



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILALI LAIBES SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE

Présentée par:

AZAIZ FATIMA ZOHRA

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité: Electronique

Option: Commande Robuste et Traitement de Signal

COMMANDES H_{∞} ET μ -SYNTHESE
APPLIQUEES AUX ACTIONNEURS ELECTRIQUES

Directeur De Thèse:

Pr. BOUNOUA ABDENNACER

Soutenue devant le Jury

Président:

Mr. Mahdjoub Zoubir

Professeur

UDL, SBA

Directeur de Thèse:

Mr. Bounoua Abdennacer

Professeur

UDL, SBA

Examineurs:

Mr. Mansouri Abdellah

Professeur

UST, Oran

Mr. BenAbdellah Mohamed

Maitre de Conférence A

UST, Oran

Badr Eddine

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné courage et patience pour mener à bien ce travail

Je remercie Monsieur Bounoua Abdennacer, Professeur à l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je tiens à le remercier très vivement pour ses qualités pédagogiques. Son rôle, ses critiques constructives, ses précieux conseils et ses propositions qui m'ont permis de bien mener cette thèse. Je tiens à remercier très vivement Monsieur Mahdjoub Zoubir, Professeur au département d'électronique de l'université de Sidi Bel Abbes, d'avoir accepté la responsabilité de Président de Jury.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Mansouri Abdellah, Professeur à l'UST d'Oran pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail, en acceptant de le juger. Je tiens aussi à remercier vivement Monsieur BenAbdellah Mohamed Badr Eddine Maître de Conférence à l'USTO d'Oran, pour l'honneur qu'il m'a fait, en acceptant d'examiner et juger ce travail de these et je tiens à remercier tous mes enseignants au department d'Electronique, Faculté de Technologie, Université Djilali Liabes

Table de matières

Chapitre 1

Les problèmes et les objectifs de régulation

1.1. Introduction	1
1.2. Objectifs	1
1.2.1. Les fonctions de transfert	2
1.2.2. Les spécifications de conception	3
1.2.3. Sensibilité à une erreur de modèle en hautes fréquences	4
1.2.4. Sensibilité de la FTBF par rapport aux paramètres de la boucle ouverte	6
1.2.5. Synthèse d'une loi de commande	7

Chapitre 2

Transformation de Park

2.1. Introduction	9
2.2 Système triphasé équilibré	9
2.3 Le champ tournant	10
2.4. Les transformations matricielles	12
2.4.1 Transformation de Park	13
2.4.2 Couple d'une machine à champ tournant	15

Chapitre 3

Commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents

3.1 Introduction	17
3.2 Modèle de la machine synchrone à aimants permanents dans le repère dq	17
3.3 Découplage des courants i_d et i_q	19
3.4 L'onduleur de tension	22
3.5 Modélisation de l'onduleur	25

Chapitre 4

Etat de l'art de la commande de la machine synchrone à aimants permanents

4.1 Introduction	27
4.2 Contrôle de la machine MASAP par la méthode classique	27
4.2.1 Conception des régulateurs de courants	27
4.2.2 Conception du régulateur de vitesse	29
4.2.3 Simulation numérique	32

Chapitre 5

Outils d'analyse et de synthèse des systèmes asservis multivariables

5.1 Les systèmes linéaires	35
5.1.1 Introduction	35
5.1.2 Représentation d'état ou représentation interne	35
5.1.2.1 Analyse des modèles d'état	35
5.1.2.2 La représentation d'état d'un système	35
5.1.2.3 Commandabilité et observabilité	38
5.2 Les normes	41
5.2.1 Introduction	41
5.2.2 Définition	41
5.2.3 Normes d'un vecteurs	41
5.2.4 Normes induites de matrice	41
5.3 Les valeurs propres d'une matrice	42
5.3.1 Matrice Positive	43
5.4 Les valeurs singulières d'une matrice	43
5.4.1 Définition	43
5.4.2 Propriétés des valeurs singulière	44
5.5 Normes des signaux	44
5.5.1 Introduction	44
5.5.2 Espace L_1	44
5.5.3 L'espace L_2	45

5.5.4 L'espace L_∞	45
5.5 Normes de systèmes	46
5.5.1 Introduction	46
5.5.2 La norme H_2 d'un système	46
5.5.3 calcul de la norme H_2	46
5.5.4 calcul de la norme H_∞ d'un système	47
5.5.5 Norme H_∞ d'une matrice de transfert et valeurs singulières	48
5.5.6 Calcul de la norme H_∞ d'un système	49
5.2 Problèmes de commande H_∞	50
5.3 Stabilité Interne	54
5.4 Modélisation des systèmes incertains	57
5.4.1 Incertitude additive de modèle	57
5.4.2 Incertitude additive inverse de modèle	57
5.4.3 Incertitude multiplicative d'entrée de modèle	58
5.4.4 Incertitude multiplicative en sortie de modèle	59
5.4.5 Incertitude multiplicative inverse d'entrée	59
5.4.6 Incertitude multiplicative inverse de sortie	60
5.4.6 Incertitudes basées sur la factorisation première d'une matrice	61
5.5 Représentation des incertitudes de modèle par LFT	63
5.5.1 Représentation par LFT de l'incertitude additive de modèle	64
5.5.2 Représentation par LFT de l'incertitude additive inverse de modèle	65
5.5.3 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative d'entrée	66
5.5.4 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative de sortie	66
5.5.5 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative inverse d'entrée	67
5.5.6 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative inverse de sortie	67
5.6 Spécifications pour les systèmes bouclés multivariables	68
5.6.1 La stabilité	71

5.6.2 Performances du système bouclé	72
5.6.3 Etude de la Robustesse	73

Chapitre 6

Synthèse H_∞ des régulateurs dynamiques et μ -synthèse

6.1 Conception H_∞	76
6.2 Résolution du problème H_∞ par équations de Riccati	79
6.2.1 Solution H_∞ pour un système normalisé	79
6.2.2 Solution pour le système particulier	83
6.2.3 Normalisation du système	84
6.3 Fonctions de pondération	90
6.4 μ -analyse	94
6.4.1 Définition de la valeur singulière structurée	94
6.5 μ -synthèse	95
6.6 Commande robuste de la machine synchrone à aimants permanents	97
6.6.1 Introduction	97
6.6.2 Procédure de conception	98
6.6.2.1 La Commande vectorielle	98
6.6.2.2 Synthèse H_∞ du régulateur central de commande de vitesse	99
6.6.2.3 Analyse de la robustesse de stabilité et de performances	108
6.6.2.4 Simulation	115
Annexe	120

Résumé

La commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanent permet d'obtenir de hautes performances dynamiques. Toutefois la variation des paramètres mécaniques de la machine durant le fonctionnement affecte sévèrement la stabilité du système et peut entraîner un arrêt total du système. La commande vectorielle utilise des boucles imbriquées, la boucle externe étant celle de la vitesse et donc elle est vulnérable très sensible aux variations des paramètres mécaniques.

L'objectif du présent travail est d'améliorer les performances de la commande vectorielle en introduisant une structure basée sur la conception d'un régulateur H_∞ pour la boucle de vitesse. Une analyse fine et précise de la robustesse de la stabilité et de la robustesse de performances est effectuée à l'aide de la méthode de la valeur singulière structurée. Les régulateurs des boucles internes sont calculés à l'aide de méthodes traditionnelles.

INTRODUCTION

Les signaux et les lois de commande agissent sur le processus par l'intermédiaire des actionneurs. Des dispositifs assurent la liaison entre les actionneurs et les organes de puissance. De plus les actionneurs réalisent souvent la transformation du signal électrique représentatif de la loi de commande en une grandeur physique mécanique telle qu'une rotation. La plupart des actionneurs synchrones sont des moteurs à aimants permanents. On peut faire varier leur vitesse grâce à un asservissement particulier utilisant la notion d'autopilotage. On les qualifie parfois de moteur à courant continu sans balais "brushless motor". Généralement tout système de contrôle automatique inclut au moins un moteur électrique. Les entraînements électriques à vitesse variable sont aujourd'hui utilisés dans toutes les installations industrielles. L'émergence de tels types d'entraînements est à mettre en relation avec la croissance du coût de l'énergie. Le moteur synchrone à aimants permanents est utilisé aujourd'hui en concurrence avec le moteur à courant continu.

Le moteur synchrone à aimants permanents a une bonne réputation quand à ses performances de couple. C'est donc dans des secteurs où l'exigence de surcouple au démarrage que l'on rencontre le moteur synchrone à aimants permanents, citons:

- la traction
- les machines outils,
- les systèmes de levage-descente,
- la robotique,
- le positionnement de grande précision.

Le travail présenté ici se place dans le cadre de l'utilisation d'un servo-entraînement à vitesse variable en tant que système électromécanique utilisé dans un contexte exigeant un contrôle précis des mouvements.

Dans plusieurs cas d'applications industrielles, notamment dans le domaine des

machines outils, des laminoirs, des ascenseurs, de la robotique, etc, les servo-entraînements incluent inévitablement des éléments mécaniques qui introduisent des imperfections dans le système. La précision du contrôle de tels systèmes est toutefois liée à la bonne connaissance des paramètres électriques et des paramètres mécaniques de l'actionneur (moteur synchrone à aimants permanents). Ces derniers sont toutefois difficilement prévisibles a priori car ils dépendent normalement des conditions de fonctionnement qui peuvent varier dans de grandes proportions.

Ce travail de thèse est consacré à la synthèse d'une loi de commande robuste du moteur synchrone à aimants permanents avec des incertitudes paramétriques.

Le système asservi doit respecter les spécifications imposées par le cahier des charges telles que les spécifications fréquentielles et temporelles (marges de gain et de phase, réponse transitoire, erreur en régime permanent) mais surtout des spécifications de robustesse de stabilité et de robustesse de performance aux incertitudes paramétriques et aux perturbations externes au système.

La méthodologies de conception est basée sur la synthèse H_∞ pour le contrôle de la boucle externe.

Notre travail s'articule en plusieurs chapitres:

Le premier chapitre décrit les problèmes et les objectifs de régulation, le deuxième chapitre introduit la transformation de Park et le théorème de Ferraris. Le troisième chapitre basé sur le deuxième chapitre introduit la commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents. Les trois chapitres précédents sont indispensables pour aborder le quatrième chapitre qui introduit l'état de l'art de la commande de la machine synchrone à aimants permanents. Les outils d'analyse et de synthèse des systèmes multivariables sont abordés dans le cinquième chapitre. Le sixième chapitre présente la synthèse H_∞ , la μ -analyse et la μ -synthèse et s'achève par la synthèse de la commande robuste du moteur synchrone à aimants permanents, une analyse précise est obtenu grâce à l'utilisation de la μ -analyse.

Les problèmes et les objectifs de régulation

1.1. INTRODUCTION

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de régulation ou d'asservissement [54, 55, 57]. On définit la régulation et l'asservissement comme suit:

- Régulation: on désire que la sortie du système reste égale au signal de référence donné en dépit des perturbations qui peuvent survenir.
- Asservissement: la sortie du système suit une référence susceptible de varier, la sortie suit alors une trajectoire.

1.2. OBJECTIFS

Considérons la structure d'une boucle de régulation donnée par la figure 1.1.

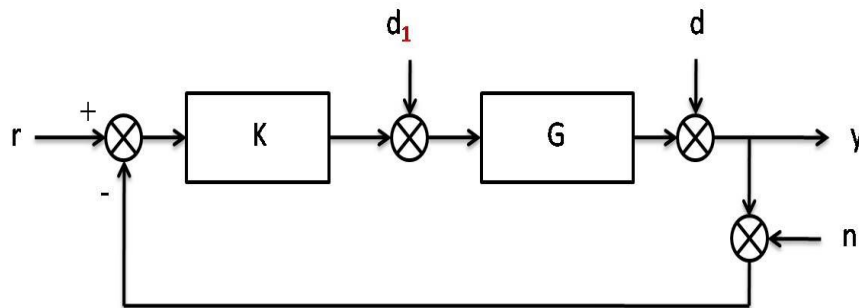


Fig. 1.1 Structure d'une boucle de régulation

- Le signal $r(t)$ est la référence ou consigne.
- Les signaux $d_1(t)$ et $d(t)$ sont les perturbations.
- Le signal $n(t)$ est le bruit de mesure.
- Le signal $y(t)$ est la grandeur de sortie.
- Le bloc $K(s)$ représente la fonction de transfert du régulateur ou contrôleur.
- Le bloc $G(s)$ représente la fonction de transfert du système à contrôler ou processus.

L'objectif à atteindre est que la sortie y du système en boucle fermée suive la référence r le mieux possible, sans s'en éloigner trop et assez rapidement, ceci

en dépit de la présence des perturbations d_1 , d , et du bruit de mesure n et avec des modèles dont les paramètres peuvent varier sur un intervalle donné.

Ceci nous conduit à considérer quatre grandes classes de performances:

1. La stabilité: condition nécessaire de fonctionnement du système. Si la stabilité n'est pas assurée, le système évolue en s'écartant du point d'équilibre jusqu'à atteindre la saturation.
2. Le rejet perturbation: concevoir une loi de commande capable d'atténuer toutes les perturbations et permet à la sortie de suivre la référence avec une grande précision.
3. Les performances dynamiques: elles caractérisent l'évolution de la sortie y lorsqu'on passe d'une consigne r_1 à une consigne r_2 et montrent comment la sortie y revient à sa position d'équilibre en présence des perturbations. Les performances dynamiques représentent un critère important de qualité.
4. La robustesse: nous devons concevoir une loi de commande qui permet à la sortie y de suivre la référence r et de rejeter les perturbations en dépit des variations de paramètres du système ou d'erreurs sur son modèle. On distingue la robustesse en stabilité et la robustesse en performances.

1.2.1. Les fonctions de transfert

On appelle fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) le produit:

$$L(s) = K(s)G(s) \quad 1.1$$

On désigne par fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) la fonction de transfert entre la référence r et la sortie y :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad 1.2$$

$Y(s)$ et $R(s)$ sont les transformées de Laplace de $y(t)$ et de $r(t)$ respectivement.

Les fonctions de transfert entre les entrées d_1 , d et la sortie y sont données par les expressions suivantes:

$$\frac{Y(s)}{D_1(s)} = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad 1.3$$

D_1 et $D(s)$ sont les transformées de Laplace des signaux $d_1(t)$ et $d(t)$ respectivement.

La fonction de transfert entre l'entrée n et la sortie y est donnée par:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad 1.4$$

$N(s)$ est la transformée de Laplace de $n(t)$.

Quand les signaux d'entrée agissent simultanément, la sortie y est obtenue en appliquant le théorème de superposition.

$$Y(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} R(s) + \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} D_1(s) + \frac{1}{1 + K(s)G(s)} D(s) - \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} N(s) \quad 1.5$$

1.2.2. Les spécifications de conception

Dans cette partie, on discute les spécification qui assurent au système en boucle fermée un certain nombre de propriétés.

a) Le projet de la réjection de perturbation est le suivant: il s'agit d'assurer pour les fonctions de transfert entre les perturbations d_1 , d , le bruit de mesure n et la sortie y , soit:

- une faible amplitude, on minimise l'influence des perturbations;
- un gain nul; on rejette asymptotiquement les perturbations;
- une amplitude nulle, on rejette totalement les perturbations.
- En général, on privilège une fonction de transfert en boucle fermée égale à l'unité en basses fréquence pour assurer une bonne précision statique et égale à zéro en hautes fréquences pour atténuer le bruit de mesure n .

b) La robustesse du système en boucle fermée sera mesurée par différents critères tels que la marge de phase et la marge de module.

c) Marges de stabilité: pour se prémunir d'une erreur de modèle qui fait passer le lieu de Nyquist réel à gauche du point $(-1, j0)$, on définit la marge de phase qui est une mesure de la stabilité relative. La marge de phase PM constitue donc une représentation à une seule dimension de la stabilité relative du système en boucle fermée. Elle est donnée par la relation suivante:

$$PM = \pi + \arg(L(j\omega_c)) \quad 1.6$$

où la fréquence critique ω_c est définie par:

$$|L(j\omega_c)|=1$$

La marge de module GM exprimé en dB est le second critère utilisé pour mesurer la stabilité relative du système en boucle fermée. Il est défini par:

$$GM_{dB} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{|L(j\omega_p)|} = -20\text{Log}_{10} |L(j\omega_p)|$$

Considérons le diagramme de Nyquist de $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ montré par la figure 1.2.

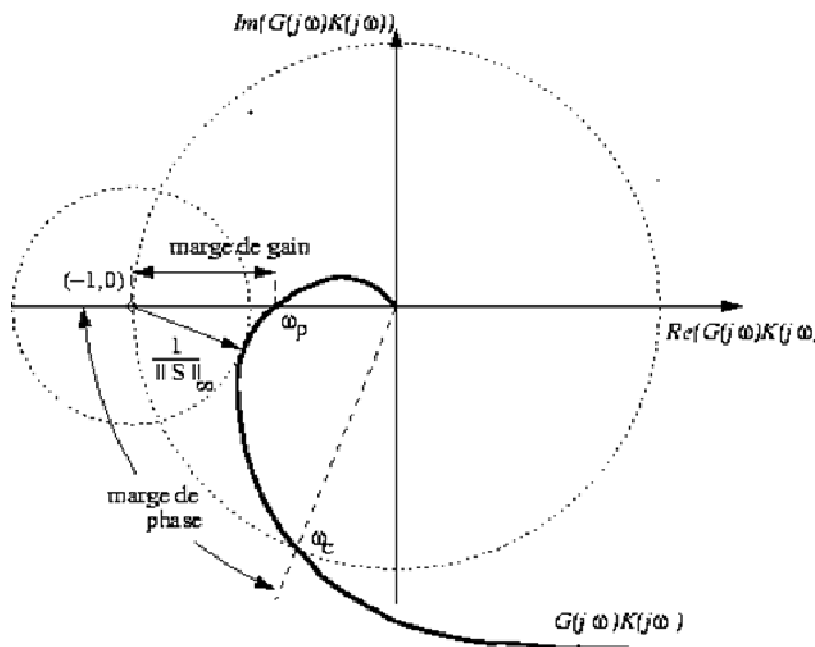


Fig. 1.2. Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte $L(j\omega)$

Plus la distance entre le lieu de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$ et le point -1 est grande plus le système en boucle fermée est robuste.

La figure montre que la marge de phase est l'angle de rotation que doit décrire le lieu de Nyquist afin qu'il intercepte le point $(-1, j0)$.

La marge de gain est la valeur en dB qu'il faut ajouter au gain de $G(j\omega)K(j\omega)$ pour que le lieu de Nyquist intercepte le point critique $(-1, j0)$.

La marge de module est le rayon maximal du cercle de centre $(-1, j0)$ qui ne coupe pas le lieu de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$.

1.2.3. Sensibilité à une erreur de modèle en hautes fréquences

Soit $L_n = K(j\omega)G_n(j\omega)$ la fonction de transfert en boucle ouverte nominale ou prévue, G_n est la fonction de transfert nominale du système à commander. $L = K(j\omega)G(j\omega)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte réelle ou effectivement réalisée. L'erreur est donnée par:

$$\Delta G = G - G_n$$

Le diagramme de Nyquist de $L_n(j\omega)$ nous montre l'interprétation graphique de la sensibilité à une erreur de modèle.

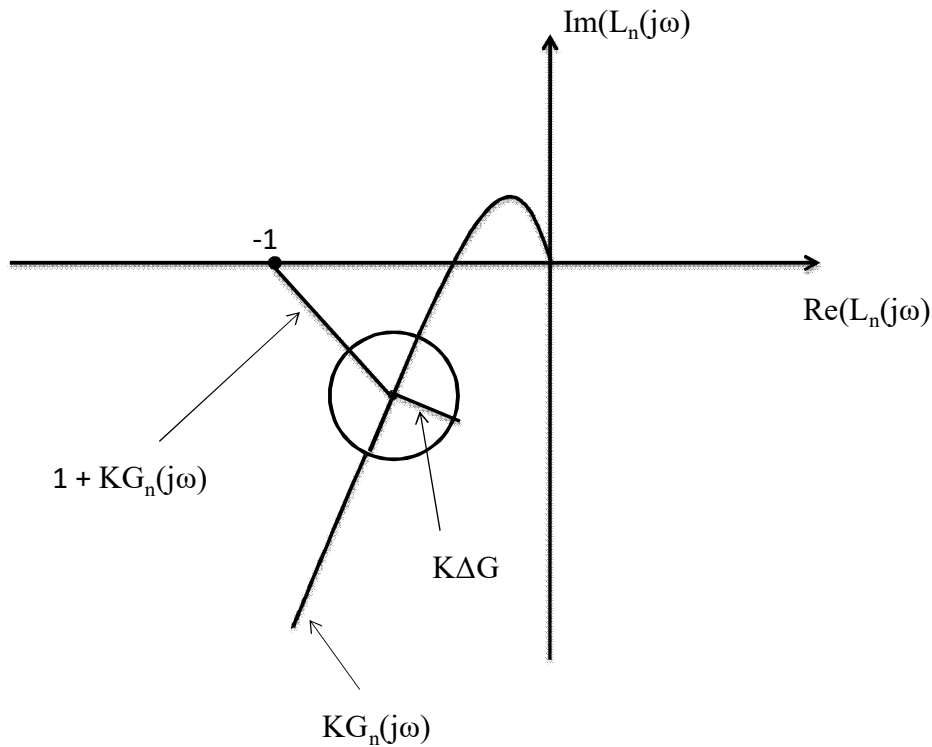


Fig. 1.3. Sensibilité à une erreur de modèle

Pour assurer la stabilité du système il faut éviter que le lieu de Nyquist réel n'entoure le point -1 , il suffit que le cercle centré sur $K(j\omega)G_n(j\omega)$ et de rayon $|K(j\omega)\Delta G(j\omega)|$ ne contienne le point -1 quelle que soit la valeur de ω .

Soit

$$\begin{aligned}
 |K(j\omega)\Delta G(j\omega)| &\leq |1 + K(j\omega)G_n(j\omega)| \\
 |\Delta G(j\omega)| &\leq \left| \frac{1 + K(j\omega)G_n(j\omega)}{K(j\omega)} \right| \\
 &\leq \left| \frac{(1 + K(j\omega)G_n(j\omega))G_n(j\omega)}{K(j\omega)G_n(j\omega)} \right| = \left| \frac{G_n(j\omega)}{1 + K(j\omega)G_n(j\omega)} \right|
 \end{aligned}$$

En résumé on trouve:

$$\Delta G(j\omega) \leq \left| \frac{G_n(j\omega)}{H_n(j\omega)} \right| \quad 1.7$$

avec $H_n(j\omega) = \frac{K(j\omega)G_n(j\omega)}{1 + K(j\omega)G_n(j\omega)}$ la fonction de transfert en boucle fermée du système nominale.

ce résultat est très intéressant car il relie l'erreur acceptable sur le modèle du système à commander $\Delta G(j\omega) = G(j\omega) - G_n(j\omega)$ aux performances désirées ($H_n(j\omega)$) par rapport aux performances du système non régulé $G_n(j\omega)$.

1.2.4. Sensibilité de la FTBF par rapport aux paramètres de la boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par:

$$H(j\omega) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Le but est de savoir comment une erreur sur un paramètre m de la fonction de transfert en boucle ouverte se traduit sur la fonction de transfert en boucle fermée H(s,m).

$$\frac{\delta H(s, m)}{\delta m} = \frac{\delta}{\delta m} \left(\frac{L(s, m)}{1 + L(s, m)} \right) = \frac{L'(s, m)(1 + L(s, m)) - L(s, m)L'(s, m)}{(1 + L(s, m))^2} = \frac{L'(s, m)}{(1 + L(s, m))^2}$$

$$\frac{\delta H(s, m)}{\delta m} = \frac{L(s, m)}{(1 + L(s, m))^2} \frac{L'(s, m)}{L(s, m)} = \frac{H(s, m)}{1 + L(s, m)} \frac{\delta L(s, m)/\delta m}{L(s, m)}$$

$$\frac{\delta H(s, m)/\delta m}{H(s, m)} = \frac{1}{1 + L(s, m)} \frac{\delta L(s, m)/\delta m}{L(s, m)}$$

d'où on obtient:

$$\frac{\Delta H(s)}{H(s)} = S \frac{\Delta L(s)}{L(s)} \quad S = \frac{1}{1 + L(s)}$$

La fonction $S(s)$ est la fonction de sensibilité de $H(s)$ par rapport à $L(s)$. Il est préférable d'avoir $|S(j\omega)|$ faible quelle que soit ω , mais $L(j\omega)$ doit être petit en hautes fréquences pour éliminer les bruits de mesure, on privilège en fait en général que $S(j\omega)$ soit faible en basses fréquence, c'est la garantie du gain statique en boucle fermée.

1.2.5. Synthèse d'une loi de commande

L'analyse des performances qui précède nous montre que les performances demandées par le cahier de charge peuvent se traduire par un gabarit fréquentiel dans lequel doit se situer la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$.

Afin de satisfaire les performances désirées (stabilité, rejet de perturbations, précision, bonnes performances dynamiques) d'une régulation, on doit avoir:

- $|L(j\omega)|$ grand en basses fréquences (rejet de perturbations, précision);
- $|L(j\omega)|$ faible en hautes fréquences (rejet des bruits de mesures);
- ω_{co} grand pour obtenir une vitesse de réponse rapide (temps d'établissement faible ($|L(j\omega_{co})| = 1$));
- La marge de phase PM assez grande pour garantir une bonne stabilité et un dépassement faible.

Ces spécifications sont illustrées par le gabarit fréquentiel de la figure 1.4.

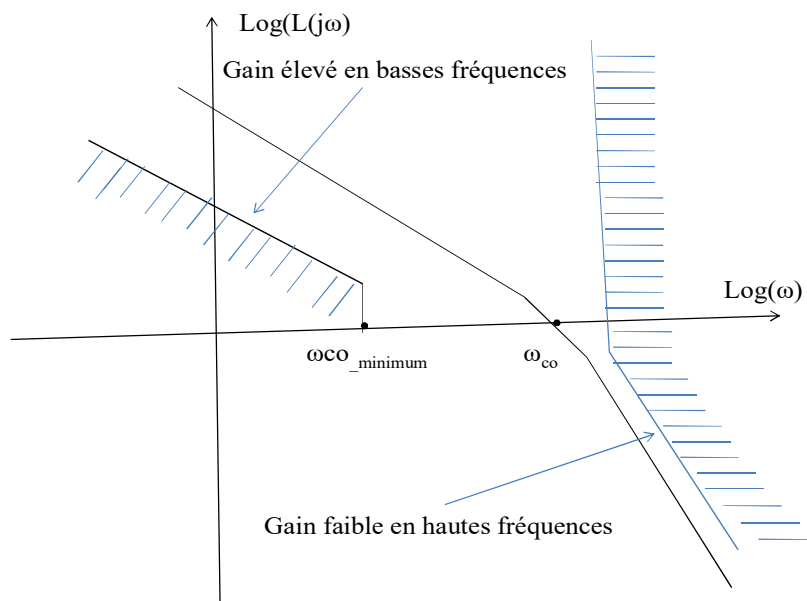


Fig. 1.4. Gabarit fréquentiel type pour une régulation

Il faut synthétiser le correcteur $K(s)$ qui mis en cascade avec la fonction de transfert du système à commander permettra à la fonction de transfert en boucle ouverte d'être à l'intérieur du gabarit fréquentiel.

Transformation de Park

2.1. Introduction

Ce chapitre introduit la notion de système triphasé équilibré, le champ tournant, le théorème de Ferraris et la transformation de Park [1, 58]. Ces notions permettent de modéliser la machine synchrone à aimants permanents.

2.2 Système triphasé équilibré

Considérons une charge triphasée alimentée par un système de tensions triphasé comme indiqué par la figure 2.1.

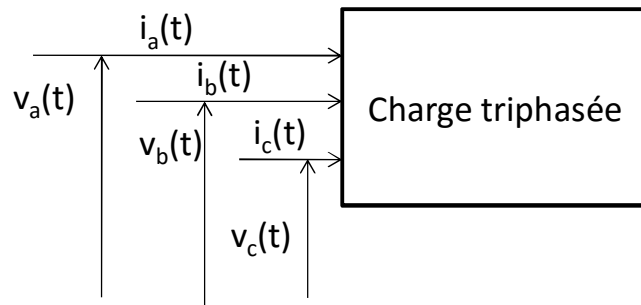


Fig. 2.1 Alimentation d'une charge triphasée

Pour la figure 2.1 on définit les grandeurs suivantes.

- Pour les tensions:

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= V\sqrt{2} \cos(\omega t) \\
 v_b(t) &= V\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 v_c(t) &= V\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Pour les courants, φ est le retard de phase.

$$\begin{aligned}
 i_a(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \\
 i_b(t) &= I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\
 i_c(t) &= I\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La relation suivante est vérifiée pour un système triphasé équilibré:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$$

2.3

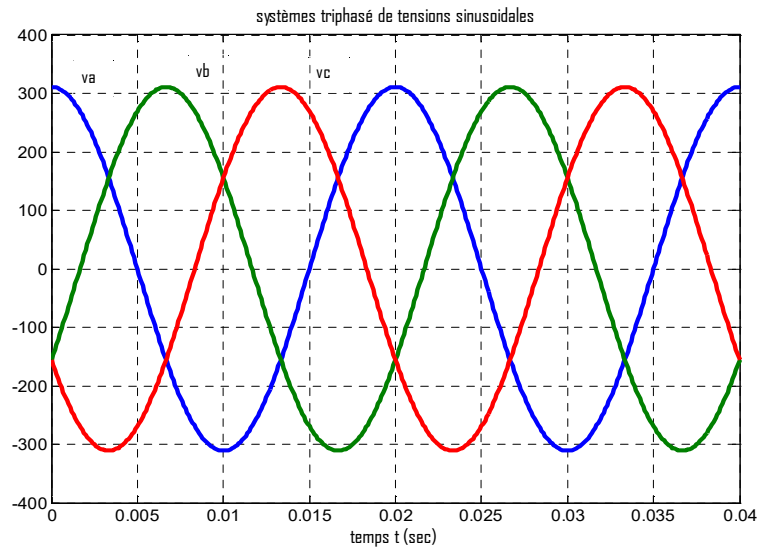


Fig.2.2 Système triphasé de tensions

2.3 Le champ tournant

Un moteur triphasé est constitué de la partie fixe; le stator alimenté par un système de tensions triphasées et la partie tournante: le rotor. Pour obtenir un couple moteur agissant sur un rotor, il faut créer un champ tournant dans un entrefer, généralement très réduit pour obtenir un effet très important sur le rotor. En pratique, on procède de la manière suivante: le stator alimenté par trois tensions triphasées déphasées de $2\pi/3$, crée un champ tournant dans l'entrefer.

On introduit sous forme de matrice colonne le vecteur v_{abc} et le vecteur i_{abc} définis par les expressions (2.1) et (2.2) respectivement:

$$v_{abc} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad 2.4$$

$$i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad 2.5$$

On introduit le flux par phase ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c , et donc le vecteur ϕ_{abc} est donné par:

$$\phi_{abc} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Pour la machine synchrone, on a la relation suivante:

$$v_{abc} = R i_{abc} + \frac{d}{dt} \phi_{abc} \quad 2.7$$

ou R est une matrice 3x3

$$R = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad 2.8$$

R_s est la résistance du bobinage d'une phase du stator. En général les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) &= 0 \\ v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) &= 0 \\ \phi_a(t) + \phi_b(t) + \phi_c(t) &= 0 \end{aligned} \quad 2.9$$

Considérons la figure 2.3 qui montre une représentation de trois bobinages placés à 120° et parcourus par un système triphasé de courants.

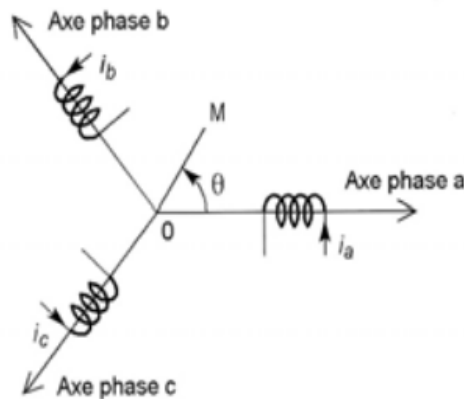


Fig. 2.3 Bobinages

La force magnétomotrice (f.m.m) $F_a(\theta, t)$ créée par le bobinage parcouru par le courant $i_a(t)$ au point $M(\theta)$ est donnée par l'expression:

$$F_a(\theta, t) = k i_a(t) \cos(\theta) \quad 2.10$$

De même la f.m.m $F_b(\theta, t)$ créée par le bobinage parcouru par le courant $i_b(t)$ au point $M(\theta)$ est donnée par l'expression:

$$F_b(\theta, t) = k i_b(t) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad 2.11$$

Enfin la f.m.m $F_c(\theta, t)$ créée par le bobinage parcouru par le courant $i_c(t)$ au point $M(\theta)$ est donnée par l'expression:

$$F_c(\theta, t) = k i_c(t) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad 2.12$$

Considérons un système triphasé équilibré direct de courants sinusoïdaux:

$$i_a(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$i_b(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_c(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Calculons la force magnétomotrice totale $F(\theta, t)$ obtenue au point M . En remplaçant les courants, on obtient:

$$\begin{aligned} F(\theta, t) &= F_a(\theta, t) + F_b(\theta, t) + F_c(\theta, t) \\ &= kI\sqrt{2} \left(\cos(\omega t) \cos(\theta) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$F(\theta, t) = \frac{3}{2} k I \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta)$$

L'expression de $F(\theta, t)$ correspond à une onde progressive en rotation ou champ tournant. Pour une machine de p paires de pôles, on introduit l'angle mécanique $\theta_m = \theta/p$, qui caractérise la rotation physique du champ magnétique, on obtient alors:

$$F(\theta, t) = \frac{3}{2} k I \sqrt{2} \cos(\omega t - p\theta_m)$$

La vitesse angulaire du champ tournant est alors donnée par:

$$\omega_m = \frac{\omega}{p} \quad 2.13$$

Le résultat donné par l'équation (2.13) constitue le théorème de Ferraris.

