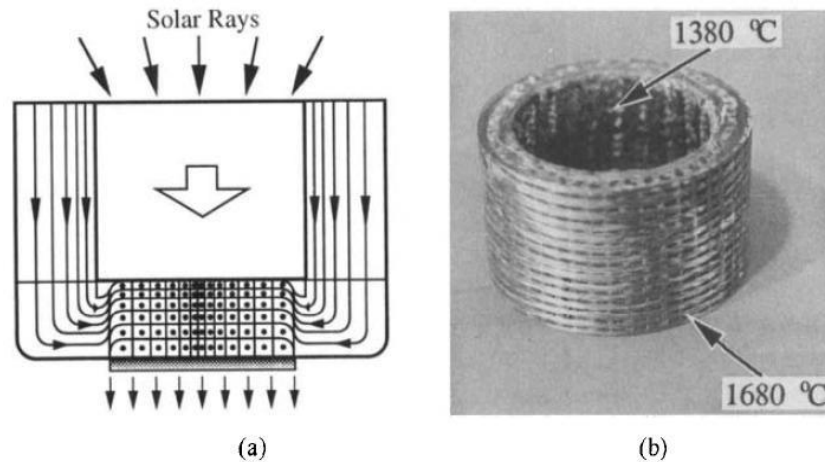


Figure I.9 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C [Ichiro, 1996].

Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal M0 (figure I.9). Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

b/ un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re)

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui permet l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TIC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au japon [Ichiro, 1996]. Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re [Ichiro, 1996]. W et Re ont été déposés sur un substrat M0 par CVD. La couche graduée est formée à travers l'inter-diffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une graduation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La figure I.10 montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. Le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-Mo relaxent efficacement la contrainte thermique.

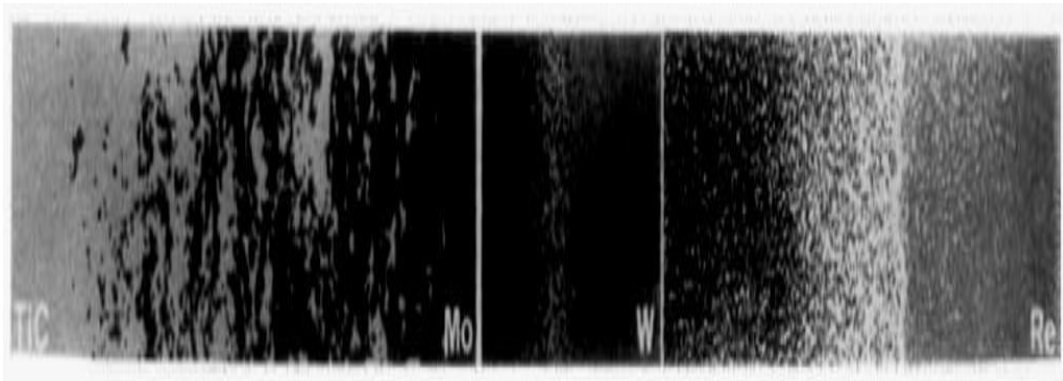


Figure I.10 : changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re [Ichiro 1996].

L'électrode du collecteur a été façonné au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode Mo. Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm² obtenu à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co. Ltd. [Ichiro 1996].

c/ Matériel thermoélectrique gradué en PbTe

Pour les dispositifs TEC tels que Bi₃Te₂, PbTe, et SiGe, exposés dans le proceding d'Ichiro [Ichiro, 1996], les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de conversion d'un pourcentage considérable par la graduation des compositions.

La figure I.11 compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (A-couche 3.51x10²⁵/m³, b-couche 2.6x10²⁵/m³, c-couche 2.26x10²⁵/m³), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une graduation du dopant Pbl₂ a été préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour ΔT=486 °K, 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.

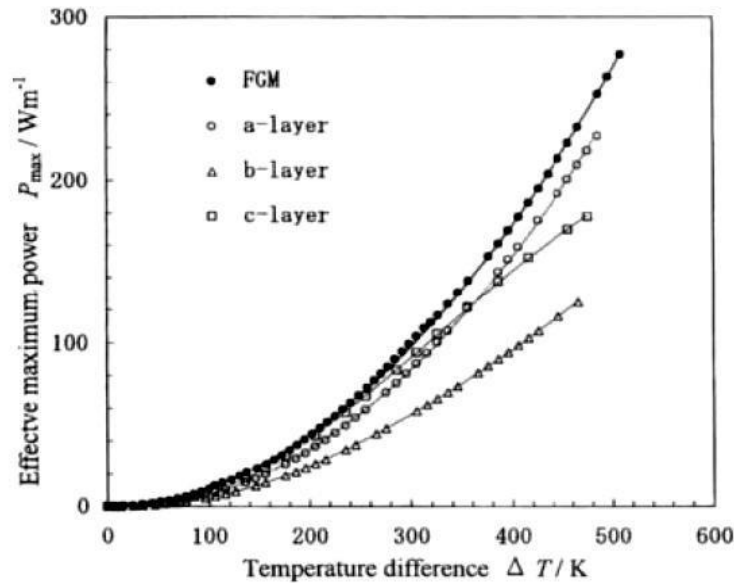


Figure I.11 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois- couches [Ichiro, 1996].

d/ Une électrode symétriquement graduée MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ pour un TEC SiGe

Dans le cas du dispositif TEC, MoSi₂ est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevé (2030°C), avec une résistivité appropriée de $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega\text{-cm à } 1000 \text{ }^\circ\text{C})$, et une excellente résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique (3-4 MPA.m^{1/2}) est faible. Pour façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ (représenté sur la figure I.12) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP). Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de MoSi₂ due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du MoSi₂ jusqu'à 5,8 MPA m^{1/2}. Al₂O₃ agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ 800 °C. Un aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à 800°C il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 années. Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd.) en utilisant des inter-couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C [Ichiro 1996].

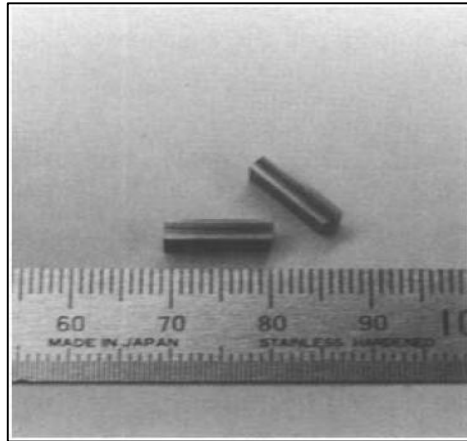


Figure I.12: Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe [Ichiro, 1996].

e/ Matériau radiatif gradué AlN/W

Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries Ltd. au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AlN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C. L'AlN dense possède une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AlN, peut être reflétée par les particules W, comme illustré sur la figure I.13. Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité. Suivant les indications de la figure I.14, la structure graduée AlN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels [Ichiro, 1996].

Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants:

- Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;
- Synthèse des graduations p et n type (Bi₃Te₂, PbTe, et SiGe) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
- La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des pertes d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
- Fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15% ;

- Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.

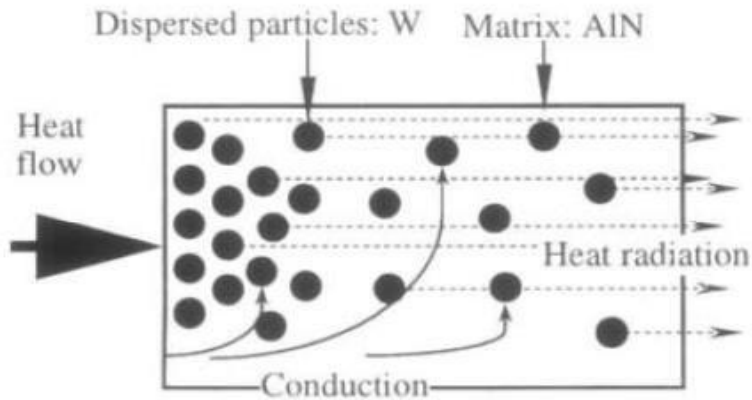


Figure I.13 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W [Ichiro, 1996].

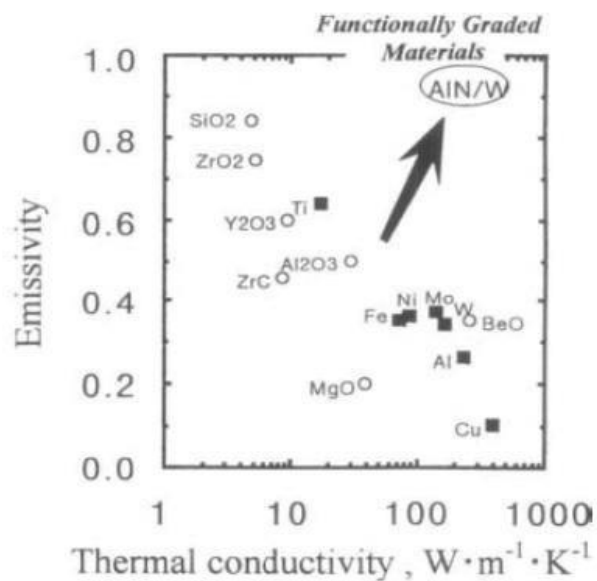


Figure I.14 : La relation entre la conduction thermique et l'émissivité [Ichiro, 1996].

I.2.8 Méthodes d'élaboration des FGMs

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisies pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé;
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.2.8.1 Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM Al_2O_3 -TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en

enlevant la reliure et en pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés des composés en céramique [Zeng, 2000].

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes: tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SIC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SIC pour B₄C (problème d'usure); ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant quatre heures environ pour obtenir une répartition uniforme; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation.

Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Mylar siliconé afin de faciliter le décollement de la bande de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μ m). Des cercles (20 mm de diamètre) et des carrés (50 mm de côté) sont découpés dans des bandes puis empilés. Ainsi, on obtient des matériaux soit monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique de couches denses et poreuses) après thermo-compression sous 60 MPa [Reynaud, 2001].

I.2.8.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Initialement, le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.2.8.3 Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Abdizadeh, 1997].

I.2.8.4 Compaction Sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.3.8.5 Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens 1990].

I.2.8.6 C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.2.8.7 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. La contrainte thermique chute considérablement. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.2.8.8 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.15 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

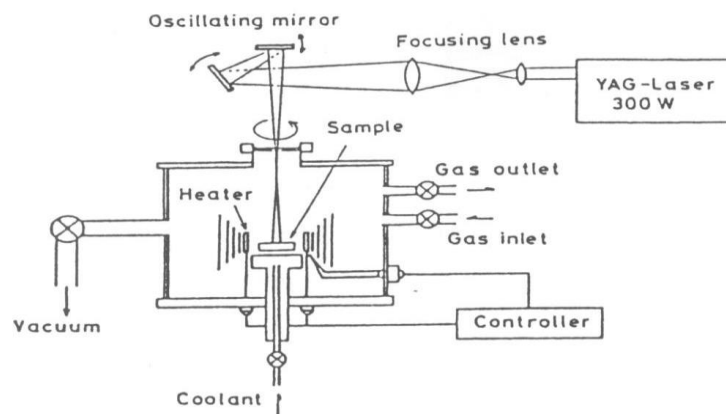


Figure I.15 : Disposition du procédé frittage laser différentiel

I.2.8.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches

fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdizadeh, 1997].

I.2.8.10 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.16) [Abdizadeh, 1997].

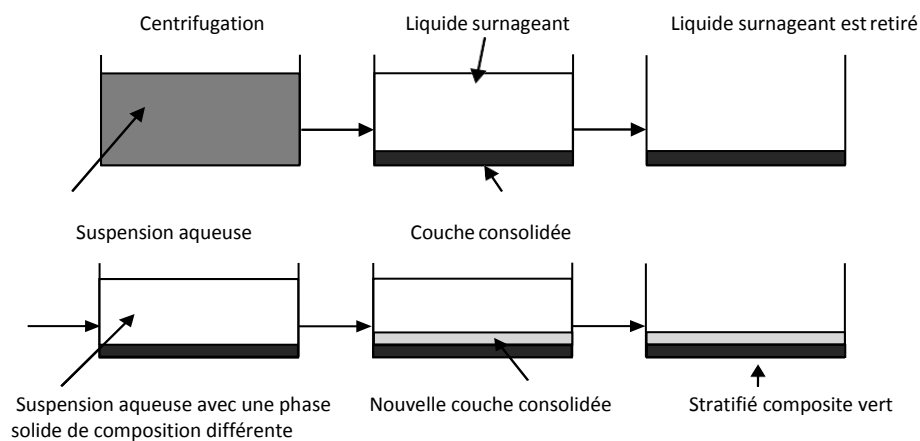


Figure I.16 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].

I.2.9 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés FGM consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

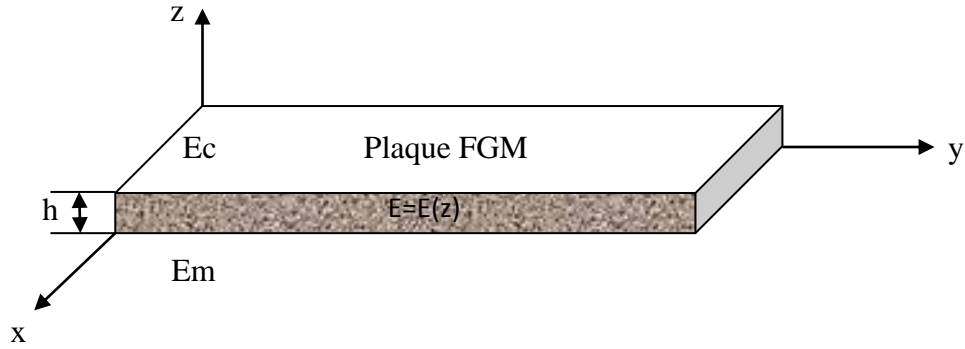


Figure I.17: Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (figure I.17).

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E=E(z)$, $\nu=\nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.2.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z=-h/2$) et de la surface supérieure ($z=h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.18, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

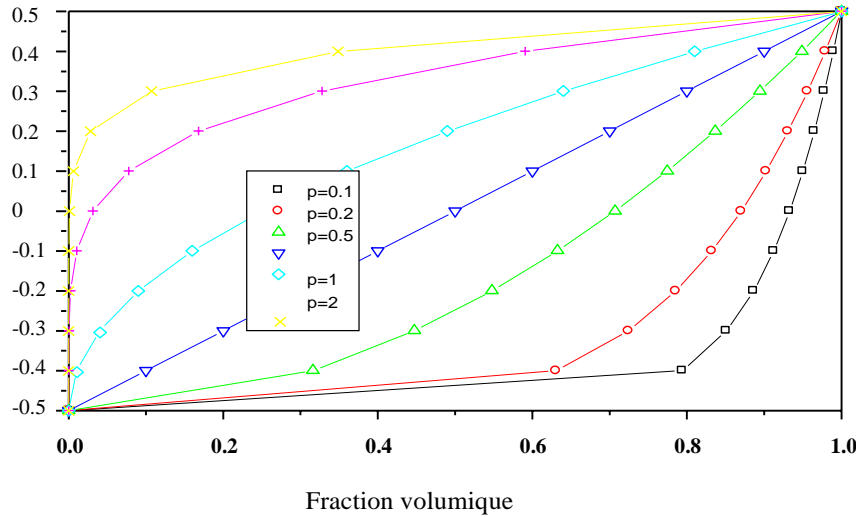


Figure I.18 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.2.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.19 montre la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représentant les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

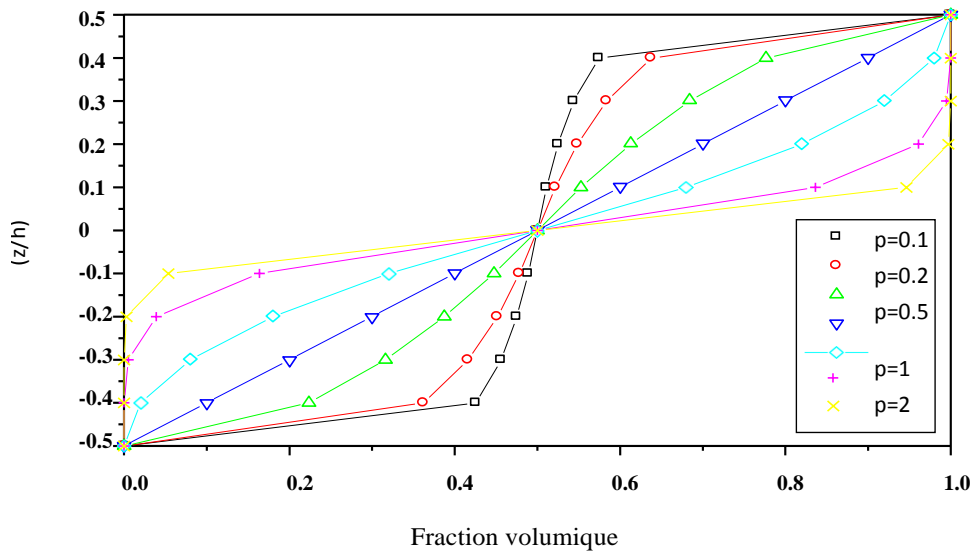


Figure I.19: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.2.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec:

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.20.

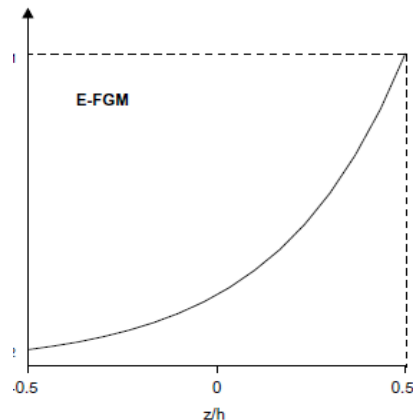


Figure I.20: La variation du module de Young de la plaque E-FGM

I.3 Conclusion

Après avoir défini les matériaux à gradient de propriétés "FGM" comme étant des matériaux composites innovants, un aperçu a été exposé sur leur développement, leur concept, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication ainsi que les domaines de leur application. Nous avons évoqué les lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGMs.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

A

[Abdizadeh, 1997]: **H. Abdizadeh**, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997 212 p.

B

[Balay et al., 2004] : **C. Balay, Y. Grohens, I. Pillin**, 'Etat de l'art sur les matériaux composites biodegradables', Revue des Composites et des Matériaux Avancés, Vol. 14, pp 135-166, 2004.

[Baron, Naili, 2008]: **C. Baron., S. Naili**, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, Compte Rendue Mécanique ; 336 (9) : 722–730, 2008.

[Billoët, 1993] : **J.L. Billoët**, 'Introduction aux matériaux composites à hautes performances', Edition Broché, 1993.

[Birman, 2007]: **V. Birman and L.W. Byrd**, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, Applied Mechanics Reviews, 60, 195–216, 2007.

[Bishop 1993]: **Bichop, C.Y. Lin, M. NAVARATNAM, R.D. Rawlings, M.C. Chane**, a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters 1993.

C

[Chan, 2001]: **S.H. Chan**, Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, International Journal of Thermal Science, 40, 255– 261.

[Chrétien, 1986] : **G. Chrétien**, 'Matériaux composites', Edition Technique et Documentation (Lavoisier), ISBN 2 85206 325 5, 1986.

[Ciarlet, 1997]: **P.M. Ciarlet**, Mathematical Elasticity, Vol. II: Theory of Plates. North-Holland, Amsterdam, 1997.

D

[Delale, 1983]: **F. Delale, F. Erdogan**, The crack problem for a non homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614, 1983.

F

[Fuchiyama, 1995]: **T.Fuchiyama and N. Noda**, Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, JSAE Review, 16, 263–268.

H

[Hirai, 1999]: **T. Hirai et L. Chen**, 'Materials Science Forum', Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, 308–311, 509–514, 1999.

[Hui, 2009]: **Hui-shen shen**, functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells, CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group, 2009.

I

[Ichiro, 1996]: **C. Ichiro, M. Yoshinari**, 'functionally graded materials, elsevier, 1996.

K

[Koizumi, 1997]: **M. Koizumi**, FGM activities in Japan. Composites; 28 (1-2):1– 4. 1997

L

[Liu, 2003]: **L.-S. Liu, Q.J. Zhang, and P.-C. Zhai**, The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796, 2003.

M

[Markworth 1995]: **A.J. Markworth, K.S. Ramesh, and W.P. Parks**, Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.

[Mindlin, 1951]: **R.D. Mindlin**, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.

[Müller, 2003]: **E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, and W.A. Kaysser**, Functionally graded materials for sensor and energy applications, *Materials Science and Engineering*, A362, 17–39, 2003.

N

[Nguyen, 2004]: **V.T. Nguyen**, « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

[Noda, 1999]: **N. Noda**, Thermal stresses in functionally graded material, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512, 1999.

P

[Paszkievicz, 2008]: **B. Paszkievicz, R. Paszkievicz, M. Wosko, D. Radziewicz, B. Sciana, A. Szyszka, W. Macherzynski, and M. Tlaczala**, Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum*, 82, 389–394, 2008.

[Paulino, 2003]: **G.H. Paulino, Z.H. Jin, and Jr. R.H. Dodds**, Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644, 2003.

Q

[Qiu, 2003]: **J. Qiu, J. Tani, T. Ueno, T. Morita, H. Takahashi, and H. Du**, Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121, 2003.

R

[Reddy, 1997]: **J.N. Reddy**, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

S

[Savoia, Reddy, 1995]: **M. Savoia., J.N. Reddy**, Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608, 1995.

[Shen, 2004]: **H.-S. Shen**, Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells (in Chinese), *Advances in Mechanics*, 34, 53–60, 2004.

T

[Tanigawa, 1995]: **Y. Tanigawa**, Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300, 1995.

[Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger,1959]: **S.P. Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger**, Theory of Plates and Shells. McGraw- Hill, New York, 1959.

U

[Uemura, 2003]: **S. Uemura**, The activities of FGM on new applications, 'Materials Science Forum'423–425, 1–10, 2003.

W

[Watari, 2004]: **F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, and T. Kawasaki**, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, Composites Science and Technology, 64, 893–908, 2004.

Y

[Yin, 2004]: **H.M. Yin, L.Z. Sun, and G.H. Paulino**, , Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materialia,52, 3535–3543, 2004.

Z

[Zhong, 2007]: **Z. Zhong., T. Yu**, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. Composites Science and Technology; 67 (3-4): 481-488, 2007.

CHAPITRE II:

Matériaux à Gradient de Propriétés en Génie Civil

II.1 Introduction

À l'heure actuelle, des études de recherches tentent de transférer l'idée de la graduation fonctionnelle des matériaux, qui a été déjà utilisé avec succès dans d'autres disciplines de l'ingénierie comme celle de l'aéronautique et de l'aviation [Kieback, B. et al., 2003], vers le domaine de la construction. Les éléments de construction à fonction graduelle montrent un changement continu des propriétés dans leur section transversale. La propriété qui varie peut être la porosité ou la concentration de la teneur en fibres ou le rapport des matériaux (en termes d'un alliage ou mélange de substances).

Le développement des éléments de constructions plus légers et recyclables en fonction de leur nature, pourrait avoir un impact positif sur le plan environnemental et économique du pays. La graduation des propriétés des matériaux constitue une étape importante dans le développement des structures innovantes dans le domaine du génie civil. L'exemple du béton met clairement en relief les possibilités et les potentiels offerts par la gradation.

II.2 Application de la technologie du FGM en génie civil

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudiées et évalué pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

L'objectif de ces projets est d'évaluer les nouvelles possibilités de conception offertes par les matériaux graduées, en les voyant aussi sous l'angle architectural, et d'élaborer des propositions pour leur utilisation dans divers domaines. Ci-dessous, nous passons en revue, quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil.

II.2.1 Le Béton à gradient de propriétés :

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés [sobek et al], Les travaux de développement ont lieu à l'institut *für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren* (ILEK, Institut de la conception et la construction de structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à

gradient de propriétés» [Heinz al., 2011]. La fabrication, l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance, à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profils des efforts déterminés pour l'élément (figure II.1).



Figure II.1: Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEK

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

Les essais et les calculs de planchers à gradient de propriétés se sont révélés d'une réduction de poids de plus de 60% et d'une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques, sans aucune perte de résistance [Eyerer et al., 2000] (figure II.2).



Figure II.2: Essai de flexion à quatre points, source: ILEK

II.2.2 Autres matériaux à gradient de propriétés:

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter au matériau une perméabilité et une rigidité graduelle (figure II.3), ce qui peut augmenter l'efficacité de systèmes d'isolations vis-à-vis les effets de chaleur et d'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permet de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



Figure II.3: En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée;
En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK

À l'aide d'un processus progressif, il a été possible de produire des éléments de mousse à cellules ouvertes avec des motifs de porosité variable. Ces mousses peuvent ensuite être traitées pour fabriquer des composants avec une variation de distribution de rigidité afin répondre aux exigences de certains cas (Figure II.4).



Figure II.4: Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK

Un autre aspect de cette technologie impliquant des matériaux à gradient de propriétés sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue (figure II.5). Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évité à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production.



Figure II.5: transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK

II.2.3 Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :

a) Les chaussées rigides (*Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements*):

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une graduation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée pour être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industrielles, les pistes des aéroports car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériaux rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

b) Les chaussées souples :

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

c) Les grands vitrages dans les zones chaudes :

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

d) Les tunnels (*functionally graded concrete segment in tunnel*):

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGMs semble être une solution efficace.

e) Les joints dans la charpente métallique:

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre des éléments de poids et de nuances différentes comme l'acier/l'aluminium. Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est qu'il subit une forte concentration de contraintes, et s'avère plus vulnérable en cas d'action cyclique. L'utilisation des joints en FGM représente une solution optimale.

II.3 Conclusion :

L'idée de la gradation fonctionnelle de matériaux a un impact positif sur le côté économique et environnementale. Les propriétés améliorées des matériaux en termes de physique du bâtiment et de capacité structurelle peuvent apporter une contribution supplémentaire à l'économie de l'énergie et des matériaux. La variation graduelle des propriétés matérielles permet d'éviter les points faibles de certains éléments structuraux [Said, 2014].

Les travaux de recherche ont amené à libérer le potentiel des éléments à gradient de propriétés pour l'ingénierie de la construction en termes de leur multifonctionnalité, poids et économie d'énergie. Construire avec des matériaux à gradient de propriétés peut ainsi apporter une contribution majeure vers le développement des méthodes de construction durable.

Références bibliographiques

E

[Eyerer et al., 2000]: **Eyerer P. et Reinhardt H.**, 'Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden', Birkhauser, 2000.

H

[Heinz al., 2011]: **Heinz P., Herrmann M. and Sobek W.**, 'Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen.', Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011), Stuttgart, ILEK, 2011.

K

[Kieback 2003]: **Kieback B., Neubrand A. and Riedel H.**, 'Processing techniques for functionally graded materials', Material Science and Engineering A 362 (2003): 81–106, 2003.

S

[Said et al., 2014]: **Said A., Ameer M., Bousahla A.A. and Tounsi A.**, "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations," Int. J. Comput. Methods **11 (6)** 1350098, 2014.

[Sobek et al]: **Sobek W., Herrmann M., Haase W.**, 'Gradientenbeton. Beton- und Stahlbetonbau', (zur Veröffentlichung angenommen).

CHAPITRE III:

Les Nouvelles Théories des Plaques FGM

III.1 Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 1989, Kapania 1989, Kant 2000, Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toute fois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [Pagano 1969, Pagano 1970, Srinivas 1970, Srinivas 1973]. La, encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente;
- Approche par couche;
- Approche développement asymptotique.

III.2 Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

III.2.1 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Afin de résoudre les problèmes des structures composées d'éléments tels que les poutres et les plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh 1877 et Reissner 1945.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

III.2.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

On commence par le modèle le plus simple qui est le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff 1950] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (figure III.1).

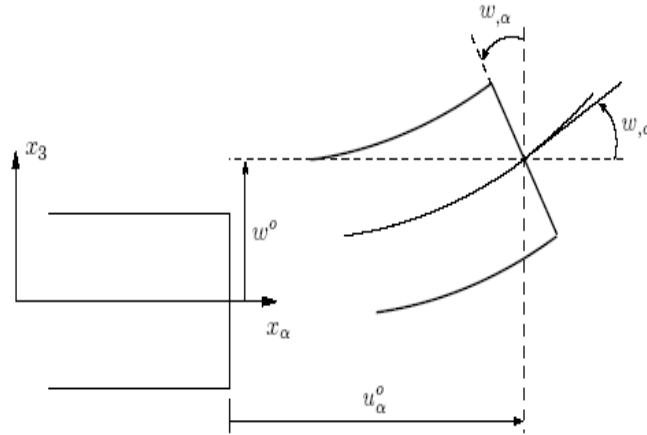


Figure III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) & \alpha = 1,2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de la membrane dans la direction x_α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

Puisque ce modèle ne tient pas compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.2.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (figure III.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) & \alpha = 1,2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transversale mesurée sur le plan moyen.

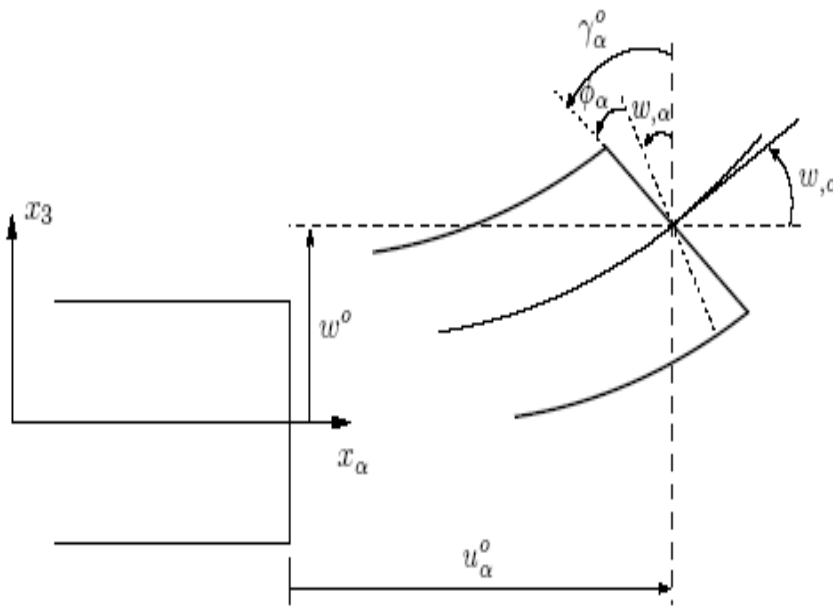


Figure III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ceci évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney 1973]. Les résultats obtenus

dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. La figure III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés où au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGMs ce problème est résolu.

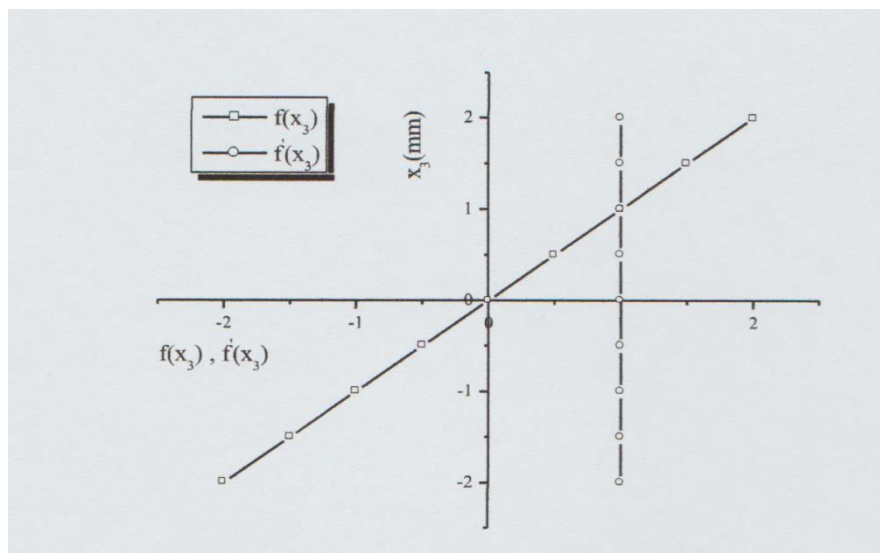


Figure III.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3)=x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

III.2.1.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la

section dans la configuration déformée (Figure III.4) [Liberscu 1967, Whitney 1973, Touratier 1991, Nguyen 2004].

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^0(x_1, x_2) + z\phi_1^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_1^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_1^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_1^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Partant de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_j^{0(4)} = \phi_j^{0(3)} = \phi_j^{0(2)} = \phi_j^{0(1)} = 0, \phi_j^{0(4)}, \alpha = \{1, 2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

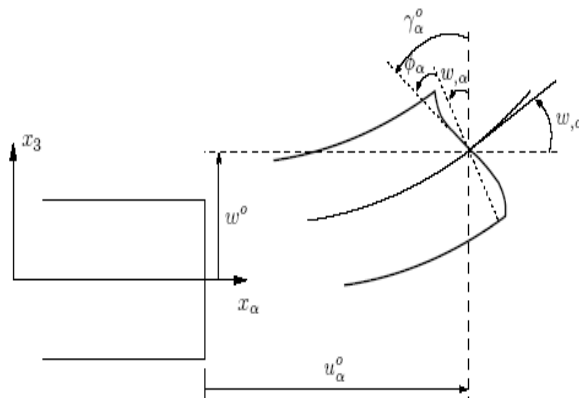


Figure III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III.5})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

- L'approche de Reddy [Reddy 1987] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

Dans le modèle de [Reddy 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{III.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h} \right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^2} + \dots \right) \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie

Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984].

Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu [Aydogdu 2005] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

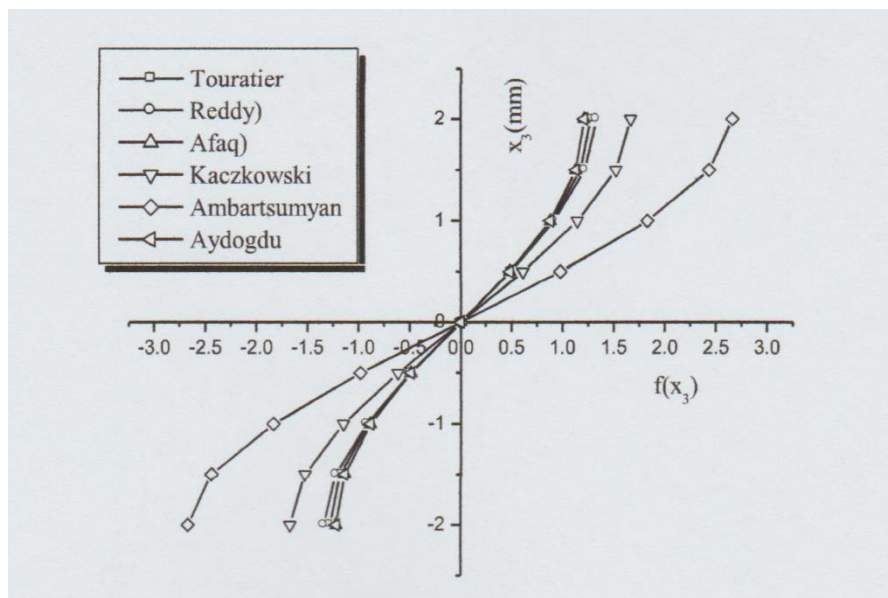


Figure III.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

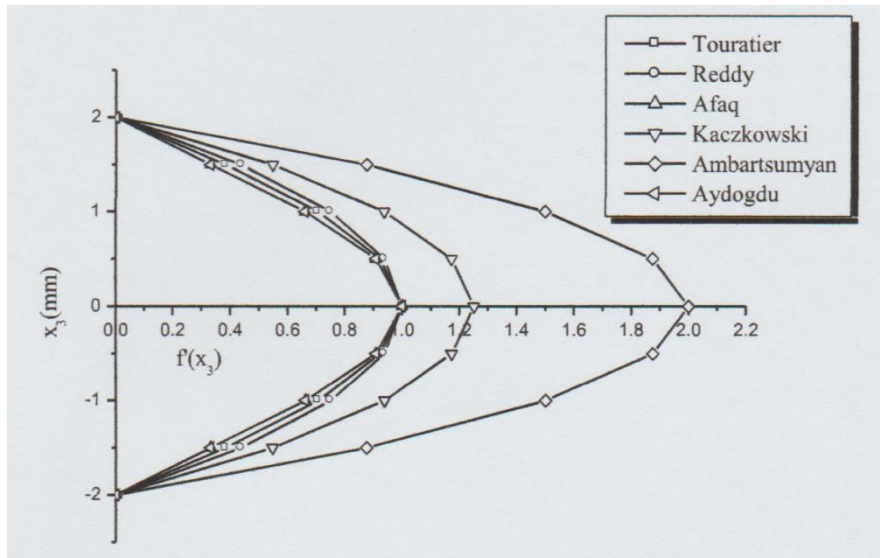


Figure III.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des figures III.5 et III.6, on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont sensiblement loin des autres fonctions de forme; elles ont servi comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .), mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

III.2.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les équations (III.3) et (III.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot 1997, Carrera 2000, Afaq 2003, Reddy 1984, Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier

ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfaisant à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches, (figures III.7 et III.8).