2.4. Les transformations matricielles

Une transformation consiste à faire correspondre à un vecteur i_{abc} un autre vecteur i selon une matrice de transformation:

$$i = T i_{abc} \quad \text{ou} \quad i_{abc} = T^{-1} i$$

2.4.1 Transformation de Park

La transformation de Park [1, 5]] est une transformation matricielle qui fait correspondre au vecteur $i_{abc} = [i_a \ i_b \ i_c]^T$ le vecteur $i_{odq} = [i_o \ i_d \ i_q]^T$. La matrice de transformation de Park est définie par:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad 2.14$$

Soit

$$i_{odq} = P i_{abc}$$

La transformée inverse de Park est:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad 2.15$$

soit

$$i_{abc} = P^{-1} i_{odq}$$

La matrice P est orthogonale, on a:

$$P^{-1} = P^T \quad P^T P = I$$

Si le système triphasé des tensions est équilibré direct, on a:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0, \quad v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0$$

Ce qui donne $i_o = 0$ et $v_o = 0$. Le vecteur courant est

$$i_{dqo} = \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$v_{dqo} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix}$$

$$\phi_{dqo} = \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_d \\ \phi_q \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_d \\ \phi_q \end{bmatrix}$$

La transformée de Park permet de simplifier l'expression de calcul des puissances et du couple moteur. La transformée de Park conserve la puissance instantanée.

Considérons l'équation d'une machine alimentée par un système triphasé de tensions équilibré:

$$v_{abc} = R i_{abc} + \frac{d}{dt} \phi_{abc}$$

On a: $v_{abc} = P^{-1} v_{odq}$, $i_{abc} = P^{-1} i_{odq}$, $\phi_{abc} = P^{-1} \phi_{odq}$, on remplace ces expressions dans l'équation précédente, on obtient:

$$P^{-1} v_{odq} = R P^{-1} i_{odq} + \frac{d}{dt} [P^{-1} \phi_{odq}]$$

On multiplie à gauche par P, on obtient:

$$v_{odq} = R i_{odq} + P \frac{d}{dt} [P^{-1} \phi_{odq}]$$

$$v_{odq} = R i_{odq} + P \frac{dP^{-1}}{dt} \phi_{odq} + P P^{-1} \frac{d\phi_{odq}}{dt} = R i_{odq} + P \frac{dP^{-1}}{dt} \phi_{odq} + \frac{d\phi_{odq}}{dt}$$

$$P \frac{d}{dt} P^{-1} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'expression de $(P dP^{-1}/dt)$ dans l'équation de v_{odq} , on obtient:

$$v_{odq} = \begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_d \\ \phi_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d\phi_o}{dt} \\ \frac{d\phi_d}{dt} \\ \frac{d\phi_q}{dt} \end{bmatrix}$$

La matrice R est donnée par l'expression:

$$R = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}$$

R_s est la résistance du bobinage d'une phase du stator. Enfin, on obtient les équations suivantes:

$$v_d = R_s i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \phi_q \quad 2.17$$

$$v_q = R_s i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \phi_d \quad 2.18$$

2.4.2 Couple d'une machine à champ tournant

La puissance instantanée est donnée par

$$P_{\text{int}} = v_d i_d + v_q i_q$$

Remplaçons dans l'équation de la puissance instantanée p_{int} , v_d et v_q par leur expressions données par les équations (2.17) et (2.18) respectivement. Ce qui donne:

$$P_{\text{int}} = R_s i_d^2 + \frac{d\phi_d}{dt} i_d - \frac{d\theta}{dt} \phi_q i_d + R_s i_q^2 + \frac{d\phi_q}{dt} i_q + \frac{d\theta}{dt} \phi_d i_q$$

Retirons de cette expressions les chutes de tensions dues aux résistances, on obtient la puissance électromagnétique p_e :

$$p_e = \frac{d\phi_d}{dt} i_d - \frac{d\theta}{dt} \phi_q i_d + \frac{d\phi_q}{dt} i_q + \frac{d\theta}{dt} \phi_d i_q$$

L'expression:

$q = \frac{d\phi_d}{dt} i_d + \frac{d\phi_q}{dt} i_q$ correspond à la puissance réactive. d'autre part, on a:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = p\omega_m \quad 2.19$$

où p est le nombre de paires de pôles de la machine et ω_m est la vitesse angulaire du rotor. Notons par T_e le couple électromagnétique. De la puissance électromagnétique il reste donc:

Chapitre 2

$$\begin{aligned} p_e &= -\frac{d\theta}{dt}\phi_q i_d + \frac{d\theta}{dt}\phi_d i_q = T_e \omega_m \\ &= -p\omega_m \phi_q i_d + p\omega_m \phi_d i_q = T_e \omega_m \\ &= -p\omega_m [\phi_q i_d - \phi_d i_q] = T_e \omega_m \end{aligned}$$

Ce qui donne la formule du couple électromagnétique:

$$T_e = -p[\phi_q i_d - \phi_d i_q] \quad 2.20$$

où p est le nombre de paires de pôles

Commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents

permanents

3.1 Introduction

La machine synchrone à aimants permanents (MSAP) autopilotée [1,2, 58] est beaucoup utilisée dans le domaine des servo-entraînements à vitesse variable de hautes précisions dynamiques. Cette machine remplace le moteur à courant continu dans le secteur industriel. Elle possède un flux rotorique constant, ce qui facilite la manipulation du couple électromagnétique. Les puissances sont comprises entre quelques centaines de watts à quelques dizaines de kilowatts. On distingue différents types de machines synchrones à aimants permanents: machines à pôles saillants (aimants enterrés ou à concentration de flux) et machines à pôles lisses. La figure 3.1 montre la structure d'une machine synchrone à aimants permanents à 2 paires de pôles.

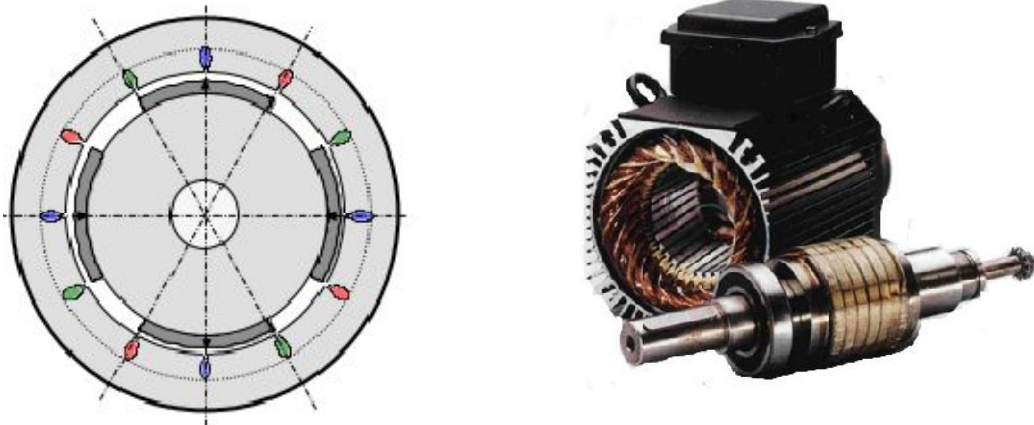


Fig. 3.1 MSAP aimants collés [56]

3.2 Modèle de la machine synchrone à aimants permanents dans le repère dq

Dans ce cas le référentiel utilisé est le champ tournant, donc les équations différentielles de la machine synchrone à aimants permanents sont exprimées dans le repère diphasé d-q lié au rotor comme indiqué dans la figure 3.2.

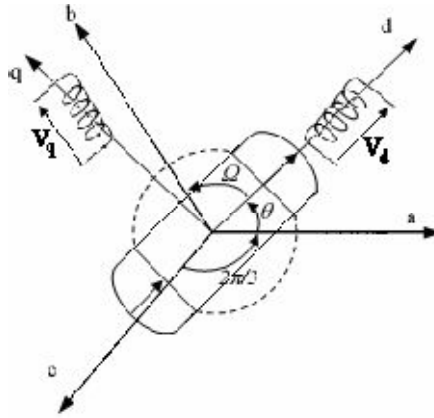


Fig. 3.2 La MSAP dans le repère d-q lié au rotor

La projection des grandeurs triphasées dans le repère d-q qui est lié au rotor, permet de définir une machine diphasée équivalente à la machine triphasée. Les enroulements sont disposés sur deux axes orthogonaux, l'axe d orienté dans le sens de l'induction magnétique, et l'axe quadrature q.

On distingue dans ce repère les éléments suivants:

- L_d : inductance du stator sur l'axe d, exprimé en Henry (H).
- L_q : inductance du stator sur l'axe q, exprimé en Henry (H).
- R_s : résistance d'enroulements statorique exprimée en Ω .
- p: nombre de paires de pôles.
- F: coefficient de frottement visqueux.
- J: inertie du rotor.

Le flux selon l'axe d ϕ_d et le flux selon l'axe q ϕ_q sont exprimés par les équations suivantes:

$$\phi_d = L_d i_d + \phi_f \quad 3.1$$

$$\phi_q = L_q i_q \quad 3.2$$

ϕ_f est le flux créé par les aimants permanents de la MSAP.

En supposant une répartition sinusoidale de l'induction magnétique et en négligeant les saturations dans le fer, on peut écrire les équations régissant le fonctionnement de la machine synchrone à aimants permanents dans le repère d-q. Remplaçons les expressions (3.1) et (3.2) de ϕ_d et ϕ_q dans les équations (2.17) et (2.18) respectivement, nous obtenons:

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega L_q i_q$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega L_d i_d + \omega \phi_f$$

Remplaçons dans l'équation (2.20) du couple les flux ϕ_d et ϕ_q par leur expressions données par (3.1) et (3.2), nous obtenons le couple électromagnétique en fonction des courants i_d et i_q :

$$T_e = p((L_d - L_q)i_d i_q + \phi_f i_q)$$

L'équation mécanique est obtenue en appliquant la loi de la dynamique au mouvement de rotation du moteur:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - F\omega_m - T_m$$

v_d , i_d sont la tension et le courant statoriques dans l'axe d.

v_q , i_q sont la tension et le courant statoriques dans l'axe en quadrature q.

T_e : couple électromagnétique en N.m.

ω_m : vitesse angulaire du rotor en rad/sec.

T_m : couple mécanique de charge en N.m.

F: coefficient de frottement visqueux.

En résumé, le modèle de la machine synchrone à aimants permanents est décrit par le système d'équations (3.3). Il est représenté par une partie électrique: équations des tensions v_d et v_q et une partie mécanique: l'équation mécanique.

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega L_q i_q$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega L_d i_d + \omega \phi_f$$

$$e_q = -\omega L_q i_q$$

$$e_d = \omega L_d i_d + \omega \phi_f$$

$$T_e = p((L_d - L_q)i_d i_q + \phi_f i_q)$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - F\omega_m - T_m$$

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\omega = p\omega_m$$

3.3

3.3 Découplage des courants i_d et i_q

Le système d'équations (3.3) nous montre que les expressions de v_d et v_q dépendent des courants i_d et i_q et de la fréquence ω . Ceci constitue un système multivariable (MIMO) deux entrées v_d et v_q et deux sorties i_d et i_q , fortement couplé.

Pour découpler l'évolution des courants i_d et i_q par rapport aux commandes et transformer le système MIMO en deux systèmes monovariables (SISO), on utilise les termes de compensation e_d et e_q définis par le système d'équations (3.3).

A partir des équations de v_d et v_q données par (3.3), on peut écrire:

$$v_{d0} = v_d - e_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} \quad 3.4$$

$$v_{q0} = v_q - e_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} \quad 3.5$$

En considérant les nouvelles entrées v_{d0} et v_{q0} , on peut définir à partir des équations (3.4) et (3.5) deux systèmes monovariables indépendants:

$$\frac{i_d(s)}{v_{d0}(s)} = \frac{1}{R_s + sL_d} \quad 3.6$$

$$\frac{i_q(s)}{v_{q0}(s)} = \frac{1}{R_s + sL_q} \quad 3.7$$

La commande vectorielle consiste à manipuler le flux par une composante du courant et le couple par la seconde composante. La stratégie à mettre en place consiste à maintenir le courant selon l'axe d, i_d à zéro. Ceci produit un flux ϕ_d (eq. 3.1) égal au flux produit par les aimants permanents: $\phi_d = \phi_f$. Dans ce cas le flux de réaction d'induit est en quadrature avec le flux ϕ_d . L'expression du couple électromagnétique devient:

$$T_e = p\phi_f i_q \quad 3.8$$

Puisque le flux ϕ_f est constant, le couple électromagnétique sera directement contrôlé par le courant i_q . Pour contrôler les courants i_d et i_q , on doit faire la synthèse de deux régulateurs K_d et K_q .

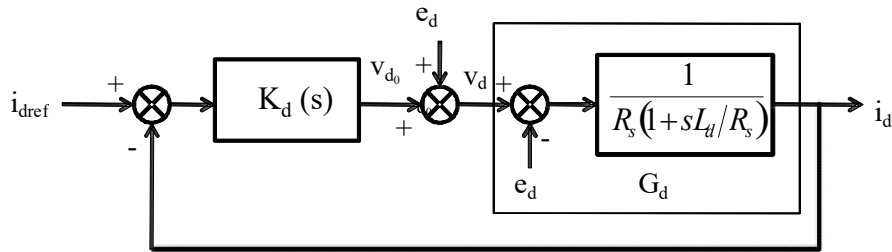


Fig. 3.3 Régulation du courant i_d

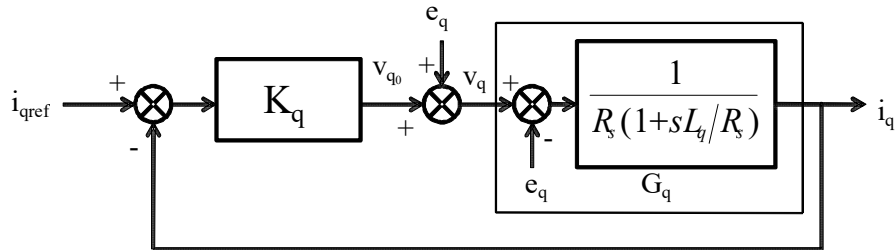


Fig. 3.4 Régulation du courant i_q

Il faut noter que les sorties des régulateurs K_d et K_q fournissent seulement les tensions v_{d0} et v_{q0} . Pour obtenir les tensions réelles v_d et v_q , il faut ajouter le terme de compensation e_d à la sortie du régulateur K_d et e_q à la sortie du régulateur K_q comme indiqué par les figures 3.3 et 3.4.

Enfin, on doit faire la synthèse du régulateur de la vitesse de rotation ω_m du moteur. A partir de l'équation mécanique:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - F\omega_m - T_m$$

on obtient le système suivant dans le domaine de Laplace

$$\omega_m = \frac{1}{Js + F} T_e - \frac{1}{Js + F} T_m \tag{3.9}$$

Le couple de charge est considéré comme une perturbation. Le modèle du système mécanique est donné par la fonction de transfert:

$$\frac{\omega_m}{T_e} = \frac{1}{Js + F} \tag{3.10}$$

La régulation de la vitesse de rotation est indiquée par la figure 3.5.

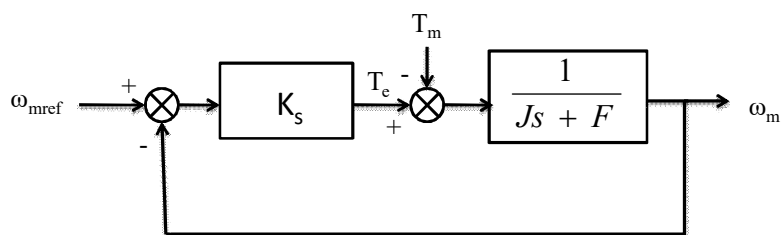


Fig. 3.5 Régulation de la vitesse de rotation

Le régulateur de vitesse K_s fournit à sa sortie le couple électromagnétique T_e ou la référence i_{qref} à la boucle de courant i_q .

L'avantage de la stratégie de commande qui fixe le courant direct i_d à zéro est que le modèle de la machine synchrone à aimants permanents est transformé en deux modèles SISO indépendants. Le principe de la commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents est illustré dans la figure 3.6.

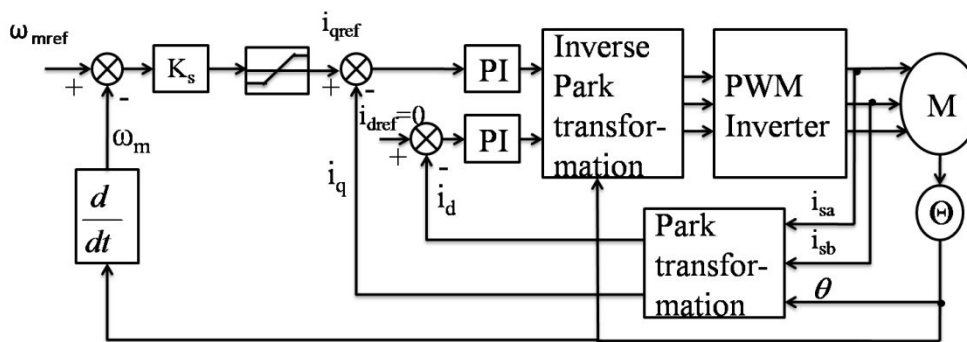


Fig. 3.6 Commande vectorielle de la MSAP

3.4 L'onduleur de tension

Un onduleur est un convertisseur continu-alternatif [1, 56]. il permet de générer une tension alternative à partir d'une tension continu, en vue d'alimenter une charge alternative (moteur alternatif). Un onduleur triphasé est formé par trois bras ou demi-ponts monophasés comme indiqué par la figure 3.7. L'onduleur triphasé fonctionnant en modulation de largeurs d'impulsions MLI est utilisé pour alimenter à tension et à fréquence variables des machines triphasées telles que les moteurs synchrones et asynchrones. Dans un onduleur à MLI chaque alternance de la tension de sortie est constituée par plusieurs créneaux de largeur convenable.

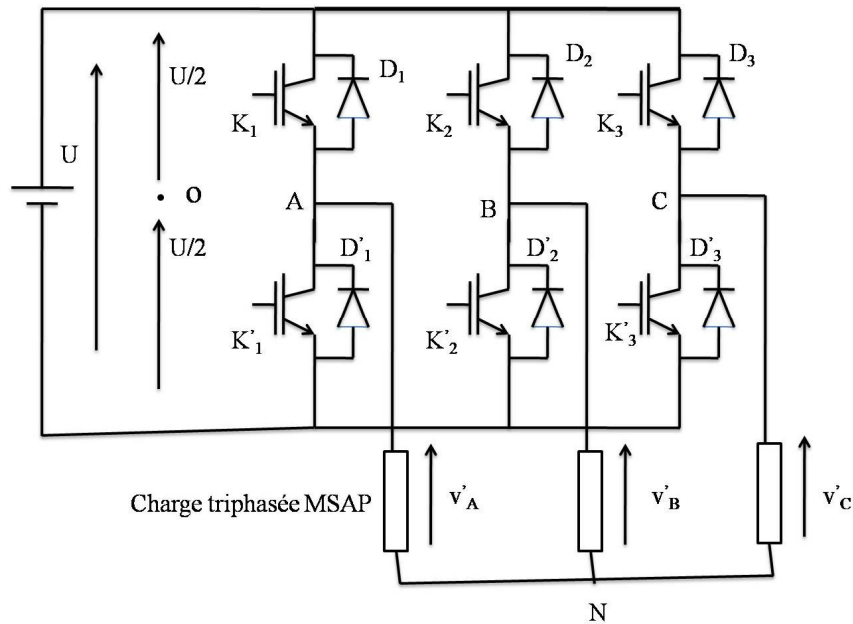


Fig. 3.7 Onduleur de tension triphasé

Les interrupteurs K_1 et K'_1 sont complémentaires, quand K_1 est fermé, K'_1 est ouvert et vis-vers-ça. De même les interrupteurs K_2 et K'_2 , K_3 et K'_3 sont complémentaires. Les instants de fermeture et d'ouverture des interrupteurs complémentaires sont déterminés par l'intersection d'une onde de référence ou modulatrice v_m représentant la tension de sortie désirée de fréquence f_m avec une onde de modulation ou porteuse v_p de fréquence f_p . La fréquence de la porteuse est plus grande que la fréquence de l'onde de référence. Pour déterminer les instants de fermeture et d'ouverture des interrupteurs complémentaires deux à deux K_1 et K'_1 , K_2 et K'_2 , K_3 et K'_3 , on procède comme suit:

On trace trois signaux sinusoïdaux de même fréquence et d'amplitude, décalés entre eux d'un angle de $2\pi/3$, représentant un système triphasé, et formant les trois tensions de référence ou les trois tensions désirées entre les trois bornes de sortie A, B, C et le point milieu fictif o de la source de tension U comme indiqué sur la figure 3.7.

Le principe de la stratégie de la MLI est résumé par l'exemple suivant: considérons la figure 3.8 [1, 56], quand la tension de référence $(v_A - v_o)_w$ est supérieur ou égale au signal de la porteuse triangulaire, l'interrupteur K_1 est fermé, la tension entre la borne A et le point milieu fictif O est égale à $U/2$:

$v_A - v_O = U/2$ (voir Fig. 3.7). Quand $(v_A - v_O)_w$ est inférieure au signal la porteuse, l'interrupteur K_1 est fermé, la tension entre le point A et le point O est égale à $-U/2$: $v_A - v_O = -U/2$.

Les intersections des trois tensions de référence $(v_A - v_O)_w$, $(v_B - v_O)_w$, $(v_C - v_O)_w$ avec la porteuse triangulaire donnent les instants de fermeture des différents interrupteurs. Les tensions produites par les demi-ponts sont:

- $v_A - v_O = U/2$, quand K_1 est fermé
- $v_A - v_O = -U/2$, quand K_1' est fermé
- $v_B - v_O = U/2$, quand K_2 est fermé
- $v_B - v_O = -U/2$, quand K_2' est fermé
- $v_C - v_O = U/2$, quand K_3 est fermé
- $v_C - v_O = -U/2$, quand K_3' est fermé

La composante homopolaire dans les tensions \dot{v}_A , \dot{v}_B , \dot{v}_C correspond à la différence de potentiel entre les points N et O.

$$\begin{aligned} v_N - v_O &= (v_A - v_O) - (v_A - v_N) = (v_A - v_O) - v'_A \\ v_N - v_O &= (v_B - v_O) - (v_B - v_N) = (v_B - v_O) - v'_B \\ v_N - v_O &= (v_C - v_O) - (v_C - v_N) = (v_C - v_O) - v'_C \end{aligned} \quad 3.11$$

pour un système triphasé équilibré, on a:

$$v'_A + v'_B + v'_C = 0$$

Ce qui donne pour la tension homopolaire et les tensions de phase \dot{v}_A , \dot{v}_B et \dot{v}_C

$$v_N - v_O = \frac{1}{3}((v_A - v_O) + (v_B - v_O) + (v_C - v_O)) \quad 3.12$$

$$\begin{aligned} v'_A &= \frac{2}{3}(v_A - v_O) - \frac{1}{3}(v_B - v_O) - \frac{1}{3}(v_C - v_O) \\ v'_B &= -\frac{1}{3}(v_A - v_O) + \frac{2}{3}(v_B - v_O) - \frac{1}{3}(v_C - v_O) \\ v'_C &= -\frac{1}{3}(v_A - v_O) - \frac{1}{3}(v_B - v_O) + \frac{2}{3}(v_C - v_O) \end{aligned} \quad 3.13$$

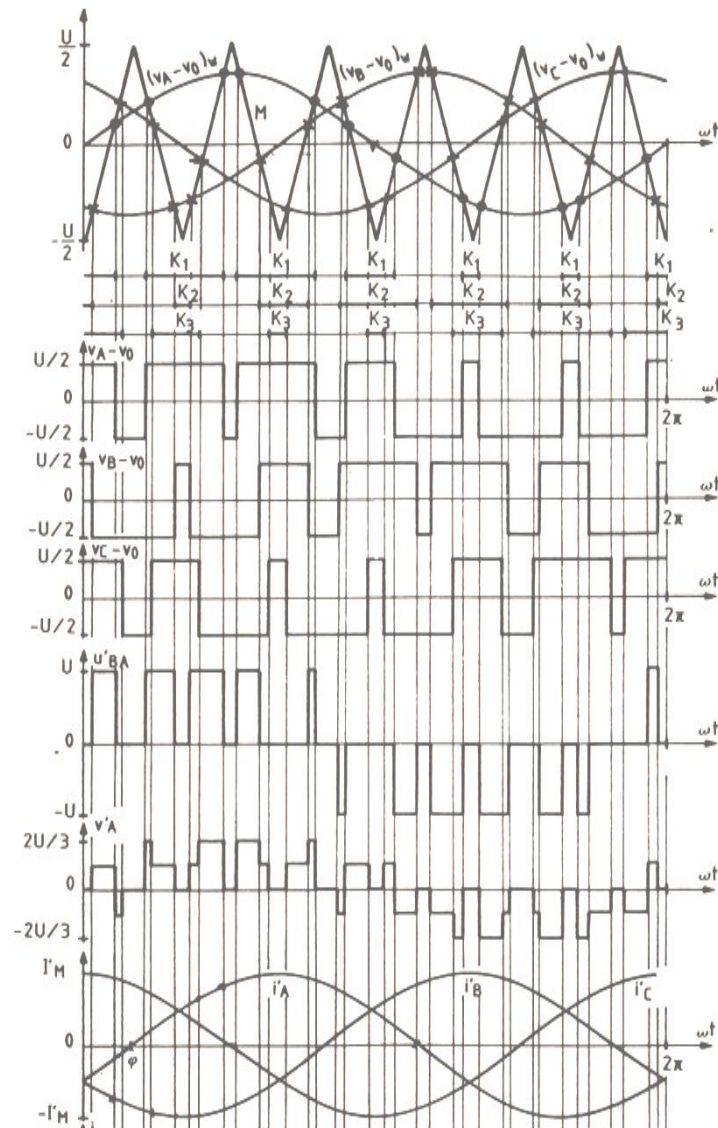


Fig. 3.8. Principe de la modulation MLI: Onduleur triphasé [56].

3.5 Modélisation de l'onduleur

Dans le cas où la fréquence de la porteuse est grande par rapport à la fréquence du signal modulant (référence), on peut approximer le fonctionnement de l'onduleur à deux niveaux par un cas idéal. L'onduleur est modélisé [56] par des interrupteurs à commutation instantanée. On définit une fonction binaire qui indique l'état de l'interrupteur: fermé ou ouvert.

$$\begin{aligned}
 v_A - v_O &= v_{AO} = \frac{U}{2}(2x_1 - 1) \\
 v_B - v_O &= v_{BO} = \frac{U}{2}(2x_2 - 1) \\
 v_C - v_O &= v_{CO} = \frac{U}{2}(2x_3 - 1)
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Les fonctions x_1 , x_2 , et x_3 sont des fonctions binaires. Pour $x_1=1$, $v_A-v_O = U/2$, pour $x_1= 0$ la tension $v_A-v_O = -U/2$.

Les expressions des tension statoriques de la machine synchrone à aimants permanents sont données par

$$\begin{aligned}
 v'_A &= \frac{2}{3}v_{AO} - \frac{1}{3}v_{BO} - \frac{1}{3}v_{CO} = \frac{U}{3}(2x_1 - x_2 - x_3) \\
 v'_B &= -\frac{1}{3}v_{AO} + \frac{2}{3}v_{BO} - \frac{1}{3}v_{CO} = \frac{U}{3}(2x_2 - x_1 - x_3) \\
 v'_C &= -\frac{1}{3}v_{AO} - \frac{1}{3}v_{BO} + \frac{2}{3}v_{CO} = \frac{U}{3}(2x_3 - x_1 - x_2)
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

L'application de la transformation de Park aux équations (3.15) donne les tensions dans l'axe direct v_d et dans l'axe quadrature v_q .

Etat de l'art de la commande de la machine synchrone à aimants permanents

4.1 Introduction

La robustesse d'un système de contrôle en boucle fermée représente une propriété fondamentale. On peut contrôler les performances d'un système quel qu'il soit, grâce à l'utilisation des boucles de contre-réaction. A cette fin, ont été développées les méthodes fréquentielles appelées aussi méthodes classiques (Bode, Nyquist, Black) qui permettent, grâce notamment aux notions de marges de gain et de phase, de quantifier la robustesse d'un système monovarié (SISO). L'efficacité de ces méthodes explique leur utilisation jusqu'à aujourd'hui. Dans le milieu industriel, la solution la plus utilisée pour la commande du moteur synchrone à aimants permanents s'appuie sur des régulateurs de type PI.

4.2 Contrôle de la machine MASAP par la méthode classique

Dans cette étape, on introduit une loi de commande de vitesse du moteur synchrone à aimants permanents. Pour cela, on utilise un régulateur PI [54, 55] pour la boucle de contrôle de vitesse. Puisque les boucles des courants i_d et i_q sont des boucles internes à la boucle de vitesse, il est judicieux de concevoir en premier lieu les régulateurs des courants i_d et i_q . Ces régulateurs doivent assurer un temps d'établissement rapide et une erreur statique très faible. Les régulateurs choisis à cette fin sont des régulateurs PI.

4.2.1 Conception des régulateurs de courants

Le schéma de la boucle de régulation du courant i_d est donné par la figure 3.3 chapitre 3. La fonction de transfert du régulateur G_d est:

$$G_d = K_{pd} \left(\frac{1 + K_{id}s}{K_{id}s} \right) \quad 4.1$$

K_{id} : coefficient proportionnel du régulateur.

K_{pd} : coefficient intégral du régulateur.

La fonction de transfert du processus ou système à commander est donnée par l'équation (3.6) et la figure (3.3):

$$G_d(s) = \frac{i_d(s)}{v_{d0}(s)} = \frac{1/R_s}{\left(1 + \frac{L_d}{R_s}s\right)} = \frac{A}{1 + \tau_d s} \quad 4.2$$

avec $A = 1/R_s$ $\tau_d = \frac{L_d}{R_s}$: la constante de temps électrique dans l'axe d.

La fonction de transfert de la boucle ouverte L(s) est donnée par:

$$L(s) = K_d(s)G_d(s)$$

$$L(s) = K_{pd} \left(\frac{K_{id}s + 1}{K_{id}s} \right) \left(\frac{A}{1 + \tau_d s} \right)$$

Le pôle dominant du processus est le pôle: $s = -\frac{R_s}{L_d} = -\frac{0.6}{1.410^{-3}} = -428.5714$

En posant $K_{id} = \tau_d = \frac{L_d}{R_s} = 0.0023$, le terme $(K_{id}s + 1)$ compense le terme $(1 + \tau_d s)$ du processus. la relation L(s) devient:

$$L(s) = K_{pd} \frac{A}{K_{id}s}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par:

$$H(s) = \frac{i_d(s)}{i_{dref}(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K_{pd} A / K_{id}s}{1 + K_{pd} A / K_{id}s} = \frac{K_{pd} A}{K_{id}s + K_{pd} A} = \frac{1}{\frac{K_{id}s}{K_{pd} A} + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s/\omega_d + 1}$$

où la fréquence ω_d représente la bande passante en rad/sec de la boucle de courant i_d :

$$\omega_d = \frac{K_{pd} A}{K_{id}}$$

La fréquence la plus élevée dans le système d'autopilotage de la machine synchrone à aimants permanents (fig. 3.6) est la fréquence de la porteuse triangulaire. Cette fréquence peut aller jusqu'à 20 KHZ pour des transistors MOSFET. Le choix de la bande passante est fixé selon cette fréquence. Pour que le fonctionnement du système soit considéré comme idéal, il faut sélectionner une bande passante pour les courants statoriques beaucoup plus faible que la fréquence de découpage de l'onduleur. Choisissons une bande passante de

500 rad/sec pour les courants statoriques i_d et i_q , $\omega_d = 500$ rad/sec (80 Hz). Ce

qui donne la valeur de K_{pd} :
$$K_{pd} = \frac{\omega_d K_{id}}{A} = \omega_d K_{id} R_s = 0.7$$

La même méthode est appliquée pour calculer les paramètres du régulateur PI de la boucle de courant i_q figure 3.4.

Le coefficient intégral: $K_{iq} = \tau_q = \frac{L_q}{R_s} = \frac{2.810^{-3}}{0.6} = 0.0047$

Le coefficient proportionnel: $K_{pq} = \frac{\omega_q K_{iq}}{A} = \omega_q K_{iq} R_s = 1.4$

4.2.2 Conception du régulateur de vitesse

Considérons le système de contrôle de la vitesse du rotor donné par la figure 3.5. la fonction de transfert du processus est:

$$G(s) = \frac{1}{Js + F}$$

Le régulateur de vitesse est un régulateur PI, sa fonction de transfert est donnée par [55]:

$$K_s(s) = K_i \left(\frac{1 + (K_p/K_i)s}{s} \right)$$

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(s)$ est montré sur la figure 4.1, les valeurs des paramètres mécaniques J et F sont : $J = 0.0011$, $F = 0.0014$.