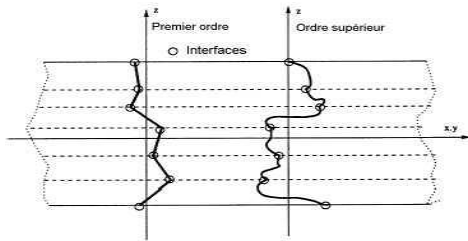


Figure III.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen 2004]

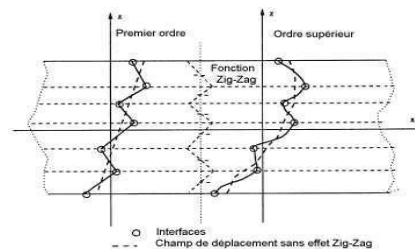


Figure III.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen 2004]

III.2.2.1 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir figure III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

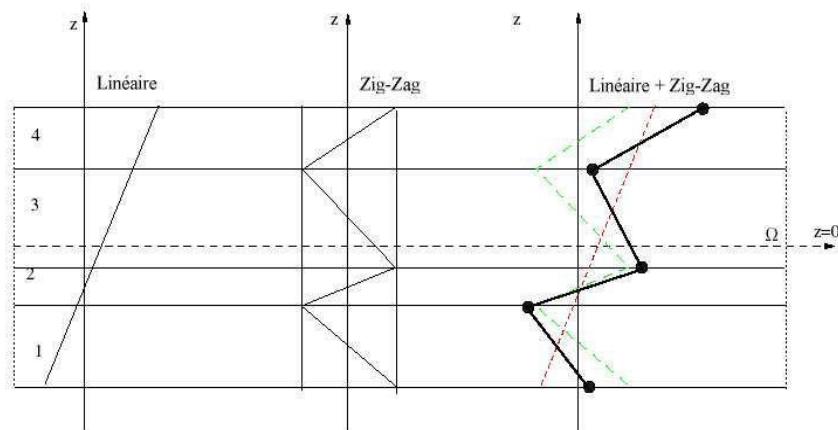


Figure III.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.[Nguyen 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Nguyen 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir figure III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

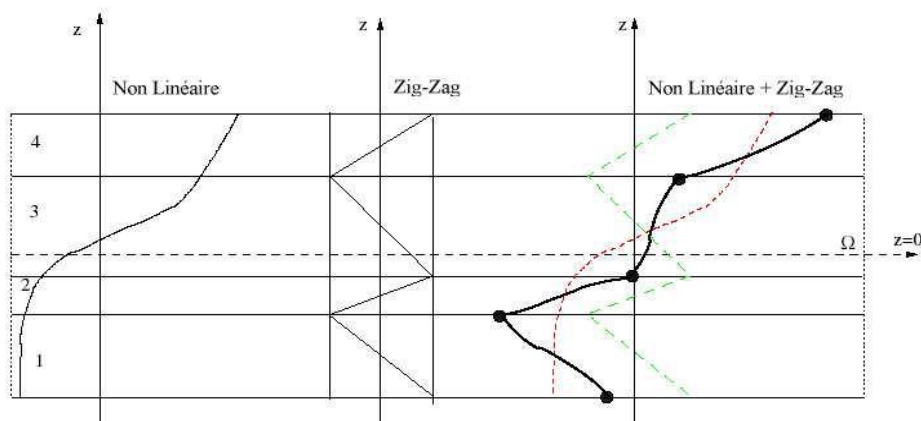


Figure III.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.[Nguyen 2004].

Dans les travaux de [Karama 1998, Ossadzow 2001], la fonction sinus de [Touratier 1991] est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] combinent le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche. Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peut artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue [Icardi 2001a]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

III.2.2.2 Les modèles en couches discrètes

Les modèles en couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir figure III.7). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couches de la plaque composite. Dans les travaux de [Srinivas 1973, Reddy 1987, Tahani 2003], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche. D'une manière alternative, les travaux de [Ren 1986, Kassapoglou 1987, Yin 1994] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou un mixte contrainte cinématique. Ainsi [Ren 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou 1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin 1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles en couches discrètes particulières, les modèles multi-particulaires. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano 1978]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubiques pour les contraintes normales. La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multi-couches à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair. La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen 2004].

III.3 Modèles éléments finis des structures composites

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix des types d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci-dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

III.3.1 Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multi-couches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [Reddy 1980, Ganapathi 1997]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en

cisaillement transverse. Grace à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C_0 , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans [Nguyen 2004] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen 2004]. Un large volume consacré au développement des éléments finis multi-couches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux w mais encore leurs dérivées normales doivent être continues à travers des frontières inter-éléments [Reddy 1999]. Dans [Ren 1986], un élément de continuité C_1 basé sur le modèle cubique de [Reddy 1984] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le modèle "sinus" de [Touratier 1991], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité C_1 sont développés [Nguyen 2004, Polit 2002]. L'élément triangulaire développé par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds. La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la figure III.11.

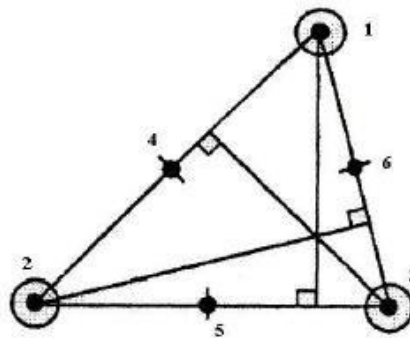


Figure III.11: Élément « sinus » triangulaire à 6 nœuds de [Polit 2002].

Les travaux de Khare [Khare 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (figures III.12 et III.13). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:

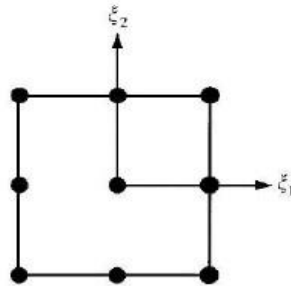


Figure III.12: Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [Nguyen 2004].

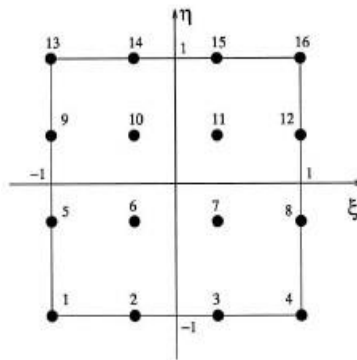


Figure III.13: Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [Nguyen 2004].

III.3.2 Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 nœuds de Raju [Raju 1981] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la figure III.14.

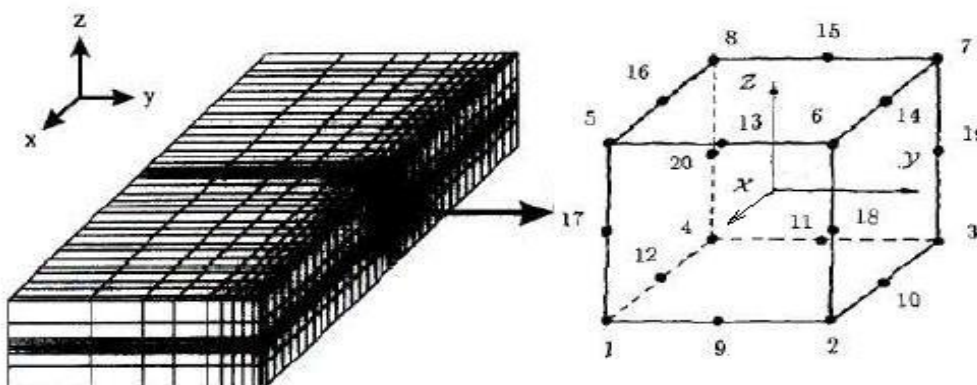


Figure III.14: Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z [Nguyen, 2004]

Icardi et al. [Icardi 1995] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds (figure III.15) et un élément singulier 15 nœuds (figure III.16) généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases "prédicteur-correcteur" est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la figure III.17. Cho et al. [Cho et al. 2000] développent un élément fini brique zig-zag à 8 nœuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans [Desai 2003] un élément mixte à 18 nœuds est proposé (figure III.18). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes inter-laminaires.

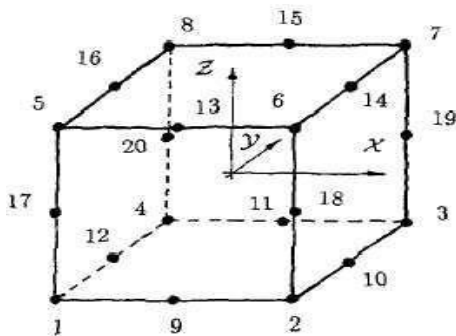


Figure III.15 : Élément brique à 20 nœuds

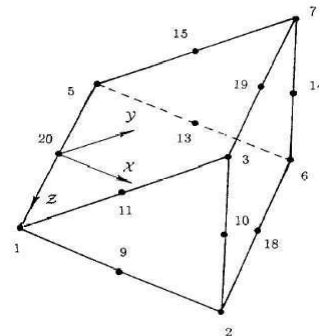


Figure III.16 : Élément singulier à 15 nœuds.

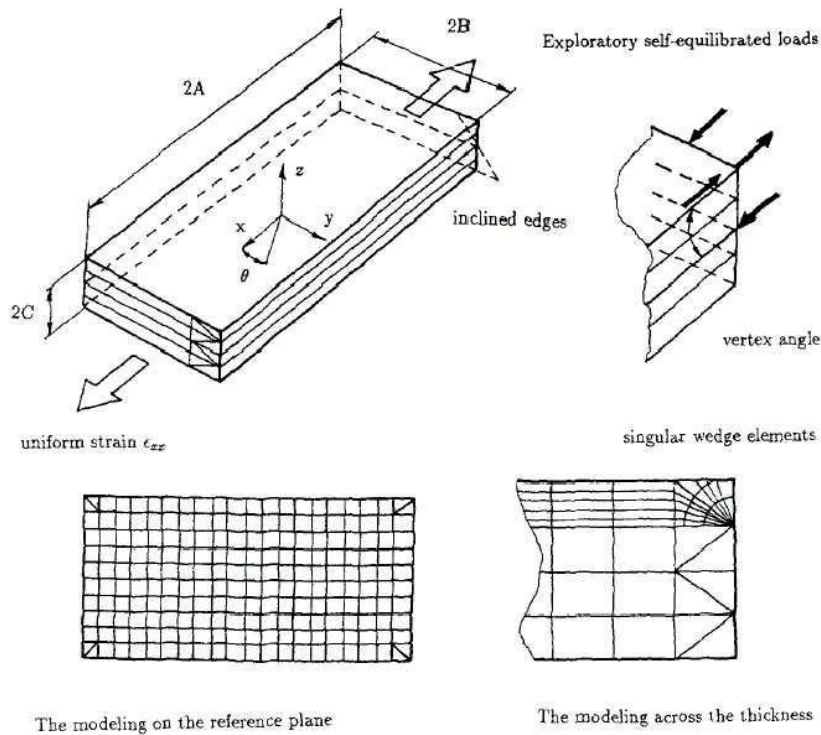


Figure III.17 : Etudes du problème de bord libre par EF 3D.

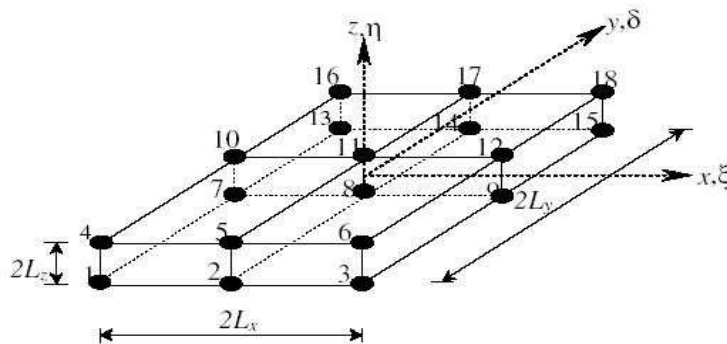


Figure III.18 : Élément brique mixte à 18 nœuds.

Dans [Bui 2000] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégenérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (voir figure III.19). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

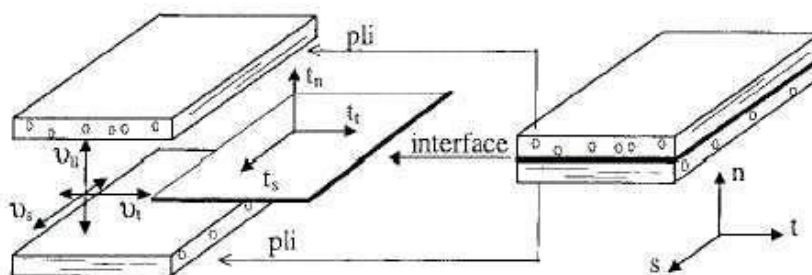


Figure III.19 : Elément d'interface.

Cette méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les l'élément finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singuliers et dépendent du raffinement du maillage.

III.4 Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarté.

Donc, on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Références bibliographiques

A

[Afaq 2003]: **K.S. Afaq, M. Karama et S. Mistou**. 'Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches'. In Comptes-rendus des 13emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

[Ambartsumyan 1969]: **S.A. Ambartsumyan**, Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co,1969.

B

[Bui 2000]: **V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang**, 'Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates'. Composites Science and Technology, vol. 60, pages 131,143, 2000.

C

[Carrera, 2000]: **E. Carrera**, 'An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates'. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.

[Chabot 1997]: **A. Chabot**, 'Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multi-particulaires de matériaux multicouches'. PhD thesis, ENPC, 1997

[Cho 2000]: **Y.B. Cho & R.C.**, 'Averill. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels'. Composite Structures, vol. 50, pages 1,15, 2000.

D

[Di Sciuva 1987] : **M. Di Sciuva**, 'An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates'. Journal of Applied Mechanics, vol. 54,pages 589(596, 1987).

[Desai 2003]: **Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar & A.H. Shah**, 'Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed _nite element model'. Composite Structures, vol. 59, pages 237,249, 2003.

G

[Ganapathi 1997]: **M. Ganapathi & M. Touratier**, 'A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible _nite element'. Finite Element in Analysis and Design, vol. 28, pages 115,135, 1997.

I

[Icardi 1995]: **U. Icardi & A.M. Bertetto**. 'An evaluation of the inuence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates'. Comput. Struct., vol. 57, no. 4, pages 555,571, 1995.

K

[Kant, 2000]: **T. Kant, K. Swaminathan**, Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. Composite structures, vol. 49, pages 65,75, 2000.

[Kapania, 1989]: **R. K. Kapania, S. Raciti**, Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. AIAA Journal, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.

[Karama 1998]: **M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa**. 'Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model'. Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.

[Kassapoglou 1987] : **C. Kassapoglou & P.A. Lagace**. 'Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates'. Journal of Composite Materials, vol. 27, pages 292,308, 1987.

[Khare 2004]: **R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg**, 'Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element'. Composite Structures, vol. 65, pages 405,418, 2004.

[Kirchhoff 1950]: **G. Kirchhoff**, Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51, 88, 1950.

L

[Liberscu 1967]: **L. Liberscu**, 'On the theory of anisotropic elastic shell and plates'. Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68, 1967.

N

[Nguyen 2004]: **V.T. Nguyen**, 'Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques'. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

[Noor, 1989]: **A. K. Noor, W. S. Burton**, 'Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates'. Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.

O

[Ossadzow 2001]: **C. Ossadzow & M. Touratier**. 'An improved shear-membrane theory for multi-layered shells'. Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2001.

P

[Pagano 1969]: **N. J. Pagano**, 'Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending', Journal of Composite Materials, (3), 398-411, 1969.

[Pagano 1970]: **N. J. Pagano**, 'Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates, Journal of Composite Materials, 4(1), 20-34, 1970.

[Pagano 1978] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.

[Polit 2002]: **O. Polit & M. Touratier**, 'A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses'. Composite Structures, vol. 58, pages 121,128, 2002.

R

[Raju 1981]: **I.S. Raju & J.H. Crews**, 'Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates'. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.

[Reddy 1980]: **J.N. Reddy**, 'A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.

[Reddy 1984]: **J.N. Reddy**, A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[Reddy 1987]: **J.N. Reddy**, 'A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates'. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.

[Reddy 1999]: **A.R.K Reddy & R. Palaninathan**, 'Free vibration of skew laminates'. *Computers and Structures*, vol. 70, no. 4, pages 415,423, 1999.

[Reissner 1945]: **E. Reissner**, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69, 77, 1945.

[Reissner 1961]: **E. Reissner, Y. Stavsky**, Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.

[Ren 1986]: **J.G. Ren**, 'A new theory of laminated plate'. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.

S

[Srinivas 1970]: **S. Srinivas, A.K. Rao**, Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates', *Int J. Solids structures*, (6),1463-1481, 1973.

[Srinivas 1973]: **S. Srinivas, A.K. Rao**, Flexure of thick plates'. *ASME*, 298-299, 1973.

[Srinivas 1973]: **S. Srinivas**, A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, no. 4, pages 495,507, 1973.

T

[Tahani 2003]: **M. Tahani & A. Nosier**, 'Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate'. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.

[Touratier 1991]: **M. Touratier**, 'An efficient standard plate theory'. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.

W

[Whitney, 1973]: **J.M. Whitney**, 'Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads'. *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.

Y

[Yin 1994]: **W.L. Yin**, 'Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549,1564, 1994.

CHAPITRE IV:

Formulations Théoriques

IV.1 Introduction

L'idée d'un matériau fonctionnellement gradué n'est pas nouvelle. Des exemples de matériaux fonctionnellement gradués sont apparents autour de nous. Les os, coquilles, bois de balsa et de bambou ont tous leur plus grande résistance sur la partie externe, où une plus grande protection est nécessaire [Suresh et Mortensen, 1998]. Cependant, il a fallu attendre les années 1980, au Japon, pour que l'idée d'une matière fonctionnellement graduée soit activement étudiée afin de progresser dans les applications aérospatiales à haute température [Koizumi, 1993].

Récemment, une *nouvelle théorie raffinée des plaques, à quatre variables*, qui ne comporte que quatre fonctions inconnues, mais qui tient toujours compte des déformations de cisaillement, a été mise au point par Tounsi et ses collaborateurs [Tounsi et al., 2013]. L'analyse des vibrations libres a été développée par [Benachour et al., 2011]; le flambement et l'analyse des vibrations libres par [Bourada et al., 2012, Khalfi et al. 2014 et Ait Amar Meziane et al., 2014]; l'analyse thermoélastique de la flexion par [Tounsi et al., 2013 et Houari et al., 2013]. Une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement a été développée par [Houari et al. 2013], et une autre par [Said et al., 2014, Bourada et al., 2015, et Belabed et al. 2014]. L'analyse de la flexion a été faite par [Zidi et al., 2014 et Bousahla et al., 2014], et l'analyse thermique des contraintes et déformations par [Bouchafa et al., 2015]; l'analyse des vibrations libres et la flexion par [Bessaim et al., 2013, Mahi et al., 2015 et Hebali et al., 2014]; l'étude de l'effet de l'étirement de l'épaisseur et de la porosité sur le comportement mécanique par [Ait Atmane, 2016]; la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées avec porosités en utilisant diverses théories sur la déformation de cisaillement des plaques d'ordre supérieur a été étudiée par [Ait Yahia, 2015]. Cette théorie raffinée *des plaques, à quatre variables*, est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux et dans le plan ont des composantes de flexion et de cisaillement; les composantes de la flexion ne contribuent pas aux forces de cisaillement, et similairement, les composantes du cisaillement ne contribuent pas aux moments de la flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation quadratique des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, et satisfait aussi les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans faire appel aux facteurs de correction de cisaillement. D'autres chercheurs [Hamidi et al., 2015; Fekrar et al., 2014; Zenkour, 2006; Benoun et al., 2016] ont développé leurs recherches en utilisant des théories de déformation de cisaillement, d'ordre élevé, à cinq variables. A partir

d'une revue de la littérature, il est possible de constater que la recherche sur le comportement mécanique et hygrothermique des plaques fonctionnellement graduées, utilisant une théorie de déformation hyperbolique, semble faire défaut. Ceci va constituer l'objet de la présente étude de recherche.

L'objectif de cette étude est de développer une formulation hygrothermique générale pour les plaques rectangulaires faites de matériaux fonctionnellement gradués, en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Said et al., 2014].

IV.2 Modèle mathématique et les équations régissant

Dans cette étude, une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée, de côtés a et b et d'épaisseur h , rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , où le plan (x_1, x_2) coïncide avec la surface centrale de la plaque et (x_3) est la coordonnée de l'épaisseur $(-h/2 \leq x_3 \leq h/2)$, est considérée, figure IV.1. La plaque faite de matériaux fonctionnellement gradués est soumise à une charge transversale $q(x_1, x_2)$.

Les propriétés du matériau de la plaque sont supposées varier suivant l'épaisseur de la plaque, avec une certaine variation des fractions volumiques de deux matériaux entre les deux surfaces. En appliquant une distribution en loi de puissance simple, les fractions volumiques du métal et de la céramique sont exprimées par [Zenkour 2006]:

$$V_c(x_3) = \left(\frac{x_3}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad (0 \leq k < \infty), \quad V_c(x_3) + V_m(x_3) = 1 \quad \text{IV.1}$$

Où V_c , l'exposant k , et les indices c et m représentent la fraction volumique, l'indice de la fraction volumique, la céramique et le métal, respectivement.

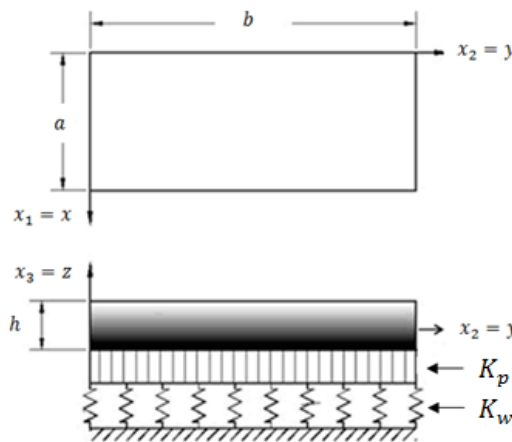


Figure IV.1: Configuration de la plaque rectangulaire FGM reposant sur fondation élastique.

IV.2.1 Hypothèses de la présente théorie

Hypothèses de la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Said et al 2014] sont les suivantes:

(1) L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise sur surface neutre de la plaque FGM.

(2) Les déplacements sont faibles comparés à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations qui en résultent sont infinitésimales.

(3) Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion w_b et cisaillement w_s . Ces composantes sont fonctions des coordonnées x_1, x_2 seulement.

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w_b(x_1, x_2) + w_s(x_1, x_2) \quad (\text{IV.2})$$

(4) La contrainte normale transversale S_{33} est négligeable en comparaison avec des contraintes normales dans le plan S_{11} et S_{22} .

(5) Les déplacements u_1 dans la direction x_1 et u_2 dans la direction x_2 ont des composantes de dilatation, de flexion, et de cisaillement.

$$u_1 = u + u_b + u_s, \quad u_2 = v + v_b + v_s \quad (\text{IV.3})$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposés être similaires aux déplacements donnés par la théorie de la plaque classique. Par conséquent, l'expression pour u_b et v_b peut être donnée par :

$$u_b = -x_3 w_{b,x_1}, \quad v_b = -x_3 w_{b,x_2} \quad (\text{IV.4})$$

Les composantes du cisaillement, u_s et v_s , donnent lieu, en accord avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{13}, γ_{23} , et par conséquent à des contraintes de cisaillement S_{13}, S_{23} , à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement S_{13}, S_{23} soient nulles au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être écrite comme:

$$u_s = -f(x_3)w_{s,x_1}, \quad v_s = -f(x_3)w_{s,x_2} \quad (\text{IV.5})$$

IV.2.2 Cinématique

D'après les hypothèses précédentes, les déplacements d'un point matériel de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'intérieur de la plaque (MFG) peuvent être exprimés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) - x_3 w_{b, x_1} + f(x_3) \phi_1, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) - x_3 w_{b, x_2} + f(x_3) \phi_2, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w_b(x_1, x_2) + w_s(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.6})$$

Où u et v sont les déplacements du plan médian de la plaque suivant x_1 et x_2 , respectivement; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement.

et

$$\phi_1 = w_{s, x_1}, \quad \phi_2 = w_{s, x_2} \quad (\text{IV.7})$$

w_{s, x_1} et w_{s, x_2} sont les dérivées partielles par rapport à x_1 et x_2 , respectivement.

En vertu de ces hypothèses, le champ de déformation associé aux déplacements dans l'équation (IV.6) est:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \kappa_1^b \\ \kappa_2^b \\ \kappa_{12}^b \end{pmatrix} + f(x_3) \begin{pmatrix} \kappa_1^s \\ \kappa_2^s \\ \kappa_{12}^s \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \gamma_{23}^s \\ \gamma_{13}^s \end{pmatrix} &= g(x_3) \begin{pmatrix} \gamma_{23}^s \\ \gamma_{13}^s \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

Où

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u, x_1 \\ v, x_2 \\ u, x_2 + v, x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \kappa_1^b \\ \kappa_2^b \\ \kappa_{12}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_{b, x_1} \\ -w_{b, x_2} \\ -2w_{b, x_1 x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.9.a})$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_1^s \\ \kappa_2^s \\ \kappa_{12}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_{s, x_1} \\ -w_{s, x_2} \\ -2w_{s, x_1 x_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{23}^s \\ \gamma_{13}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{s, x_2} \\ w_{s, x_1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.9.b})$$

Et

$$f(x_3) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} x_3\right) - x_3}{\cosh(\pi/2) - 1}, \quad g(x_3) = 1 - f(x_3), x_3 \quad (\text{IV.10})$$

IV.2.3 Equations constitutives

Les relations contraintes-déformations peuvent être exprimées comme:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{Bmatrix} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \varepsilon_{22} - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \end{Bmatrix}, \\ \{S_{12}, S_{23}, S_{31}\} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \{\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Où $(S_{11}, S_{22}, S_{12}, S_{23}, S_{31})$ et $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$ sont les composants de contraintes et de déformations, respectivement.

Où α et β sont des coefficients de dilatation thermique et hygrique.

Où $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$ sont les différences de la température et de la teneur en humidité, respectivement, et dans lesquelles T_0 est la température de référence, C_0 est la concentration de référence en humidité, T est la température appliquée et C est la concentration d'humidité.

La distribution de la température appliquée $T(x_1, x_2, x_3)$ et la concentration d'humidité $C(x_1, x_2, x_3)$ sont pris à travers l'épaisseur, respectivement, [Bouderba et al 2013].

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= T_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{h} T_2(x_1, x_2) + \frac{1}{h} \Psi(x_3) T_3(x_1, x_2) \\ C(x_1, x_2, x_3) &= C_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{h} C_2(x_1, x_2) + \frac{1}{h} \Psi(x_3) C_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

IV.2.4 Equations principales

Le principe de déplacements virtuels est utilisé ici pour dériver les équations gouvernantes. Ce principe peut être présenté sous la forme analytique suivante:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [S_{11} \delta \varepsilon_1 + S_{22} \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \gamma_{12} + S_{23} \delta \gamma_{23} + S_{13} \delta \gamma_{13}] dx_3 dA - \int_A (q - f_e) \delta u_3 dA \\ 0 &= \int_A [N_1 \delta \varepsilon_{11}^0 + N_2 \delta \varepsilon_{22}^0 + N_{12} \delta \varepsilon_{12}^0 + M_1^b \delta k_1^b + M_2^b \delta k_2^b + M_{12}^b \delta k_{12}^b + M_1^s \delta k_1^s + M_2^s \delta k_2^s + M_{12}^s \delta k_{12}^s + \\ &S_{23}^s \delta \gamma_{23}^s + S_{13}^s \delta \gamma_{13}^s] dA - \int_A (q - f_e) (\delta w_b + \delta w_s) dA \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Où S_{ij} est le tenseur des contraintes de Cauchy, ε_{ij} le tenseur des petites déformations, q la charge transversale, et N , M et S sont la contrainte et les moments résultants de la plaque FGM.

La face inférieure de la plaque est supposée être soumise à la fondation élastique de Winkler

et Pasternak (Voir figure IV.1). La relation entre la réaction et la déviation à la surface inférieure du modèle est donnée par:

$$f_e = K_w u_3 - K_{px_1} u_{3,,x_1} - K_{px_2} u_{3,,x_2}. \quad (\text{IV.14})$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation, K_w le module de réaction du soubassement (coefficient d'élasticité de la fondation), K_{px_1} et K_{px_2} les modules de cisaillement du soubassement (raideur en cisaillement de la fondation). Si la fondation est homogène et isotrope, alors on obtient $K_{px_1} = K_{px_2} = K_p$. Si la raideur en cisaillement de la fondation est négligée, la fondation de Pasternak devient une fondation de Winkler.

Les résultantes des contraintes N, M et E sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} N_1, & N_2, & N_{12} \\ M_1^b, & M_2^b, & M_{12}^b \\ M_1^s, & M_2^s, & M_{12}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (S_{11}, S_{22}, S_{12}) \begin{Bmatrix} 1 \\ x_3 \\ f(x_3) \end{Bmatrix} dx_3, \quad (\text{IV.15a})$$

$$(Q_{13}^s, Q_{23}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (S_{13}, S_{23}) g(x_3) dx_3. \quad (\text{IV.15b})$$

En substituant l'équation (IV.5) dans l'équation (IV.11) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les résultantes des contraintes deviennent alors :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1^b \\ M_2^b \\ M_{12}^b \\ M_1^s \\ M_2^s \\ M_{12}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12} & 0 & B_{11}B_{12} & 0 & B_{11}^s B_{12}^s & 0 \\ A_{12}A_{22} & 0 & B_{12}B_{22} & 0 & B_{12}^s B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11}B_{12} & 0 & D_{11}D_{12} & 0 & D_{11}^s D_{12}^s & 0 \\ B_{12}B_{22} & 0 & D_{12}D_{22} & 0 & D_{12}^s D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s B_{12}^s & 0 & D_{11}^s D_{12}^s & 0 & H_{11}^s H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s B_{22}^s & 0 & D_{12}^s D_{22}^s & 0 & H_{12}^s H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \kappa_1^b \\ \kappa_2^b \\ \kappa_1^b \\ \kappa_2^b \\ \kappa_1^s \\ \kappa_2^s \\ \kappa_{12}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ 0 \\ M_1^{bT} \\ M_2^{bT} \\ 0 \\ M_1^{sT} \\ M_2^{sT} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_1^C \\ N_2^C \\ 0 \\ M_1^{bC} \\ M_2^{bC} \\ 0 \\ M_1^{sC} \\ M_2^{sC} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.16a})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{23}^s \\ Q_{13}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.16b})$$

Où A_{ij} , B_{ij} , etc., sont la rigidité de la plaque, défini par :

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}D_{11}B_{11}^S D_{11}^S H_{11}^S \\ A_{12}B_{12}D_{12}B_{12}^S D_{12}^S H_{12}^S \\ A_{66}B_{66}D_{66}B_{66}^S D_{66}^S H_{66}^S \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} \left(1, x_3, x_3^2, f(x_3), x_3 f(x_3), f^2(x_3) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} dx_3, \quad (\text{IV.17a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S), \quad (\text{IV.17b})$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{2(1-\nu)} [g(x_3)]^2 dx_3, \quad (\text{IV.17c})$$

La contrainte et le moment résultants dus à la charge thermique et hygroscopique sont définis respectivement par:

$$\begin{pmatrix} N_1^T \\ M_1^{bT} \\ M_1^{sT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2^T \\ M_2^{bT} \\ M_2^{sT} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \alpha(x_3) T \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ f(x_3) \end{pmatrix} dx_3, \quad (\text{IV.18a})$$

$$\begin{pmatrix} N_1^C \\ M_1^{bC} \\ M_1^{sC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2^C \\ M_2^{bC} \\ M_2^{sC} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \beta(x_3) C \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ f(x_3) \end{pmatrix} dx_3, \quad (\text{IV.18b})$$

En intégrant par parties les expressions dans l'équation (IV.13), et en regroupant les coefficients de δu , δv , δw_b , and δw_s , on obtient les équations principales suivantes:

$$\begin{aligned} N_{1,x_1} + N_{12,x_2} &= 0, \\ N_{12,x_1} + N_{2,x_2} &= 0, \\ M_{1,x_1}^b + 2M_{12,x_1x_2}^b + M_{2,x_2}^b - f_e + q &= 0, \\ M_{1,x_1}^s + 2M_{12,x_1x_2}^s + M_{2,x_2}^s + S_{13,x_1}^s + S_{23,x_2}^s - f_e + q &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

En substituant l'équation (IV.12) dans l'équation (IV.10), les équations principales peuvent être exprimées en fonction des déplacements généralisés (u, v, w_b, w_s) , par :

$$A_{11}u_{,x_1x_1} + A_{66}u_{,x_2x_2} + (A_{12} + A_{66})v_{,x_1x_2} - B_{11}w_{b,x_1x_1x_1} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,x_1x_2x_2} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)w_{s,x_1x_2x_2} - B_{11}^s w_{s,x_1x_1x_1} = F_1, \quad (\text{IV.20a})$$

$$A_{22}v_{,x_2x_2} + A_{66}v_{,x_1x_1} + (A_{12} + A_{66})u_{,x_1x_2} - B_{22}w_{b,x_2x_2x_2} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,x_1x_1x_2} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)w_{s,x_1x_1x_2} - B_{22}^s w_{s,x_2x_2x_2} = F_2, \quad (\text{IV.20b})$$

$$B_{11}u_{,x_1x_1x_1} + (B_{12} + 2B_{66})u_{,x_1x_2x_2} + (B_{12} + 2B_{66})v_{,x_1x_1x_2} + B_{22}v_{,x_2x_2x_2} - D_{11}w_{b,x_1x_1x_1x_1} - 2(D_{12} + 2D_{66})w_{b,x_1x_1x_2x_2} - D_{22}w_{b,x_2x_2x_2x_2} - D_{11}^s w_{s,x_1x_1x_1x_1} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)w_{s,x_1x_1x_2x_2} - D_{22}^s w_{s,x_2x_2x_2x_2} = F_3, \quad (\text{IV.20c})$$

$$B_{11}^s u_{,x_1x_1x_1} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)u_{,x_1x_2x_2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)v_{,x_1x_1x_2} + B_{22}^s v_{,x_2x_2x_2} - D_{11}^s w_{b,x_1x_1x_1x_1} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)w_{b,x_1x_1x_2x_2} - D_{22}^s w_{b,x_2x_2x_2x_2} - H_{11}^s w_{s,x_1x_1x_1x_1} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)w_{s,x_1x_1x_2x_2} - H_{22}^s w_{s,x_2x_2x_2x_2} + A_{55}^s w_{s,x_1x_1} + A_{44}^s w_{s,x_2x_2} = F_4. \quad (\text{IV.20d})$$

Où $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^t$ est le vecteur de force généralisée.