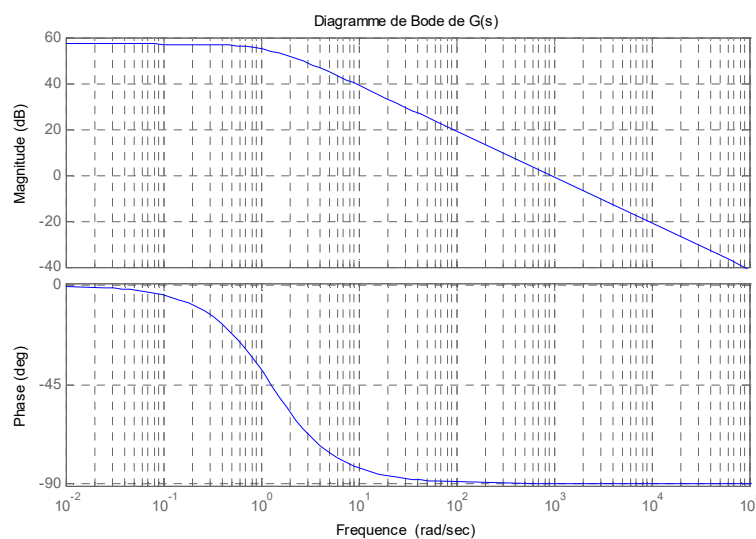


Fig. 4.1 Diagramme de Bode de $G(s)$

La marge de phase de $G(s)$ est de 90° à la fréquence critique de 901 rad/sec. L'objectif est d'obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 60° avec une fréquence critique inférieure à 200 rad/sec pour la fonction de transfert en boucle ouverte $L(s) = K_s(s)G(s)$. Pour cela, on suit la procédure [55] suivante:

- A partir du diagramme de Bode de $G(s)$, on relève un gain de 23.5 dB à la fréquence de 60 rad/sec.
- Le régulateur PI doit fournir une atténuation de 23.5 dB pour ramener la courbe d'amplitude à 0 dB: $|L(j\omega_g)| = -20\text{Log}_{10}(K_p) = 23.5\text{ dB}$
- La valeur de K_p est $K_p = 10^{-23.5/20} = 0.0668$.
- Le régulateur produit une phase négative, ceci peut affecter la marge de phase. Pour remédier à ce problème, la fréquence K_i/K_p du régulateur doit être inférieure à la fréquence $\omega_g = 60$ rad/sec: $\frac{K_i}{K_p} = \frac{\omega_g}{30}$.
- $K_i = K_p \frac{\omega_g}{30} = 0.1337$.
- Réalisons la simulation numérique du système de la figure 3.6 en utilisant les régulateurs PI de courant i_d et i_q conçus dans la sous-section 4.2.1 et le régulateur PI de vitesse avec les paramètres $K_i = 0.1337$ et $K_p = 0.0668$. La consigne de vitesse correspond à un échelon de vitesse de 50 rad/sec. A l'instant $t = 0.1$ seconde, on applique un couple de charge T_m de 3 N.m. La réponse générée par la simulation est donnée à la figure 4.2.

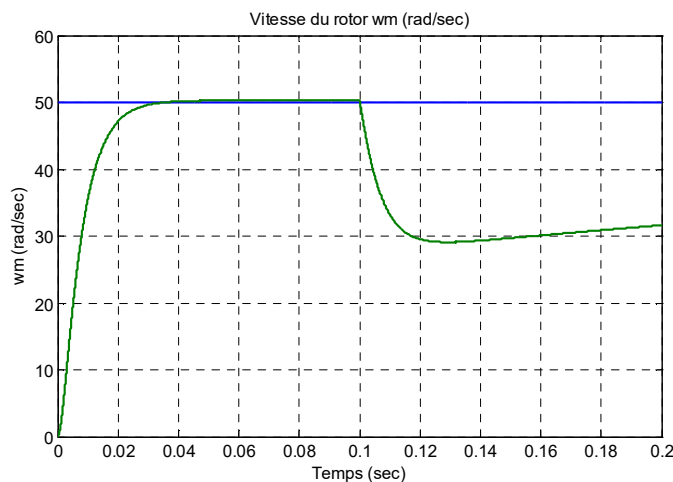


Fig. 4.2 Réponse indicielle de la vitesse du rotor

- Le couple de charge T_m appliqué à l'instant $t = 0.1$ second est considéré comme une perturbation. La réponse indicielle est affectée par cette perturbation. Le régulateur de vitesse produit un mauvais rejet de la perturbation. Pour obtenir un bon rejet de perturbation et un bon suivi de la consigne, on augmente la valeur du paramètre K_p .
- La valeur de K_p est: $K_p = 4.4367$
- L'exécution de la simulation avec la nouvelle valeur de K_p , produit le résultat illustré par la figure 4.3.

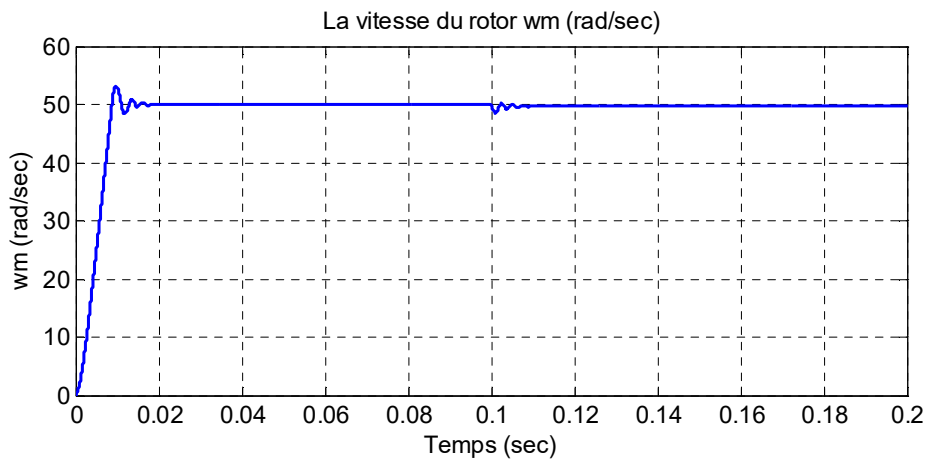


Fig. 4.3 Réponse indicielle de la vitesse du rotor

- On obtient un bon rejet de la perturbation et un bon suivi de la consigne. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega) = K_s(j\omega)G(j\omega)$ est donné par la figure 4.4. La marge de phase est 75.7° , la fréquence critique est 125 rad/sec. La marge de gain est infini.

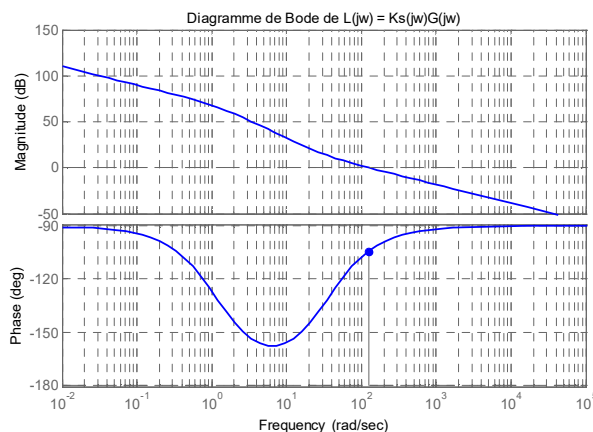


Fig. 4.4 Marges de phase et de gain de $L(j\omega)$

4.2.3 Simulation numérique

La simulation de la commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents est réalisée en utilisant les correcteurs PI de courants i_d et i_q et le correcteur PI de vitesse conçus dans les étapes précédentes. Le système de la figure 3.6 est testé par simulation numérique. La consigne de vitesse du rotor est un échelon d'amplitude 50 rad/sec. Le couple mécanique appliqué initialement est 0 N.m. La figure 4.4 montre que le couple électromagnétique augmente brusquement à 8 N.m puis se stabilise quand la vitesse atteint la valeur de référence. Le couple mécanique passe à 3 N.m à l'instant $t = 0.1$ seconde. A ce moment le couple électromagnétique augmente pour maintenir la vitesse à la valeur de référence. Les signaux produits par la simulation sont indiqués comme suit.

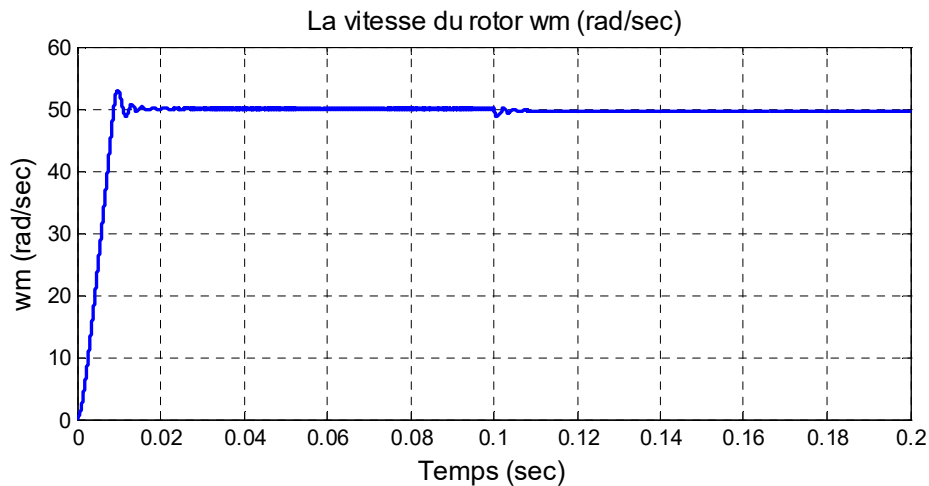


Fig. 4.5 La vitesse du rotor en rad/sec

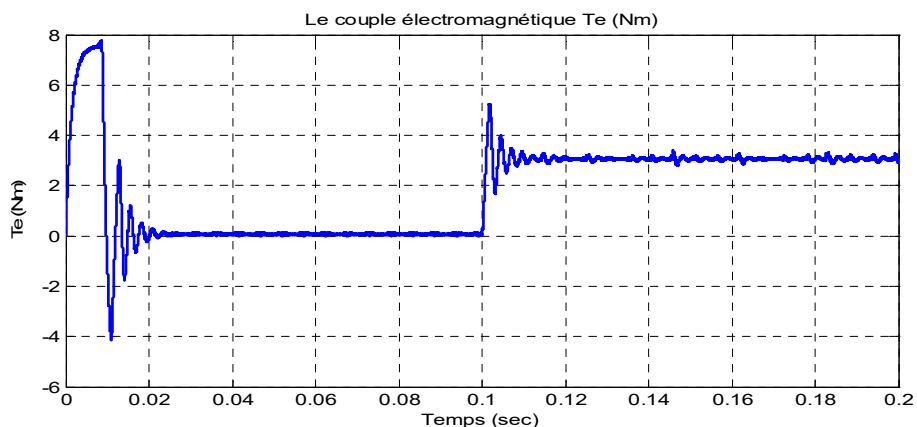


Fig. 4.5 Le électromagnétique T_e

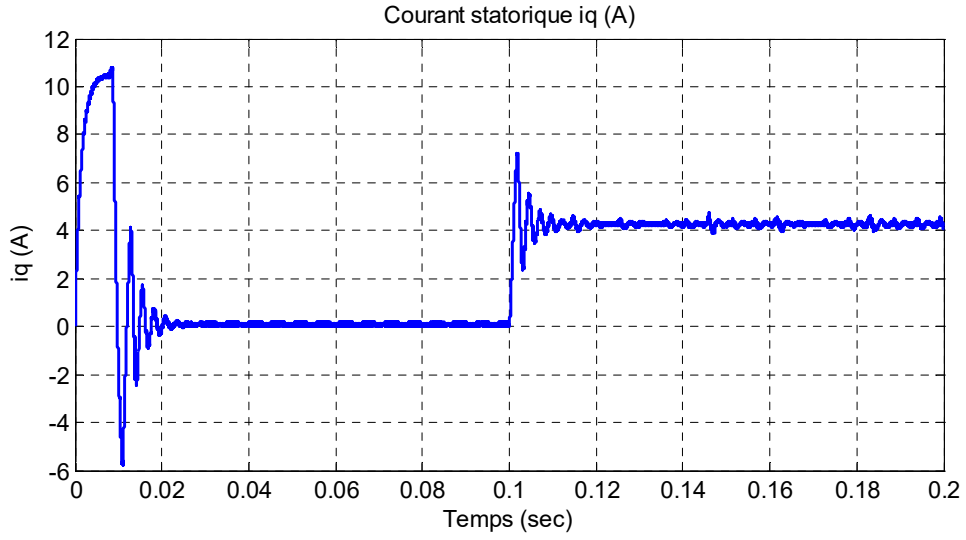


Fig. 4.6 Courant statorique i_q

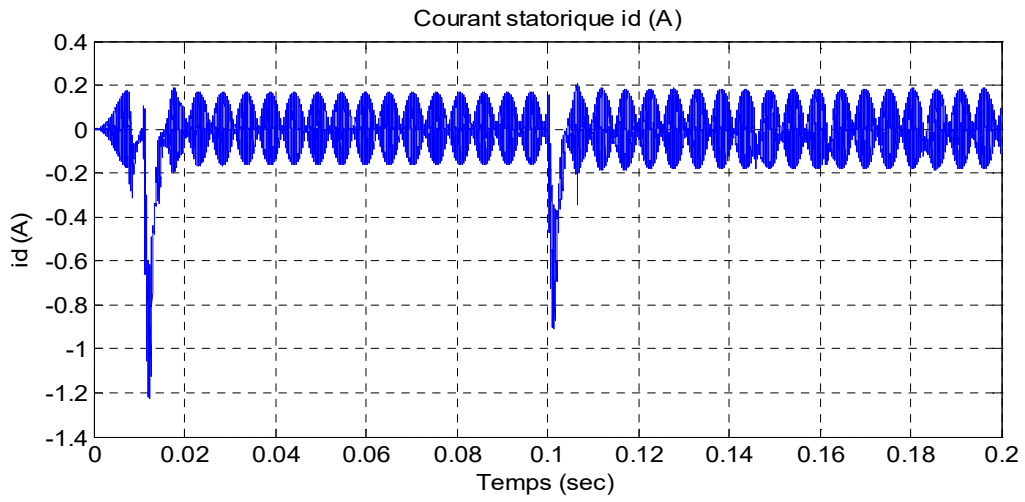


Fig 4.7 Courant statorique i_d

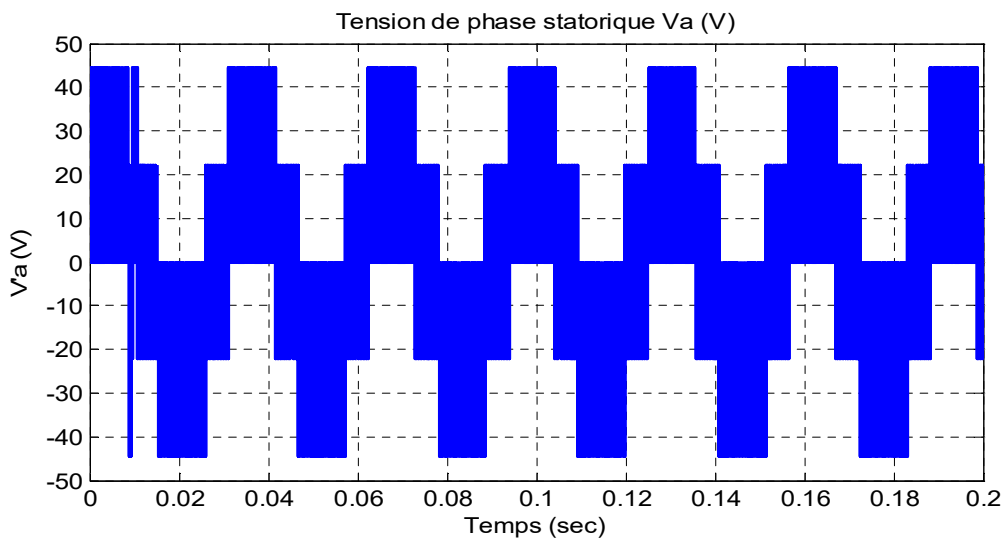


Fig. 4.8 Tension de phase statorique

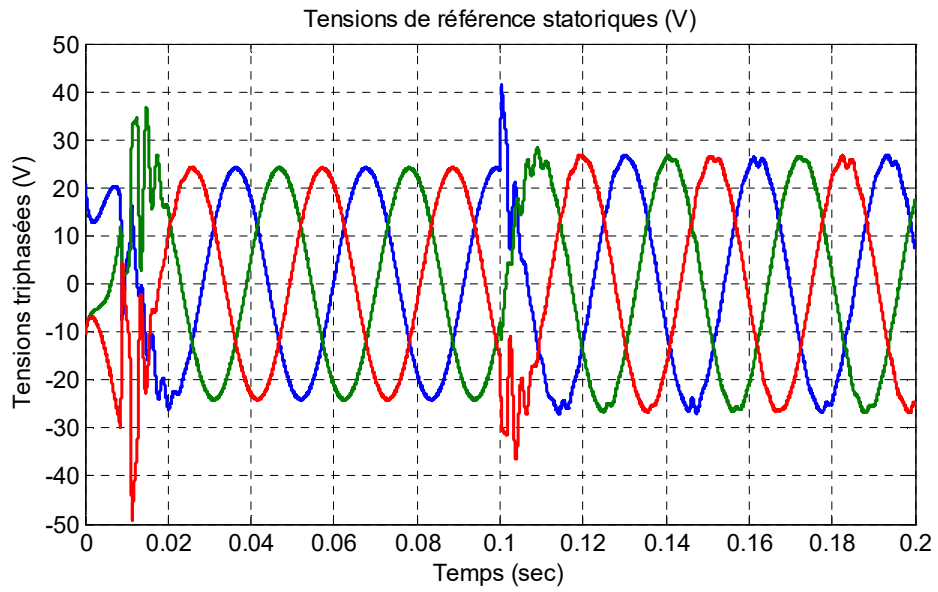


Fig. 4.9 Tensions de référence statoriques décalées de 120°

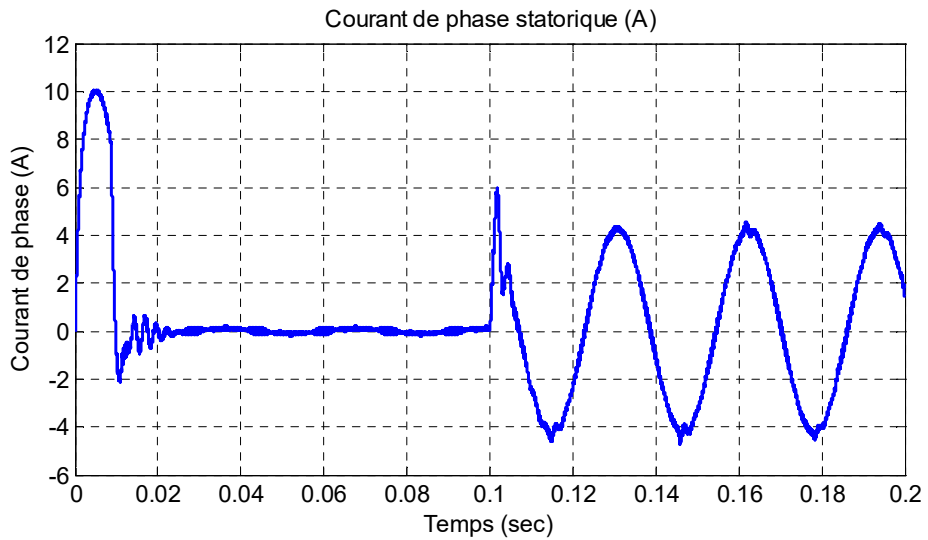


Fig. 4.10 Courant de phase statorique

Outils d'analyse et de synthèse des systèmes asservis multivariables

5.1 Les systèmes linéaires

5.1.1 Introduction

Un système est une entité dont les entrées et les sorties sont reliées par causalité. Le terme causalité indique tout simplement qu'une action en entrée engendre une réaction en sortie.

Un système peut être représenté par un diagramme fonctionnel comme indiqué sur la figure 5.1, traduisant une relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

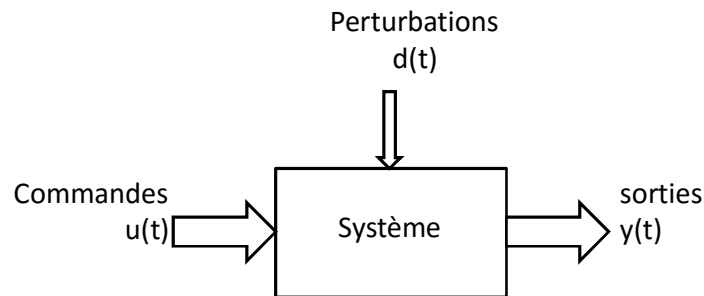


Fig. 5.1 Diagramme fonctionnel d'un système

Dans ce diagramme on distingue:

- Les entrées $u(t)$ qui représentent les actions volontaires.
- les perturbations $d(t)$ qui représentent les actions involontaires.
- Les sorties $y(t)$ qui représentent les réponses aux entrées $u(t)$ et $d(t)$.

5.1.2 Représentation d'état ou représentation interne

5.1.2.1 Analyse des modèles d'état

Cette partie décrit l'analyse des systèmes dynamiques linéaires de dimension finie, invariant au moyen d'une représentation d'état appelée aussi représentation interne [54, 55, 57, 59].

5.1.2.2 La représentation d'état d'un système

Un processus ou système physique peut être décrit par un certain nombre fini de grandeurs appelées variables d'état. Ces variables permettent de calculer l'évolution future du système à partir des valeurs initiales de ces variables et les

grandeurs externes représentant les variables d'entrée (signaux de commande en entrée).

Le comportement d'un système dynamique de degré n décrit par une équation différentielle d'ordre n ou une fonction de transfert d'ordre n peut être décrit à l'aide de n variables d'état notées $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ appelées variables d'état, avec t défini dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

L'évolution des variables d'état à partir de l'instant initial t_0 est déterminée par les valeurs initiales $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$ et des grandeurs d'entrée appliquées sur l'intervalle t_0 à t .

Un modèle d'état ou représentation d'un système de degré n est constitué de n équations différentielles du premier ordre reliant les variables d'état et les grandeurs d'entrée (signaux d'entrée) et de sorties (signaux de sortie).

- On définit le vecteur d'état $x(t)$ de dimension n : $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- On définit le vecteur des signaux d'entrée ou commandes de dimension m : $u(t) \in \mathbb{R}^m$. le système possède m commandes (signaux d'entrée).

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

- On définit le vecteur des signaux de sortie de dimension p : $y(t) \in \mathbb{R}^p$. le système possède p sorties (signaux de sortie).

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Un système linéaire est décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation, $D \in R^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties. Dans le cas général, la matrice D est nulle, car pour un système réelle, les sorties ne peuvent réagir instantanément aux variations des entrées.

Le modèle décrit par l'expression 5.1 représente un modèle linéaire invariant dans le temps (LTI). Il est valable pour les systèmes propres et les systèmes strictement propres.

La fonction de transfert du système est donnée par l'expression suivante:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

La représentation graphique de l'équation d'état est illustrée par la figure suivante:

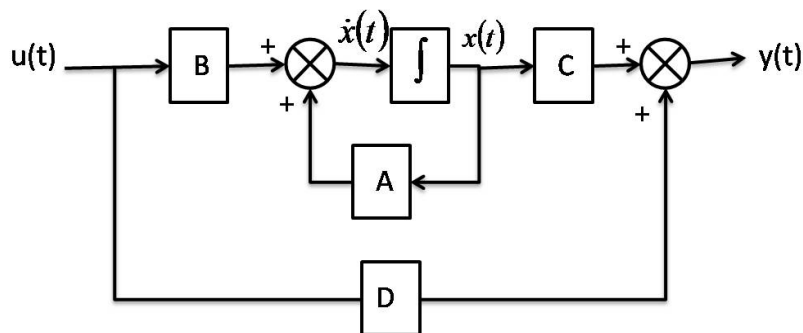


Fig. 5.0 Représentation d'état d'un système linéaire

La solution de l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ pour une commande égale à 0: $u(t) = 0$ est donnée par:

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

cette solution représente l'évolution du système libre ou système autonome.

La solution complète de l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, c'est-à-dire pour une commande $u(t)$ différente de zéro ($u(t) \neq 0$) est donnée par:

$$x(t) = x_l + x_f = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{5.2}$$

Le deuxième terme de la solution $x(t)$ représente l'évolution du système forcé c'est-à-dire $u(t) \neq 0$:

$$x_f = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = e^{At} B * u(t)$$

Si l'entrée $u(t)$ est une impulsion de Dirac $\delta(t)$, la matrice $e^{At} B$ représente pour des conditions initiales nulles ($x(0) = 0$) la réponse impulsionnelle entrée-état du système.

Il y a stabilité asymptotique interne ou entrée-état pour le système linéaire (5.1) si et seulement si les valeurs propres de la matrice d'état A possèdent des parties réelles strictement négatives.

5.1.2.3 Commandabilité et observabilité

Commandabilité

La commandabilité permet de déterminer une loi de commande $u(t)$ qui consiste à faire évoluer le système depuis un état initial $x(0)$ à un état final $x(t_1)$ en un temps fini.

Définition

Le système (5.1) est commandable [54, 55, 57, 59] si pour tout couple de vecteurs $[x_0, x_1]$ de \mathbb{R}^n , il existe un temps t_f fini et une commande $u(t)$ définie sur $[0, t_f]$ tels que la solution $x(t)$ du système (5.1) s'écrive $x(t_f) = x_1$ pour la condition initiale $x(0) = x_0$. Le système est non commandable dans le cas contraire.

Théorème [54, 55, 57, 59]

Le système (5.1) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité:

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

Définition

Les valeurs propres λ de la matrice d'état A vérifiant $\text{rang}[(\lambda I - A) \ B] < n$ sont appelés les modes non commandables ou non gouvernables. Le système linéaire (5.1) est stabilisable si ces modes non commandables sont stables.

Observabilité

L'observabilité représente la base de la reconstruction d'état à partir de la sortie du système. En observant la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps, il est possible de reconstruire l'état initial du système.

Définition

Le système (5.1) est observable [54, 55, 57, 59] si pour tout vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini t_f et une commande $u(t)$ définie sur l'intervalle $[0, t_f]$ tels que l'état initial du système $x(0) = x_0$, alors la connaissance de la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[0, t_f]$ permet de déterminer x_0 .

Théorème [54, 55, 57, 59]

Le système linéaire (5.1) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang égal à n . on dit que la paire (A,C) est observable.

Définition

Les valeurs propres λ de la matrice d'état A vérifiant $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} < n$ sont

appelés les modes non observables du système. Si les modes non observables du système sont stables alors le système est détectable.

Pour mettre en évidence la notion de commandabilité et d'observabilité, considérons le système décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

La relation (5.2) permet de calculer l'évolution de variables d'état $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ à partir de l'état initial $x(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T$ et les commandes d'entrée $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Ce qui donne:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\x_2(t) &= e^{\lambda_2 t} x_2(0) + b_{21} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{22} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau \\x_3(t) &= e^{\lambda_3 t} x_3(0) + b_{31} \int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{32} \int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau\end{aligned}$$

On remarque que les commandes d'entrée $u_1(t)$ et $u_2(t)$ n'ont aucune influence sur la variable $x_1(t)$. On dit que le mode correspondant λ_1 n'est pas commandable. Dans ces conditions, il est impossible de déterminer une commande permettant de faire évoluer le système vers un état quelconque puisque la variable d'état $x_1(t)$ n'est couplée à aucune commande. On remarque que ce mode non commandable provient de la présence d'une ligne de zéros dans la matrice d'entrée B de la représentation d'état.

L'évolution des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + 0x_3(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) \\y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + 0x_3(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t)\end{aligned}$$

On remarque que la variable d'état $x_3(t)$ n'intervient pas dans l'évolution des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$. On dit donc que le mode correspond λ_3 n'est pas observable. Ce mode non observable provient de la présence d'une colonne de zéros dans la matrice de sortie C de la représentation d'état. Dans ce cas, il est impossible de remonter à partir des sorties à la connaissance de la variable d'état $x_3(t)$ puisque cette variable d'état n'influence aucune sortie.

Considérons le comportement entrées-sorties à partir des conditions nulles c'est-à-dire:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

Dans ce cas on a:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0 \\x_2(t) &= b_{21} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{22} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau \\x_3(t) &= b_{31} \int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{32} \int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Les sorties deviennent:

$$y_1(t) = c_{12} \left(b_{21} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{22} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau \right)$$

$$y_2(t) = c_{22} \left(b_{21} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + b_{22} \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau \right)$$

On remarque que le comportement entrée/sortie, pour des conditions nulles, ne fait apparaître que le mode à la fois commandable et observable.

5.2 Les normes

5.2.1 Introduction

Une norme [54, 55, 57, 59], en général, permet d'évaluer à l'aide d'un nombre unique la mesure de la taille d'un vecteur, d'une matrice, d'un signal ou d'un système.

5.2.2 Définition

Soit V un espace vectoriel, une norme est une fonction notée $\|\cdot\|$ et définit dans V par:

$$\|v\|: V \rightarrow R^+$$

et vérifiant les conditions suivantes pour tout $x, y \in V$ et $\alpha \in R$:

1. $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall \alpha \in R, \forall x \in V \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

L'espace vectoriel V peut être l'espace de vecteurs, de matrices, de signaux temporels ou systèmes linéaires.

5.2.3 Normes d'un vecteurs

L'espace vectoriel considéré est l'espace des nombres complexes: $V = C^n$. La norme d'un vecteur $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ est définie par l'expression suivante:

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum |v_i|^p \right)^{1/p} & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| & \text{pour } p = \infty \end{cases} \quad 5.3$$

5.2.4 Normes induites de matrice

L'espace considéré est l'espace $V = C^{m \times n}$, l'espace vectoriel de matrice complexes de dimensions $m \times n$.

Soit A une matrice définie dans $C^{m \times n}$, $\|A\|$ est une norme matricielle, si en plus des propriétés élémentaires d'une norme, la condition suivante est vérifiée:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad 5.4$$

La norme somme d'une matrice A de dimension $m \times n$ est définie par l'expression suivante:

$$\|A\|_{sum} = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

où a_{ij} sont les éléments de la matrice A , i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

Puisque les colonnes d'une matrices peuvent être considérées comme des vecteurs et les lignes de la matrice comme les transposés de vecteurs, on peut définir des normes induites de matrices:

La norme suivante est induite par la norme Euclidienne ou norme 2:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$$

A^* est la matrice transposée conjuguée de la matrice A . Cette norme est appelée norme spectrale.

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Cette norme est une norme induite par la norme H_{∞} .

considérons les matrices de dimensions $m \times n$, alors l'expression suivante permet de définir le produit scalaire dans l'espace vectoriel des matrices $m \times n$, $C^{m \times n}$.

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^*B)$$

où A^* est la matrice transposée conjuguée de la matrice A . La norme suivante définie par ce produit scalaire est appelée la norme de Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)}$$

5.3 Les valeurs propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée définie dans $C^{n \times n}$: $A \in C^{n \times n}$, la valeur $\lambda \in C$ est une valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur $x \in R^n$ tel que

$$Ax = \lambda x$$

ou λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

5.3.1 Matrice Positive

Soit la matrice $A \in C^{n \times n}$ telle que $A=A^H$ (matrice hermitienne). La matrice A est positive ($A>0$) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, alors la matrice A est définie positive.

La notation $A \geq 0$ signifie que toutes les valeurs propres de la matrice A sont positives ou nulles, alors la matrice A est définie semi positive. La matrice Hermitienne A^H est définie par:

$$A^H = (A^*)^T$$

$(A^*)^T$ est la matrice transposée conjuguée de la matrice A.

5.4 Les valeurs singulières d'une matrice

5.4.1 Définition

Les valeurs singulières [3, 60, 61] d'une matrice complexe A sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^H A$ où A^H est la matrice hermitienne de A (transposée conjuguée de A). Les valeurs singulières sont notées par $\sigma_i(A)$.

Théorème [3] Soit une matrice A de dimensions $m \times n$ définie dans $C^{m \times n}$ ou $R^{m \times n}$, alors il existe une matrice unitaire U de dimensions $m \times m$ et une matrice unitaire V de dimensions $n \times n$ telle que

$$A = U \Sigma V^*$$

$$U \in C^{m \times m}, \quad U^* = U^{-1}, \quad U^* U = I_m$$

$$V \in C^{n \times n}, \quad V^* = V^{-1}, \quad V^* V = I_n$$

5.5

La matrice Σ est formée par la matrice diagonale des valeurs singulières σ_i dans l'ordre décroissant:

- $m \geq n$, la matrice Σ est donnée par l'expression suivante:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \\ \hline 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} \quad 5.6$$

- $m \leq n$, la matrice Σ est donnée par l'expression suivante:

$$\Sigma = \left[\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \mid 0_{m \times (n-m)} \right]$$

avec $\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p = \underline{\sigma}$ et $p = \min(m,n)$.

5.4.2 Propriétés des valeurs singulières

1. $\bar{\sigma}(A^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A)}$
2. $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i| \leq \bar{\sigma}(A)$
3. $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$
4. $\underline{\sigma}(AB) \geq \underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B)$
5. Le rayon spectrale est défini par

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \quad \rho(A) \leq \bar{\sigma}(A)$$

5.5 Normes des signaux

5.5.1 Introduction

Un grand nombre d'objectifs de commande peuvent être traduits sous forme de grandeur d'un signal. Par exemple, on désire que la grandeur du signal de commande du processus ne soit pas trop importante afin de ne pas trop exciter les actionneurs, que la grandeur de l'erreur de poursuite d'un asservissement soit faible. Cette grandeur de signal peut être définie au moyen de normes qui généralisent la distance euclidienne.

La norme est définie sur un espace vectoriel, la notion de norme peut être appliquée aux cas des signaux à condition de construire des ensembles de signaux qui peuvent être considérés comme des espaces vectoriels.

5.5.2 Espace L_1

L'espace L_1 est l'ensemble des signaux $u(t)$ intégrables:

$$L_1 = \left\{ u(t) : \int_0^{\infty} |u(t)| dt < \infty \right\} \quad 5.8$$

On définit la norme d'un signal $u(t) \in L_1$, notée $\|u(t)\|_1$ par:

$$\|u\|_1 = \int_0^{\infty} |u(t)| dt \quad 5.9$$

Cette norme peut être utilisée pour mesurer une consommation.

Considérons maintenant un signal multidimensionnel:

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_n(t)]^T \quad u_i(t) \in L_1$$

$$\|u\|_1 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n |u_i(t)| dt = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^\infty |u_i(t)| dt \right\} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_1 \quad 5.10$$

5.5.3 L'espace L_2

L'espace vectoriel L_2 est l'ensemble des signaux $u(t)$ de carré intégrable:

$$L_2 = \left\{ u(t) : \int_0^\infty u^2(t) dt < \infty \right\} \quad 5.11$$

On définit la norme d'un signal $u(t) \in L_2$, notée $\|u(t)\|_2$ par l'expression suivante:

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^\infty u^2(t) dt \right)^{1/2} \quad 5.12$$

Cette norme représente l'énergie totale contenue dans le signal. la norme L_2 peut être définie dans le domaine fréquentiel à l'aide du théorème de Parseval:

$$\|u\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad 5.13$$

$U(j\omega)$ représente la transformée de Fourier du signal $u(t)$.

pour un signal multidimensionnel, $u(t)$ est un vecteur:

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_n(t)]^T \quad u_i(t) \in L_2$$

La norme du signal $u(t)$ est définie par l'expression suivante:

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^\infty u^T(t) u(t) dt \right)^{1/2} \quad 5.14$$

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^\infty u^T(t) u(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^n u_i^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \int_0^\infty u_i^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_2^2 \right)^{1/2}$$

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_2^2 \right)^{1/2} \quad 5.15$$

5.5.4 L'espace L_∞

L'espace vectoriel L_∞ est l'ensemble des signaux $u(t)$ bornés en amplitude.

$$L_\infty = \left\{ u(t) : \sup_{t \geq 0} |u(t)| < \infty \right\} \quad 5.16$$

La norme d'un signal $u(t)$ appartenant à l'ensemble L_∞ ($u(t) \in L_\infty$), notée par $\|u\|_\infty$ est définie par l'expression suivante:

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |u(t)| \quad 5.17$$

Cette norme est appelée la norme H_∞ et représente la valeur maximale que peut prendre un signal.

Pour un signal multidimensionnel on a:

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_n(t)]^T \quad u_i(t) \in L_\infty$$

La norme est donnée par l'expression suivante:

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sup_{t \geq 0} |u_i(t)| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i\|_\infty \quad 5.18$$

5.5 Normes de systèmes

5.5.1 Introduction

En général, le gain d'un système est l'amplification des signaux d'entrée. Pour un système monovariable (SISO), le gain est le rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée. Cette notion de gain peut être généralisée aux cas des systèmes multivariables.

5.5.2 La norme H_2 d'un système

Considérons un système monovariable linéaire et stable dont l'entrée est nommée $u(t)$ et la sortie $y(t)$. La fonction de transfert du système est $G(s)$ et $g(t)$ sa réponse impulsionnelle ($G(s)$ est la transformée de Laplace de $g(t)$).

La norme L_2 de la réponse impulsionnelle $g(t)$ définit la norme H_2 [3, 60, 61] du système $G(s)$:

$$\|G\|_2 = \left(\int_0^\infty g^2(t) dt \right)^{1/2} \quad 5.19$$

L'utilisation du théorème de Parseval permet de définir cette norme dans le domaine fréquentiel:

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|g\|_2 \quad 5.20$$

5.5.3 calcul de la norme H_2

La norme H_2 d'un système stable est finie si et seulement s'il est strictement propre et n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire. Considérons une représentation d'état du système $G(s)$.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Le grammien de commandabilité est définie par la relation suivante:

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{At} dt$$

Le grammien d'observabilité est définie par la relation suivante:

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{At} C C^T e^{At} dt$$

La norme H_2 du système est définie par: déf

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}[C W_c C^T] = \text{trace}[B^T W_o B]$$

5.21

5.5.4 calcul de la norme H_∞ d'un système

Considérons un système de fonction de transfert $G(s)$ stable, propre et causale. Le gain du système, pour une entrée particulière, est défini comme étant le rapport de la norme L_2 du signal de sortie $y(t)$ à la norme L_2 du signal d'entrée $u(t)$.

$$\|G\|_{\text{gain}} = \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad \|u\|_2 \neq 0$$

Au lieu de considérer uniquement le gain pour une entrée particulière, on s'intéresse au plus grand gain possible évalué sur un ensemble de signaux, ce qui définit la norme H_∞ [3, 4, 57, 60, 61] d'un système.

Pour un système monovaiable, la norme H_∞ d'un système est définie par la relation suivante:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|^2 = \sup_{\substack{u \in L_2 \\ \|u\|_2 \neq 0}} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad 5.22$$

Cette norme représente la valeur maximale de l'amplitude dans le diagramme de Bode de $G(s)$ ou la distance de l'origine au point le plus éloigné du lieu de Nyquist.

Pour un système multivariable MIMO, la norme H_∞ du système est donnée par l'expression suivante:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{\substack{u \in L_2 \\ \|u\|_2 \neq 0}} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad 5.23$$

Cette norme est la norme induite L_2 .

5.5.5 Norme H_∞ d'une matrice de transfert et valeurs singulières

Le gain en fonction de la fréquence ω d'un système monovariable dont la fonction de transfert est $G(s)$ es donné par:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| \quad 5.23$$

où $Y(s)$ et $U(s)$ sont les transformées de Laplace des signaux de sortie $y(t)$ et d'entrée $u(t)$.

Le gain d'un système multivariable est calculé à l'aide les valeurs singulières de la matrice de transfert $G(j\omega)$.

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G^T(-j\omega))} = \sqrt{\lambda_i(G^T(-j\omega)G(j\omega))}$$

Les matrices $G(j\omega)G^T(-j\omega)$ et $G^T(-j\omega)G(j\omega)$ sont semi-définie positives, leurs valeurs propres sont par conséquent réelles positives ou nulles. on a donc l'expression suivante:

$$\forall \omega \quad \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \sigma_p(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega))$$

On peut écrire:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|G(j\omega)U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad 5.24$$

La relation 5.24 indique que le gain en fréquence d'un système multivariable est compris entre la valeur singulière inférieure et la valeur singulière supérieure de la matrice de transfert $G(j\omega)$. Puisque les valeurs singulières d'une matrice de transfert sont des fonctions positives de la pulsation ω et peuvent donc être représentées dans les diagrammes de Bode, on peut les utiliser pour constituer la notion de gain des systèmes multivariables.

Pour un système monovariante, la fonction $G(s)$ est scalaire, il n'existe qu'une seule variable singulière:

$$\sigma(G(j\omega)) = |G(j\omega)| \quad 5.25$$

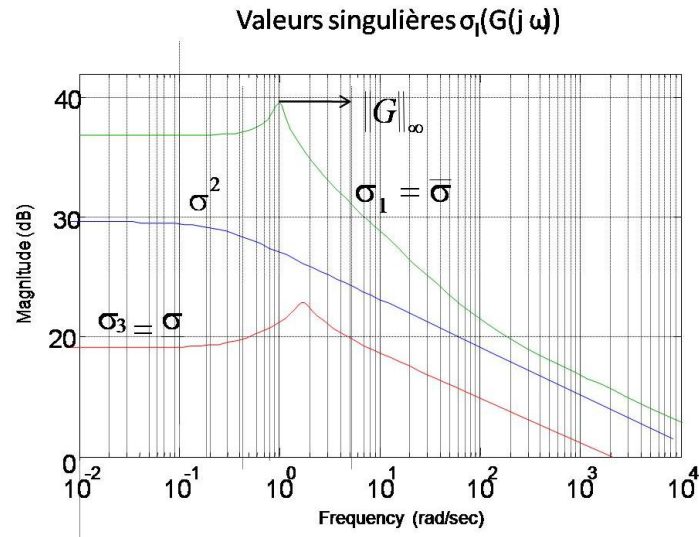


Fig. 5.2 Valeurs singulières d'une matrice de transfert

5.5.6 Calcul de la norme H_∞ d'un système

Considérons un système défini par sa représentation d'état:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Posons $R(\gamma) = D^T D - \gamma^2 I$

Lemme [3, 57, 60, 61]: La norme H_∞ d'un système stable est finie si et seulement s'il n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire.

La matrice Hamiltonienne est définie par l'expression suivante:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I - DR^{-1}D^T)C & -A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{bmatrix} \quad 5.26$$

Théorème [3, 57] Pour $\gamma > \bar{\sigma}(D)$, $\|G\|_\infty < \gamma$ si et seulement si H_γ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

L'algorithme suivant permet de calculer la norme H_∞ d'un système:

1. On choisit l'intervalle $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ tel que $\gamma_{\min} > \overline{\sigma}(D)$
2. Pour $\gamma = (\gamma_{\min} + \gamma_{\max})/2$, on forme la matrice H_γ et on calcule ses valeurs propres, si les valeurs propres ne sont pas sur l'axe imaginaire, on diminue γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma_{\min}, \gamma]$.
Si les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire, on augmente la valeur de γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma, \gamma_{\max}]$.
3. γ_{small} est la valeur la plus petite γ de pour laquelle la matrice Hamiltonienne H_γ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Ce qui permet d'obtenir la norme H_∞ du système $G(s)$:
- 4.

$$\|G\|_\infty = \gamma_{\text{small}} \quad 5.27$$

5.2 Problèmes de commande H_∞

On s'intéresse à la commande [3, 4, 60] d'un processus selon le schéma générale d'un système en boucle fermée, indiqué par la figure 5.3.

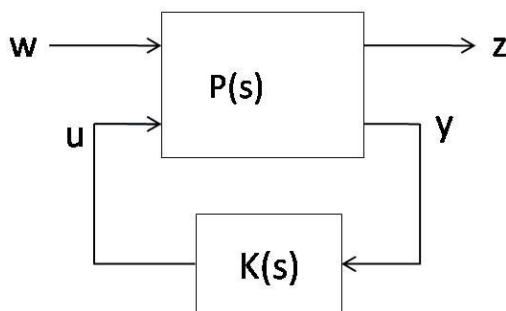


Fig. 5.3 Schéma général d'un système bouclé

On désire commander un processus dont la matrice de transfert est notée $P(s)$ et comportant deux vecteurs d'entrée:

- a) $u(t)$: vecteur des signaux de commande avec lequel on peut contrôler le comportement du système. Ce vecteur est élaboré par le contrôleur $K(s)$.
- b) $w(t)$: vecteur des signaux d'entrée exogènes. Il est formé par les signaux de référence et des signaux de perturbation dont on désire minimiser l'effet.

et deux vecteurs de signaux de sortie:

- a) $y(t)$: vecteur des signaux mesurés permettant au contrôleur $K(s)$ d'élaborer la commande $u(t)$ du processus.
- b) $z(t)$: vecteur des signaux de sortie à contrôler et caractérisant le bon fonctionnement du système.

Le comportement du système peut être décrit dans le domaine fréquentiel par le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad 5.28$$

où la matrice de transfert est définie par l'expression suivante:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad 5.29$$

avec $P_{11}(s) = \frac{z(s)}{w(s)}$ $P_{12}(s) = \frac{z(s)}{u(s)}$ $P_{21}(s) = \frac{y(s)}{w(s)}$ $P_{22}(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$

Les vecteurs $z(s)$, $y(s)$, $w(s)$ et $u(s)$ sont les transformées de Laplace des vecteurs de signaux $z(t)$, $y(t)$, $w(t)$ et $u(t)$ respectivement.

Une représentation d'état peut être associée à la matrice de transfert $P(s)$ comme suit:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad 5.30$$

avec la partition suivante:

$$B = [B_1 \ B_2] \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad 5.31$$

Ceci nous permet de décrire le comportement du processus par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad 5.32$$

où $x(t) \in R^n$, $w(t) \in R^{nw}$, $u(t) \in R^{nu}$, $z(t) \in R^{nz}$, $y(t) \in R^{ny}$

Le système $P(s)$ peut être décrit par une forme compacte comme suit:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad 5.33$$

Le contrôleur $K(s)$ est donné sous la forme d'une représentation d'état comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{aligned} \quad 5.1.5.34$$

On commence l'analyse du système bouclé de la figure 5.3 par calculer la fonction de transfert $F_{zw}(s)$ entre l'entrée $w(t)$ et la sortie $z(t)$. Les équations (5.32) et (5.34) donnent la représentation d'état du système bouclé de la figure 5.3.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad 5.35$$

A partir de l'expression de $u(t)$ fournit par le système d'équations (5.34) et l'expression de $y(t)$ dans le système d'équations (5.32), on peut écrire:

$$\begin{aligned} u - D_k y &= C_k x_k \\ y - D_{22} u &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned}$$

Ceci donne sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I & D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w \quad 5.36$$

Posons $R = I - D_{22} D_k$, si la matrice R est inversible, l'expression suivante est correcte:

$$\begin{bmatrix} I & D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I + D_k R^{-1} D_{22} & D_k R^{-1} \\ R^{-1} D_{22} & R^{-1} \end{bmatrix} \quad 5.37$$

On obtient à partir des expressions (5.36) et (5.37) le vecteur $[u \ y]^T$ comme suit:

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + D_k R^{-1} D_{22} & D_k R^{-1} \\ R^{-1} D_{22} & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I + D_k R^{-1} D_{22} & D_k R^{-1} \\ R^{-1} D_{22} & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w \quad 5.38$$

En remplaçant l'expression du vecteur $[u \ y]^T$ à partir de l'équation 5.38 dans l'équation 5.35 et l'expression de u à partir de l'équation 5.38 dans la deuxième

équation du système 5.32, on peut éliminer u et y de 5.35 et u de l'expression de z dans 5.32. Ce qui permet de calculer la fonction de transfert entre la sortie $z(t)$ et l'entrée $w(t)$ du système bouclé de la figure 5.3.

$$F_{zw}(s) = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A & B_2 C_k \\ 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 D_k \\ B_k \end{bmatrix} R^{-1} [C_2 \quad D_{22} C_k] \quad 5.39$$

$$C_c = [C_1 \quad D_{12} C_k] + D_{12} D_k R^{-1} [C_2 \quad D_{22} C_k]$$

$$D_c = D_{11} + D_{12} D_k R^{-1} D_{21}$$

Lemme [3, 57, 60, 61]

Le système bouclé de la figure 5.3 est bien posé si et seulement si la matrice $R = I - D_{22} D_k$ est inversible.

Définition [3, 57, 60, 61]

Il y a stabilité interne pour le système bouclé de la figure 5.3 dont la représentation d'état est donnée par les équations 5.32 et 5.34 si et seulement si la matrice d'état du système en boucle fermée A_c est stable.

Définition [3, 57, 60, 61]

Le système $P(s)$ est stabilisable s'il existe un contrôleur propre tel que le système en boucle fermée est bien posé et vérifie la stabilité interne. Le contrôleur est appelé contrôleur admissible.

Théorème [3, 57, 60, 61]

- a) il existe un contrôleur admissible $K(s)$ si et seulement si la paire de matrice (A, B_2) est stabilisable et (A, C_2) est détectable.
- b) On suppose (A, B_2) stabilisable, (A, C_2) détectable et L et F deux matrices données telle que $A + B_2 F$ et $A + L C_2$ sont stables. Alors le contrôleur admissible est défini par la représentation d'état suivante:

$$K(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 F + L C_2 + L D_{22} F & -L \\ F & 0 \end{bmatrix} \quad 5.40$$

Le contrôleur $K(s)$ donné par la représentation d'état 5.40 vérifie la stabilité interne du système bouclé de la figure 5.3 si et seulement si la fonction de transfert $F_{zw}(s) \in RH_\infty$.

RH_∞ est l'ensemble des fonctions rationnelles, propres et stables.

5.3 Stabilité Interne

Dans cette partie, on analyse la stabilité interne du système bouclé de la figure 5.3. On note que la stabilité interne [3, 61] peut être caractérisée par la partie P_{22} du processus $P(s)$ et le contrôleur $K(s)$. Pour cela, on considère le schéma de la figure 5.4.

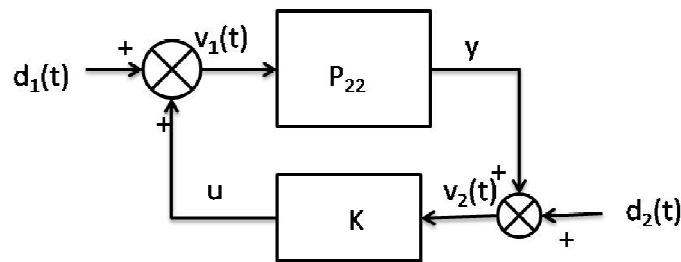


Fig. 5.4 Système de stabilité interne

Les signaux d'entrées d_1 et d_2 sont des perturbations, les signaux v_1 et v_2 sont des sorties. La sortie du bloc P_{22} représente le signal $y(t)$ et la sortie du contrôleur $K(s)$ est $u(t)$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} y &= C_2 x + D_{22} v_1 \\ u &= C_k x_k + D_k v_2 \end{aligned}$$

A partir du système de la figure 5.4, on peut définir les équations suivantes sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad 5.41$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{22} & 0 \\ 0 & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad 5.42$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad 5.43$$

Les équations (5.42) et (5.43) donnent l'expression suivante:

$$\begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} \quad 5.44$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad 5.45$$

On définit la fonction de transfert $F(s)$ par l' expression suivante:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad 5.46$$

Posons $R = I - D_{22}D_k$, si la matrice inverse R^{-1} existe, alors la fonction de transfert $F(s)$ possède la représentation d'état suivante:

$$D_f = \begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I + D_k R^{-1} D_{22} & D_k R^{-1} \\ R^{-1} D_{22} & R^{-1} \end{bmatrix} \quad 5.47$$

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} D_f \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B_2 C_k \\ 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 D_k \\ B_k \end{bmatrix} R^{-1} [C_2 \quad D_{22} C_k] \end{aligned} \quad 5.48$$

$$B_f = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} D_f \quad C_f = D_f \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad 5.49$$

Lemme [3, 60, 61]

Le système bouclé de la figure 5.3 est bien posé et vérifie la stabilité interne si et seulement si le système de la figure 5.4 possède la représentation d'état indiquée par les expressions 5.46 - 5.49.

la matrice de transfert $F(s)$ peut être exprimée en fonction de P_{22} et K directement à partir de la figure 5.4.

$$\begin{cases} v_1(s) = d_1(s) + K(s)v_2(s) \\ v_2(s) = d_2(s) + P_{22}(s)v_1(s) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_1 - K v_2 = d_1 \\ v_2 - P_{22} v_1 = d_2 \end{cases}$$

Le système d'équations ci-dessus peut être écrit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ P_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ P_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ P_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - KP_{22})^{-1} & K(I - P_{22}K)^{-1} \\ P_{22}(I - KP_{22})^{-1} & (I - P_{22}K)^{-1} \end{bmatrix} \quad 5.50$$

La matrice (5.50) existe si les matrices de transfert $(I - P_{22}K)$ et $(I - KP_{22})$ sont inversibles.

$$P_{22}(I - KP_{22})^{-1} = (I - P_{22}K)^{-1}P_{22} \quad 5.51$$

$$(I - KP_{22})^{-1} = I + K(I - P_{22}K)^{-1}P_{22} \quad 5.52$$

Définissons les matrices de transfert suivantes:

$$\begin{aligned} L_o &= -P_{22}K & L_i &= -KP_{22} \\ S_o &= (I + L_o)^{-1} & S_i &= (I + L_i)^{-1} \end{aligned} \quad 5.53$$

La matrice de transfert S_o est appelée la fonction de sensibilité en sortie. La matrice de transfert S_i est la fonction de sensibilité en entrée. Pour un système monovariante $S_i = S_o$.

En remplaçant les expressions de S_i et S_o données par les équations (5.53) dans l'expression (5.50), on trouve l'expression de la matrice de transfert $F(s)$ comme suit:

$$F(s) = \begin{bmatrix} I & -K \\ P_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S_i & KS_o \\ P_{22}S_i & S_o \end{bmatrix} \quad 5.54$$

On trouve l'expression finale de $F(s)$:

$$\begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} = F(s) = \begin{bmatrix} S_i & KS_o \\ P_{22}S_i & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} \quad 5.55$$

Théorème [3, 60, 61]

- Soit $R = I - D_{22}D_k$ une matrice inversible, alors la matrice de transfert $F(s)$ définie par (5.46) existe et possède la représentation d'état (5.47-5.49). De plus la matrice de transfert $F(s)$ peut être définie par l'expression (5.54).
- On suppose que (A, B_2) et (A_k, B_k) sont stabilisables, (A, C_2) et (A_k, C_k) sont détectables. Alors le système de la figure 5.4 vérifie la stabilité

interne si et seulement si les matrices de transfert S_i , S_o , KS_o et $P_{22}S_i$ sont stables.

5.4 Modélisation des systèmes incertains

Le modèle nominal d'un système est entaché d'erreurs appelées incertitudes de modèles. En général, ces incertitudes représentent des dynamiques définies en hautes fréquences qui non pas été modélisées. Habituellement, on suppose qu'en basses fréquences, le modèle nominal est suffisant pour fournir une description fine d'un système. Pour prendre en compte les incertitudes (dynamiques négligées), on utilise un ensemble de modèles à la place du modèle nominale afin de couvrir toutes les dynamiques qui ne sont pas explicitement représentées dans le modèle nominal.

5.4.1 Incertitude additive de modèle

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude additive de modèle nommée Δ_a .

L'incertitude Δ_a est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée: $\|\Delta_a\|_\infty < 1$

On peut écrire:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= G(s) - G_0(s) \\ G(s) &= G_0(s) + \Delta_a(s)\end{aligned}$$

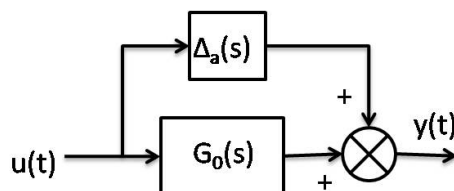


Fig. 5.5 Incertitude additive de modèle

5.4.2 Incertitude additive inverse de modèle

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude additive inverse de modèle nommée Δ_{ai} : $\|\Delta_{ai}\|_\infty < 1$.

L'incertitude Δ_{ai} est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée.

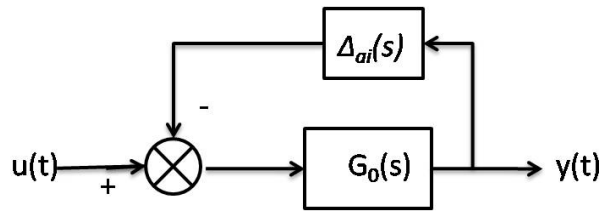


Fig. 5.6 Incertitude additive inverse de modèle

On peut écrire:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= G_0(s)(u(s) - \Delta_{ai}(s)y(s)) = G_0(s)u(s) - G_0(s)\Delta_{ai}(s)y(s) \\
 y(s) + G_0(s)\Delta_{ai}(s)y(s) &= G_0(s)u(s) \\
 (I + G_0(s)\Delta_{ai}(s))y(s) &= G_0(s)u(s) \\
 y(s) &= (I + G_0(s)\Delta_{ai}(s))^{-1} G_0(s)u(s) = G(s)u(s)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice de transfert du modèle $G(s)$:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= (I + G_0(s)\Delta_{ai}(s))^{-1} G_0(s) \\
 G^{-1}(s) &= G_0^{-1}(s)(I + G_0(s)\Delta_{ai}(s)) \\
 G^{-1}(s) &= G_0^{-1}(s) + \Delta_{ai}(s) \\
 \Delta_{ai}(s) &= G^{-1}(s) - G_0^{-1}(s)
 \end{aligned}$$

5.4.3 Incertitude multiplicative d'entrée de modèle

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude multiplicative de modèle nommée Δ_m .

L'incertitude Δ_m est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée: $\|\Delta_m\|_\infty < 1$.

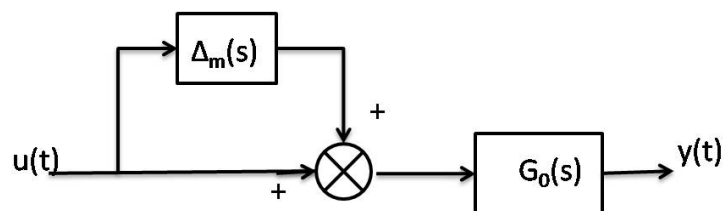


Fig. 5.7 Incertitude multiplicative d'entrée de modèle

On peut écrire:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= G_0(s)u(s) + G_0(s)\Delta_m(s)u(s) \\
 y(s) &= (G_0(s) + G_0(s)\Delta_m(s))u(s) \\
 G(s) &= G_0(s) + G_0(s)\Delta_m(s) \\
 G(s) &= G_0(s)(I + \Delta_m(s)) \\
 \Delta_m(s) &= G_0^{-1}(s)(G(s) - G_0(s))
 \end{aligned}$$

L'incertitude multiplicative d'entrée peut être utilisée pour représenter l'erreur dans le modèles des actionneurs ou une dynamique négligée en hautes fréquences.

5.4.4 Incertitude multiplicative en sortie de modèle

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude multiplicative de sortie de modèle nommée Δ_{ms} .

L'incertitude Δ_{ms} est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée: $\|\Delta_{ms}\|_\infty < 1$.

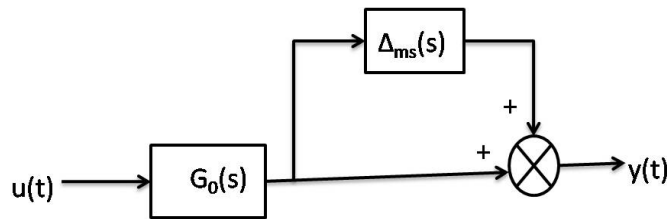


Fig. 5.8 Incertitude multiplicative de sortie

On peut écrire:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= G_0(s)u(s) + \Delta_{ms}G_0(s)u(s) \\
 y(s) &= (G_0(s) + \Delta_{ms}G_0(s))u(s) = G(s)u(s) \\
 G(s) &= (G_0(s) + \Delta_{ms}G_0(s)) = (I + \Delta_{ms})G_0(s) \\
 \Delta_{ms} &= (G(s) - G_0(s))G_0^{-1}(s)
 \end{aligned}$$

L'incertitude multiplicative de sortie est utilisée pour représenter l'erreur de modèle des capteurs et les dynamiques négligées en hautes fréquences.

5.4.5 Incertitude multiplicative inverse d'entrée

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude multiplicative inverse d'entrée de modèle nommée Δ_{mie} .

L'incertitude Δ_{mie} est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée: $\|\Delta_{mie}\|_\infty < 1$.

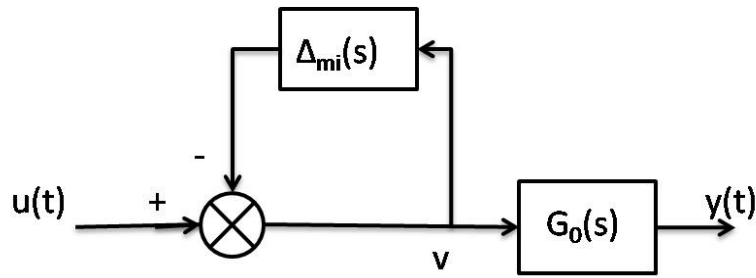


Fig. 5.9 Incertitude multiplicative inverse d'entrée

On peut écrire:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= G_0(s)v(s) \\
 v(s) &= u(s) - \Delta_{mie}v(s) \\
 (I + \Delta_{mie})v(s) &= u(s) \\
 v(s) &= (I + \Delta_{mie})^{-1}u(s) \\
 y(s) &= G_0(s)(I + \Delta_{mie})^{-1}u(s) = G(s)u(s)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne l'expression du système perturbé $G(s)$:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= G_0(s)(I + \Delta_{mie})^{-1} \\
 G^{-1}(s) &= (I + \Delta_{mie})G_0^{-1}(s)
 \end{aligned}$$

5.4.6 Incertitude multiplicative inverse de sortie

Soit $G_0(s)$ la fonction de transfert du modèle nominal et $G(s)$ la fonction de transfert du modèle incluant une incertitude multiplicative inverse de sortie de modèle nommée Δ_{mis} .

L'incertitude Δ_{mis} est une fonction de transfert inconnue, on suppose qu'elle est stable et bornée: $\|\Delta_{mis}\|_\infty < 1$.

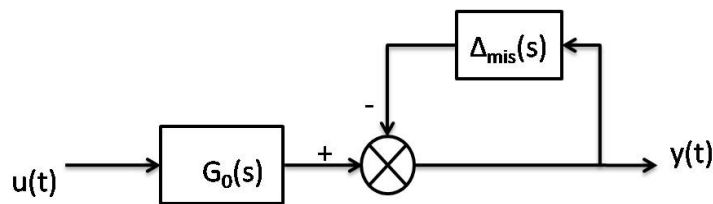


Fig. 5.10 Incertitude multiplicative inverse de sortie

$$\begin{aligned}
 y(s) &= G_0(s)u(s) - \Delta_{mis}(s)y(s) \\
 y(s) + \Delta_{mis}(s)y(s) &= G_0(s)u(s) \\
 (I + \Delta_{mis}(s))y(s) &= G_0(s)u(s) \\
 y(s) &= (I + \Delta_{mis}(s))^{-1}G_0(s)u(s)
 \end{aligned}$$

La matrice de transfert du système perturbé est donnée par:

$$G(s) = (I + \Delta_{mis}(s))^{-1} G_0(s)$$

$$G^{-1}(s) = G_0^{-1}(s)(I + \Delta_{mis}(s))$$

$$\Delta_{mis}(s) = G_0(s)(G^{-1}(s) - G_0^{-1}(s))$$

L'incertitude multiplicative inverse d'entrée et l'incertitude multiplicative inverse de sortie sont utilisées pour modéliser les erreurs paramétriques d'un système en basses fréquences.

5.4.6 Incertitudes basées sur la factorisation première d'une matrice

Considérons la décomposition en facteurs premiers de la matrice de transfert $G_0(s)$. Deux matrices de transfert réelles, rationnelles et ne possédant aucun pôle dans le demi-plan droit, $M(s) \in RH_\infty^{m \times m}$ et $N(s) \in RH_\infty^{p \times m}$ constituent une factorisation à droite d'une matrice rationnelle $G_0(s)$ de dimension $p \times m$ si et seulement les conditions suivantes sont satisfaites:

- $M(s)$ est une matrice carrée, inversible pour tout $s \in \mathbb{C}$.
- $\forall s \in \mathbb{C} \quad G_0(s) = M^{-1}(s)N(s)$
- $\exists \tilde{U}(s) \in RH_\infty^{m \times p}, \tilde{V}(s) \in RH_\infty^{m \times m}$ telles que $\forall s \in \mathbb{C}$

$$\tilde{U}(s)N(s) + \tilde{V}(s)M(s) = I_m$$

A partir de la représentation par factorisation première d'une matrice de transfert $G_0(s)$, on peut représenter la famille des modèles à l'aide du schéma suivant:

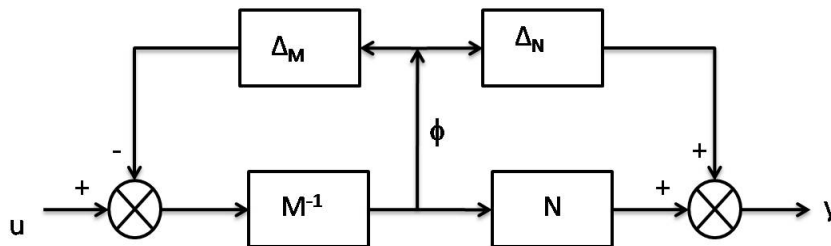


Fig 5.11 Factorisation première à droite d'une matrice de transfert

$$y = (M + \Delta N)\phi$$

$$\phi = M^{-1}(u - \Delta_M \phi) = M^{-1}u - M^{-1}\Delta_M \phi$$

$$(I + M^{-1}\Delta_M)\phi = M^{-1}u$$

$$\phi = (I + M^{-1}\Delta_M)^{-1} M^{-1}u = (M + \Delta_M)^{-1}u$$

$$y = (M + \Delta N)(M + \Delta_M)^{-1}u$$

Le système incertain est donné par:

$$G(s) = (M + \Delta N)(M + \Delta_M)^{-1} \quad 5.56$$

Δ_M et Δ_N représentent les incertitudes sur les facteurs $M(s)$ et $N(s)$ respectivement. Le bloc $[\Delta_M, \Delta_N]$ est inconnu mais il est borné:

$$\|[\Delta_M, \Delta_N]\|_\infty < \varepsilon$$

où ε est un nombre réel supérieur à 0.