Les composantes du vecteur de la force généralisée $\{F\}$ sont données par:

$$\begin{aligned} F_1 &= N_{1,x_1}^T + N_{1,x_1}^C, & F_2 &= N_{2,x_2}^T + N_{2,x_2}^C, \\ F_3 &= f_e + q - (M_1^{bT} + M_1^{bC})_{,x_1x_1} - (M_2^{bT} + M_2^{bC})_{,x_2x_2}, \\ F_4 &= f_e + q - (M_1^{sT} + M_1^{sC})_{,x_1x_1} - (M_2^{sT} + M_2^{sC})_{,x_2x_2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

IV.3 Les solutions analytiques pour les plaques fonctionnellement graduées FGM

En suivant la procédure de Navier, la force externe sinusoïdale ainsi que la température sinusoïdale transversale et la concentration hygrique des charges peuvent s'exprimer sous la forme d'une double série de Fourier comme :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_k \\ C_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_k \\ c_k \end{Bmatrix} \sin(i x_1) \sin(j x_2) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (\text{IV.22})$$

Où $i = \pi/a$, $j = \pi/b$, q_0 , t_k et c_k sont constants et T_k et C_k sont définis dans l'équation (IV.12).

En suivant la procédure de solution de Navier, il est possible de supposer la forme suivante de la solution, pour (u, v, w_b, w_s) , comme satisfaisant les conditions aux limites simples:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(i x_1) \sin(j x_2) \\ V \sin(i x_1) \cos(j x_2) \\ W_b \sin(i x_1) \sin(j x_2) \\ W_s \sin(i x_1) \sin(j x_2) \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.23})$$

Où U, V, W_b et W_s sont des paramètres arbitraires à déterminer, à la condition que la solution de l'équation (IV.23) satisfasse l'équation principale (IV.20).

En substituant l'équation (IV.23) dans les équations. (IV.20), on obtient:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}, \quad (\text{IV.24})$$

Et $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$ et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.25})$$

où

$$\begin{aligned} k_{11} &= -(A_{11}i^2 + A_{66}j^2), \\ k_{12} &= -ij(A_{12} + A_{66}), \\ k_{13} &= i [B_{11}i^2 + (B_{12} + 2B_{66}j^2)], \\ k_{14} &= i [B_{11}^s i^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s j^2)], \\ k_{22} &= -(A_{66}i^2 + A_{22}j^2) \\ k_{23} &= j [(B_{12} + 2B_{66})i^2 + B_{22}j^2], \\ k_{24} &= j [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)i^2 + B_{22}^s j^2], \\ k_{33} &= -(D_{11}i^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})i^2j^2 + D_{22}j^4 + K + J_1i^2 + J_2j^2), \\ k_{34} &= -(D_{11}^s i^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)i^2j^2 + D_{22}^s j^4 + K + J_1i^2 + J_2j^2), \\ k_{44} &= -(H_{11}^s i^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)i^2j^2 + H_{22}^s j^4 + A_{55}^s i^2 + A_{44}^s j^2 + K + J_1i^2 + J_2j^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

Les composantes du vecteur de la force généralisée $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^t$ sont données par:

$$\begin{aligned} F_1 &= i[(A^T t_1 + B^T t_2 + B_a^T t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B_a^C c_3)], \\ F_2 &= j[(A^T t_1 + B^T t_2 + B_a^T t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B_a^C c_3)], \\ F_3 &= -q_0 - h(i^2 + j^2)[(B^T t_1 + D^T t_2 + D_a^T t_3) + (B^C c_1 + D^C c_2 + D_a^C c_3)], \\ F_4 &= -q_0 - h(i^2 + j^2)[(B_s^T t_1 + D_s^T t_2 + F_s^T t_3) + (B_s^C c_1 + D_s^C c_2 + F_s^C c_3)]. \end{aligned} \quad (IV.27)$$

Où

$$\begin{aligned} \{A^T, B^T, D^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \alpha(x_3) \{1, \bar{x}_3, \bar{x}_3^2\} dx_3, \\ \{A^C, B^C, D^C\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \beta(x_3) \{1, \bar{x}_3, \bar{x}_3^2\} dx_3, \end{aligned} \quad (IV.28a)$$

$$\begin{aligned} \{B_a^T, D_a^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \alpha(x_3) \bar{\Psi}(x_3) \{1, \bar{x}_3\} dx_3, \\ \{B_a^C, D_a^C\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \beta(x_3) \bar{\Psi}(x_3) \{1, \bar{x}_3\} dx_3, \end{aligned} \quad (IV.28b)$$

$$\begin{aligned} \{B_s^T, D_s^T, F_s^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \alpha(x_3) \bar{f}(x_3) \{1, \bar{x}_3, \bar{\Psi}(x_3)\} dx_3, \\ \{B_s^C, D_s^C, F_s^C\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu} \beta(x_3) \bar{f}(x_3) \{1, \bar{x}_3, \bar{\Psi}(x_3)\} dx_3, \end{aligned} \quad (IV.28c)$$

Dans lequel $\bar{x}_3 = x_3/h$ et $\bar{\Psi}(x_3) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)$.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons essayé de présenter une formulation hygrothermique générale pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une nouvelle théorie dite la *théorie de distribution de déformation de cisaillement hyperbolique* [Said et al 2014].

Par conséquent, le but de cette étude est d'étendre la théorie raffinée à quatre variables au comportement hygro-thermo-mécanique d'une plaque rectangulaire constituée de matériaux fonctionnellement gradués. Les coefficients de dilatation thermique, élastique et hygrique, de la plaque, sont considérés dans le sens de l'épaisseur. Les effets de nombreux paramètres, tels que la déformation de cisaillement transverse, le rapport d'aspect de la plaque, le rapport côté-sur-épaisseur, les distributions de la fraction volumique, la concentration hygrique, et les paramètres de la fondation élastique, sur le comportement structural sont étudiés en détail dans le chapitre suivant.

Références bibliographiques

A

[Ait Atmane, 2016]: **Ait Atmane**, “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, in press, 2016.

[AitYahia et al., 2015]: **AitYahia, S., AitAtmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1143 – 1165, 2015.

B

[Bahrami et noster 2007]: **A. Bahrami and A. Nosier**, 'Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates. *Int J Solids Struct*; **44**:8119–8142, 2007.

[Belabed et al., 2014]: **Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O.**, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283, 2014.

[Benachour et al., 2011]: **A. Benachour, H.D. Tahar, , H. Ait Atmane, A. Tounsi, and S.A. Meftah**, “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites*,” Part B **42** 1386–1394, 2011.

[Benkhedda et al 2008]: **A. Benkhedda, A. Tounsi and E.A. Addabedia**, “Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates,” *Compos Struct*; **82**:629–35, 2008.

[Bennoun et al., 2016]: **Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23(4)**, 423 – 431, 2016.

[Bessaim et al., 2013]: **Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., AddaBedia, E.A.**, “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15**, 671–703, 2013.

[Bouchafa et al., 2015]: **Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18(6)**, 1493 – 1515, 2015.

[Bouderba et al., 2013]: **Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.**, “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations,” *Steel Compos. Struct.***14 (1)** 85–104, 2013.

[Bourada et al., 2012]: **M. Bourada, , Tounsi, A., Houari, M.S.A. and AddaBedia, E.A.**, “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates,” *J. Sandw. Struct.Mater.***14 (1)** 5–33, 2012.

[Bourada et al., 2015]: **Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A.**, “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 409 – 423, 2015.

[Bousahla et al., 2014]: **Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A.**, “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082, 2014.

D

[Dai et al 2005]: **K. Y. Dai, G. R. Liu, X. Han and K. M. Lim**, “Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method,” *Computers & Structures*, **83(17-18)**, 1487 – 1502, 2005.

H

[Hamidi et al., 2015]: **Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A.**, “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235 – 253, 2015.

[Hebali et al., 2014]: **Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., AddaBedia, E.A.**, “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, 140, 374 – 383, 2014.

[Houari et al., 2013]: **Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O.**, “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 76, 467 – 479, 2013.

J

[Javaheri et Eslami 2002]: **R. Javaheri and M. R. Eslami**, “Thermal buckling of functionally graded plates,” *AIAA J.* **40** 162-168, 2002.

K

[Khalfi et al., 2014]: **Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.**, 'A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation,” *Int. J. Comput. Methods* **11 (5)** 1350077.

[Koizumi, 1993]: **M. Koizumi**, 'The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*' **34**, pp. 3-10,1993.

L

[Liu et Tani 1994]: **G. R. Liu and J. Tani**, “Surface-waves in functionally gradient piezoelectric plates,” *Journal of Vibration and Acoustics*, **116(4)**, 440 – 448, 1994.

[Liu et al 1999]: **G. R. Liu, X. Han and K. Y. Lam**, “Stress waves in functionally gradient materials and its use for material characterization,” *Composites Part B-Engineering*, **30(4)**, 383 – 394, 1999.

[Liu et al., 2001]: **G. R. Liu X. Han and K. Y. Lam**, “An integration technique for evaluating confluent hypergeometric functions and its application to functionally graded materials,” *Computers & Structures*, **79(10)**, 1039 – 1047, 2001.

[Liu et al., 2003]: **G. R. Liu, K. Y. Dai, X. Han and T. Ohyoshi**, “Dispersion of waves and characteristic wave surfaces in functionally graded piezoelectric plates,” *Journal of Sound and Vibration*, **268(1)**, 131 – 147, 2003.

[Lo et al., 2010]: **S. H. Lo, W. Zhen, Y. K. Cheung, and C. Wanji**, “Hygrothermal effects on multilayered composite plates using a refined higher order theory,” *Compos. Struct.* **92**, 633–646, 2010.

M

[Mahi et al., 2015]: **Mahi, A., AddaBedia, E.A., Tounsi, A.**, "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508, 2015.

P

[Patel et al, 2002]: **B. P. Patel, M. Ganapathi and D. P. Makhecha**, “Hygrothermal effects on the structural behavior of thick composite laminates using higher-order theory,” *Compos Struct*; **56**:25–34, 2002.

R

[Rao et Sinha 2004]: **V. V. S. Rao, and P. K. Sinha**, “Bending characteristic of thick multidirectional composite plates under hygrothermal environment,” *J. Reinf.Plast.Compos.* **23**, 1481–1495, 2004.

S

[Said et al., 2014]: **Said, A., Ameer, M., Bousahla, A.A. and Tounsi, A.**, “A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations,” *Int. J. Comput. Methods* **11 (6)** 1350098, 2014.

[Shen 2001]: **H. S. Shen**, “Hygrothermal effects on the post buckling of shear deformable laminated plates,” *Int. J. Mech. Sci.* **43**, 1259–1281, 2001.

[Suresh et Mortensen 1998]: **Suresh S, Mortensen A.** 'Fundamentals of functionally graded materials. London: Institute of Materials (IOM) Communications Limited; 1998.

T

[Tani et Liu 1993]: **J. Tani, and G. R. Liu**, “SH surface-waves in functionally gradient piezoelectric plates,” *JSME International Journal Series A-Mechanics and Material Engineering*, **36(2)**, 152 – 155, 1993.

[Tounsi et al., 2013]: **Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and AddaBedia, E.A.**, “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates,” *Aerosp. Sci. Technol.* **24 (1)** 209–220, 2013.

W

[Wang et al 2005]: **X. Wang, K. Dong, and X.Y. Wang**, “Hygrothermal effect on dynamic interlaminar stresses in laminated plates with piezoelectric actuators,” *Compos. Struct.* **71**, 220–228, 2005.

[Whitney et Ashton 1971]: **J.M Whitney and J.E. Ashton**, “Effect of environment on the elastic response of layered composite plates,” *AIAA J*; **9**:1708–13, 1971.

Z

[Zenkour AM. 2006]: **Zenkour AM.**, “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates,” *Appl Math Modelling*; **30**:67-84, 2006.

[Zenkour 2010]: **A.M. Zenkour**, “Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations,” *Compos.Struct.***93**, 234–238, 2010.

[Zidi et al., 2014]: **Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., AddaBedia, E.A., Anwar Bég, O.**, “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, 34, 24–34, 2014.

CHAPITRE V:

RESULTATS ET DISCUSSIONS

V.1 Introduction

Dans cette étude, on se propose d'analyser la flexion des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées et simplement appuyées, en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Des comparaisons sont faites avec les solutions qui existent dans la littérature. Afin de vérifier la précision de la présente analyse, on procède à la résolution de quelques exemples numériques. La première comparaison de la modélisation de la loi de puissance est faite avec les solutions d'élasticité disponibles dans la littérature. [Zenkour, 2006] et [Reddy, 2000] donnent des résultats numériques pour la flèche et contraintes transversales dans une plaque isotrope, avec une variation de la loi de puissance, et soumise à une charge sinusoïdale.

Les propriétés des matériaux fonctionnellement gradués sont données dans le tableau (V.1):

Propriétés	Metal: Titanium, Ti-6Al-4V	Ceramic: Zirconia, ZrO ₂
E (GPa)	70	380
v	0.3	0.3

Tableau V.1: Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque considérée.

V.2 Résultats numériques et discussions

Les tableaux (V.2) et (V.3) donnent la flèche et les contraintes transversales normalisées d'une plaque carrée fonctionnellement graduée, avec un rapport d'aspect $a/h = 10$. Dans cette étude, les résultats numériques pour le chargement mécanique sont représentés par les grandeurs adimensionnelles définies comme suit:

$$\begin{aligned}\bar{u}_3 &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} u_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), & \bar{S}_{11} &= \frac{h}{a q_0} S_{11} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \\ \bar{S}_{12} &= \frac{h}{a q_0} S_{12} \left(0, 0, -\frac{h}{3} \right), & \bar{S}_{13} &= \frac{h}{a q_0} S_{13} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right), \\ K_w &= k_w a^4 / D, & K_p &= k_p a^2 / D, & D &= E h^3 / 12 (1 - \nu^2).\end{aligned}$$

Les résultats sont donnés par la théorie généralisée des déformations de cisaillement [Zenkour, 2006], et aussi par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur [Reddy, 2000]. Les résultats concordent avec ceux de [Zenkour, 2006], et sont en parfaite harmonie avec ceux de [Reddy, 2000]. Cette théorie est considérée par de nombreux

chercheurs comme une méthode de référence [Birman et Byrd 2007, Zhang et al 2012, thaï et Choi 2013].

k	Theory	\bar{u}_3	\bar{S}_{11}	\bar{S}_{12}	\bar{S}_{13}
Céramic	(Zenkour 2006)	0.29600	1.99550	0.70650	0.24620
	Present	0.29604	2.02724	0.70678	0.23215
	% difference	- 0.01351	-1.59057	- 0.03963	5.70674
1	(Zenkour 2006)	0.58890	3.08700	0.61100	0.24620
	Present	0.58893	3.12645	0.61118	0.23215
	% difference	-0.00509	- 1.27793	- 0.02949	5.70674
2	(Zenkour 2006)	0.75730	3.60940	0.54410	0.22650
	Present	0.75718	3.63002	0.54432	0.21190
	% difference	0.01584	- 0.57128	- 0.04043	6.44591
3	(Zenkour 2006)	0.83770	3.87420	0.55250	0.21070
	Present	0.83717	3.86808	0.55278	0.19543
	% difference	0.06326	0.15796	- 0.05067	7.24727
4	(Zenkour 2006)	0.88190	4.06930	0.56670	0.20290
	Present	0.88102	4.03991	0.56710	0.18728
	% difference	0.09978	0.72223	- 0.07058	7.69837
5	(Zenkour 2006)	0.91180	4.24880	0.57550	0.20170
	Present	0.91080	4.20242	0.57585	0.18575
	% difference	0.10967	1.09160	- 0.06081	7.90778
6	(Zenkour 2006)	0.93560	4.42440	0.58030	0.20410
	Present	0.93452	4.36696	0.58075	0.18807
	% difference	0.11543	1.29825	- 0.07754	7.85399
7	(Zenkour 2006)	0.95620	4.59710	0.58340	0.20810
	Present	0.95521	4.53333	0.58378	0.19206
	% difference	0.10353	1.38717	-0.06513	7.70783
8	(Zenkour 2006)	0.97500	4.76610	0.58560	0.21240
	Present	0.97408	4.69925	0.58602	0.19645
	% difference	0.92000	1.40261	- 0.07172	5.56026
9	(Zenkour 2006)	0.99250	4.93030	0.58750	0.21640
	Present	0.99170	4.86294	0.58794	0.20059
	% difference	0.08060	1.36624	- 0.07489	7.30591
10	(Zenkour 2006)	1.0089	5.08900	0.58940	0.21980
	Present	1.00832	5.02282	0.58977	0.20424
	% difference	0.05748	1.30045	- 0.06277	7.07916
Métal	(Zenkour 2006)	1.60700	1.99550	0.70650	0.24620
	Present	1.57882	1.89911	0.70234	0.24229
	% difference	1.75357	4.83036	0.58881	1.58813

Tableau V.2: Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une plaque carrée FGM ($a/h = 10$, $b = a = 1$, $K_w = K_p = 0$, $q_0 = 1$, $T = C = 0$).

k	Theory	\bar{u}_3	\bar{S}_{11}	\bar{S}_{12}	\bar{S}_{13}
Ceramic	HSDT (Reddy2000)	0.294	1.98915	0.70557	0.23778
	Present	0.296044	2.02724	0.706783	0.232158
	% difference	-0.006952	-0.019148	-0.001719	0.023643
1	HSDT (Reddy2000)	0.58895	3.08501	0.61111	0.23817
	Present	0.588932	3.12645	0.611184	0.232157
	% difference	0.000030	-0.013432	-0.000121	0.025246
2	HSDT (Reddy2000)	0.75747	3.60664	0.54434	0.22568
	Present	0.757180	3.63002	0.544323	0.211909
	% difference	0.000382	-0.00648	0.000031	0.06102
5	HSDT (Reddy2000)	0.90951	4.24293	0.57368	0.21609
	Present	0.910803	4.20242	0.575857	0.185754
	% difference	-0.001421	0.04051	-0.003794	0.14038
Metal	HSDT (Reddy2000)	1.59724	1.98915	0.70557	0.23778
	Present	1.57882	1.89911	0.70234	0.242293
	% difference	0.01153	0.04526	0.00457	-0.01897

Tableau V.3 : Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une plaque FGM carrée ($a/h = 10$, $b = a = 1$, $K_w = K_p = 0$, $q_0 = 1$, $T = C = 0$).

Dans la seconde comparaison, des exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier la précision de la théorie actuelle pour prédire le comportement en flexion des plaques FGM, soumises à une charge sinusoïdale et un champ de température $T(x_1, x_2, x_3)$ avec une concentration hygrique $C(x_1, x_2, x_3)$. La théorie d'une plaque hyperbolique est présentée pour les petits déplacements et les petites déformations. Les propriétés des matériaux fonctionnellement gradués sont supposées être fonction de la température et de l'humidité. Les propriétés de ces matériaux sont prises en compte dans l'analyse, à la température de référence $T_0 = 25$ °C (température ambiante) et la concentration d'humidité $C_0 = 0$ %, comme cela est indiqué dans le tableau V.4.

Propriétés	Metal: Titanium, Ti-6Al-4V	Ceramic: Zirconia, ZrO ₂
E (GPa)	66.2	117.0
ν	1/3	1/3
α (10⁻⁶/C°)	10.3	7.11
β (10⁻⁶/K)	0.33	0

Tableau V.4: Les propriétés des matériaux utilisés dans la plaque de MGF

Dans la présente étude, les résultats numériques, pour les charges mécaniques et hygrothermiques, sont présentés comme des grandeurs adimensionnelles, définies comme suit:

$$\bar{u}_3 = \frac{10^2 D_c}{a^4 q_0} u_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \bar{S}_{11} = \frac{1}{10^2 q_0} S_{11} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right),$$

$$\bar{S}_{12} = \frac{1}{10 q_0} S_{12} \left(0, 0, -\frac{h}{3} \right), \quad \bar{S}_{13} = -\frac{1}{10 q_0} S_{13} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right).$$

$$K_w = k_w a^4 / D, \quad K_p = k_p a^2 / D, \quad D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2).$$

Les résultats numériques, obtenus à l'aide de la théorie raffinée des plaques à quatre variables, sont regroupés dans les tableaux V.5 et V.6. La corrélation existant entre la théorie raffinée des plaques à quatre variables et les différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est illustrée dans les tableaux V.5 et V.6. Ces deux tableaux donnent aussi les effets de l'exposant k de la fraction volumique et de la fondation élastique sur les déviations et les contraintes adimensionnelles des plaques rectangulaires FGM; l'effet des champs de température et d'humidité y est aussi illustré. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux prédits par SSDT et TSDT. On trouve que la théorie actuelle s'accorde parfaitement avec TSDT pour toutes les valeurs de la loi de puissance d'indice k , en présence ou en l'absence de la fondation élastique. Il est important de noter que les contraintes pour une plaque faite entièrement de céramique ne sont pas les mêmes que pour une plaque faite entièrement de métal avec des fondations élastiques, car la plaque en question est affectée par l'inclusion du champ de température. Le nombre de variables primaires dans cette théorie est même inférieur à celui des théories de déformation de cisaillement des plaques, d'ordre supérieur. Cette théorie donne la distribution parabolique des déformations de cisaillement transversal; elle satisfait aux conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces de la

plaque, sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement. On peut donc en conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi relativement simple et assez élégante pour prédire le comportement hygro-thermo-mécanique en flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués, reposant sur les fondations élastiques de Pasternak ou de Winkler.

k	K_w	K_p	Theory	\bar{w}	\bar{S}_{11}	\bar{S}_{12}	\bar{S}_{13}
ceramic	0	0	Present	1.80709	0.462270	1.55990	-0.41798
			TSDT	1.80712	0.47187	1.55982	-0.42955
			SSDT	1.80708	0.47200	1.55975	-0.44327
	100	0	Present	0.97215	-0.972148	0.852150	-0.01164
			TSDT	0.97216	-0.02740	0.85211	-0.01197
			SSDT	0.97216	-0.02740	0.85211	-0.01235
	0	100	Present	0.18860	-0.48723	0.18797	0.36968
			TSDT	0.18861	-0.49570	0.18806	0.37990
			SSDT	0.18861	-0.49588	0.18810	0.39206
	100	100	Present	0.17309	-0.49633	0.17482	0.37723
			TSDT	0.17309	-0.50498	0.17490	0.38766
			SSDT	0.17309	-0.50716	0.17495	0.40007
0.5	100	100	Present	0.18409	-0.50982	0.18292	0.43981
			TSDT	0.18410	-0.51975	0.18299	0.44334
			SSDT	0.18411	-0.51999	0.18301	0.45728
1	100	100	Present	0.18503	-0.50181	0.15622	0.43334
			TSDT	0.18504	-0.51450	0.15631	0.44545
			SSDT	0.18504	-0.51476	0.15635	0.45984
2	100	100	Present	0.18559	-0.48892	0.13438	0.42571
			TSDT	0.18560	-0.50336	0.13451	0.43831
			SSDT	0.18560	-0.50363	0.13461	0.45337
5	100	100	Present	0.18696	-0.47268	0.12340	0.42443
			TSDT	0.18696	-0.48940	0.12417	0.43754
			SSDT	0.18694	-0.48967	0.12431	0.45322
metal	100	100	Present	0.18842	-0.42280	0.12011	0.44680
			TSDT	0.18840	-0.43095	0.12087	0.45993
			SSDT	0.18840	-0.43117	0.12092	0.47465

Tableau V.5: Effets de l'exposant de la fraction volumique et des paramètres de la fondation élastique sur les déplacements et les contraintes adimensionnels, d'une plaque FGM rectangulaire ($a/h = 10$, $b = 3a$, $q_0 = 100$, $t_1 = t_3 = 0$, $t_2 = 10$, $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 100$).

k	K_w	K_p	Theory	\bar{w}	\bar{S}_{11}	\bar{S}_{12}	\bar{S}_{13}
ceramic	0	0	Present	2.54076	0.51588	2.20381	-0.41354
			TSDT	2.54076	0.52522	2.20374	-0.42454
			SSDT	2.54068	0.52552	2.20366	-0.43753
	100	0	Present	1.36683	-0.17281	1.20872	0.15777
			TSDT	1.36682	-0.17643	1.20877	0.16257
			SSDT	1.36680	-0.17649	1.20881	0.16834
	0	100	Present	0.26517	-0.81910	0.27488	0.69390
			TSDT	0.26518	-0.83500	0.27507	0.71354
			SSDT	0.26518	-0.83531	0.27519	0.73692
	100	100	Present	0.24336	-0.83190	0.25639	0.70452
			TSDT	0.24336	-0.84804	0.25658	0.72442
			SSDT	0.24337	-0.84835	0.25670	0.74816
0.5	100	100	Present	0.26194	-0.86236	0.28023	0.75161
			TSDT	0.26195	-0.87239	0.28034	0.81947
			SSDT	0.26196	-0.87282	0.28041	0.84586
1	100	100	Present	0.26330	-0.83867	0.23741	0.79871
			TSDT	0.26330	-0.86205	0.23762	0.82148
			SSDT	0.26330	-0.86252	0.23772	0.84866
2	100	100	Present	0.26396	-0.81483	0.20107	0.78289
			TSDT	0.26396	-0.84138	0.20133	0.80652
			SSDT	0.26395	-0.84185	0.20154	0.83484
5	100	100	Present	0.26603	-0.78678	0.18423	0.77849
			TSDT	0.26601	-0.81745	0.18459	0.80297
			SSDT	0.26600	-0.81792	0.18486	0.83230
metal	100	100	Present	0.26729	-0.77772	0.18167	0.79866
			TSDT	0.26774	-0.71656	0.18286	0.84003
			SSDT	0.26775	-0.71694	0.18298	0.86748

Tableau V.6: Effets de l'exposant de la fraction volumique et des paramètres de la fondation élastique sur les déplacements et les contraintes adimensionnels, d'une plaque FGM rectangulaire ($a/h = 10$, $b = 3a$, $q_0 = 100$, $t_1 = 0$, $t_2 = t_3 = 10$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 100$).

Les figures V.1 et V.2 illustrent la variation de la flèche centrale adimensionnelle u_3 en fonction des rapports côté-sur-épaisseur et d'aspect, a/h et b/a , respectivement. La flèche est maximale pour la plaque métallique et minimale pour la plaque en céramique, quelques soient

les valeurs de la température et d'humidité, et des paramètres de la fondation élastique. Il est clair que la flèche dans les plaques FGM se trouve quelque part entre celle d'une plaque en métal pur et celle d'une plaque en céramique pure. En outre, la flèche augmente en l'absence de fondations, et l'effet du paramètre d'humidité peut être moins important que celui de la première température.

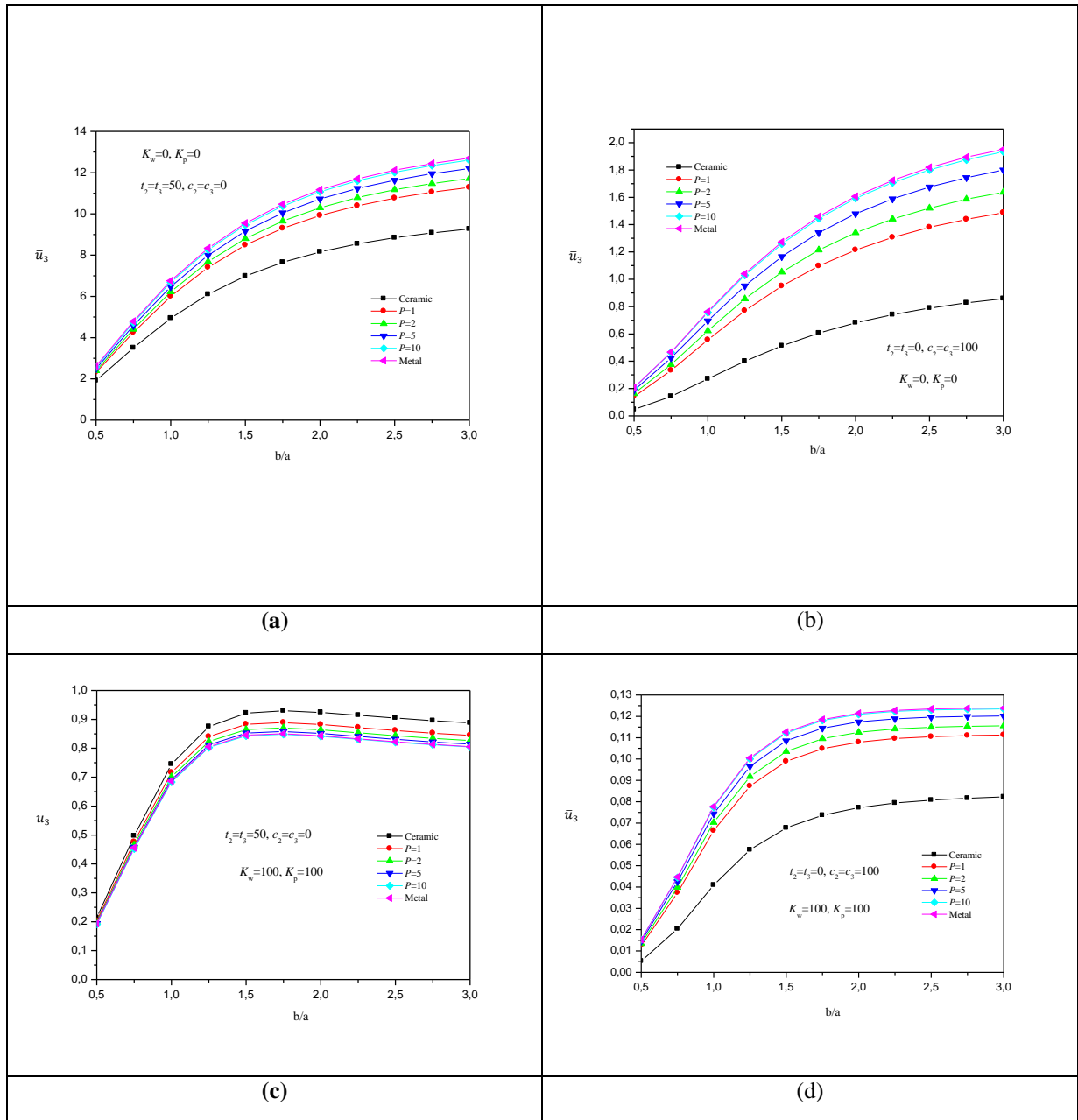


Figure V.1: La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport de coté de la plaque b/a pour la plaque FGM reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.

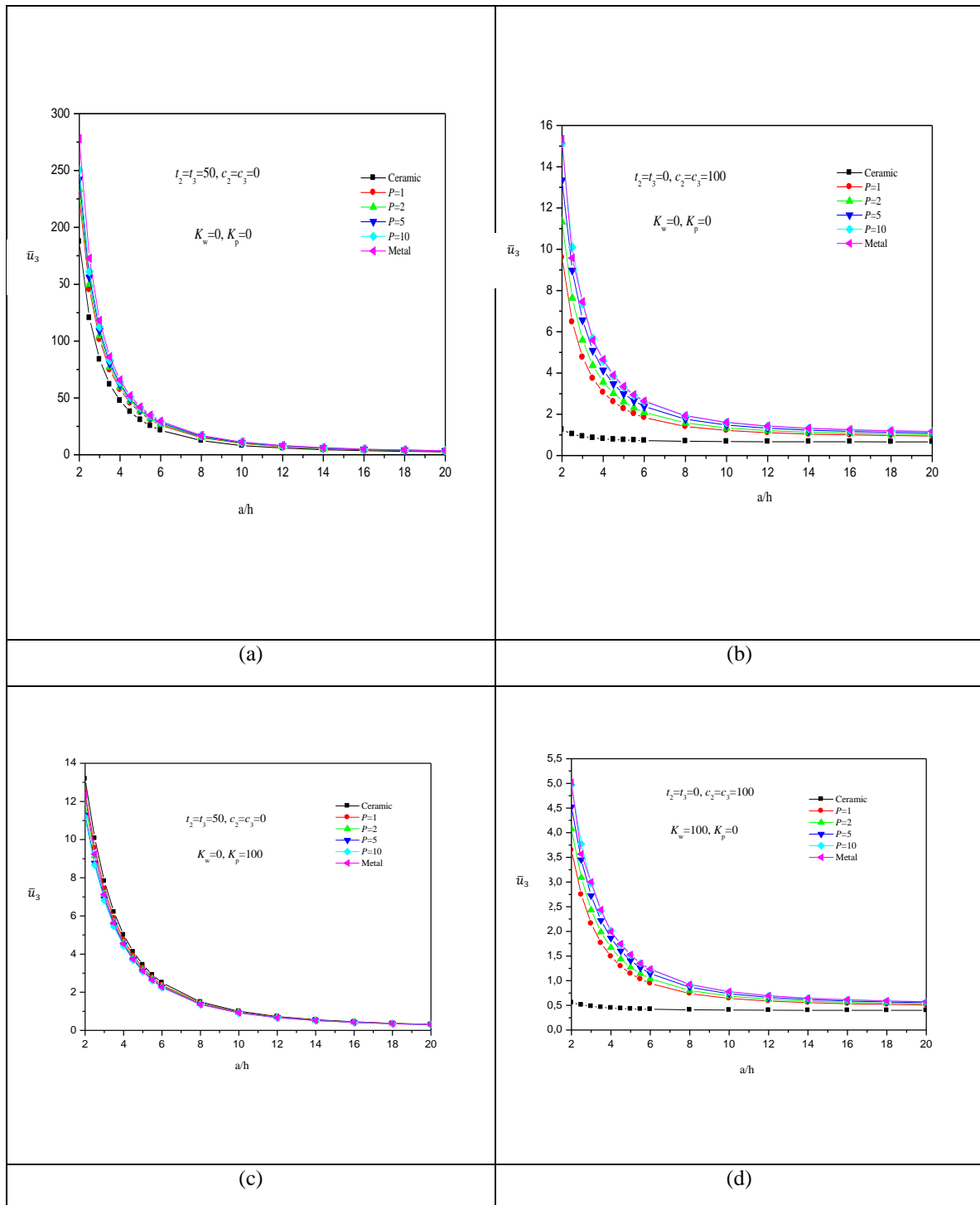


Figure V.2: La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport d'élancement a/h pour la plaque de FGM reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.