La matrice de transfert $G_0(s)$ peut être représentée par une factorisation à gauche. La famille de modèles est donnée par le schéma suivant:

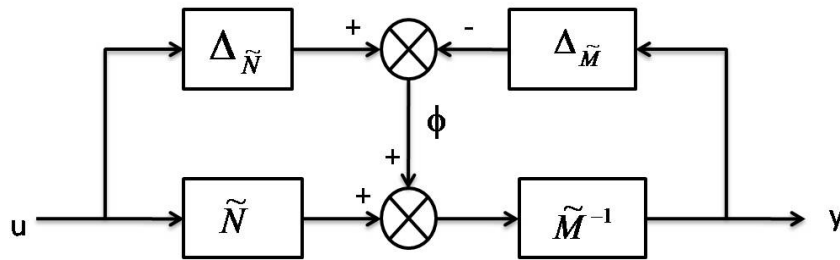


Fig 5.12 Factorisation première à gauche d'une matrice de transfert

$$\phi = \Delta_{\tilde{N}} u - \Delta_{\tilde{M}} y$$

$$y = \tilde{M}^{-1}(\tilde{N}u + \phi) = \tilde{M}^{-1}(\tilde{N}u + \Delta_{\tilde{N}}u - \Delta_{\tilde{M}}y) = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}u + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{N}}u - \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{M}}y$$

$$y + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{M}}y = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}u + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{N}}u$$

$$(I + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{M}})y = \tilde{M}^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

$$y = (I + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{M}})^{-1} \tilde{M}^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

Posons $I = \tilde{M}^{-1}\tilde{M}$, l'expression de y devient:

$$y = (\tilde{M}^{-1}\tilde{M} + \tilde{M}^{-1}\Delta_{\tilde{M}})^{-1} \tilde{M}^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

$$y = (\tilde{M}^{-1}(\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}}))^{-1} \tilde{M}^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

$$y = (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1} \tilde{M}\tilde{M}^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

$$y = (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})u$$

Le système incertain basé sur une factorisation première à gauche est donné par l'expression suivante:

$$G(s) = (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}}) \quad 5.56$$

5.5 Représentation des incertitudes de modèle par LFT

Un système comportant des incertitudes de modèle peut être représenté par une transformation linéaire fractionnaire (Linear fractional transformation), LFT. Cette représentation des incertitudes par LFT permet de séparer le système en deux systèmes sous forme d'un bouclage entre un système augmenté invariant dont les paramètres sont parfaitement connus et définis et un bloc d'incertitudes nommé Δ qui regroupe les différentes incertitudes de modèle. De cette manière, on sépare la partie bien définie du système de la partie incertaine.

La représentation générale par LFT d'un système incluant des incertitudes est illustrée par la figure suivante:

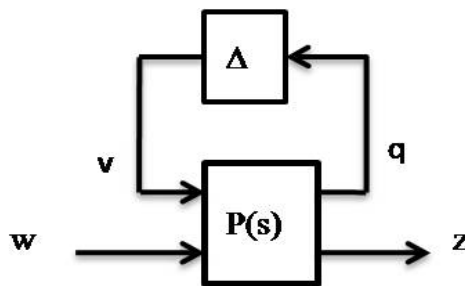


Fig 5.13 Représentation des incertitudes par LFT

$P(s)$ est la matrice de transfert du système augmenté appelée la matrice d'interconnexion

$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

La matrice d'interconnexion $P(s)$ peut être partitionnée comme suit:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad 5.57$$

La matrice de transfert $T_{zw}(s)$ reliant l'entrée w et la sortie z est calculée comme suit:

$$\begin{aligned}
 z &= P_{21}v + P_{22}w & v &= \Delta q \\
 q &= P_{11}v + P_{12}w \\
 q &= P_{11}\Delta q + P_{12}w \\
 q - P_{11}\Delta q &= P_{12}w \\
 q - P_{11}\Delta q &= P_{12}w \\
 (I - P_{11}\Delta)q &= P_{12}w \\
 q &= (I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}w \\
 z &= P_{21}\Delta q + P_{22}w
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de q dans celle de z, on obtient:

$$\begin{aligned}
 z &= P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}w + P_{22}w \\
 z &= (P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} + P_{22})w
 \end{aligned}$$

La matrice de transfert $T_{zw}(s)$ est donnée par:

$$T_{zw}(s) = P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} + P_{22} \quad 5.58$$

Puisque le système $P(s)$ est bouclé par le haut par la matrice d'incertitude Δ , la matrice de transfert $T_{zw}(s)$ est appelée transformation linéaire fractionnaire supérieure notée $F_u(P, \Delta)$

$$\begin{aligned}
 F_u(P, \Delta) &= T_{zw}(s) = P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} + P_{22} \\
 z &= F_u(P, \Delta)w
 \end{aligned}$$

La condition suivante est toujours vérifiée:

$$\|\Delta\|_{\infty} = \sup \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1$$

où $\|\Delta\|_{\infty}$ représente la norme H_{∞} de la matrice $\Delta(s)$.

Avec l'introduction de la transformation linéaire fractionnaire supérieure, les représentations des incertitudes de modèle définies précédemment peuvent être décrites par des systèmes augmentés appropriés ou matrice d'interconnexion $P(s)$.

5.5.1 Représentation par LFT de l'incertitude additive de modèle

Considérons les figures 5.5 et 5.13. L'identification des signaux entre les deux figures permet d'écrire:

- Le signal u dans la figure 5.5 correspond au signal w dans la figure 5.13:
w = u.

- Le signal d'entrée de l'incertitude dans la figure 5.5 est le signal w qui correspond au signal q dans la figure 5.13: $q = w$.
- Le signal de la sortie de l'incertitude additive dans la figure 5.5 correspond au signal v dans la figure 5.13.
- Le signal de sortie y de la figure 5.5 correspond au signal z de la figure 5.13 : $z = y$.

$$q = w = 0v + w$$

$$z = v + G_0 w$$

La matrice d'interconnexion du système de la figure 5.5 correspondant à l'incertitude additive de modèle est donnée par l'expression suivante:

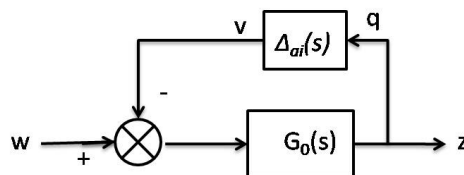
$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad 5.59$$

5.5.2 Représentation par LFT de l'incertitude additive inverse de modèle

L'identification des signaux de la figure 5.6 et 5.13 donne:

- Le signal y de la figure 5.6 correspond au signal z de la figure 5.13: $z = y$.
- Le signal d'entrée de l'incertitude Δ_{ai} dans la figure 5.6 est le signal y qui correspond au signal q dans la figure 5.13: $q = y$.
- Le signal de sortie de l'incertitude Δ_{ai} dans la figure 5.6 correspond au signal v de la figure 5.13
- Le signal u dans la figure 5.6 correspond au signal w dans la figure 5.13: $w = u$.

La figure suivante montre les signaux du système augmenté.



$$z = -G_0 v + G_0 w$$

$$q = z = -G_0 v + G_0 w$$

Le système augmenté sous forme matricielle de la figure 5.6 est:

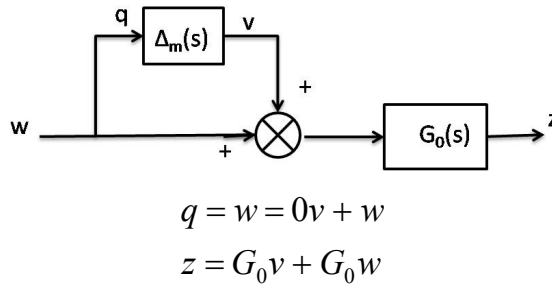
$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_0 & G_0 \\ -G_0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad 5.60$$

5.5.3 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative d'entrée

L'identification des signaux de la figure 5.7 et de la figure 5.13 donne:

- Le signal u de la figure 5.7 correspond au signal w de la figure 5.13: $w = u$
- Le signal à l'entrée du bloc d'incertitude Δ_m de la figure 5.7 est le signal u , celui-ci correspond au signal q dans la figure 5.13: $q = u$.
- Le signal v dans la figure 5.13 correspond au signal de sortie du bloc d'incertitude Δ_m de la figure 5.7.
- Le signal y de la figure 5.7 correspond au signal z de la figure 5.13.

La figure suivante décrit les signaux du système augmenté.



La forme matricielle de ces équations donne le système augmenté $P(s)$ correspondant à la figure 5.7:

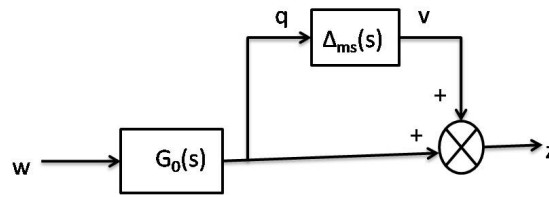
$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad 5.61$$

5.5.4 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative de sortie

L'identification des signaux de la figure 5.8 avec ceux de la figure 5.13 donne:

- Le signal de la figure 5.8 correspond au signal w de la figure 5.13: $w = u$.
- le signal de sortie du bloc G_0 (G_0u) est l'entrée du bloc d'incertitude Δ_{ms} de la figure 5.8, il correspond au signal q de la figure 5.13: $q = G_0u$.
- Le signal v de la figure 5.13 est le signal de sortie du bloc d'incertitude Δ_{ms} de la figure 5.8.
- Le signal y de la figure 5.8 correspond au signal z de la figure 5.13: $z = y$.

La figure suivante montre les signaux du système augmenté.



$$q = G_0 w = 0v + G_0 w$$

$$z = v + G_0 w$$

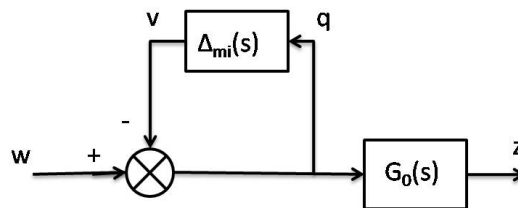
La forme matricielle des ces deux équations défini le système augmenté P(s) de la figure 5.8.

$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_0 \\ I & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad 5.62$$

5.5.5 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative inverse d'entrée

Identifions les signaux de la figure 5.9 avec ceux de la figure 5.13:

- Le signal u dans la figure 5.9 correspond au signal w dans la figure 5.13: $w = u$.
- Le signal de sortie du bloc d'incertitude Δ_{mi} est le signal v dans la figure 5.13.
- Le signal d'entrée du bloc d'incertitude Δ_{mi} est le signal q dans la figure 5.13.
- Le signal y de la figure 5.9 correspond au signal z de la figure 5.13: $z = y$.



$$q = -v + w$$

$$z = G_0(w - v) = -G_0 v + G_0 w$$

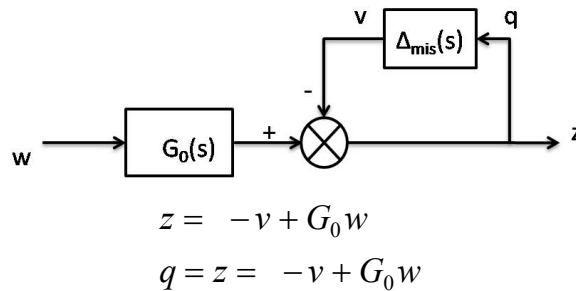
La forme matricielle de ces équations donne le système augmenté P(s) du système incluant une incertitude multiplicative inverse d'entrée:

$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad 5.63$$

5.5.6 Représentation par LFT de l'incertitude multiplicative inverse de sortie

L'identification des signaux de la figure 5.10 avec ceux de la figure 5.13:

- Le signal u de la figure 5.10 correspond au signal w de la figure 5.13: $w = z$
- Le signal de sortie du bloc de l'incertitude Δ_{mis} dans la figure 5.10 correspond au signal v de la figure 5.13.
- Le signal d'entrée du bloc d'incertitude Δ_{mis} dans la figure 5.10 est le signal y , il correspond au signal q dans la figure 5.13: $q = y$.
- Le signal y de la figure 5.10 correspond au signal z de la figure 5.13: $z = y$.



La mise de ces équations sous forme matricielle définit le système augmenté $P(s)$ du système incluant une incertitude multiplicative inverse de sortie.

$$\begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & G_0 \\ -I & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad 5.64$$

5.6 Spécifications pour les systèmes bouclés multivariables

Considérons un système ou processus linéaire multivariable de m entrées et p sorties, asservi par un correcteur $K(s)$ comme indiqué par la figure 5.14.

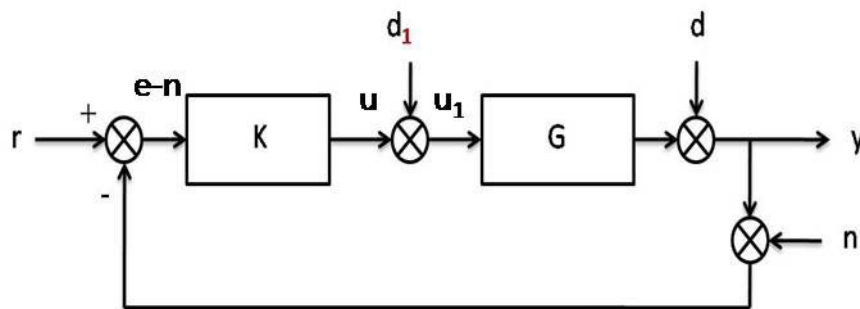


Fig 5.14 Système bouclé multivariable

En tenant compte de la consigne r et des perturbations en entrée et sortie d_1 et d , nous pouvons écrire les équations suivantes:

Le signal de commande est donné par:

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s) - n(s)) = K(s)r(s) - K(s)y(s) - K(s)n(s)$$

Le signal de commande perturbé est:

$$u_1(s) = u(s) + d_1 = K(s)(r(s) - y(s) - n(s)) + d_1 = K(s)r(s) - K(s)y(s) - K(s)n(s) + d_1$$

La sortie y est donnée par:

$$y(s) = G(s)u_1(s) + d = G(s)(K(s)r(s) - K(s)y(s) - K(s)n(s) + d_1) + d$$

$$y(s) = G(s)K(s)r(s) - G(s)K(s)y(s) - G(s)K(s)n(s) + G(s)d_1 + d$$

$$y(s) + G(s)K(s)y(s) = G(s)K(s)r(s) - G(s)K(s)n(s) + G(s)d_1 + d$$

$$(I + GK)y(s) = G(s)K(s)r(s) - G(s)K(s)n(s) + G(s)d_1 + d$$

En multipliant les deux membre de la dernière expression par $(I + G(s)K(s))^{-1}$, on obtient l'expression de la sortie y :

$$y(s) = (I + GK)^{-1} G(s)K(s)r(s) - (I + GK)^{-1} G(s)K(s)n(s) + (I + GK)^{-1} G(s)d_1 + (I + GK)^{-1} d$$

La fonction de sensibilité en sortie est définie par l'expression suivante:

$$S_o = (I + GK)^{-1}$$

La fonction de sensibilité en entrée est donnée par l'expression suivante:

$$S_i = (I + KG)^{-1}$$

La fonction de sensibilité complémentaire est définie en sortie par:

$$T_o = (I + G(s)K(s))^{-1} G(s)K(s)$$

La fonction de sensibilité complémentaire est définie en entrée par:

$$T_i = (I + K(s)G(s))^{-1} K(s)G(s)$$

Les relations suivantes sont utilisées dans les calculs:

$$S_o(s)G(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} G(s) = G(s) (I + K(s)G(s))^{-1} = G(s)S_i(s)$$

$$S_i(s)K(s) = (I + K(s)G(s))^{-1} K(s) = K(s) (I + G(s)K(s))^{-1} = K(s)S_o(s)$$

L'expression de la sortie $y(s)$ en fonction de la fonction de sensibilité $S_o(s)$ et de la fonction de sensibilité complémentaire $T_o(s)$ est donnée par:

$$y(s) = T_o(s)r(s) + S_o(s)G(s)d_1(s) + S_o(s)d(s) - T_o(s)n(s)$$

L'erreur $e(s)$ est donnée par:

$$e(s) = r(s) - y(s) = r(s) - T_o(s)r(s) - S_o(s)G(s)d_1(s) - S_o(s)d(s) + T_o(s)n(s)$$

La relation suivante est vérifiée:

$$r(s) - T_o(s)r(s) = (I - T_o(s))r(s) = S_o(s)r(s)$$

L'expression de l'erreur devient:

$$e(s) = S_o(s)r(s) - S_o(s)G(s)d_1(s) - S_o(s)d(s) + T_o(s)n(s)$$

La sortie $u(s)$ du contrôleur $K(s)$ est:

$$u(s) = K(s)(e(s) - n(s))$$

$$u(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)G(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)d(s) + K(s)T_o(s)n(s) - K(s)n(s)$$

On a:

$$K(s)T_o(s)n(s) - K(s)n(s) = K(s)(T_o - I)n(s) = -K(s)S_0(s)n(s)$$

$$K(s)S_0(s)G(s) = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}G(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}K(s)G(s) = T_i(s)$$

En remplaçant les deux expressions précédentes dans celle de $u(s)$, on obtient l'équation finale de $u(s)$:

$$u(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)d(s) - T_i(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)n(s)$$

La commande perturbée $u_1(s)$ est:

$$u_1(s) = u(s) + d_1(s)$$

$$u_1(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)d(s) - T_i(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)n(s) + d_1(s)$$

On a la relation suivante:

$$d_1(s) - T_i(s)d_1(s) = (I - T_i(s))d_i = S_i(s)d_1(s)$$

Remplaçons l'expression ci-dessus dans celle de $u_1(s)$, on obtient l'expression finale de $u_1(s)$:

$$u_1(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)d(s) + S_i(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)n(s)$$

Finalement, on trouve les équations suivantes qui décrivent le comportement du système en boucle fermée de la figure 5.14.

La sortie $y(s)$ est

$$y(s) = T_o(s)r(s) + S_o(s)G(s)d_1(s) + S_o(s)d(s) - T_o(s)n(s) \quad 5.65$$

L'erreur de régulation $e(s)$ est

$$e(s) = S_o(s)r(s) - S_o(s)G(s)d_1(s) - S_o(s)d(s) + T_o(s)n(s) \quad 5.66$$

La sortie du contrôleur $u(s)$ est

$$u(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)d(s) - T_i(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)n(s) \quad 5.67$$

La commande perturbée $u_1(s)$ est

$$u_1(s) = K(s)S_0(s)r(s) - K(s)S_0(s)d(s) + S_i(s)d_1(s) - K(s)S_0(s)n(s) \quad 5.68$$

Les équations (5.65) à (5.68) nous permettent de sélectionner les performances du système en boucle fermée de la figure 5.14.

Les objectifs du système en boucle fermée sont les suivants:

- La stabilité,

- robustesse,
- un bon suivi de la référence ou de la trajectoire,
- un bon rejet des perturbations.

Les outils classiques d'analyse appliqués aux systèmes monovariables tels que l'analyse par la méthode de Bode et de Nyquist ne sont pas directement applicables aux systèmes multivariables.

L'outil d'analyse des systèmes multivariables s'appuie sur le tracé des valeurs singulières des matrices de transfert qui représente la notion de gain pour ces systèmes.

Rappelons que les valeurs singulières d'une matrice de transfert $M(j\omega)$ sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H(j\omega)M(j\omega)$ notées $\sigma_i(M)$ où $M^H(j\omega)$ est le hermétien (transposé conjugué) de $M(j\omega)$.

La valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(M)$ est la norme induite sur les matrices par la norme euclidienne des vecteurs.

$$\bar{\sigma}(M) = \frac{\|M r\|_2}{\|r\|_2} \quad \|r\|_2 \neq 0$$

où r est le vecteur d'entrée, M est la matrice de transfert du système. $\bar{\sigma}(M)$ est l'amplification maximale ou le gain maximum du système dont la matrice de transfert est M .

En conclusion, on peut dire que la norme H_∞ de la matrice de transfert $M(j\omega)$ notée $\|M\|_\infty$ est la borne supérieure de la valeur singulière maximale de $M(j\omega)$ quand ω varie sur l'intervalle $[0, \infty[$.

$$\|M\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty[} \bar{\sigma}(M(j\omega))$$

Les critères de stabilité, de robustesse, de la qualité du suivi de trajectoire et de la qualité du rejet de perturbations peuvent s'évaluer à partir des représentations fréquentielles des matrices de transfert du système bouclé, définies par les équations (5.65) à (5.68).

5.6.1 La stabilité

La stabilité du système en boucle fermée de la figure 5.14 est évaluée à partir des lieux des pôles (la partie réelle de tous les pôles de la boucle doit être

strictement négative). Toutefois, cette stabilité ne suffit pas, il faut définir des marges de stabilité.

La marge de module M_m est définie, pour un système monovariante, comme la plus petite distance au point (-1,0) du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$. Ce qui peut s'écrire:

$$M_m = \min_{\omega} (|1 + G(j\omega)K(j\omega)|)$$

En remarquant que:

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| = \frac{1}{|S(j\omega)|}$$

d'autre par on a:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|}$$

Ce qui donne le résultat suivant:

$$\min_{\omega} (|1 + G(j\omega)K(j\omega)|) = \frac{1}{\max_{\omega} (1/|1 + G(j\omega)K(j\omega)|)} = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

Or la valeur maximale de $S(j\omega)$ en monovariante représente la norme H_{∞} de $S(j\omega)$.

La marge de module pour un système monovariante est définie par:

$$M_m = \frac{1}{\|S(j\omega)\|_{\infty}} \tag{5.69}$$

La marge de module pour un système multivariante est définie de la même manière qu'en monovariante. On définit en multivariante la marge de module en sortie par:

$$M_m = \frac{1}{\|S_0(j\omega)\|_{\infty}} \tag{5.70}$$

La marge de module en entrée pour un système multivariante est définie par:

$$M_m = \frac{1}{\|S_i(j\omega)\|_{\infty}} \tag{5.71}$$

5.6.2 Performances du système bouclé

Spécification 1

L'équation (5.66) montre que pour obtenir une erreur de contrôle faible par rapport à la référence r et aux perturbations d_1 et d , les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}(S_0(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(S_0(j\omega)G(j\omega))$ doivent être faibles.

Spécification 2

L'équation (5.66) montre que pour avoir une bonne atténuation du bruit de mesure n , la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(T_0(j\omega))$ doit être faible.

Spécification 3

L'équation (5.68) montre que pour obtenir une bonne rejection des perturbations d_1 et d par rapport à l'entrée u_1 du processus et une influence faible du signal de référence r et du bruit de mesure n sur u_1 , les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}(S_i(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(K(j\omega)S_0(j\omega))$ doivent être faibles.

On remarque que pour les spécifications 1 et 3, $\bar{\sigma}(S_0(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(S_i(j\omega))$ doivent être faibles, ce qui implique que $\bar{\sigma}(T_0(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(T_i(j\omega))$ sont grandes. Ceci est en contradiction avec la spécification 2 qui stipule que $\bar{\sigma}(T_0(j\omega))$ doit être faible. En réalité ces spécifications doivent être formulées dans le domaine fréquentiel. Pour les spécifications 1 et 3, $\bar{\sigma}(S_0(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(S_i(j\omega))$ doivent être faibles en basses fréquences (dans la bande passante du système en boucle fermée), alors que pour la spécification 2, $\bar{\sigma}(T_0(j\omega))$ doit être faible en hautes fréquence (en dehors de la bande passante du système en boucle fermée).

5.6.3 Etude de la Robustesse

Les systèmes dynamiques physiques sont de type passe-bande. Ils ont un gain qui diminue en hautes fréquences. Il en résulte qu'au delà d'une certaine bande de fréquences, certaines dynamiques sont mal connues, ainsi des sources de manque de robustesse de stabilité des systèmes asservis correspondent à une amplification des modes hautes fréquences mal connus. Afin de remédier à ce problème, il faut que le gain du contrôleur décroît au delà de la bande passante du système bouclé. Une manière de s'en assurer consiste à considérer la réponse en fréquence du transfert entre la sortie u du contrôleur et la consigne r : $K(s)S_0(s)$ (eq. 5.67). L'équation (5.65) indique que le transfert entre la consigne r et la sortie y est la fonction de sensibilité complémentaire T_0 . Pour assurer la

robustesse en stabilité, il faut que la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(T_0(j\omega))$ soit faible en hautes fréquences.

Considérons le système augmenté associé à la matrice d'incertitude $\Delta(s)$ de modèle. On a la forme LFT générale donnée par la figure

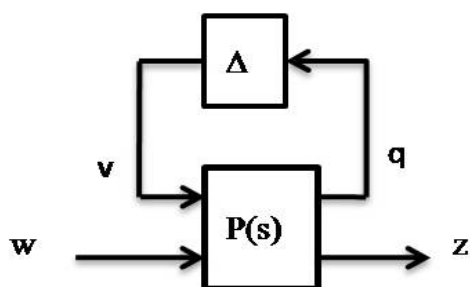


Fig 5.15 Représentation LFT de l'incertitude de modèle

Soit $K(s)$ la matrice de transfert du régulateur calculé à partir du modèle nominal du processus. Le système en boucle fermée est indiqué par la figure 5.16.

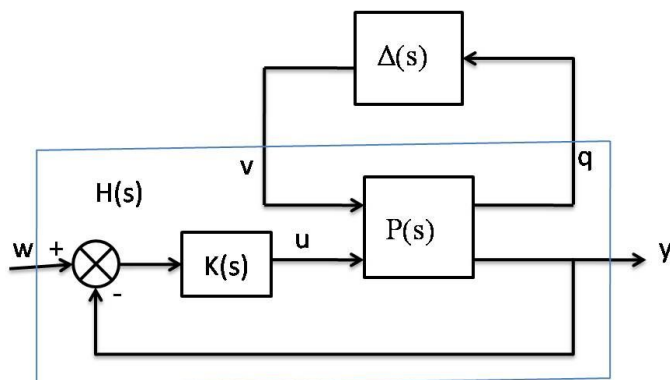


Fig 5.16 Représentation LFT du système bouclé

On peut mettre le système de la figure 5.16 sous une nouvelle forme LFT dont le système augmenté $H(s)$ dépend du régulateur $K(s)$, comme indiqué par la figure 5.17.

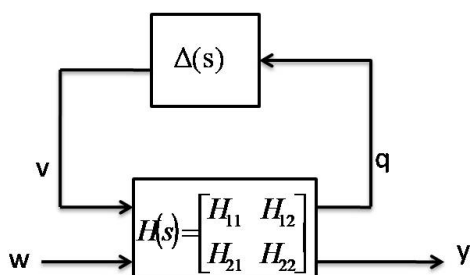


Fig 5.17 Représentation LFT du système bouclé

L'étude de la robustesse consiste à déterminer la plus grande incertitude $\Delta(s)$ permettant de maintenir la stabilité du système de la figure 5.17.

Le régulateur $K(s)$ stabilise le système nominale de sorte que le système augmenté $H(s)$ est un système stable. Si l'incertitude $\Delta(s)$ est une fonction de transfert stable, la seule source d'instabilité provient du bouclage avec la matrice d'incertitude c'est-à-dire le transfert entre l'entrée v et la sortie q : $M(s) = H_{11}(s)$. Ceci indique que l'étude de la stabilité de la figure 5.15 est équivalente à l'étude de la stabilité du système bouclé de la figure 5.18.

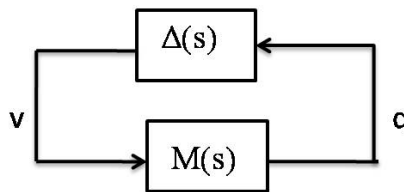


Fig 5.18 Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

Le théorème du petit gain consiste à déterminer une valeur maximale pour la norme H_∞ de l'incertitude $\Delta(s)$.

Théorème du petit gain [3, 4]

Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont des matrices de transfert stables, le système de la figure 5.15 est stable pour tout $\Delta(s)$ tel que $\|\Delta(s)\|_\infty < \alpha$ si et seulement si $\|M(s)\|_\infty < 1/\alpha$ où $M(s) = H_{11}(s)$.

Synthèse H_∞ des régulateurs dynamiques et μ -synthèse6.1 Conception H_∞

Soit le schéma-bloc de la figure 6.1 qui représente le système en boucle fermée et qui peut être considéré comme l'un des bases de la synthèse H_∞ où $G(s)$ est le modèle du système à contrôler et $K(s)$ est le régulateur à déterminer.

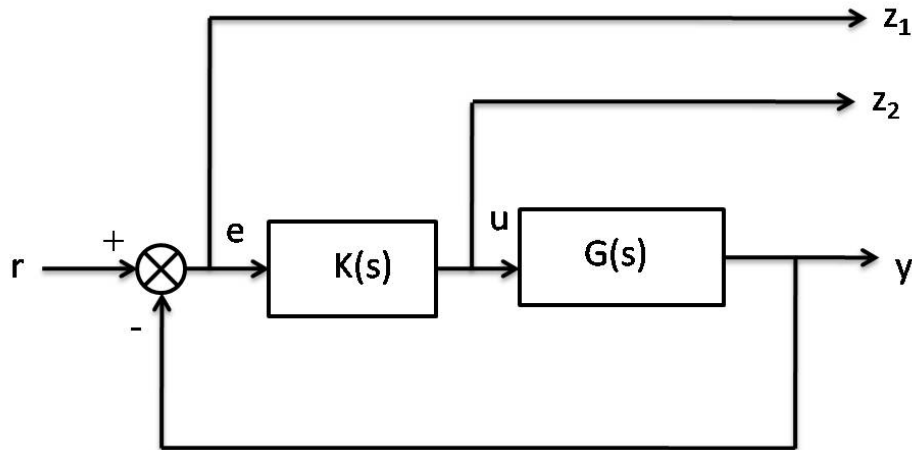


Fig 6.1 Système bouclé

Le régulateur $K(s)$ doit satisfaire deux objectifs:

1. Obtenir un bon suivi de la consigne r ,
2. limiter le signal de contrôle pour ne pas trop saturer les actionneurs.

Pour satisfaire le premier objectif, il faut minimiser le signal z_1 qui correspond au signal d'erreur e .

Pour satisfaire le deuxième objectif, il faut minimiser le signal z_2 qui correspond au signal de contrôle délivré par le régulateur.

La matrice de transfert entre le signal de sortie $z_1=e$ et la consigne r est donnée par l'équation 5.66:

$$z_1(s) = e(s) = S_0(s)r(s) = (I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}r(s)$$

La matrice de transfert est:

$$(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1} \quad 6.1$$

La matrice de transfert entre le signal de contrôle $z_2 = u$ et la consigne r est fournie par l'équation 5.67:

$$u(s) = K(s)S_0(s)r(s)$$

La matrice de transfert est:

$$K(j\omega)(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1} \quad 6.2$$

L'objectif final consiste à résoudre le problème suivant: chercher un régulateur $K(s)$ stabilisant le système de la figure 6.1 et qui minimise la norme H_∞ du transfert entre la sortie $z = [z_1 \ z_2]^T$ et l'entrée de consigne r , ce qui se traduit par l'expression suivante:

$$\min_{K \text{ stabilisant}} \left\| \begin{matrix} (I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1} \\ K(j\omega)(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty \quad 6.3$$

La synthèse H_∞ [3, 4, 6, 7, 61] utilise la notion de problème standard qui est représenté sur la figure 6.2.

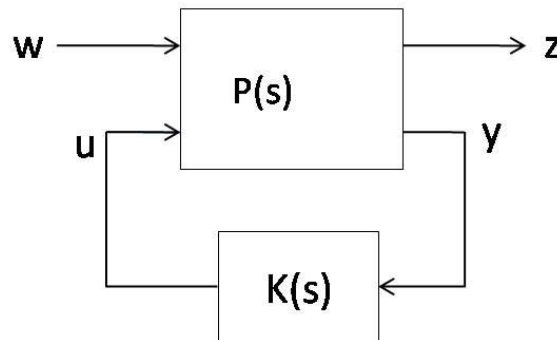


Fig 6.2. Configuration standard du système bouclé

La figure 6.2 représente la configuration du système en boucle fermée pour la synthèse H_∞ où $P(s)$ est la matrice d'interconnexion ou le système augmenté et $K(s)$ est le régulateur à calculer.

- Le vecteur w représente les signaux d'entrée tels que les signaux de référence, de perturbations et de bruit.
- Le vecteur u représente les signaux de commande délivrés par le régulateur $K(s)$,
- Le vecteur z représente les signaux de sortie à minimiser et qui reflètent la mesure de la robustesse en stabilité et la robustesse en performances du système en boucle fermée.
- Le vecteur y représente les mesures délivrées par les capteurs pour élaborer la commande u .

En tenant compte des dimensions des vecteurs w , u , z et y , la matrice d'interconnexion $P(s)$ peut être partitionnée comme suit:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad 6.4$$

où P_{11} désigne le transfert entre la sortie z et l'entrée w , $P_{12}(s)$ désigne le transfert entre la sortie z et l'entrée u , $P_{21}(s)$ désigne le transfert entre la sortie y et l'entrée w , $P_{22}(s)$ désigne le transfert entre la sortie y et l'entrée u .