Tous les exemples ont été résolus numériquement, en utilisant le champ de la distribution sinusoïdale $\bar{\Psi}(x_3)$ dans le troisième terme des expressions de température et d'humidité de l'équation IV.12 (chapitre IV). Dans la présente étude, trois champs de distribution de

température et d'humidité (cubique, sinusoïdale et exponentielle) différents sont utilisés, respectivement, comme suit :

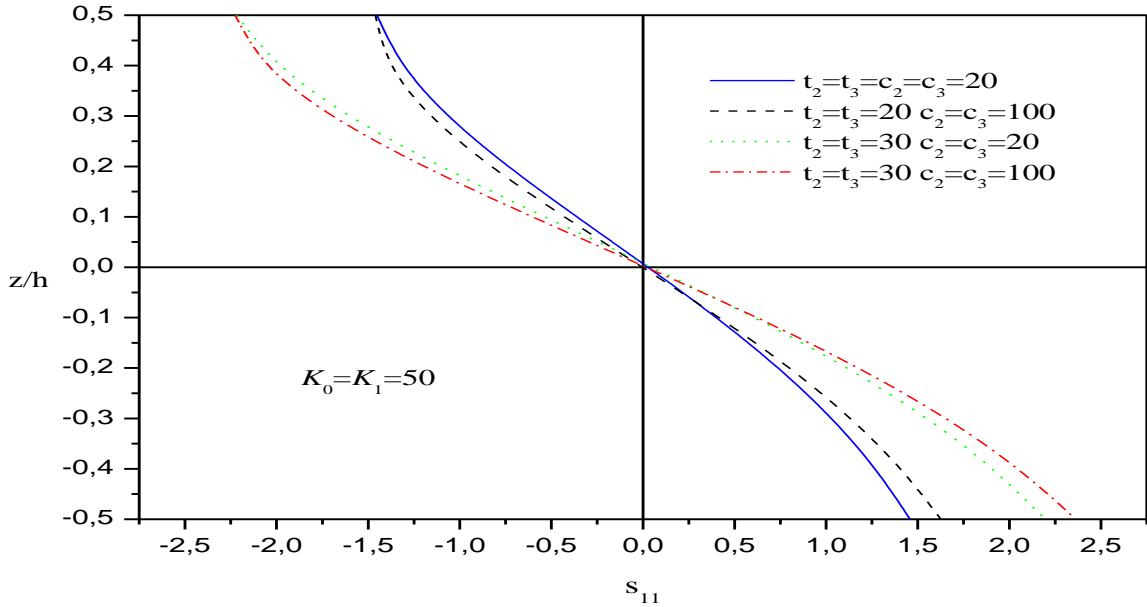


Figure V.3: Variation de la contrainte longitudinale adimensionnelle dans le plan (S_{11}) à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire de FGM sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.

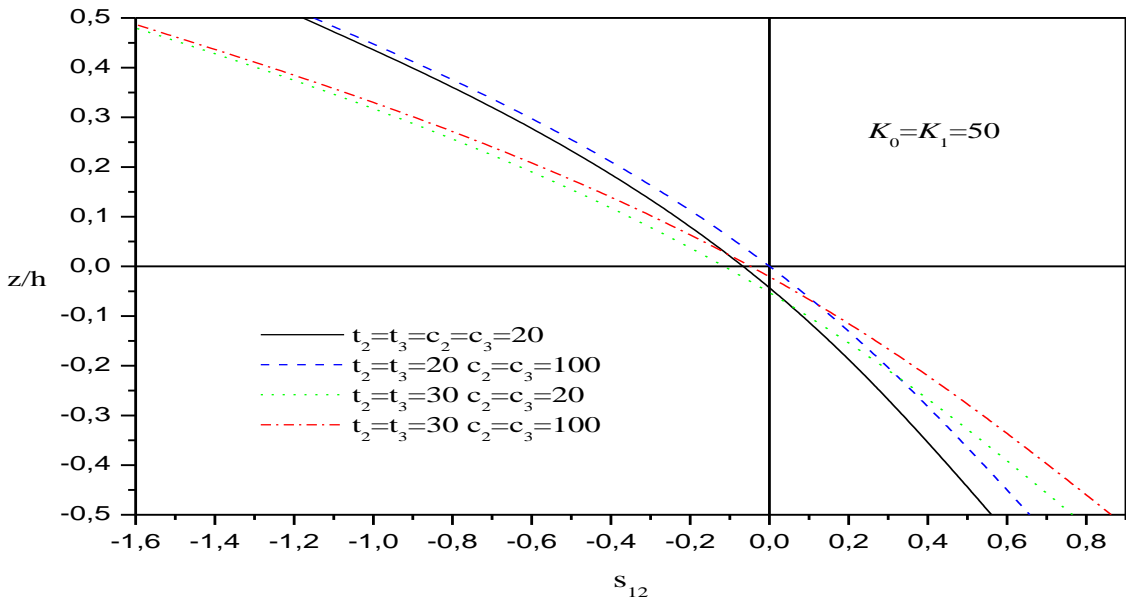


Figure V.4: Variation de contrainte tangentielle longitudinale adimensionnelle (S_{12}) à travers l'épaisseur d'une plaque rectangulaire de FGM sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.

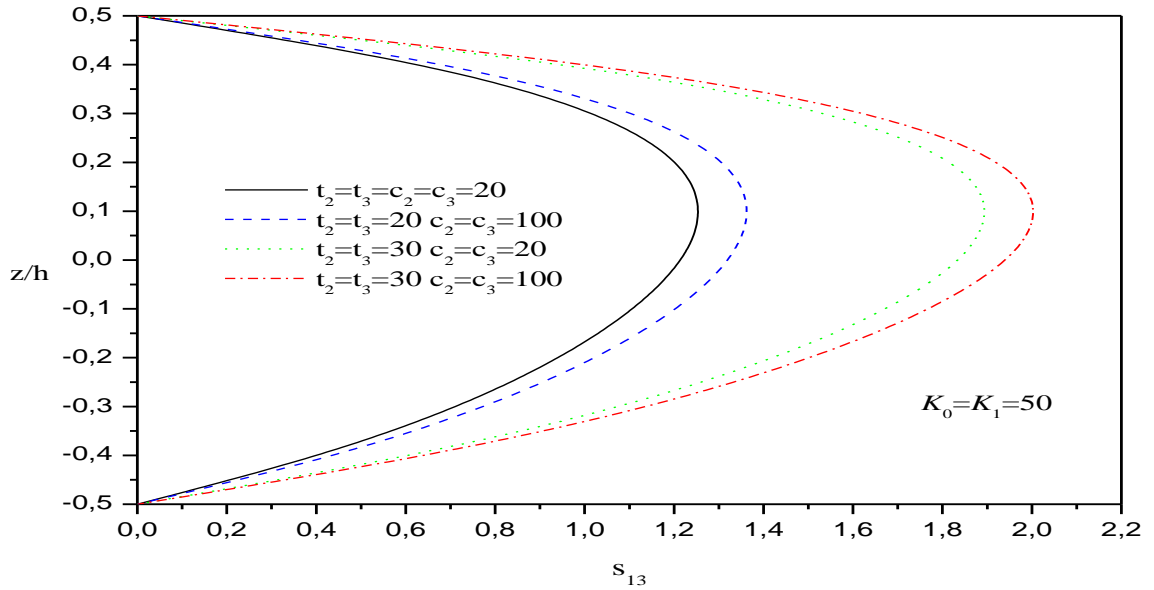


Figure V.5: Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle (S_{13}) à travers l'épaisseur de la plaque de FGM rectangulaire reposant sur les fondations élastiques pour différentes valeurs de taux d'humidité et de températures.

$$\bar{\Psi}(x_3) = z \left(1 - \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right)$$

$$\bar{\Psi}(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x_3}{h} \right)$$

$$\bar{\Psi}(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x_3}{h} \right)$$

Les figures de V.3 à V.5 montrent les distributions de la contrainte axiale adimensionnelle S_{11} , longitudinale tangentielle S_{12} et transversale de cisaillement (S_{13}), à travers l'épaisseur des plaques MFG rectangulaires, reposant sur des fondations élastiques, pour différentes valeurs d'humidité et de température, respectivement. Dans ces figures, on suppose que $q_0 = 100$ GPa, $a/h = 10$, $b/a = 3$, $k = 2$. Comme exposé dans les figures V.4 et V.5, les contraintes de compression maximales se produisent en un point de la surface supérieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface inférieure des plaques FGM. On peut voir que les contraintes de cisaillement augmentent avec les charges thermiques et hygriques, et la valeur maximale se produit en un point situé au-dessus du plan médian de la plaque faite de matériaux fonctionnellement gradués.

Les figures de V.6 à V.9 montrent la relation qui existe entre la flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 , la contrainte axiale S_{11} , la contrainte tangentielle longitudinale S_{12} , la contrainte de cisaillement transversal S_{13} et le rapport d'aspect b/a , pour trois distributions de champs de température et d'humidité différentes. Tous les résultats de la flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 , la contrainte axiale S_{11} , contrainte tangentielle longitudinale S_{12} et la contrainte de cisaillement transversal S_{13} sont similaires, avec une différence de 1,5 %. En outre, le champ de distribution sinusoïdale donne une valeur intermédiaire dans les cas de flèches et de contraintes. Le champ de distribution cubique donne des valeurs relativement élevées comparées à celles des deux autres champs de distributions, dans les cas de la flèche et de la contrainte tangentielle longitudinale. Par contre, dans les cas de la contrainte de cisaillement axial et transversal, la distribution exponentielle donne des valeurs relativement plus élevées que celles des deux autres distributions.

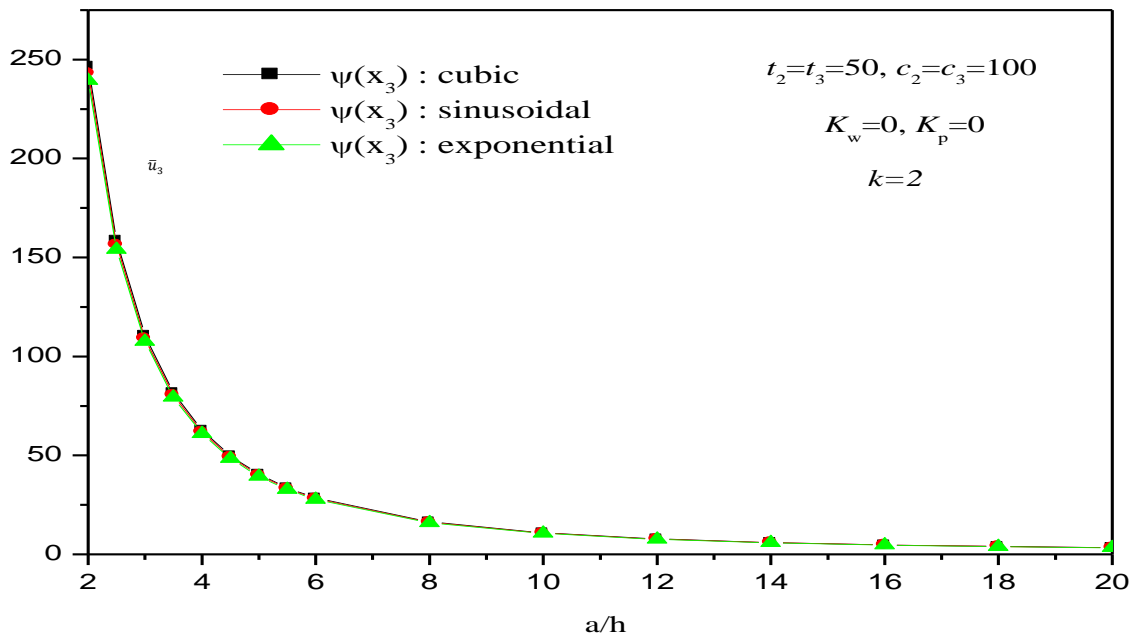


Figure V.6: La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport de l'éclancement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\psi(x_3)$.

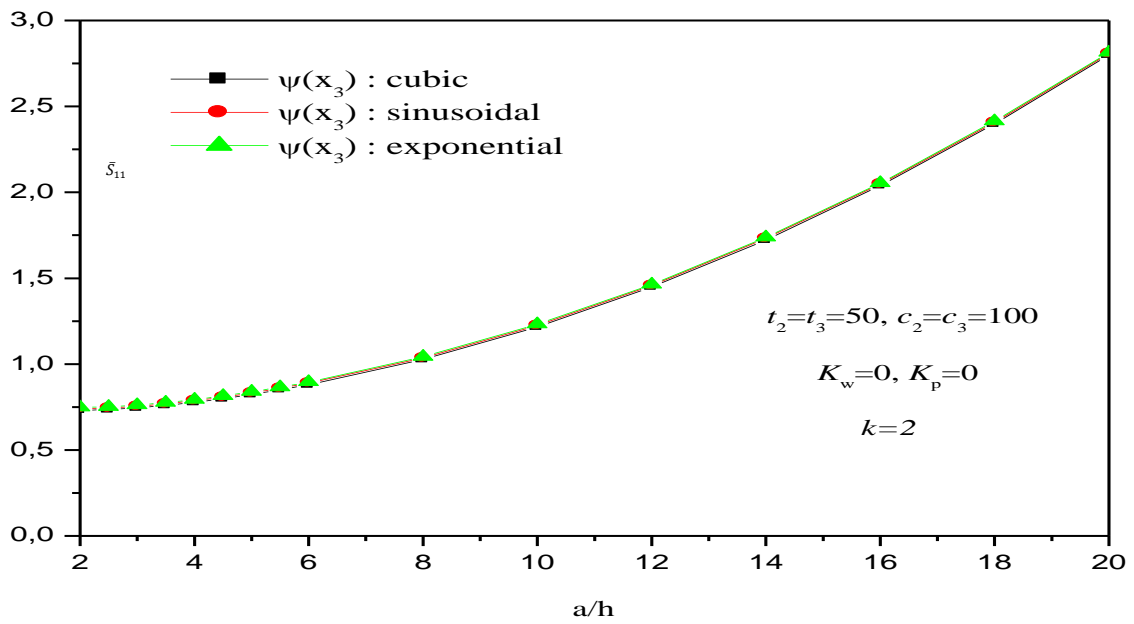


Figure V.7: La contrainte axiale adimensionnelle \bar{s}_{11} en fonction du rapport de l'élancement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.

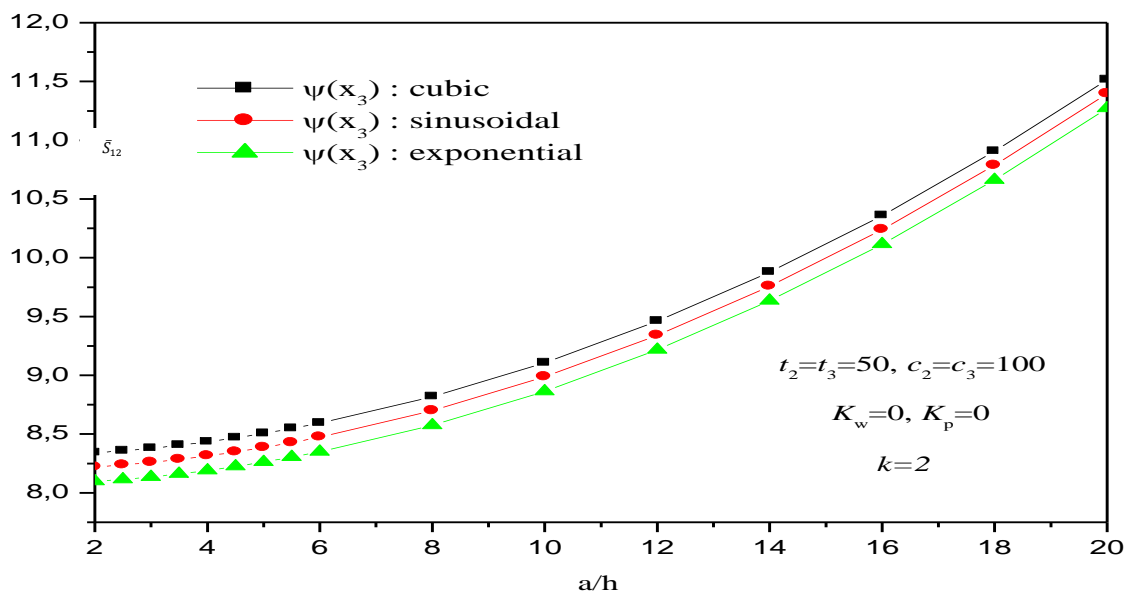


Figure V.8: La contrainte tangentielle longitudinale adimensionnelle \bar{s}_{12} en fonction du rapport de l'élancement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.

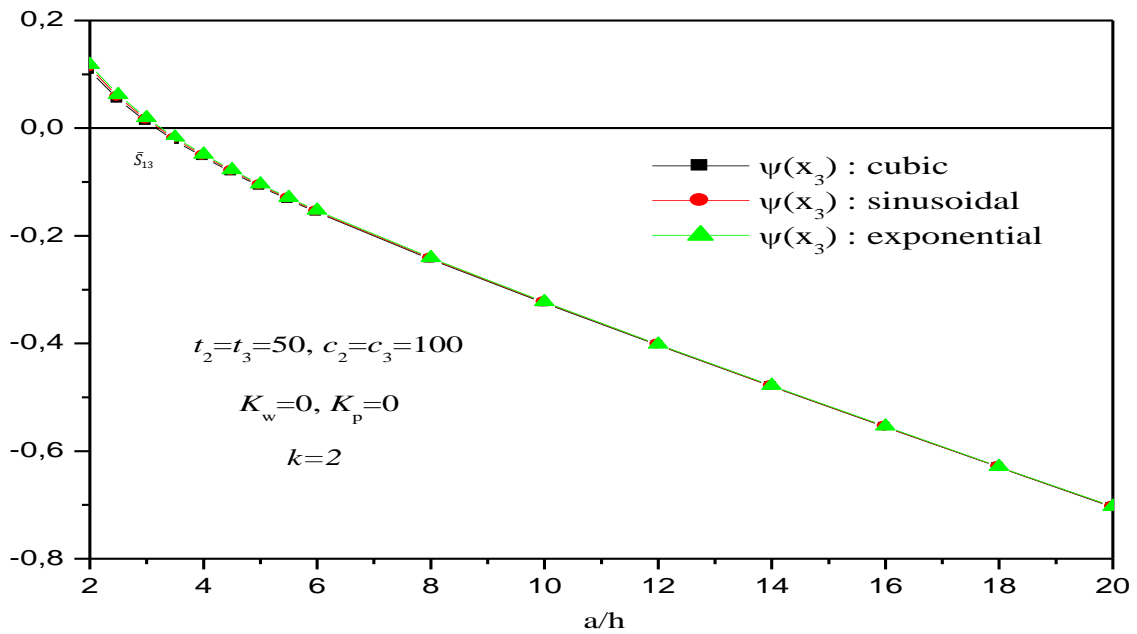


Figure V.9: La contrainte de cisaillement transversal adimensionnel \bar{S}_{13} en fonction du rapport de l'élanement a/h de la plaque rectangulaire FGM pour différentes distributions $\Psi(x_3)$.