Calculons la matrice de transfert entre la sortie z et l'entrée w du système en boucle fermée de la figure 6.2:

$$\begin{aligned} z(s) &= P_{11}(s)w(s) + P_{12}(s)u(s) \\ y(s) &= P_{21}(s)w(s) + P_{22}(s)u(s) \\ u(s) &= K(s)y(s) \end{aligned}$$

Portons l'expression de $u(s)$ dans celle de $y(s)$, on obtient:

$$\begin{aligned} y(s) &= P_{21}(s)w(s) + P_{22}(s)K(s)y(s) \\ y(s) - P_{22}(s)K(s)y(s) &= P_{21}(s)w(s) \\ (I - P_{22}(s)K(s))y(s) &= P_{21}(s)w(s) \\ y(s) &= (I - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s)w(s) \\ u(s) &= K(s)y(s) = K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s)w(s) \end{aligned}$$

Remplaçons l'expression de $u(s)$ dans celle de $z(s)$, on obtient:

$$\begin{aligned} z(s) &= P_{11}(s)w(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s)w(s) \\ z(s) &= (P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s))w(s) = F_l(P(s), K(s))w(s) \end{aligned} \quad 6.5$$

où $F_l(P(s), K(s))$ est appelée la transformation fractionnaire linéaire basse (lower linear fractional transformation LFT).

L'objectif fixé par l'équation 6.3 devient:

Chercher un régulateur $K(s)$ stabilisant le système en boucle fermée de la figure 6.2 et qui minimise la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée $F_l(P(s), K(s))$:

$$\min_{K \text{ Stabilisant}} \|F_l(P(s)K(s))\|_{\infty} \quad 6.6$$

$$z(s) = (P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s))w(s) = F_l(P(s), K(s))w(s)$$

6.2 Résolution du problème H_∞ par équations de Riccati

La solution du problème d'optimisation (6.6) n'est pas unique. En pratique pour résoudre le problème (6.6), il suffit de trouver un régulateur K(s) stabilisant le système de la figure 6.2 telle que la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée F_l(P(s),K(s)) est inférieure à un nombre positive donné γ: c'est-à-dire:

$$\|F_l(P(s)K(s))\|_{\infty} < \gamma \quad 6.7$$

où $\gamma > \gamma_0 = \min_{K \text{ Stabilisant}} \|F_l(P(s)K(s))\|_{\infty}$.

6.2.1 Solution H_∞ pour un système normalisé

Cette approche est connue sous le nom d'Algorithme de Glover-Doyle [4, 6, 7, 61]]. C'est la méthode de synthèse la plus utilisée.

La synthèse H_∞ utilise la représentation d'état de la matrice d'interconnexion P(s) que nous écrivons sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad 6.8$$

où

- $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état,
- $w(t) \in R^{mw}$ est le vecteur d'entrée (signaux de référence, de perturbations et de bruit),
- $u(t) \in R^{mu}$ est le vecteur des signaux de contrôle délivrés par le régulateur.
- $z(t) \in R^{pz}$ est le vecteur des signaux de sortie à minimiser,
- $y(t) \in R^{py}$ est le vecteur des mesures généralement délivrés par les capteurs.

avec $pz \geq mu$ et $py \leq mw$.

La matrice d'interconnexion $P(s)$ peut être écrite sous la forme compacte

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad 6.9$$

Où $B = [B_1 \ B_2]$, $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$

La plupart des systèmes industriels sont strictement propres, donc la matrice d'interconnexion $P(s)$ possèdera $D_{22} = 0$.

Pour résoudre le problème H_∞ , Glover et Doyle [4, 6, 7, 61] supposent les hypothèses suivantes satisfaites:

A1. (A, B_2) est stabilisable et (A, C_2) est détectable,

A2. $\begin{bmatrix} A - j\omega & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ est de rang plein $\forall \omega$,

A3. $\begin{bmatrix} A - j\omega & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ est de rang plein $\forall \omega$,

A4. $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{mw} \end{bmatrix}$ and $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{pu} \end{bmatrix}$

L'hypothèse A4 est une hypothèse simplificatrice pour avoir des équations simples dites de normalisation.

La synthèse H_∞ utilise les solutions de deux équations de Riccati. L'équation de Riccati est définie par:

$$E^T X + XE - XWX + Q = 0 \quad 6.10$$

où $W = W^T$ et $Q = Q^T$ des matrices de même dimensions que la matrice d'état A . A toute équation de Riccati correspond une matrice Hamiltonienne définie par:

$$\begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \quad 6.11$$

La solution symétrique X , si elle existe, de l'équation de Riccati (6.10) est notée:

$$X = Ric \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \quad 6.12$$

telle que la matrice $(E - WX)$ est stable.

Les deux équations de Riccati utilisées dans la synthèse H_∞ sont définie comme suit:

Posons $D_{1d} = [D_{11} \ D_{12}]$ et $D_{d1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$

On définit les matrices suivantes:

$$R_1 = D_{1d}^T D_{1d} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{nm1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = D_{d1} D_{d1}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{np1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En supposant que les matrices R_1 et R_2 sont inversibles, deux matrices Hamiltoniennes sont définies comme suit:

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T D_{1d}^T \end{bmatrix} R_1^{-1} \begin{bmatrix} D_{1d}^T C_1 & B^T \end{bmatrix} \quad 6.13$$

$$J = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ -B_1 D_{d1}^T \end{bmatrix} R_2^{-1} \begin{bmatrix} D_{d1} B_1^T & C \end{bmatrix} \quad 6.14$$

Posons

$$X = Ric(H) \quad 6.15$$

qui est la solution de l'équation de Riccati correspondant à la matrice Hamiltonienne H et

$$Y = Ric(J) \quad 6.16$$

qui est la solution de l'équation de Riccati correspondant à la matrice Hamiltonienne J.

Les deux solutions X et Y permettent de construire deux matrices: la matrice dite de retour d'état F et la matrice de gain d'observateur L.

$$F = -R_1^{-1} (D_{1d}^T C_1 + B^T X) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$L = -(B_1 D_{d1}^T + Y C^T) R_2^{-1} = [L_1 \quad L_2] = [L_{11} \quad L_{12} \quad L_2]$$

F_1 est de dimension $m \times n$, F_2 : $\mu \times n$, L_1 : $p \times n$, L_2 : $py \times n$.

Théorème 6.1 [4, 6, 7, 60, 61]]

le régulateurs $K(s)$ rationnels, stabilisant le système $P(s)$ et vérifiant l'inégalité

$$\|F_l(P(s)K(s))\|_\infty < \gamma$$

existent si et seulement si les deux équations de Riccati qui correspondent aux matrices Hamiltoniennes H et J admettent respectivement deux solutions X et Y positives dont le rayon spectral $\rho(XY)$ est inférieure à γ^2 avec:

$$\gamma > \max(\overline{\sigma}[D_{1111}, D_{1112}], \overline{\sigma}(D_{1112}^T, D_{1121}^T))$$

Le régulateur $K(s)$ est décrit par la transformation fractionnaire linéaire:

$$K(s) = F_l(M(s), \Phi(s)) \quad 6.17$$

où $\Phi(s) \in RH_\infty$ est une matrice de transfert quelconque de dimensions $\mu \times py$ vérifiant $\|\Phi(s)\| < \gamma$.

$M(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad 6.18$$

où

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X - B_2 B_2^T X - Z Y C_2^T C$$

$$\hat{B} = [Z Y C_2^T \quad Z B_2]$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -B_2 X^T \\ -C_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & I_{\mu} \\ I_{py} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1}$$

En particulier, le régulateur $K_0(s)$ correspondant à $\Phi(s) = 0$, appelé régulateur central très utilisé en pratique, admet la représentation d'état suivante:

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & ZYC_2^T \\ -B_2X & 0 \end{bmatrix} \quad 6.19$$

Les résultats (6.18) et (6.19) sont obtenues sous l'hypothèse A4 qui indique que les matrices D_{12} et D_{21} sont sous la forme normalisée et donc $P(s)$ est appelé système normalisé.

6.2.2 Solution pour le système particulier

La configuration indiquée par la figure 6.1 est très utilisée en pratique. Identifions les signaux de la figure 6.1 et de la figure 6.2:

- Le signal w (Fig 6.2) correspond au signal r (Fig 6.1): $w = r$,
- Le signal u (Fig 6.2) correspond au signal u (Fig 6.1): $u = u$,
- Le signal z_1 (Fig 6.1) correspond au signal y (Fig 6.2): $z_1 = y$,
- Le signal z_2 (Fig 6.1) correspond au signal u (Fig 6.2): $z_2 = u$,
- Le signal y (Fig 6.2) correspond au signal e (Fig 6.1): $y = e$.

$$z_1(s) = e(s) = r(s) - y(s) = w(s) - G(s)u(s) = \begin{bmatrix} I & -G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

$$z_2(s) = 0w(s) + u(s) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

$$y(s) = e(s) = z_1(s) = \begin{bmatrix} I & -G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

La matrice d'interconnexion $P(s)$ du système de la figure 6.1 est donnée par:

$$P(s) = \begin{bmatrix} I & -G(s) \\ 0 & I \\ I & -G(s) \end{bmatrix}$$

avec $z = [z_1 \ z_2]^T$ d'où $P_{11}(s) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ et $P_{12}(s) = \begin{bmatrix} -G(s) \\ I \end{bmatrix}$, $P_{21}(s) = I$, $P_{22}(s) = -G(s)$.

la représentation d'état du système $G(s)$ de la figure 6.1 est donné par:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$G(s)$ possède m entrées et p sorties.

La figure 6.1 montre qu'au signal de sortie z_1 correspond l'entrée w (r) et l'entrée $-u$ à travers le transfert $G(s)$. Donc la représentation d'état est:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - Bu(t) \\ z_1(t) &= Cx(t) + w(t) \\ z_2(t) &= 0x(t) + 0w(t) + u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w(t)\end{aligned}$$

La représentation d'état de la matrice d'interconnexion du système de la figure 6.1 est:

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & 0 & -B \\ C & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ C & I_p & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -B, \quad C_1 = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = C, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad D_{21} = I_p, \\ D_{22} = 0.$$

Le système $P(s)$ étant normalisé, on applique le théorème 6.1 pour calculer le régulateur central $K_0(s)$ pour le système de la figure 6.1.

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

avec

$$\begin{aligned}A_k &= A - BB^T X - (1 - \gamma^{-2})^{-1} ZYC^T C \\ B_k &= ZYC^T \\ C_k &= B^T X, \quad D_k = 0\end{aligned}$$

6.2.3 Normalisation du système

Les résultats trouvés dans les étapes précédentes pour le calcul d'un régulateur H_∞ , sont valables seulement pour un système augmenté normalisé. Autrement dit le système $P(s)$ doit satisfaire l'hypothèse A4 imposée aux matrices D_{12} et D_{21} .

En pratique dans la majorité des systèmes, la matrice d'interconnexion n'est pas normalisée. Afin d'utiliser le théorème 6.1, dans ce cas, on doit appliquer

certaines transformations aux matrices D_{12} et D_{21} pour normaliser le système augmenté $P(s)$.

La décomposition en valeurs singulières (section 5.4) permet de trouver des matrices unitaires orthonormées U_{12} , V_{12} , U_{21} et V_{21} pour satisfaire les relations suivantes:

$$D_{12} = U_{12}^T \begin{bmatrix} 0 \\ R_{12} \end{bmatrix} V_{12}$$

$$D_{21} = U_{21}^T \begin{bmatrix} 0 & R_{21} \end{bmatrix} V_{21}$$

où

$$U_{12} D_{12} V_{12}^T R_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$R_{21}^{-1} U_{21} D_{21} V_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

les deux équations ci-dessus sont normalisées comme indiqué par l'hypothèse A4.

R_{12} est une matrice $\mu \times \mu$, R_{21} est une matrice $\nu \times \nu$.

Si $\nu > \mu$ et $\nu < \mu$, les matrices U_{12} et V_{21} peuvent être partitionnées comme suit:

$$U_{12} = \begin{bmatrix} U_{121} \\ U_{122} \end{bmatrix} \quad 6.21$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} U_{121} \\ U_{122} \end{bmatrix} \quad 6.22$$

où

- U_{121} est une matrice de dimensions $(\nu - \mu) \times \nu$,
- U_{122} est une matrice de dimensions $\mu \times \nu$,
- V_{211} est une matrice de dimensions $(\mu - \nu) \times \mu$,
- U_{212} est une matrice de dimensions $\nu \times \mu$,

La décomposition en valeurs singulières des matrices D_{12} et D_{21} permet de définir de nouvelles variables \bar{z} , \bar{y} , \bar{w} et \bar{u} , ainsi qu'une nouvelle matrice d'interconnexion $\bar{P}(s)$ pour le système et un nouveau régulateur $\bar{K}(s)$.

l'expression de la matrice D_{12} est:

$$D_{12} = U_{12}^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_{12} V_{12}$$

D_{12} est la relation entre la sortie z et l'entrée u :

$$z = D_{12}u \quad \text{ou} \quad z = U_{12}^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_{12} V_{12} u$$

$$U_{12} z = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_{12} V_{12} u$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{u}$$

Ce qui donne pour la nouvelle variable: $\bar{z} = U_{12} z$ et $z = U_{12}^T \bar{z}$, $\bar{u} = R_{12} V_{12} u$ et $u = V_{12}^T R_{12}^{-1} \bar{u}$.

La matrice D_{21} exprime la relation entre la sortie y et l'entrée w :

$$D_{21} = U_{21}^T R_{21} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} V_{21} \quad \text{et} \quad y = D_{21} w$$

$$y = U_{21}^T R_{21} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} V_{21} w$$

$$R_{21}^{-1} U_{21} y = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} V_{21} w$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{w}$$

Ce qui donne pour les nouvelles variables \bar{y} et \bar{w} :

$$\bar{y} = R_{21}^{-1} U_{21} y \quad \text{et} \quad y = U_{21}^T R_{21} \bar{y}, \quad \bar{w} = V_{21} w \quad \text{et} \quad w = V_{21}^T \bar{w}.$$

En résumé on a les relations suivantes:

$\bar{z} = U_{12} z$ et $\bar{y} = R_{21}^{-1} U_{21} y$, l'expression matricielle de ces relations donne:

$$\begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{12} & 0 \\ 0 & R_{21}^{-1} U_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \quad 6.23$$

d'autre part l'expression du vecteur $[z \ y]^T$ est donnée par:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad 6.24$$

Les expressions $w = V_{21}^T \bar{w}$ et $u = V_{12}^T R_{12}^{-1} \bar{u}$ définissent le vecteur $[w \ u]^T$ en fonction du nouveau vecteur $[\bar{w} \ \bar{u}]^T$:

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{21}^T & 0 \\ 0 & V_{12}^T R_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad 6.25$$

Remplaçons l'expression (6.24) dans (6.23), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{12} & 0 \\ 0 & R_{21}^{-1} U_{21} \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad 6.26$$

Remplaçons l'expression (6.25) dans (6.26), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{12} & 0 \\ 0 & R_{21}^{-1} U_{21} \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} V_{21}^T & 0 \\ 0 & V_{12}^T R_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad 6.27$$

L'expression (6.27) définit donc la matrice d'interconnexion normalisée $\bar{P}(s)$:

$$\bar{P}(s) = \begin{bmatrix} U_{12} & 0 \\ 0 & R_{21}^{-1} U_{21} \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} V_{21}^T & 0 \\ 0 & V_{12}^T R_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad 6.28$$

L'expression (6.28) utilise la représentation d'état de la matrice P(s).

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où $B = [B_1 \ B_2]$, $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$.

Pour calculer l'expression (6.28) de $\bar{P}(s)$, on applique la règle suivante [3] de l'algèbre linéaire:

$$G_1(s)G_2(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 & \\ 0 & A_2 & B_2 & \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 & \end{array} \right] \quad 6.29$$

où $G_1(s) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ et $G_2(s) = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

La règle (6.29) appliquée à l'expression (6.28) nous permet de calculer la représentation d'état du système augmenté normalisé $\bar{P}(s)$ en fonction des matrices du système réel P(s):

$$\bar{P}(s) = \begin{bmatrix} A & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{bmatrix} \quad 6.30$$

$$\bar{B}_1 = B_1 V_{21}^T$$

$$\bar{B}_2 = B_2 V_{12}^T R_{12}^{-1}$$

$$\bar{C}_1 = U_{12} C_1$$

$$\bar{D}_{11} = U_{12} D_{11} V_{21}^T$$

$$\bar{D}_{12} = U_{12} D_{12} V_{12}^T R_{12}^{-1}$$

$$\bar{C}_2 = R_{21}^{-1} U_{21} C_2$$

$$\bar{D}_{21} = R_{21}^{-1} U_{21} D_{21} V_{21}^T$$

$$\bar{D}_{22} = 0$$

Les matrices F et L définies pour P(s) sont:

$$F = -R_1^{-1} (D_{1d}^T C_1 + B^T X) \text{ et } L = -(B_1 D_{d1}^T + Y C^T) R_2^{-1}$$

Les matrices correspondantes pour le système $\bar{P}(s)$ sont :

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} V_{21} & 0 \\ 0 & R_{12} V_{12} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} \\ \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_{11} = V_{211} F_1, \quad \bar{F}_{12} = V_{212} F_1, \quad \bar{F}_2 = R_{12} V_{12} F_2$$

$$\bar{L} = L \begin{bmatrix} U_{12}^T & 0 \\ 0 & U_{21}^T R_{21} \end{bmatrix} = [\bar{L}_{11} \quad \bar{L}_{12} \quad \bar{L}_2]$$

$$\bar{L}_{11} = L_1 U_{121}^T, \quad \bar{L}_{12} = L_1 U_{122}^T, \quad \bar{L}_2 = L_2 U_{21}^T R_{21}$$

Le système $\bar{P}(s)$ étant maintenant un système normalisé, le régulateur correspondant est $\bar{K}(s)$. Le système réel non normalisé P(s) doit être commandé par le régulateur K(s).

Le régulateur K(s) est calculé à partir de $\bar{K}(s)$ comme suit:

$$u(s) = K(s)y(s)$$

Remplaçons u et y par leurs expressions respectives dans celle de $u(s)$, on obtient:

$$V_{12}^T R_{12}^{-1} \bar{u}(s) = K(s) U_{21}^T R_{21} \bar{y}(s)$$

$$\bar{u}(s) = R_{12} V_{12} K(s) U_{21}^T R_{21} \bar{y}(s) = \bar{K}(s) \bar{y}(s)$$

Le contrôleur $\bar{K}(s)$ est donné par:

$$\bar{K}(s) = R_{12} V_{12} K(s) U_{21}^T R_{21}$$

A partir de l'expression ci-dessus, on calcule l'expression du régulateur $K(s)$:

$$K(s) = V_{12}^T R_{12}^{-1} \bar{K}(s) R_{21}^{-1} U_{21} \tag{6.31}$$

Le schéma de normalisation du système $P(s)$ en un système $\bar{P}(s)$, basé sur la transformation (6.28) est illustré par la figure 6.3.

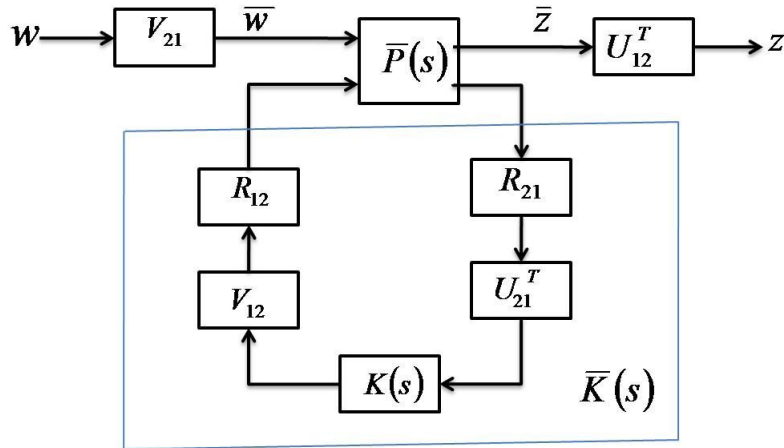


Fig. 6.3 Configuration de Normalisation

Les résultats de normalisation trouvés ci-dessus et le théorème 6.1 permettent de définir le corollaire suivant pour calculer le régulateur central.

Corollaire 6.1 [4, 6, 7, 60, 61]

Supposons que le système $P(s)$ satisfait les hypothèses A1-A4, alors

- a) Il existe un régulateur $K(s)$ stabilisant tel que $\|F_l(P(s)K(s))\|_\infty < \gamma$ si et seulement si

1. $\gamma > \max(\bar{\sigma}(U_{121} D_{11}), \bar{\sigma}(D_{11} V_{211}^T))$ où U_{121} et V_{211} sont définies par (6.21 et 6.22),
2. Les deux équations de Riccati correspondant aux matrices hamiltoniennes H (6.13) et J (6.14) admettent respectivement

deux solutions positives X et y telle que $\rho(XY) < \gamma^2$ où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

b) Si les conditions de la partie (a) sont satisfaites, alors le régulateur H_∞ central est donné par la représentation d'état suivante:

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

$$D_k = -\gamma^2 (U_{122} D_{12})^{-1} U_{122} (\gamma^2 I - D_{11} V_{211}^T V_{211} D_{11}^T U_{121}^T U_{121})^{-1} D_{11} V_{211}^T (D_{21} V_{212}^T)^{-1}$$

$$B_k = -Z [L_2 - (B_2 + L_1 D_{12}) D_k]$$

$$C_k = F_2 - D_k (C_2 + D_{21} F_1)$$

$$A_k = A + BF - B_k (C_2 + D_{21} F_1)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1}$$

6.3 Fonctions de pondération

Afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée, des fonctions de pondérations sous forme de filtres sont introduites sur les signaux formant le canal de performances. Pour cela, considérons le système de la figure 6.4.

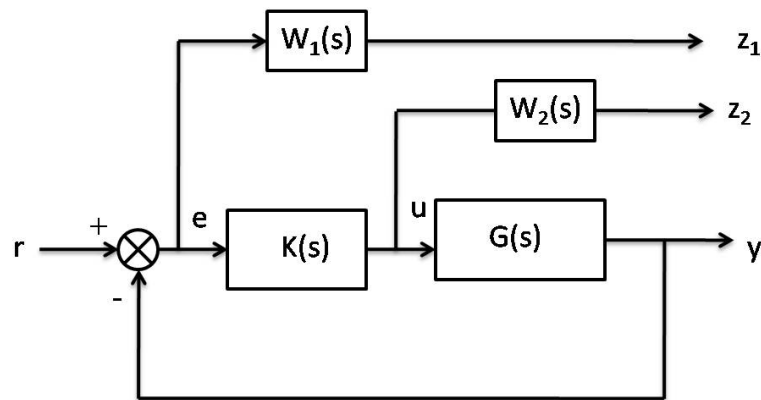


Fig. 6.4 Introduction des fonctions de pondération

Les signaux z_1 et z_2 sont donnés par les expressions suivantes:

$$z_1(s) = W_1(s)e(s) = W_1(s)S_o(s) = W_1(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$$

$$z_2(s) = W_2(s)u(s) = W_2(s)K(s)S_o(s) = W_2(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$$

$K(s)$ est le régulateur H_∞ stabilisant le système de la figure 6.4 tout en minimisant la norme H_∞ du transfert entre la sortie $z = [z_1 \ z_2]$ et la consigne r , c'est-à-dire:

$$\left\| \frac{W_1(j\omega)S_o(j\omega)}{W_2(j\omega)K(j\omega)S_o(j\omega)} \right\|_{\infty} < 1 \quad 6.32$$

La relation (6.32) implique que:

$$\forall \omega \in R \quad |W_1(j\omega)S_o(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow |S_o(j\omega)| < \left| \frac{1}{W_1(j\omega)} \right| \quad 6.33$$

$$\forall \omega \in R \quad |W_2(j\omega)K(j\omega)S_o(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow |K(j\omega)S_o(j\omega)| < \left| \frac{1}{W_2(j\omega)} \right| \quad 6.34$$

Les deux relations ci-dessus montrent que la réponse en fréquence du transfert $S_o(j\omega)$ est limitée par un gabarit qui dépend du filtre $W_1(j\omega)$, et celle du transfert $K(j\omega)S_o(j\omega)$ est limitée par le gabarit dépendant du filtre $W_2(j\omega)$.

Le transfert le plus crucial est la fonction de sensibilité $S_o(s)$ entre l'erreur e et la consigne. Le transfert $S_o(s)$ permet de gérer à la fois la rapidité du système (bande passante du système bouclé), la précision (l'erreur statique) et la marge de stabilité (marge de module) ce qui se traduit mathématiquement par:

$e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_o(s)$: erreur statique quand l'entrée r est un échelon unité.

$M_m = \frac{1}{\|S_o(j\omega)\|_{\infty}}$: la marge de module ou marge de stabilité.

$|S_o(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$: la fréquence ω_c pour laquelle le module de $S_o(j\omega)$ est égal à $1/\sqrt{2}$ ou la fréquence pour laquelle le module en dB de $S_o(j\omega)$ est égal -3 dB, représente la bande passante du système en boucle fermée.

En résumé, le module de la fonction de sensibilité $S_o(j\omega)$ doit être faible en basses fréquences et présente une valeur maximale K en hautes fréquences, égale ou inférieure à 2: $1 < K \leq 2$.

Selon l'analyse ci-dessus, l'allure typique de La réponse en fréquences de la fonction de sensibilité est donnée par la figure 6.5.

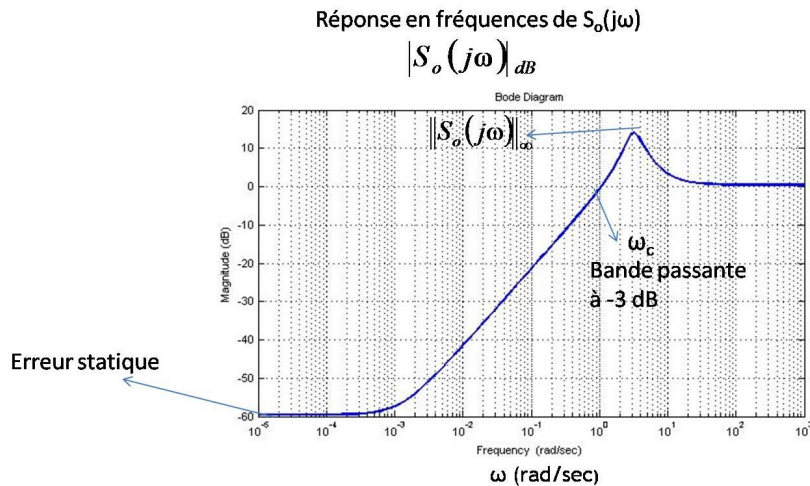


Fig. 6.5 Réponse en fréquence de $S_o(j\omega)$

La relation (6.33) montre que l'inverse de la fonction de pondération ($1/W_1(j\omega)$) est un majorant de la fonction de sensibilité $S_o(j\omega)$, à partir des caractéristiques de $S_o(j\omega)$, on déduit la réponse en fréquence du filtre $1/W_1(j\omega)$ comme illustré par la figure 6.5

Notons $|1/W_1(j\omega)|$ est un majorant de $|S_o(j\omega)|$ dans le cas d'un système monovarié. Dans le cas d'un système multivarié, on définit le filtre $W_{11}(s)$: $W_{11}(s) = W_1(s)I_{p_y}$ où I_{p_y} est la matrice identité de dimensions $p_y \times p_y$. Dans le cas du système multivarié $W_{11}^{-1}(s)$ est un majorant de $\bar{\sigma}(S_o(j\omega))$.

A partir de l'analyse ci-dessus, la fonction de transfert du filtre $W_1(s)$ est donnée par l'expression suivante:

$$W_1(s) = \frac{1}{K} \frac{(s + a)}{(s + b)} \quad 6.35$$

où $a > b$ et $K > 1$, ce filtre a un gain statique de $(a/Kb) > 1$, un gain minimale de $1/K$, la fréquence ω_{cm} pour laquelle le gain est égale à 3 dB est donnée par:

$$|W_1(j\omega_{cm})| = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\omega_{cm}^2 + a^2}{\omega_{cm}^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$\omega_{cm} = \sqrt{\frac{a^2 - 2K^2b^2}{2K^2 - 1}}$$

Puisque le filtre $1/W_1(j\omega)$ est un majorant de $S_o(j\omega)$, on déduit que:

- l'erreur statique est inférieure à l'inverse du gain statique de $W_1(j\omega)$: Kb/a ,
- La marge de module M_m est supérieure à $1/K$,
- la bande passante du système bouclé est supérieure à ω_{cm}

Les valeurs des paramètres du filtre $W_1(s)$ sont déterminés à partir du cahier de charge: Le paramètre K est déterminé à partir de la marge de module,

1. le rapport b/a est déduit à partir de l'erreur statique,
2. le paramètre a est déterminé à partir de la valeur de la bande passante:

$$a = \omega_c \sqrt{\frac{2K^2 - 1}{1 - 2K^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

3. on déduit le paramètre a à partir de la valeur du rapport b/a trouvé dans l'étape 2.

Le transfert entre le signal de commande u et r doit avoir un gain supérieur à 1 dans la bande passante et faible en hautes fréquences qui engendre un effet de roll-off important c'est-à-dire une décroissance rapide du gain du correcteur en hautes fréquences. L'allure typique du transfert $K(j\omega)S_o(j\omega)$ est donnée par la figure 6.6.

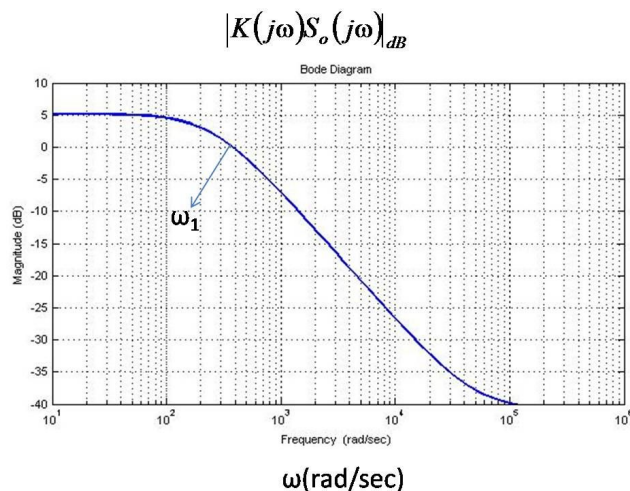


Fig. 6.6 Réponse en fréquences de $K(j\omega)S_o(j\omega)$

Puisque $1/W_2(j\omega)$ est un majorant du transfert $K(j\omega)S_o(j\omega)$, le transfert $W_2(s)$ est un filtre passe haut, la fonction de transfert est donnée par:

$$W_2(s) = \frac{a}{K_1 b} \frac{(s+b)}{(s+a)} \quad 6.35$$

Le paramètre b représente la bande passante de l'actionneur, le paramètre K_1 reflète le gain limite de l'actionneur. La fréquence a est beaucoup plus supérieure à la fréquence b pour obliger le gain du régulateur à décroître en hautes fréquences afin d'éliminer le bruit de mesure et pour avoir une bonne immunité face aux dynamiques hautes fréquences non modélisées ce qui assure la robustesse du système en boucle fermée.

6.4 μ -analyse

6.4.1 Définition de la valeur singulière structurée

Considérons la boucle de la figure 6.7 où $M(s)$ est une matrice complexe et Δ est une matrice appartenant à l'ensemble des matrices complexes et possédant la structure suivante:

$$\Delta = \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f] \quad 6.36$$

$$\delta_i \in R \quad \Delta_j \in C^{m_j \times m_j}$$

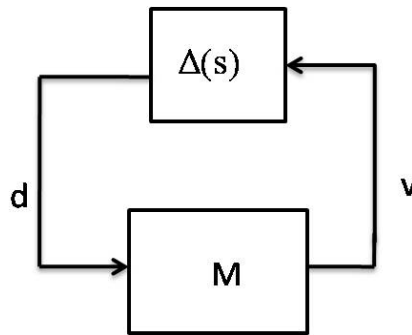


Fig. 6.7 Configuration standard M- Δ

On définit la valeur singulière μ [3, 4, 57, 60, 61] de la matrice $M(j\omega)$ comme étant la taille ou la norme H_∞ de la plus petite incertitude déstabilisant le système:

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

Quand $M(s)$ est la matrice d'interconnexion du système augmenté, la valeur structurée de $M(s)$ est

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \sup \mu_{\Delta}(M(j\omega))$$

mesure la robustesse en stabilité du système en boucle fermée. Considérons le système de la figure 6.8 où $M(s)$ est la matrice d'interconnexion.

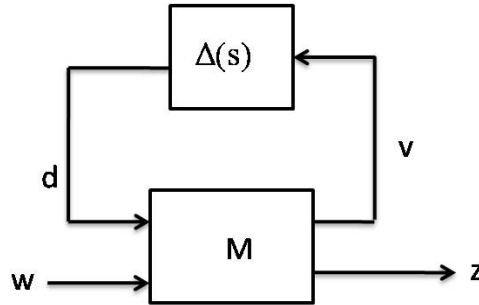


Fig. 6.7 Système incertain

$$F_l(\Delta, M) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$$

Pour satisfaire les performances du système en boucle fermée, il faut minimiser la matrice de transfert $F_l(\Delta, M)$ c'est-à-dire:

$$\|F_l(\Delta, M)\|_{\infty} < 1$$

- La robustesse en performances du système est satisfaite si et seulement si

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \sup_{\forall \omega \in R} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) = \|M\|_{\mu} < 1 \quad 6.37$$

- La robustesse en stabilité du système est satisfaite si et seulement si

$$\mu_{\Delta}(M_{11}(s)) = \sup_{\forall \omega \in R} \mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}\|_{\mu} < 1 \quad 6.38$$

- Les performances du système nominal sont satisfaites si et seulement si

$$\|M_{22}\|_{\infty} < 1 \quad 6.39$$

- La stabilité du système nominal est vérifiée si et seulement si $M(s)$ vérifie la stabilité interne.

6.5 μ -synthèse

Considérons le schéma de la figure 6.9 qui combine le schéma de la synthèse H_{∞} (Fig 6.2) et celui de la μ -analyse [3, 4, 60, 61] (Fig 6.7) où l'incertitude Δ possède la structure (6.35).

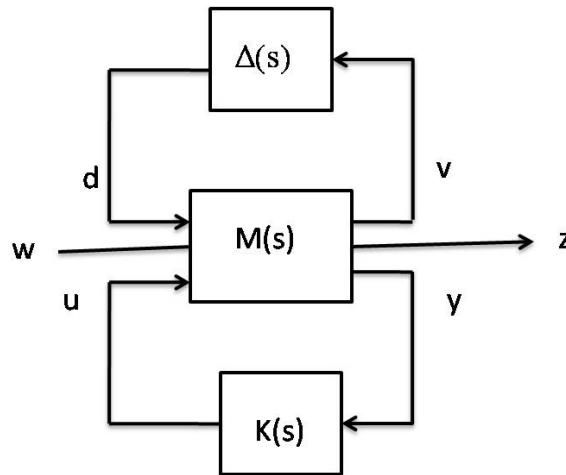


Fig. 6.9 Problème de synthèse robuste

Le problème consiste à déterminer un régulateur $K(s)$ telle que la norme H_∞ du transfert de w vers z soit inférieur à 1 pour tout $\Delta(s)$ du type (6.36) telle que

$$\|\Delta(s)\|_\infty < 1.$$

L'analyse de la robustesse en performance est transformé en analyse de stabilité en ajoutant une incertitude fictive non structurée Δ_f entre z et w de la figure 6.9. Dans ce cas, le problème consiste à déterminer un régulateur $K(s)$ vérifiant la relation:

$$\mu_\Delta(F_l(M(j\omega), K(j\omega))) < 1$$

Ce problème est appelé μ -synthèse.

6.6 Commande robuste de la machine synchrone à aimants permanents

6.6.1 Introduction

Traditionnellement, les moteurs à courant continu ont été réservés pour les applications de hautes performances en raison de la facilité et la simplicité de leur commande par rapport aux machines à courant alternatif. Cependant, avec les progrès réalisés dans l'électronique de puissance et la capacité de calcul des processeurs numériques et avec l'apparition de nouvelles méthodes de contrôle, les machines à courant alternatif continuent à remplacer les moteurs à courant continu dans les applications de hautes performances.

Le développement des systèmes de contrôle basés sur des modèles mathématiques a commencé avec le travail de Nyquist, Bode, Nichols et Evans. La marge de gain et le marge de phase ont été largement utilisées comme mesures de la qualité de la conception et donnent une indication de la robustesse de stabilité. Ces méthodes ne prennent pas en compte la robustesse des performances des systèmes bouclés.

Les régulateurs conçus par les méthodes citées ci-dessus ne parviennent pas à maintenir la stabilité d'un système de contrôle linéaire invariant contenant plusieurs paramètres incertains, dont les valeurs peuvent varier dans un intervalle donné.

Le présent travail s'articule autour de la synthèse H_∞ [3, 4, 6, 7, 60, 61] d'un système de commande robuste pour le moteur synchrone à aimants permanents [1, 2] qui prend en compte la variation des paramètres de la partie mécanique de la machine. A cet effet, nous introduisons la configuration standard du système bouclé sur la figure 1.

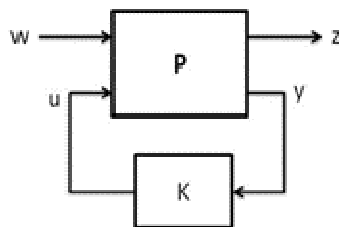


Fig.1 - Configuration standard du système bouclé

La représentation d'état du système augmenté $P(s)$ est décrite par l'expression (6.8).

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad 1$$

La méthode de Glover et Doyle [4, 6] est utilisée pour la synthèse du régulateur H_∞ central pour le système $P(s)$.

6.6.2 Procédure de conception

6.6.2.1 La Commande vectorielle

Le modèle de la machine synchrone à aimants permanent dans le repère d-q est décrit par les équations suivantes:

$$u_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega L_q i_q \quad 2$$

$$u_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega L_d i_d + \omega \phi_f \quad 3$$

$$\omega = p \omega_m \quad 4$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{1}{J} T_e - \frac{F}{J} \omega_m - \frac{1}{J} T_m \quad 5$$

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} \quad 6$$

$$e_d = -\omega L_q i_q \quad 7$$

$$e_q = \omega L_d i_d + \omega \phi_f \quad 8$$

$$e_d = -\omega L_q i_q \quad 9$$

où i_d , u_d représentent le courant et la tension dans l'axe d, i_q , u_q représentent le courant et la tension dans l'axe q, ω_m est la vitesse de rotation du rotor, J est l'inertie du rotor, F est le coefficient de frottement visqueux, L_d et L_q sont les inductances du stator dans l'axe d et l'axe q respectivement, R_s est la résistance statorique, θ_m est la position angulaire du rotor, T_e est le couple électromagnétique, T_m est le couple de charge, ϕ_f est le flux créé par les aimants permanents et p est le nombre de paires de pôles.

Le principe de la commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents est illustré dans la figure 2.

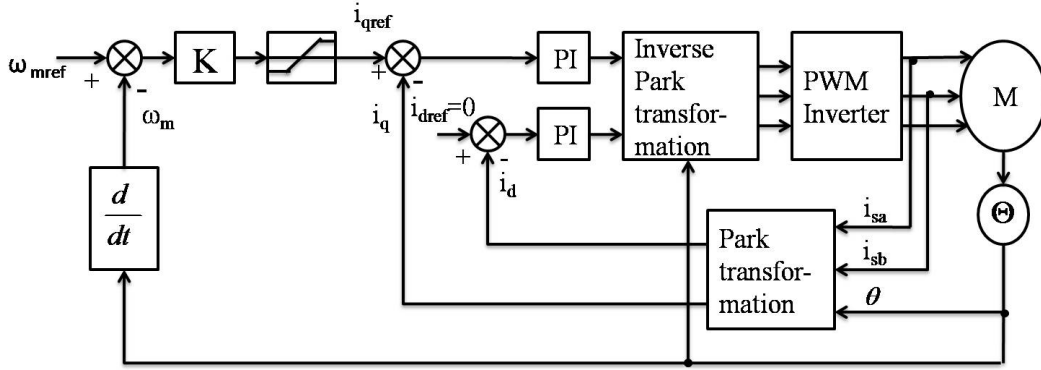


Fig.- 2 la commande vectorielle de la MSAP

6.6.2.2 Synthèse H_∞ du régulateur central de commande de vitesse

Considérons l'équation mécanique (6). Ce modèle fait intervenir deux paramètres: l'inertie du rotor J et le coefficient de frottement visqueux F . Les valeurs de ces deux paramètres ne sont pas toujours connues avec précision et sont aussi susceptibles de varier en fonction des conditions de fonctionnement. Donc, on peut considérer que les coefficients J et F sont susceptibles de varier dans certains intervalles connus ce qui peut s'écrire comme suit:

$$J = J_n + p_j \delta_j J_n \quad F = F_n + p_f \delta_f F_n$$

où J_n et F_n sont les valeurs nominales des paramètres J et F respectivement ($J_n=0.0011$, $F_n=0.0014$). Les quantités δ_j et δ_f sont les incertitudes sur les paramètres J et F , p_j et p_f représentent le degré des incertitudes.

$$-1 \leq \delta_j, \delta_f \leq 1$$

Posons $p_j = 0.50$ et $p_f = 0.50$ pour fixer l'erreur maximale sur les coefficients J et F à 50% de leurs valeurs nominales. Les quantités J et F peuvent être exprimées sous forme de transformations fractionnaires linéaires LFT en fonction de δ_j et δ_f respectivement. Les entrées et les sorties de δ_j et δ_f sont y_j , y_f , et u_j , u_f respectivement.

$$J = F_u(M_j, \delta_j), \quad M_j = \begin{bmatrix} -p_j & 1/J_n \\ -p_j & 1/J_n \end{bmatrix} \quad 11$$

$$F = F_u(M_f, \delta_f), \quad M_f = \begin{bmatrix} 0 & F_n \\ p_f & F_n \end{bmatrix} \quad 12$$

$$u_j = \delta_j y_j \quad u_f = \delta_f y_f \quad 13$$

A l'aide des équations (5), (11), (12) et (13), nous pouvons construire le bloc diagramme du système mécanique avec les paramètres incertains comme illustré par la figure 3.

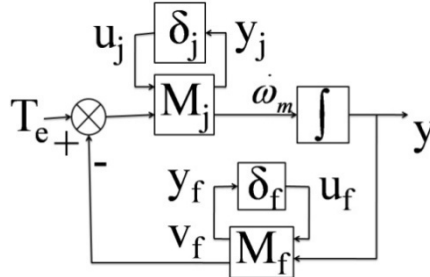


Fig.3- Système mécanique avec paramètres incertains

La variable d'état du système de la figure 3 est sélectionnée comme suit:

$$x_1 = \omega_m$$

La sortie y est

$$y = x_1 \quad 14$$

$$\begin{bmatrix} y_j \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = M_j \begin{bmatrix} u_j \\ T_e - v_f \end{bmatrix} \quad 15$$

$$\begin{bmatrix} y_f \\ v_f \end{bmatrix} = M_f \begin{bmatrix} u_f \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad 16$$

En manipulant les équations (14), (15), (16), nous obtenons le système d'équations (17) et (18) décrivant le comportement dynamique du système de la figure 3.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ y_j \\ y_f \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_n/J_n & -p_j & -p_f/J_n & 1/J_n \\ -F_n/J_n & -p_j & -p_f/J_n & 1/J_n \\ F_n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u_j \\ u_f \\ T_e \end{bmatrix} \quad 17$$

$$\begin{bmatrix} u_j \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_j & 0 \\ 0 & \delta_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ y_f \end{bmatrix} \quad 18$$

Nous devons maintenant séparer le système incertain de la figure 3 en deux sous-systèmes: un système augmenté G_s invariant dont les paramètres sont parfaitement définis et un bloc d'incertitude noté Δ .

La représentation d'état du système augmenté G_s est dérivé à partir de l'expression matricielle (17):

$$G_s = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad 19$$

où

$$A = [-F_n / J_n] = [-1.2613], \quad B_1 = [-p_j \quad -p_f / J_n] = [-0.50 \quad -450.4505]$$

$$B_2 = 1 / J_n = 900.9009, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -F_n / J_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2613 \\ 0.0014 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} -p_j & -p_f / J_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.50 & -450.4505 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 / J_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900.9009 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1], \quad D_{21} = [0 \quad 0], \quad D_{22} = [0].$$

Le bloc d'incertitude Δ est dérivé à partir de la relation matricielle (18):

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_j & 0 \\ 0 & \delta_f \end{bmatrix} \quad 20$$

Pour introduire l'incertitude diagonale Δ avec le système G_s , on utilise la transformation fractionnaire linéaire comme indiqué par la figure 4.

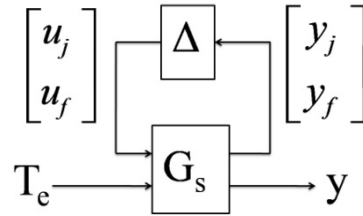


Fig. 4- Représentation LFT du système mécanique incertain

Pour atteindre les objectifs fixés par la conception, nous devons introduire des pondérations au système original G_s qui prendront la forme de filtres comme expliqué dans la section 6.3. Le système augmenté est constitué du système G_s et des filtres de pondération. Le système en boucle fermée est donné par la figure 5.

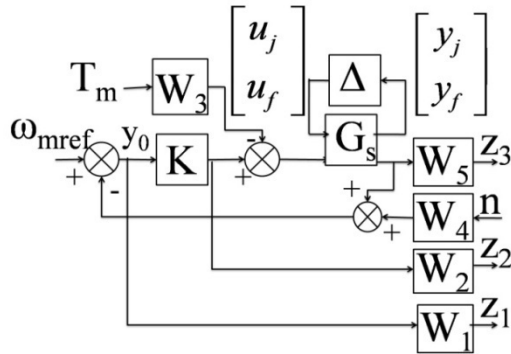


Fig. 5- Structure du système en boucle fermée

Le filtres de pondérations sont sélectionnés par les fonctions de transfert:

$$W_1 = \frac{1}{1.2} \frac{s + 52}{s + 0.0055} \quad W_2 = 5.5 \frac{s/250 + 1}{s/50000 + 1} \quad 21$$

$$W_3 = 0.05 \quad W_4 = 0.01 \quad W_5 = 1/J_n.$$

La pondération $W_1(s)$, introduit sur l'erreur de contrôle est le filtre de performances. La commande u qui est la sortie du régulateur est pondérée par le filtre $W_2(s)$, La perturbation T_m est l'entrée de la pondération $W_3(s)$, le filtre $W_5(s)$ introduit sur la sortie représente un gain et si on utilise l'algorithme de Glover-Doyle, il faut introduire une perturbation "n" à l'entrée de la pondération $W_4(s)$, sans cette perturbation la matrice D_{21} du problème standard H_∞ sera nulle. Physiquement, cette perturbation peut être interprétée comme un biais ou un bruit sur la mesure. Afin de limiter son effet, on lui affecte une pondération $W_4(s)$ constante choisie faible.

La représentation d'état du système augmenté $P(s)$ est déterminée à partir du système en boucle ouverte donné par la figure 6.

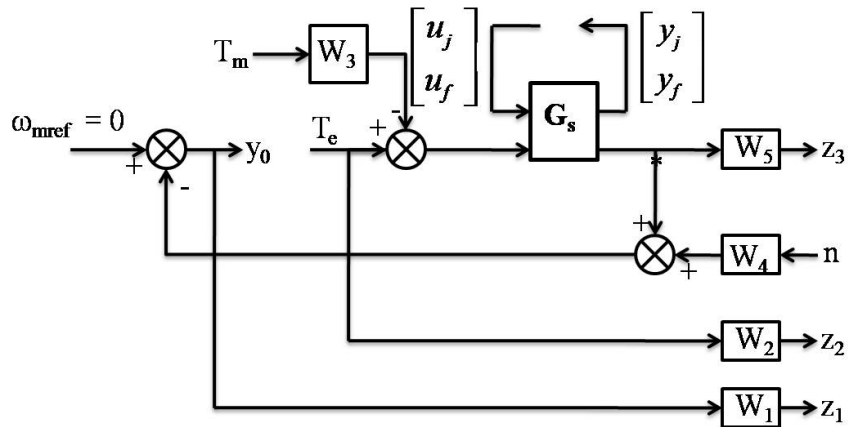


Fig.-6 Système en boucle ouverte

Le système en boucle ouverte *SYS_BO* est décrit par trois variables d'état x_1 , x_2 et x_3 (x_1 appartient au système G_s , x_2 et x_3 appartiennent aux filtres W_1 et W_2 respectivement), il possède six sorties y_j , y_f , z_1 , z_2 , z_3 , y_0 et cinq entrées u_j , u_f , T_m , n et T_e .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ y_j \\ y_f \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y_0 \end{bmatrix} = \text{SYS_BO} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_j \\ u_f \\ T_m \\ n \\ T_e \end{bmatrix}$$

$$\text{SYS_BO} = \begin{bmatrix} -1.2613 & 0 & 0 & -0.5 & -450.45045 & -45.0450 & 0 & 900.9009 \\ -6.5824 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06582 & 0 \\ 0 & 0 & -49999.9999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7397.6347 \\ -1.2613 & 0 & 0 & -0.5 & -450.45045 & -45.0450 & 0 & 900.9009 \\ 0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0083 & 0 \\ -0.8333 & 6.5824 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0083 & 0 \\ 0 & 0 & 7397.6347 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1100 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0100 & 0 \end{bmatrix}$$

22

L'objectif consiste à déterminer le régulateur $K(s)$ qui minimise la norme H_∞ de la matrice de transfert $F_l(P(s), K(s))$ entre la sortie z et l'entrée $w = [T_m \ n]^T$ du

ystème en boucle fermée où $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$. Le système augmenté correspondant $P(s)$ est obtenu à partir de la variable SYS_BO en sélectionnant les entrées T_m , n , T_e et les sorties z_1, z_2, z_3, y_0 . ($n = 3, nm1 = 2, np1 = 3, np2 = 1, nm2 = 1$).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y_0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ T_m \\ n \\ T_e \end{bmatrix}$$

23

$$P = \begin{bmatrix} -1.2613 & 0 & 0 & -45.0450 & 0 & 900.9009 \\ -6.5824 & -0.0055 & 0 & 0 & -0.06582 & 0 \\ 0 & 0 & -4999.9999 & 0 & 0 & 7397.6347 \\ -0.8333 & 6.5824 & 0 & 0 & -0.00833 & 0 \\ 0 & 0 & 7397.6347 & 0 & 0 & -1100. \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 & -0.0100 & 0 \end{bmatrix}$$

Les différentes matrices de la représentation d'état du système P sont:

$$A = \begin{bmatrix} -1.2612 & 0 & 0 \\ -6.5824 & -0.0055 & 0 \\ 0 & 0 & -4999.9999 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -45.0450 & 0 \\ 0 & -0.06582 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 900.9009 \\ 0 \\ 7397.6347 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} -0.8333 & 6.5824 & 0 \\ 0 & 0 & 7397.6347 \\ 0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -0.00833 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [-1 \ 0 \ 0] \quad D_{21} = [0 \ -0.01] \quad D_{22} = 0$$

Le système P n'est pas normalisé puisque les matrices D_{12} et D_{21} ne vérifient pas l'hypothèse A4. La décomposition en valeurs singulières de D_{12} et D_{21} (section 6.2.3) permet de trouver des matrices unitaires orthonormées U_{12} , V_{12} , U_{21} et V_{21} :

$$U_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad V_{12} = 1 \quad R_{12} = -1100 \quad U_{21} = 1 \quad V_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R_{21} = 0.01$$

Les matrices U_{12} and V_{21} peuvent être partitionnées comme suit:

$$U_{12} = \begin{bmatrix} U_{121} \\ U_{122} \end{bmatrix} \quad V_{21} = \begin{bmatrix} V_{211} \\ V_{212} \end{bmatrix} \quad \text{with } U_{121} \text{ est } (np1 - nm2) \times np1, U_{122} \text{ est } nm2 \times np1,$$

V_{211} est $(nm1 - np2) \times nm1$, V_{212} est $np2 \times nm1$.

$$U_{121} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 24$$

$$U_{122} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 25$$

$$V_{211} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 26$$

$$V_{212} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 27$$

Appliquons la relation (6.28) pour normaliser le système P. Les matrices du système augmenté normalisé \bar{P} sont déterminées en Appliquant la relation (6.28):

$$\bar{B}_1 = B_1 V_{21}^T = \begin{bmatrix} -45.0450 & 0 \\ 0 & 0.0658 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = B_2 V_{12}^T R_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.8190 \\ 0 \\ -6.7251 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_1 = U_{12} C_1 = \begin{bmatrix} -0.8333 & 6.5824 & 0 \\ 0.0500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7397.6347 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_{11} = U_{12} D_{11} V_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0.0083 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_{12} = U_{12} D_{12} V_{12}^T R_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_2 = R_{21}^{-1} U_{21} C_2 = [-100 \quad 0 \quad 0], \quad \bar{D}_{21} = R_{21}^{-1} U_{21} D_{21} V_{21}^T = [0 \quad 1], \quad \bar{D}_{22} = 0$$

Puisque les matrices U_{12} et V_{12} sont orthonormées la relation suivante est vérifiée:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \|F_l(\bar{P}, \bar{K})\|_\infty$$

Calculons les solutions X et Y des équations de Riccati correspondant aux deux matrices hamiltoniennes H (6.13) et J (6.14) respectivement. Pour cela posons:

$$D_{1d} = [D_{11} \quad D_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.0083 & 0 \\ 0 & 0 & -1100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{d1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0083 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.0100 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = D_{1d}^T D_{1d} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{nm1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1182 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1181 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2110^6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = D_{d1} D_{d1}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{np1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1181 & 0 & 0 & 0.000083 \\ 0 & -0.1182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1182 & 0 \\ 0.000083 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

La solution X de l'équation de Riccati correspondant à la matrice hamiltonienne H définie par (6.13) est donné par:

$$X = Ric(H) = \begin{bmatrix} 0.2578 & -1.2700 & 5.0272 \\ -1.2700 & 6.3352 & -24.6089 \\ 5.0272 & -24.6089 & 98.6334 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice X sont

$$\lambda_1 = 105.0413 \quad \lambda_2 = 0.0003 \quad \lambda_3 = 0.1847$$

La matrice X est définie positive.

La solution Y de l'équation de Riccati correspondant à la matrice hamiltonienne J définie par (6.14) est:

$$Y = Ric(J) = \begin{bmatrix} 0.4503 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice Y sont

$$\lambda_1 = 0.4503, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

La matrice Y est définie semi positive.

Les solutions X et Y permettent de calculer les matrices F et L

$$F = -R_1^{-1}(D_{1d}^T C_1 + B^T X) = \begin{bmatrix} -98.2302 & 484.0093 & -1915.8655 \\ 0.7665 & -3.9945 & 13.7127 \\ -0.0309 & 0.1514 & 6.1183 \end{bmatrix}$$

$$L = -(B_1 D_{d1}^T + Y C^T) R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1904 & 4503.2482 \\ 0 & 0 & 0 & -6.5824 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad F_1: nm1 \times n, F_2: nm2 \times n.$$

$$L = [L_1 \quad L_2] \quad 32) \text{ with } L_1: n \times np1, L_2: n \times np2.$$

Les matrices du système normalisé \bar{P} sont

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} V_{21} & 0 \\ 0 & R_{12} V_{12} \end{bmatrix} F, \quad \bar{F}_{11} = V_{211} F_1, \quad \bar{F}_{12} = V_{212} F_1, \quad \bar{F}_2 = R_{12} V_{12} F_2$$

$$\bar{L} = L \begin{bmatrix} U_{12}^T & 0 \\ 0 & U_{21}^T R_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_{11} = L_1 U_{121}^T, \quad \bar{L}_{12} = L_1 U_{122}^T, \quad \bar{L}_2 = L_2 U_{21}^T R_{21}$$

L'utilisation des données calculées ci-dessus pour le système normalisé avec le théorème 6.1, nous permet d'appliquer le corollaire 6.1 pour calculer le régulateur de vitesse central K(s):

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

$$\text{où } D_k = -\gamma^2 (U_{122} D_{12})^{-1} U_{122} (\gamma^2 I - D_{11} V_{211}^T V_{211} D_{11}^T U_{121}^T U_{121})^{-1} D_{11} V_{212}^T (D_{21} V_{212}^T)^{-1}$$

$$D_k = 0$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0139 & -0.0685 & 0.2713 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_k = -Z[L_2 - (B_2 + L_1 D_{12})D_k] = \begin{bmatrix} -4566.3424 \\ 6.5824 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_k = F_2 - D_k(C_2 + D_{21}F_1) = [-0.0309 \quad 0.1514 \quad 6.1184]$$

$$A_k = A + BF - B_k(C_2 + D_{21}F_1) = \begin{bmatrix} -205.6798 & -21483.4285 & 91186.1150 \\ 0 & -0.0055 & 0 \\ -228.7881 & 1119.9886 & -4738.6074 \end{bmatrix}$$

6.6.2.3 Analyse de la robustesse de stabilité et de performances

La fonction de transfert en boucle fermée FTBF notée M dans la figure 7 est calculée en appliquant le produit de Redheffer entre la fonction de transfert en boucle ouverte SYS_BO et le régulateur K(s):

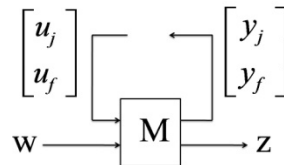


Fig.-7 Matrice de transfert en boucle fermée FTBF=M

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ y_j \\ y_f \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = FTBF \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ u_j \\ u_f \\ T_m \\ n \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} T_m \\ n \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Chapitre 6

$$\text{MTBF} = \begin{bmatrix}
 -1.2613 & 0 & 0 & -27.8623136.39485512.03600.5 & -450.450445.0450 & 0 \\
 -6.5824 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0658 \\
 0 & 0 & -49999.99-228.7881119.98 & 45261.3920 & 0 & 0 & 0 \\
 4566.3424 & 0 & 0 & -205.67 & -21483.4 & 91186.11 & 0 & 0 & 45.663 \\
 -6.5824 & 0 & 0 & 0 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & -0.0658 \\
 0 & 0 & 0 & -228.78 & 1119.98 & -4738.60740 & 0 & 0 & 0 \\
 -1.2613 & 0 & 0 & -27.8623136.39485512.03600.5 & -450.450445.0450 & 0 \\
 0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.8333 & 6.5824 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0083 \\
 0 & 0 & 7397.634734.0199-166.53806730.19600 & 0 & 0 & 0 \\
 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

La matrice MTBF peut être partitionnée comme suit:

$$\text{FTBF} = M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ y_j \\ y_f \end{bmatrix} = M_{11} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ u_j \\ u_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = M_{22} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ T_m \\ n \end{bmatrix}$$

La relation (6.38) indique que la robustesse de stabilité du système en boucle fermée est satisfaite si et seulement si:

$$\mu_{\Delta}(M_{11}(s)) = \sup_{\forall \omega \in R} \mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}\|_{\mu} < 1$$

La matrice M_{11} est extraite à partir de la matrice FTBF, elle est formée des six variables d'état, des entrées u_j , u_f et de sorties y_j et y_f :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -1.2613 & 0 & 0 & -27.8623 & 136.3948 & 5512.0360 & -0.5 & -450.4504 \\ -6.5824 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -49999.99 & -228.788 & 1119.98 & 45261.392 & 0 & 0 \\ 4566.3424 & 0 & 0 & -205.67 & -21483.4 & 91186.11 & 0 & 0 \\ -6.5824 & 0 & 0 & 0 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -228.78 & 1119.98 & -4738.6074 & 0 & 0 \\ -1.2613 & 0 & 0 & -27.8623 & 136.3948 & 5512.0360 & -0.5 & -450.4504 \\ 0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La réponse en fréquence de $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$ est donnée sur la figure 8:

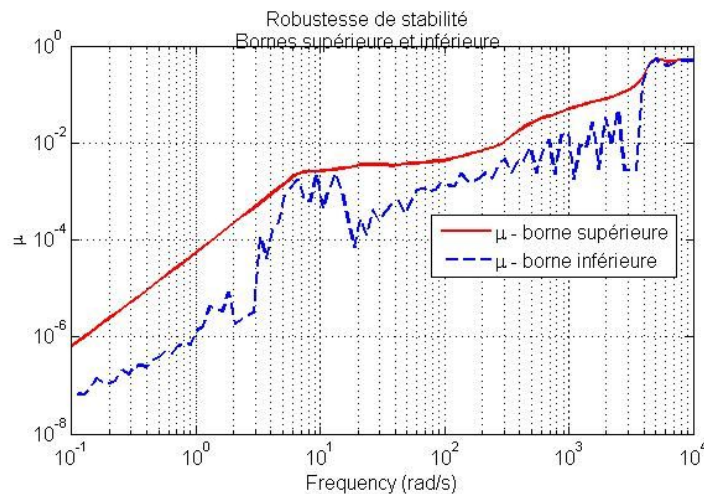


Fig.-8 Borne supérieure et inférieure de la valeur singulière structurée de M_{11}

La borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$ présente un maximum de l'ordre de 0.5329, on en déduit que la stabilité du système en boucle fermée es garantie pour toute incertitude:

$$\|\Delta\|_{\infty} < 1/0.5329,$$

donc pour le domaine d'incertitudes suivant:

$$J \in [0.000555, 0.0017] \quad F \in [0.0007, 0.0021]$$

ou encore pour $5.55 \times 10^{-4} \leq J \leq 1.7 \times 10^{-3}$ et $7 \times 10^{-4} \leq F \leq 2.1 \times 10^{-3}$

La relation (6.37) indique que la robustesse de performance est vérifiée si $\mu_{\Delta}(M)$ est inférieure à 1 et la relation (6.39) indique que les performances du système nominal en boucle fermée sont satisfaites si

$$\|M_{22}\|_{\infty} < 1$$

La matrice M_{22} est constituée des six variables d'état, des entrées T_m , n et les sorties z_1 , z_2 et z_3 .

$$M_{22} = \begin{bmatrix} -1.2613 & 0 & 0 & -27.862 & 136.394 & 5512.036 & -45.045 & 0 \\ -6.5824 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0658 \\ 0 & 0 & -49999.99 & -228.788 & 1119.98 & 45261.392 & 0 & 0 \\ 4566.3424 & 0 & 0 & -205.67 & -21483.4 & 91186.11 & 0 & 45.6634 \\ -6.5824 & 0 & 0 & 0 & -0.0055 & 0 & 0 & -0.0658 \\ 0 & 0 & 0 & -228.78 & 1119.98 & -4738.6074 & 0 & 0 \\ -0.8333 & 6.5824 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0083 \\ 0 & 0 & 7397.6347 & 34.0199 & -166.5380 & 6730.1960 & 0 & 0 \\ 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les réponses en fréquence de la borne supérieure et de la borne inférieure de $\mu_{\Delta}(M)$ et la réponse en fréquence de $M_{22}(j\omega)$ sont données par la figure 9.

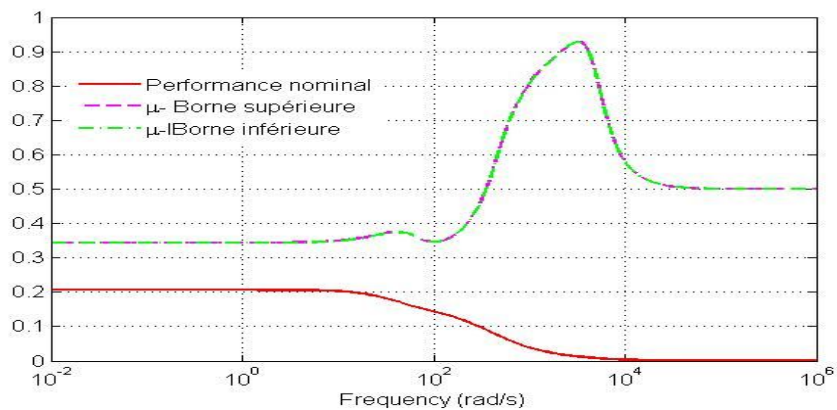


Fig.- 9 Performance robuste et performance nominal

La réponse en fréquence de la borne supérieure de $\mu_{\Delta}(M)$ présente un gain de 0.93

La simulation des système en boucle fermée avec le régulateur $K(s)$ ainsi calculé, est basé sur la structure illustrée sur la figure 10.

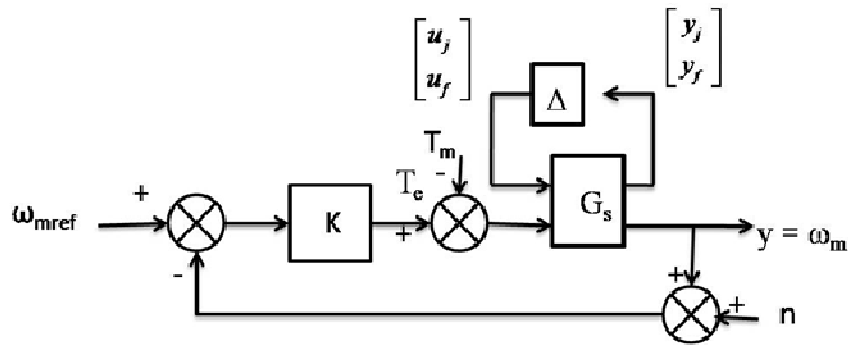


Fig.-10 Structure du système en boucle fermée

La matrice de transfert BF du système en boucle fermée de la figure 10 est donnée par:

$$BF = \begin{bmatrix} -1.2613 & -27.8623 & 136.3947 & 5512 & -05 & 450.45 & 0 & -45 & 0 \\ 4566.3424 & -205.6798 & -21483.4285 & 91186.115 & 0 & 0 & -4566.3424 & 0 & 0 \\ -6.5824 & 0 & 0.0055 & 0 & 0 & 0 & 65824 & 0 & 0.0658 \\ 0 & -228.7881 & 1119.9885 & -4738.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2613 & -27.8623 & 136.3947 & 5512 & -05 & 450.45 & 0 & -45 & 0 \\ 0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice BF contient quatre variables d'état, cinq entrées (u_j , u_f , ω_{mref} , T_m , n) et trois sorties (y_j , y_f , ω_m).