Les relations entre la flèche centrale adimensionnelle u_3 , la contrainte axiale S_{11} , la contrainte tangentielle longitudinale S_{12} , la contrainte de cisaillement transversal S_{13} et le rapport de dimension b/a de la plaque, pour différents E_m/E_c , avec ou sans effets hygrothermiques, sont illustrés sur les figures V.10 à V.17.

La flèche, la contrainte de cisaillement transversal et axial augmentent avec le rapport de dimension b/a de la plaque. La flèche, et la contrainte de cisaillement transversal et axial sont maximales pour $E_m/E_c = 0,03$ et minimales pour $E_m/E_c = 1$, tel que montré sur les figures V.10, V.11, V.13 à V.15 et V.17.

En l'absence d'effets hygrothermiques, la contrainte tangentielle longitudinale augmente avec le rapport d'aspect b/a jusqu'à la valeur 1,75. Lorsque ce rapport b/a est supérieur à 1,75, la contrainte tangentielle longitudinale diminue lorsque le rapport d'aspect augmente, comme représenté sur la figure V.12.

Dans le cas où les effets hygrothermiques sont présents, la contrainte tangentielle longitudinale augmente avec le rapport de dimension b/a jusqu'à la valeur 1,0. Lorsque b/a est supérieur à 1,0, la contrainte tangentielle longitudinale diminue lorsque le rapport de dimension augmente.

Dans les deux cas, avec ou sans effets hygrothermiques, la contrainte tangentielle longitudinale est maximale pour $E_m/E_c = 1$ et minimale pour $E_m/E_c = 0,03$, comme indiqué sur les figures V.12 et V.16.

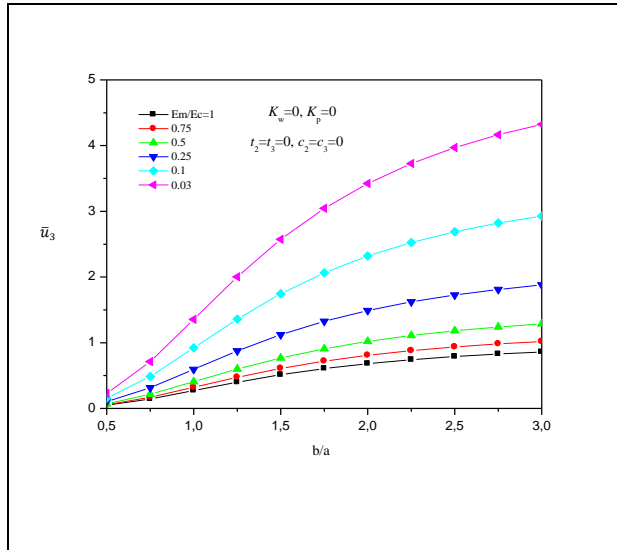


Figure V.10: La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

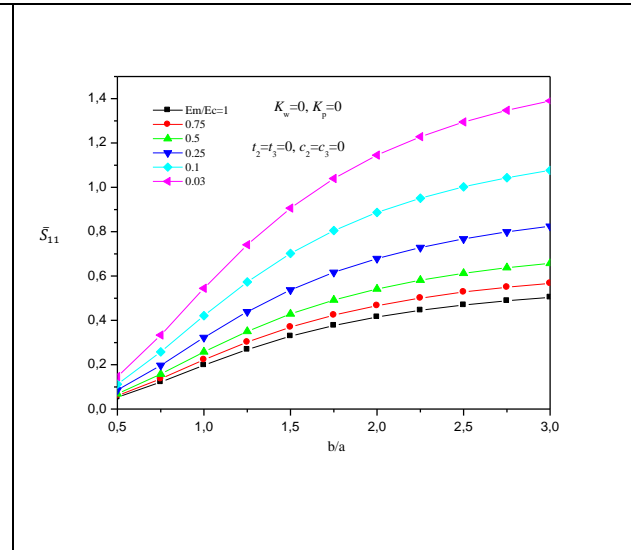


Figure V.11: La contrainte axiale adimensionnelle \bar{S}_{11} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

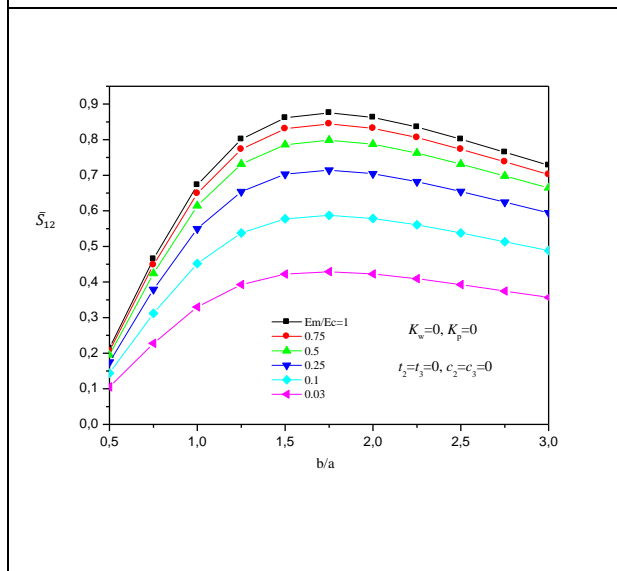


Figure V.12: Contrainte tangentielle adimensionnelle longitudinale \bar{S}_{12} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

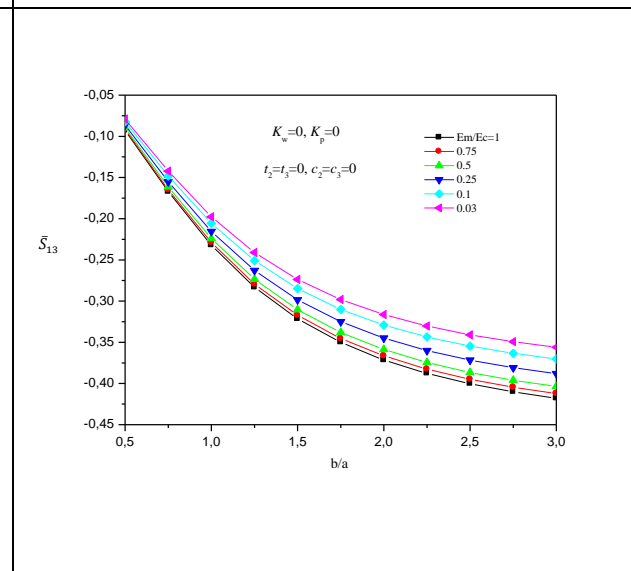


Figure V.13: Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle \bar{S}_{13} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

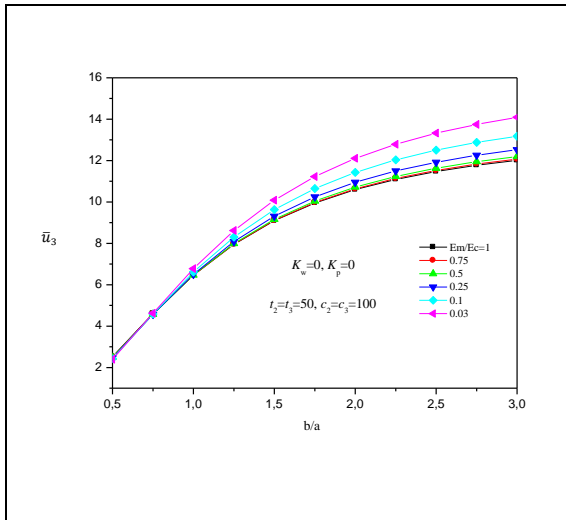


Figure V.14: La flèche centrale adimensionnelle \bar{u}_3 en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

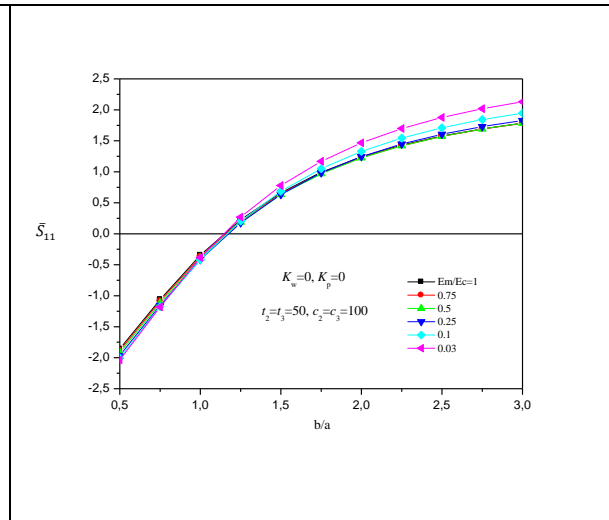


Figure V.15: La contrainte axiale adimensionnelle \bar{S}_{11} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

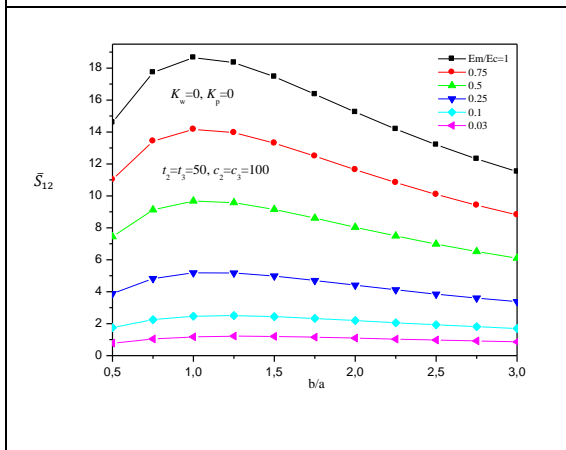


Figure V.16: Contrainte tangentielle adimensionnelle longitudinale \bar{S}_{12} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

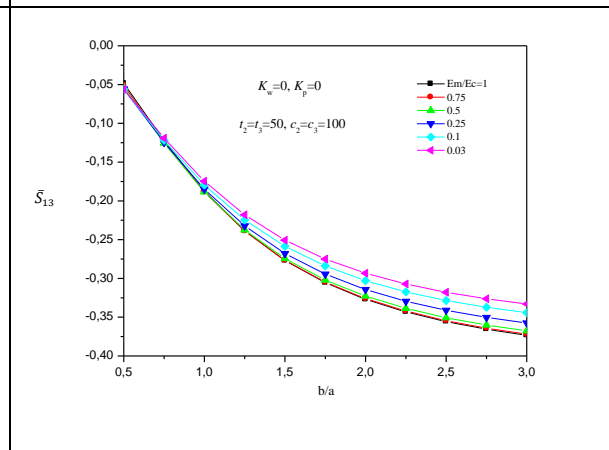


Figure V.17: Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle \bar{S}_{13} en fonction du rapport aspect de la plaque b/a pour plaque de FGM pour différents rapports E_m/E_c avec ($k = 2$, $a/h = 10$).

V.3 Conclusion

Dans le présent article, les comportements thermomécaniques de la plaque FGM sont étudiés, dans des conditions hygrothermiques environnementales. La plaque est décrite et discutée selon la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique. Les effets de la température et de la concentration d'humidité sur les propriétés du matériau y sont aussi discutés. Les déplacements et les contraintes adimensionnels sont aussi calculés pour des plaques faites d'un mélange céramique-métal.

En outre, des exemples illustratifs sont donnés, avec des conclusions assez importantes, i.e. les effets du paramètre de concentration d'humidité sur les comportements thermomécaniques des plaques fonctionnellement graduées sont considérablement différents. L'influence de la concentration hygrique ainsi que d'autres paramètres est très importante. La réponse en flexion de la plaque se détériore considérablement avec l'augmentation des concentrations de la température et de l'humidité.

B

[Birman and Byrd, 2007]: **Birman, V. and Byrd, L.W.**, “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures,” *Applied Mechanics Reviews*, **60(1-6)**, pp. 195-216, 2007.

R

[Reddy J.N. 2000], **Reddy J.N.** “Analysis of functionally graded plates” *Int J Numer Methods Eng*; **47(1-3)**:663-84, 2000.

T

[Thai et Choi, 2013]: **Thai, H.T. and Choi, D.H.**, “A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates,” *Composite Structures*, **101**, pp. 332 - 340.

Z

[Zenkour AM. 2006]: **Zenkour AM.**, “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates,” *Appl Math Modelling*; **30**:67-84, 2006.

[Zhang et al., 2012]: **Zhang, W., Hao, Y.X. and Yang, J.**, “Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped–clamped edges,” *Composite Structures*, **94 (3)**, pp. 1075-1086, 2006.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans une suite logique des travaux précédents menés au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'UDL de Sidi Bel Abbès. Dans le présent document, les comportements thermomécaniques de la plaque MFG sont étudiés, dans des conditions hygrothermiques environnementales. La plaque est décrite et discutée selon la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique. Les effets de la température et de la concentration d'humidité sur les propriétés du matériau y sont aussi discutés. Les déplacements et les contraintes adimensionnels sont aussi calculés pour des plaques faites d'un mélange céramique-métal.

En outre, des exemples illustratifs sont donnés, avec des conclusions assez importantes, les effets du paramètre de concentration d'humidité sur les comportements thermomécaniques des plaques fonctionnellement graduées sont considérablement différents. L'influence de la concentration hygrique ainsi que d'autres paramètres est très importante. La réponse en flexion de la plaque se détériore considérablement avec l'augmentation des concentrations de la température et de l'humidité. Les principaux points auxquels notre étude a permis d'aboutir sont les suivants :

- La flèche est maximale pour la plaque métallique et minimale pour la plaque en céramique, et ceci quelques soient les valeurs de la température, d'humidité et des paramètres de la fondation élastique. Il est évident que la flèche des plaques faites de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) se trouve quelque part entre les flèches des plaques faites de métal pur et de celles en céramique pure. En outre, la flèche augmente en l'absence de la fondation, et l'effet du paramètre d'humidité peut être plus faible que celui de la température.
- Tous les résultats de la flèche centrale adimensionnelle u_3 , la contrainte axiale S_{11} , la contrainte tangentielle longitudinale S_{12} et la contrainte de cisaillement transversal S_{13} ont des valeurs similaires avec toutefois une différence de 1,5 %. En outre, le champ de distribution sinusoïdale donne des valeurs intermédiaires pour la flèche et la contrainte. Le champ de distribution cubique donne des valeurs relativement plus élevées que celles des deux autres champs de distributions pour la flèche et la contrainte tangentielle longitudinale. Par contre, pour les contraintes de cisaillement axial et transversal, la distribution exponentielle donne des valeurs relativement plus élevées que celles des deux autres distributions.
- Les relations entre la flèche centrale adimensionnelle u_3 , la contrainte axiale S_{11} , la contrainte tangentielle longitudinale S_{12} , la contrainte de cisaillement transversal S_{13} et le rapport d'aspect b/a de la plaque, pour différents E_m/E_c , avec ou sans effets hygrothermiques, sont illustrés sur les figures V.10 à V.17. La flèche, les contraintes de cisaillement axial et

transversal augmentent avec le rapport d'aspect b/a de la plaque. La flèche, les contraintes de cisaillement axial et transversal sont maximales pour $E_m/E_c = 0,03$ et minimales pour $E_m/E_c = 1$, comme illustré sur les figures V.10, V.11, V.13, V.14, V.15 et V.17. Dans les cas où il n'y a pas d'effets hygrothermiques, la contrainte tangentielle longitudinale augmente avec le rapport d'aspect b/a jusqu'à la valeur 1,75. Cependant, lorsque le rapport b/a est supérieur à 1,75, la contrainte tangentielle longitudinale diminue lorsque le rapport d'aspect augmente, comme montré sur la figure V.13. En présence des effets hygrothermiques, la contrainte tangentielle longitudinale augmente lorsque le rapport d'aspect b/a augmente mais reste inférieur à 1,0. Cependant, lorsque ce rapport est supérieur à 1,0, la contrainte tangentielle longitudinale diminue quand le rapport d'aspect augmente. Dans les deux cas, avec ou sans effets hygrothermiques, la contrainte tangentielle longitudinale est maximale pour $E_m/E_c = 1$ et minimale pour $E_m/E_c = 0,03$, tel que c'est indiqué sur les figures 13 et 17.

- La présente théorie satisfait exactement les conditions aux limites des contraintes sur la surface haute et basse de la plaque. Les facteurs de correction de cisaillement transversal ne sont pas nécessaires, car une représentation correcte de contraintes de cisaillement transversal est donnée.
- Les propriétés matérielles de la plaque FGM (les coefficients élastiques, thermiques et d'expansion de l'humidité) varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple loi de puissance en fonction des fractions de volume des constituants. Des exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie, pour prévoir la réponse de flexion des plaques de MGF sous une charge sinusoïdale et un champ de température ainsi que la concentration de l'humidité.
- Les effets des propriétés des matériaux, de la température, l'humidité, rapport d'élanement de la plaque, rapport d'un côté à l'épaisseur, rapport des coefficients élastiques (céramique-métal) et les trois distributions pour la température et l'humidité ensemble sur les flèches et les contraintes, sont étudiés. Des déplacements et des contraintes adimensionnels sont calculés pour les plaques avec le mélange céramique-métal.

Les résultats obtenus dans le cadre de ce travail amènent à envisager plusieurs pistes de développements futurs.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier le problème de gauchissement, et l'utilisation de la nouvelle théorie dans d'autres cas de problèmes tel que les sandwichs [ATTIA A, 2011].