La matrice de transfert T_{es} entre la sortie ω_m et l'entrée de consigne ω_{mref} est extraite à partir de la variable BF en sélectionnant la troisième entrée ω_{mref} et la troisième sortie ω_m :

$$T_{es} = \begin{bmatrix} -1.2613 & -27.8623 & 136.3947 & 5512 & 0 \\ 4566.3424 & -205.6798 & -21483.4285 & 91186.115 & -4566.3424 \\ -6.5824 & 0 & 0.0055 & 0 & 65824 \\ 0 & -228.7881 & 1119.9885 & -4738.6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La réponse indicielle du système en boucle fermée est illustrée par la figure 11. Le temps de réponse est de 0.0565 second et le dépassement est de 7% pour le système nominal.

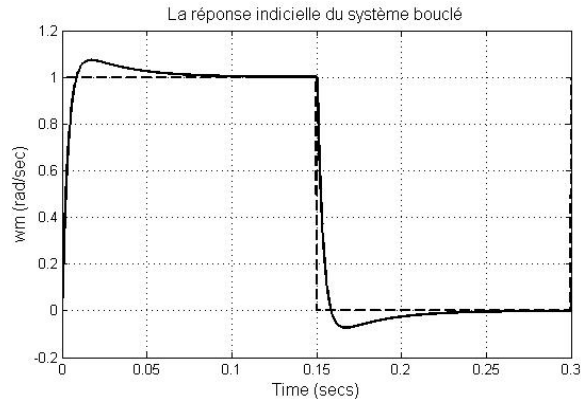


Fig.-11 Réponse indicielle pour système nominal

La matrice de transfert T_{yT} entre la sortie ω_m et l'entrée de perturbation T_m est extraite de la variable BF en sélectionnant la troisième sortie et la quatrième entrée, elle est formée de quatre variables d'état, une entrée (T_m) et une sortie (ω_m). La réponse à un échelon de perturbation est illustrée sur la figure 12.

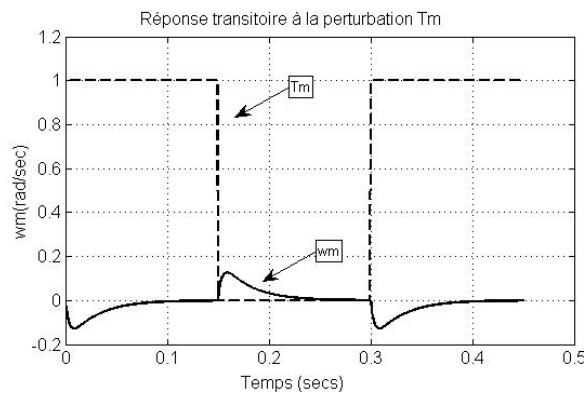


Fig.-12 Réponse transitoire à la perturbation

Le filtre $W_1(s)$ à été choisi pour fixer une marge de module minimale de 0.83, une erreur statique minimale de 1.27×10^{-4} et une bande passante supérieure à 38 rad/sec. Le filtre $1/W_1(s)$ constitue un majorant de la fonction de sensibilité pour le système nominale est les systèmes perturbés comme indiqué par la figure 13.

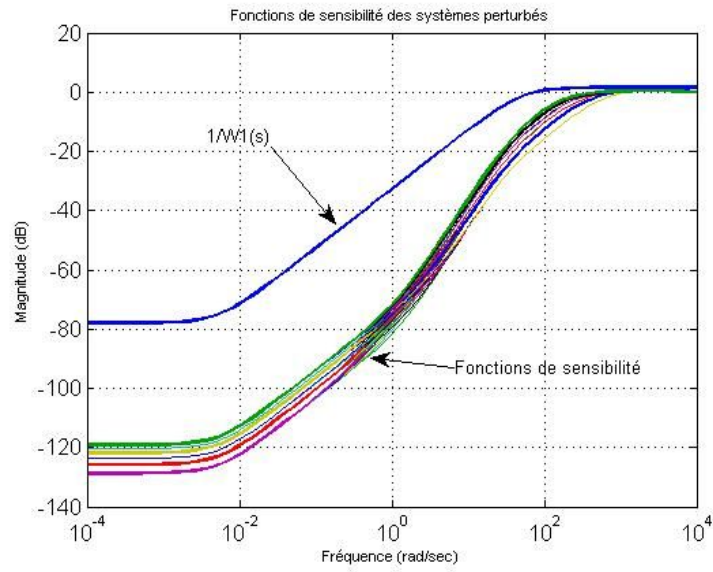


Fig.-13 Fonctions de sensibilité des systèmes perturbés

Toutes les fonctions de sensibilité sont situées en dessous de la réponse en fréquence de $1/W_1(s)$, alors on en déduit que le régulateur $K(s)$ vérifie la robustesse de stabilité et la robustesse des performances.

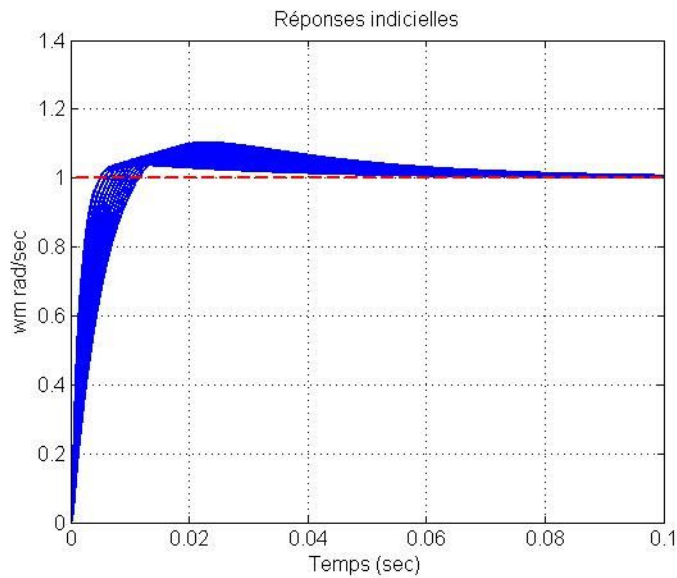


Fig.-14 Réponses indicielles des systèmes perturbés

Le temps de réponse est compris entre 0.041 second et 0.07 second. Le dépassement est compris entre 4.1% et 10%.

6.6.2.4 Simulation

Les régulateurs des courants statoriques i_d et i_q sont des régulateurs PI. Pour le calcul des coefficients des régulateurs K_d et K_q , on utilise la méthode de compensation décrite dans la section (4.2.1). On trouve pour le régulateur de courant i_d : $K_{pd} = 2.1$ (coefficient proportionnel), $K_{id} = 0.0023$ (coefficient intégral) et pour le régulateur de courant i_q : $K_{pq} = 4.2$ (coefficient proportionnel), $K_{iq} = 0.0047$ (coefficient intégral).

Le système de la figure 3.6 est testé par simulation numérique. La consigne de vitesse du rotor est un échelon d'amplitude 50 rad/sec. Un échelon de perturbation $T_m = 3$ Nm, est appliquée à l'instant $t = 0.08$ second. Les résultats de simulation sont montrés sur la figure 15 pour les valeurs nominales des paramètres mécaniques J et F ($J = 0.00111$, $F = 0.0014$), sur la figure 17 pour des valeurs maximales de J et F ($J = 0.0017$, $F = 0.0021$) et sur la figure 18 pour des valeurs minimales de J et F ($J = 5.55 \times 10^{-4}$, $F = 7 \times 10^{-4}$).

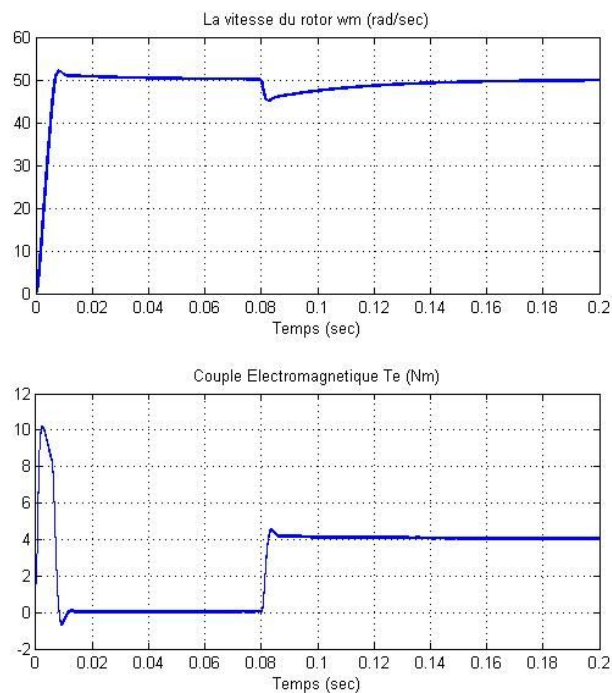


Fig.-15 Réponses de vitesse et de couple pour le système nominal

Chapitre 6

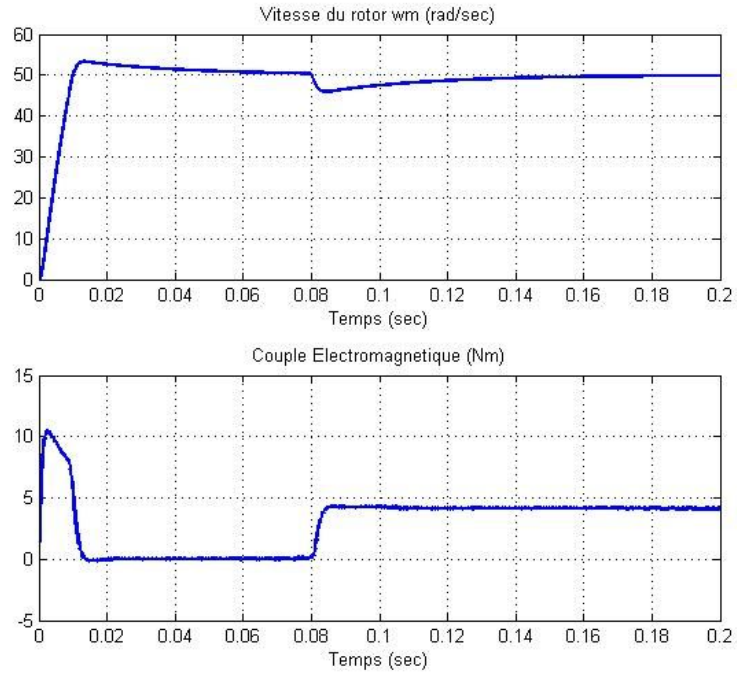


Fig.-16 Réponses de vitesse et de couple pour le système perturbé

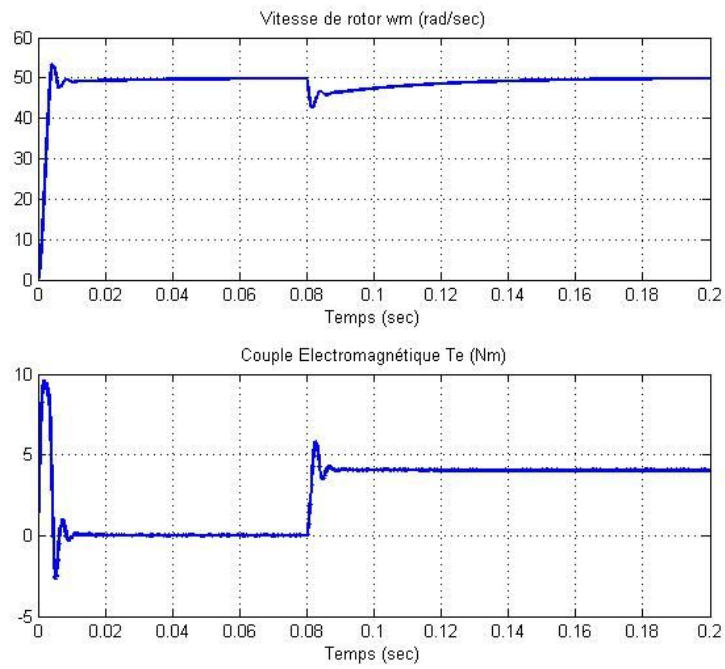


Fig.-17 Réponses de vitesse et de couple pour le système perturbé

Conclusion

L'approche de synthèse H_∞ est basée sur des concepts mathématiques rigoureux et complexes bien développés et fournit des procédures de conception systématiques de régulateurs robustes pour les systèmes linéaires, bien que l'extension dans le cas non linéaire est dans une phase de recherche très active. Le choix des filtres de pondération est d'une grande importance en vue de répondre aux objectifs de conception et atteindre les performances souhaitées du système en boucle fermée. L'ordre du régulateur est élevé car il correspond à celui du système augmenté (la somme de l'ordre du système nominal et des ordres des filtres de pondération). Des solutions sont envisagées pour minimiser le bruit de mesure des courants statoriques i_d et i_q . La première solution est basée sur l'utilisation de filtres numériques de type FIR (filtres à réponse impulsionnelle finie) ou de type IIR (filtres à réponse impulsionnelle infinie). Les trois méthodes d'analyse : la μ -analyse, la majoration des fonctions de sensibilités des systèmes perturbés par l'inverse du filtre de performances ($1/W_1(s)$) et la simulation de la commande vectorielle de la MSAP montrent que le régulateur H_∞ de contrôle de vitesse satisfait la robustesse de stabilité et la robustesse de performances.

Conclusion Générale

Ce travail de thèse a abordé la synthèse de méthodes de contrôle en vitesse d'un système servo-moteur constitué d'une machine synchrone à aimants permanents, d'un onduleur de tension triphasé et d'une charge. L'objectif était de développer des lois de commandes capables de prendre en compte les incertitudes paramétriques de la partie mécanique du moteur synchrone à aimant permanent tout en respectant la dynamique imposée par le cahier des charges. Une loi de commande basée sur des régulateurs classiques de type PI, a été abordée dans le quatrième chapitre car ce type de régulateur est encore le plus répandu dans le domaine des servo-entraînements. Cette loi de commande répond aux spécifications du cahier de charge et donnent de bonnes performances pour les valeurs nominales des paramètres mécaniques J et F . Toutefois la variation des paramètres mécaniques affectent cette loi de commande qui produit des résultats imprévisibles et non désirées. Dans le sixième chapitre la théorie de la synthèse H_∞ est présentée en détails. Le présent travail s'articule autour de la synthèse H_∞ d'un système de commande robuste pour le moteur synchrone à aimants permanents qui prend en compte la variation des paramètres de la partie mécanique de la machine. La première étape consiste à mettre le système mécanique sous forme LFT. La deuxième étape, la plus importante, permet d'introduire au système mécanique des filtres appelés fonctions de pondérations. Le filtre le plus crucial est celui appelé filtre de performances, il est introduit sur la sortie d'erreur de régulation. Il permet d'imposer à la fois la bande passante minimale du système bouclé, l'erreur statique maximale et la marge de stabilité minimale (marge de module). L'introduction du filtre de pondération $W_2(s)$ sur la sortie de contrôle permet au régulateur d'atténuer le bruit de mesure et avoir un roll-off. Puis le système augmenté est formé qui doit vérifier les hypothèses imposées par l'algorithme de Glover-Doyle. L'étape suivante consiste à normaliser le système. L'étape final consiste à concevoir le régulateur H_∞ pour le contrôle de la boucle de vitesse en

utilisant la méthode de Glover-Doyle. Le régulateur de vitesse $K(s)$ ainsi trouvé est d'ordre 3, il correspond à la somme de l'ordre du système nominal et ceux des filtres de pondérations $W_1(s)$ et $W_2(s)$. L'analyse de la robustesse du régulateur de vitesse est effectuée par trois méthodes différentes, la première est la mu-analyse qui montre que le régulateur satisfait la robustesse de stabilité et la robustesse de performances, la deuxième est basé sur la majoration de la fonction de sensibilité des systèmes perturbés par la réponse en fréquence de l'inverse de $1/W_1(s)$ et enfin la troisième méthode est basée sur la réponse indicielle des systèmes perturbés. Les trois méthodes montrent que le régulateur $K(s)$ maintient la stabilité du système en boucle fermée en dépit des variations des paramètres mécaniques et garantie une bonne réjection de la perturbation T_m , une erreur statique très faible, inférieure à 1.26×10^{-4} et une bonne marge de stabilité, supérieure à 0.83. Donc, le système en boucle fermée est stable et les performances sont satisfaites pour $5.55 \times 10^{-4} \leq J \leq 1.7 \times 10^{-3}$ et $7 \times 10^{-4} \leq F \leq 2.1 \times 10^{-3}$. Le prolongement de la synthèse H_∞ est la mu-synthèse qui tente de réaliser l'association de la synthèse H_∞ et la mu-analyse. Il existe une autre méthode de synthèse basée sur l'approche H_∞ par loop-shaping basée sur la factorisation première de la matrice de transfert. L'objectif futur est de concevoir des lois de commande robustes par les deux méthodes citées ci-dessus et faire une comparaison avec la synthèse H_∞ .

Paramètre du moteur synchrone à aimants permanents

The parameters of the PM synchronous motor: $L_d = 1.4$ mH, $L_q = 2.8$ mH, $R_s = 0.6 \Omega$, $I_{q\max} = 20$ A, $p = 4$, $\phi_f = 0.12$ Wb, $\omega_{mn} = 230$ rad/s, $T_m = 8.5$ Nm, $J = 1.11 \times 10^{-3}$ kgm², $F = 1.4 \times 10^{-3}$ Nm/rad s⁻¹.

Annexe

Modèles simulink

Afin de réaliser la simulation de la commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents, figure 3.6 page 22, on définit les modèles simulink suivant :

- Le modèle simulink de la transformation inverse de Park fig 1.
- Le modèle simulink de l'onduleur de tension fig 2.
- Le modèle du moteur synchrone à aimants permanents fig 3, fourni par la bibliothèque de modèles de Simulink. Ce système reçoit les trois tensions triphasées v_a' , v_b' et v_c' et T_m , il délivre en sortie les courants statoriques i_q , i_d en A, la vitesse du rotor ω_m (rad/sec), la position angulaire θ_m (rad) et le couple électromagnétique T_e (Nm).

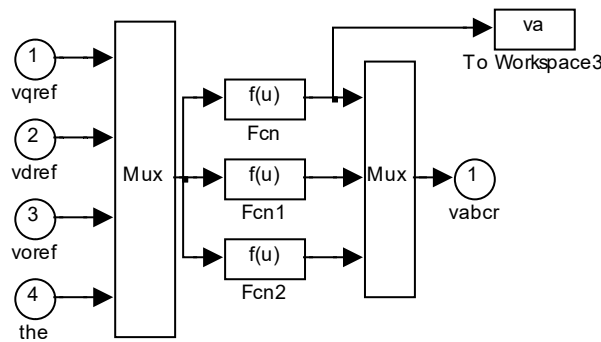


Fig 1. Modèle : Transformation de Park inverse

$$\begin{aligned}
 \text{Fcn} &= u(1)*\cos(u(4)) - u(2)*\sin(u(4)) + u(3) = v_{aref} \\
 \text{Fcn1} &= u(1)*\cos(u(4)-2*\pi/3) - u(2)*\sin(u(4)-2*\pi/3) + u(3) = v_{bref} \\
 \text{Fcn2} &= u(1)*\cos(u(4)+2*\pi/3) - u(2)*\sin(u(4)+2*\pi/3) + u(3) = v_{cref}
 \end{aligned}$$

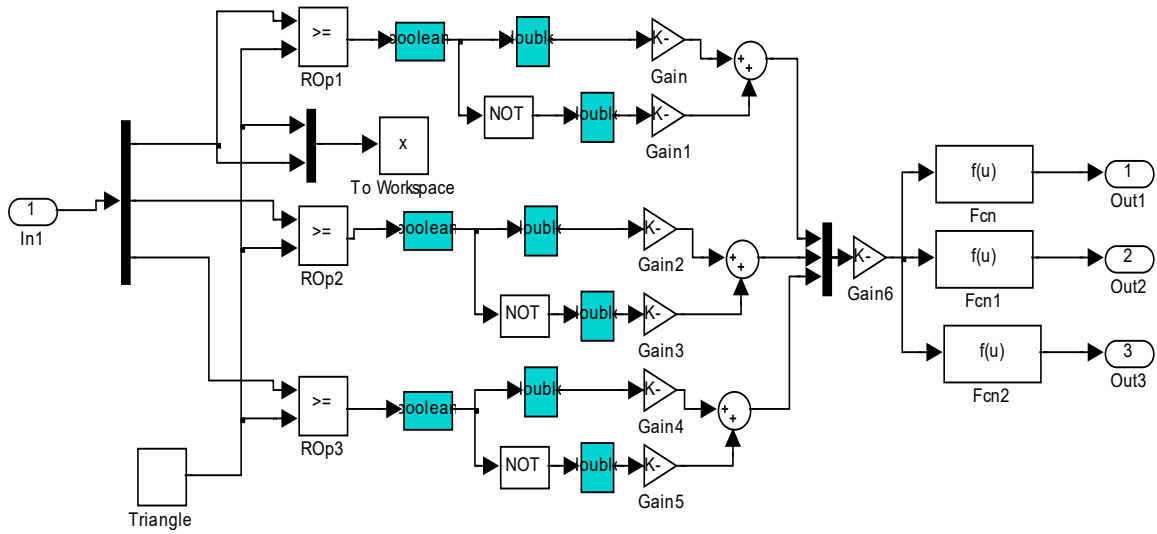


Fig 2. Modèle : onduleur de tension triphasé

$$F_{cn} (2*u(1) - u(2) - u(3))/3 = v'_A$$

$$F_{cn1} = (-u(1) + 2*u(2) - u(3))/3 = v'_B$$

$$F_{cn2} = (-u(1) - u(2) + 2*u(3))/3 = v'_C$$

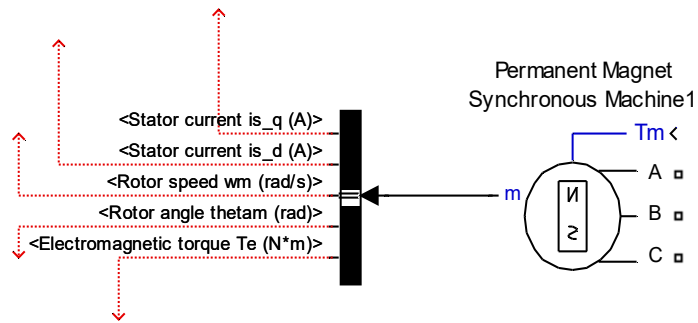


Fig 3. Modèle : MASAP

Bibliographie

- 1 JOHN CHIASSON, Modeling and High-Performance control of Electric Machines, John Wiley & Sons, 2005. ISBN 0-471-68449-X.
- 2 Nicola-Valeriu Olarescu, Sorin MuSuroi , Ciprian Sorandaru, FlAaviu-Mihal Frigur-Iliasa, Scalar control systems with permanent magnet synchronous with sinusoidal current control. Calculation of speed controller parameters, Rev. Roum. Sci. Techn. – Électrotechn. et Énerg., **57**, 1, p. 70–79, Bucarest, 2012.
- 3 U. MAKENROTH, Rbust Control Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004. ISBN 3-540-20929-8.
- 4 **Gu**, Da-Wei, **Petkov**, Petko, **Konstantinov**, Mihail M, Robust Control Design with MATLAB 2nd ed. 2013, ISBN 978-1-4471-4682-7. Springer-Verlag, London, 2013.
- 5 HAITHEM ABU-RUB, ATIF IQBAL, JAROSLAW GUSINSKI, High Performance CONTROL of AC Drives with matlab/Simulink models, John Wiley & Sons 2012. ISBN 978-0-470-97829-0.
- 6 .GLOVER, K.-DOYLE, J. C. : State Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ -Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems and Control Letters (1988).
- 7 DOYLE, J.—GLOVER, K.—KHARGONEKAR, P.—FRAN-CIS, B. : State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Con-trol Problems, IEEE Trans. Automat. Contr. AC-34 No. 8 (Aug1989), 831–847
- 8 IMC-PID design based on model matching approach and closed-loop shaping Qi B. Jin, Q. Liu ISA Transactions 53 (2014) 462–473
- 9 Non-diagonal H_∞ weighting function design: Exploiting spatio-temporal deformations in precision motion control, FrankBoeren , RobbertvanHerpen , TomOomen , MarcvandeWal , MaartenSteinbuch Control Engineering Practice 35 (2015) 35–42
- 10 Adaptive PID Speed Control Design for Permanent Magnet Synchronous Motor Drives Jin-Woo Jung, *Member, IEEE*, Viet Quoc Leu, Ton Duc Do, *Student Member, IEEE*, Eun-Kyung Kim, and Han Ho Choi, *Member, IEEE*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 30, NO. 2, FEBRUARY 2015
- 11 H_∞ Controller Design for A Ball and Plate System Using Normalized Coprime
- 12 On the adoption of a fractional-order sliding surface for the robust control of integer-order LTI

Bibliographie

- plants Maria Letizia Corradini, Roberto Giambò, Silvia Pettinari
Automatica 51 (2015) 364–371
- 13 Factors Hai-Qi Lin, Shi-Gang Cui, Li-Hui Geng, Yong-Li Zhang *2014 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*
 - 14 K. Ying-Shieh and T. Ming-Hung, “FPGA-based speed control IC for PMSM drive with adaptive fuzzy control,” *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 22, no. 6, pp. 2476–2486, Nov. 2007.
 - 15 S. Chi, Z. Zhang, and L. Y. Xu, “Sliding mode sensorless control of direct drive PM synchronous motors for washing machine applications,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 45, no. 2, pp. 582–590, Mar./Apr. 2009.
 - 16 Hernandez-Guzman, V.M., & Carrillo-Serrano, R.V. (2011). Global PID position control of PM stepper motors and PM synchronous motors. *International Journal of Control*, 84(11), 1807–1816.
 - 17 V. D. Colli, R. D. Stefano, and F. Marignetti, “A system-on-chip sensorless control for a permanent magnet synchronous motor,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 11, pp. 3822–3829, Nov. 2010.
 - 18 Choi, H.H., & Jung, J.W. (2011). Takagi– Sugeno fuzzy speed controller design for a permanent magnet synchronous motor. *Mechatronics*, 21(8), 1317–1328.
 - 19 Bolognani, S., Zigliotto, M., & Zordan, M. (2001). Extended range PMSM sensorless speed drive based on stochastic filtering. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 16, 110–117.
 - 20 Khlaief, A., Bendjedia, M., Boussak, M., & Gossa, M. (2011). A nonlinear observer for high performance sensorless speed control of IPMSM drive. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 27, 3028–3040.
 - 21 Kim, H., Son, J., & Lee, J. (2011). A high-speed sliding-mode observer for the sensorless speed control of a PMSM. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58, 4069–4077.
 - 22 I. Wasak. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formula. *Automatica* [J]. 1994, 30: 1307–1317
 - 23 Cheng, G., & Peng, K. (2007). Robust composite nonlinear feedback control with application to a servo positioning system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(2), 1132–1140.
 - 24 Cheng, G., Peng, K., Chen, B.M., & Lee, T.H. (2013). Discrete-time mode switching control with application to a PMSM position servo system. *Mechatronics*, 23(8), 1191–1201.

Bibliographie

- 25 Lee, H., & Lee, J. (2013). Design of iterative sliding mode observer for sensorless PMSM control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(4), 1394–1399.
- 26 Ping, Z., & Huang, J. (2012). Speed tracking control of PM synchronous motor by internal model design. *International Journal of Control*, 85(5), 522–532.
- 27 Prior, G., & Krstic, M. (2013). Quantized-input control Lyapunov approach for permanent magnet synchronous motor drives. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(5), 1784–1794.
- 28 Verrelli, C.M. (2011). Adaptive learning control design for robotic manipulators driven by permanent magnet synchronous motors. *International Journal of Control*, 84(6), 1024–1030.
- 29 Vu, N.T., Choi, H.H., & Jung, J.W. (2012). Certainty equivalence adaptive speed controller for permanent magnet synchronous motor. *Mechatronics*, 22(6), 811–818.
- 30 Yu, W., Luo, Y., & Pi, Y. (2013). Fractional order modeling and control for permanent magnet synchronous motor velocity servo system. *Mechatronics*, 23(7), 813–820.
- 31 Gahinet, A., Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox, The MathWorks Inc., 1995
- 32 G. Balas, R. Chiang, A. Packard, and M. Safonov, Robust Control System Toolbox User's Guide, The MathWorks Inc., 2005-2006.
- 33 R. D. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle, and M. Morari, μ -Analysis and Synthesis Toolbox : Users's Guide, MUSYN Inc. and The MathWorks, 1998.
- 34 D. Peaucelle, RoMulOC a YALMIP-MATLAB based Robust Multi Objective Control Toolbox, 2005.
- 35 J.F. Magni, "Linear fractional representation with a toolbox for use with Matlab," Tech. Rep., ONERA, 2001
- 36 G. Duc and S. Font, Commande H1 et μ -analyse, Hermes Science Publications, Paris, 1999.
- 37 E. Laroche and D. Knittel, "An improved linear fractional model for robustness analysis of a winding system," *Control Engineering Practice*, vol. 13, no. 5, pp. 659–666, 2005.
- 38 -767, 2004 E. Laroche, Y. Bonnassieux, H. Abou-Kandil, and J.P. Louis, "Controller design and robustness analysis for induction machine-based positioning system," *control Engineering Practice*, vol. 12, pp. 757.

Bibliographie

- 39 S. Kaitwanidvilai, P. Olanthichachat and Manukid Parnichkun., "Fixed Structure Robust Loop Shaping Controller for a Buck-Boost Converter using
- 40 E. Laroche, "Robustness analysis of nonlinear systems - application to induction motor," in IFAC World Congress, Prague, Praha, July 2005.
- 41 Genetic Algorithm", *IMECS 2008*, 19-21 March, 2008, Hong Kong.
- 42 Kaitwanidvilai and M. Parnichkun, "Genetic algorithm based fixed-structure robust H_∞ loop shaping control of a pneumatic servo system", *International Journal of Robotics and Mechatronics*, Vol. 16, No. 4, 2004.
- 43 K. Glover, D. McFarlane, "Robust Stabilisation of Normalised Coprime Factor Plant Descriptions with H-infinity bounded Uncertainty," *IEEE transactions of Automatic Control*, vol. 34, n8, pp. 821-830, 1989.
- 44 D. McFarlane, K. Glover, Robust Controller Design using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions, Volume 138 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, 1990.
- 45 D. McFarlane, K. Glover: A Loop Shaping Design Procedure using H_∞ Synthesis, *IEEE transactions of Automatic Control*, AC-3 n6, pp. 759-769, 1992.
- 46 B. Le Pioufle, G. Georgiou, J.-P. Louis: A robust total compensation algorithm for the torque control of a synchronous servomotor, *Journal de Physique III, EDP Sciences*, 1992, 2 (1), pp. 129-144
- 47 Wen Tan, H. J. Marquez, Tongwen Chen, " H_∞ Control Design for an Industrial Boiler, " *Proceedings of the American Control Conference Arlington, VA June 25-27, 2001*, pp. 2537-2542.
- 48 M. Osinuga, S. Patra, A. Lanzon, "Smooth weight optimization in H_∞ loop-shaping design, " *Systems & Control Letters*, Vol. 59, pp. 663-670, 2010.
- 49 A.A. El-Mahallawy, H.A. Yousef, M.I. El-Singaby, A.A. Madkour, A.M. Youssef, "Robust flight control system design using H_∞ loop-shaping and recessive trait crossover genetic algorithm, " *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, pp. 169-174, 2011.
- 50 Jayapal Reddy, Mendiratta Jugal Kishore, "Real time implementation of H_∞ loop shaping robust PSS for multimachine power system using dSPACE, " *Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 33, pp. 1750-1759, 2011.
- 51 Soumya R. Mohanty, Nand Kishor, Prakash K. Ray, "Robust H-infinite loop shaping controller based on hybrid PSO and harmonic search for frequency regulation in hybrid distributed generation system, " *Electrical Power and Energy Systems* Vol. 60, pp. 302-316, 2014.

Bibliographie

- 52 K. Jash, P. K. saha, G. K. Panda, "Vector Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Based on Sinusoidal Pulse width Modulated Inverter with Proportional Integral Controller, " *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 3, Issue 5, sept-oct 2013, pp. 913-917.
- 53 Lin, H.-Q., Cui, S.-G., Geng, L.-H., Zhang, Y.-L., "H_∞ controller design for a ball and plate system using normalized coprime factors, " *Control and Decision Conference (2014 CCDC), The 26th Chinese*, pp. 467-472, IEEE, 2014.
- 54 René Husson, Claude Lung, Jean François aubry, Djamal Daafouz, Didier Wolf, *Automatique, du cahier de charge à la réalisation de systèmes*, ISBN 978-2-10-050-387-1, Dunod, Paris, 2007.
- 55 Benjamin C. Kuo, *Automatic Control Systems, Seventh Edition*, Upper Sadle River, New Jersey 07458, 1995.
- 56 Guy Segulier, Francis Lafabrique, *Les convertisseurs de l'Electronique de Puissance*, ISBN 2-85206-539-8 volume 4.
- 57 Rosario Toscano, *Commande et Diagnostic des Systèmes Dynamiques*, ISBN 2-7298-2038-8, Ellipses Editions, 2005, Paris.
- 58 Michel Pinard, *Commande Electronique des Machines*, ISBN 978-2-10-058481-9, Dunod, Pris, 2013.
- 59 William L. Brogan, *Modern Control Theory*, Quantum Publishers, Inc, New York, 1974.
- 60 DUC, G.—FONT, S. : *Commande Hinfy et μ -analyse, Des outils pour la robustesse*, HERMES Science Publications, Paris, 1999.
- 61 Michael J. Grimble, *Robust Industrial Control Systems*, ISBN 0-470-02073-3, John Wiley & Sons, West Sussex,England, 2006.