

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Spécialité Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Par : MOUAICI Fethi

Intitulée

**ETUDE ET ANALYSE DE LA FLEXION DE LA
VIBRATION DES PLAQUES COMPOSITES AVEC
RAIDISSEURS**

Soutenue publiquement Le 12/06/2016 devant le jury composé de :

EL Abbas ADDA BEDIA	Pr	UDL SBA	Président
Abdelouahed TOUNSI	Pr	UDL SBA	Directeur de thèse
Mohammed Bouraada	MCA	UDL SBA	Examineur
Sid Ahmed Mohammed HOUARI	MCA	U de Mascara	Examineur
Redha YEGHNEM	MCA	U de Saida	Examineur
Khaled Amara	MCA	CU d'Ain Timouchent	Examineur

Année universitaire 2015 / 2016

Remerciement

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Mes plus vifs remerciements vont, en premier lieu à mon dieu ALLAH pour tout.

Je remercie profondément monsieur le professeur A.Tounsi qui assume dirigé tout au long de cette thèse avec patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa patience et ses approches toujours à la fois scientifique et pratique ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Je remercie monsieur le professeur A.ADDA Bedia pour ces conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés et j'exprime également toute ma reconnaissance au soutien scientifique important qui m'a apporté à mon travail de recherche. Je tiens à lui rendre hommage à ses qualités humaines et pédagogiques et accepte de présider mon jury de la thèse.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : Mr. Abdelkader FEKRAR maître de conférences à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés, Mr. Sid Ahmed Mohammed HOUARI maître de conférences l'université de Mascara, Mr. Redha YEGHNEM maître de conférences l'université de Saida et Monsieur Khaled Amara maître de conférences au centre universitaire de Ain Timouchent qui ont voulu examiner ce travail.

Je désire aussi exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues et amis du laboratoire des matériaux et hydrologie (L.M.H) de l'université Djilali Liabès de Sidi Belabess et en particulier Monsieur Draiche Kada, Nedri Kada, Saadoun Mohamed, et Monsieur Youzera hadj des maitres de conférences auprès de l'université de Mascara, qui sont Contribués par leurs conseils et leurs réflexions à l'élaboration du présent mémoire.

Je remercie en second mon appui moral mes parents qui ont sacrifiés leur vie pour notre bien ainsi que mes frères et mes sœurs pour leurs encouragements.

Encore des remerciements sincères à tous mes collègues de notre promotion pour tout le partage de connaissance et aussi pour leur amitié.

Dédicaces

Je dédie cette thèse à mon pays L'Algérie,

À mon fils Houari Boumediene et ma femme Oum-Elkheir,

À mon nouveau né Mouad Abdelmoujib,

À mon très cher père,

À ma mère,

À mes frères Rida, Djamel,

À Mes Fatima Zohra, Ibtissem,

À Mon Ami Hellal Laid,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

ملخص

ملخص

في هذه الدراسة أولاً تم عرض نظرية لتشوه القص والتي تعتمد على وضعية المستوى الأحادي للوحات المتدرجة وظيفياً. خصائص المواد تتغير بشكل مستمر من خلال سمك لوحة، والتي يمكن أن تختلف وفقاً لقانون السلطة. و من خلال انجاز هذه المواد نحصل على بعض الشوائب أو العيوب مثل المسامية لذلك نضطر إلى دراسة سلوك هذه المواد التي تحتوي على المسامات وبوجود الاهتزازات. يتم الحصول على معادلة الحركة للوحات من خلال مبدأ هاملتون.

أما ثانياً تم فحص وتحليل لنموذج للصفائح المركبة المغلفة لمقاومة الانحناء والتي تعتمد على النظرية العليا لتشوه القص. وتعرض النتائج الرقمية التي تم الحصول عليها.

الكلمات المفتاحية:

الاهتزاز: لوحات: لوحات متدرج وظيفياً: مسامية

Résumé

Résumé :

Dans ce travail, Nous avons présenté en premier lieu une théorie de déformation de cisaillement basé sur le concept de la position de la surface neutre, afin d'étudier le comportement dynamique des plaques fonctionnellement graduée sans la présence des raidisseurs. Les propriétés matérielles des plaques fonctionnellement graduée sont supposé être varie à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance en terme des fractions volumiques des constituants. Durant la fabrication de ces matériaux, des défauts tel que la porosité peuvent apparaitre. Par conséquent il est nécessaire de considérer dans cette étude le comportement dynamique des plaques fonctionnellement graduée avec des pores. La théorie propose est base sur l'hypothèse que le déplacement transversales est décompose en composantes : une composante due à la flexion et une composante due au cisaillement. La position de la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée est déterminée, et les équations de mouvement sont obtenues aussi par l'intermédiaire du principe d'Hamilton.

En deuxième lieu, un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (H.S.D.T), et propose pour donné les solutions de la flexion statique des plaques composites avec la présence des raidisseurs.

Des résultats numériques sont présentés pour interprète le comportement dynamique des plaques fonctionnellement graduée.

Mots clés : plaque; vibration ; porosité ; matériau fonctionnellement graduée.

Abstract

Abstract:

In this work, we first present a shear deformation plate theory based on neutral surface position is developed for free vibration analysis of functionally graded material (FGM) plates. The material properties of the FGM plates are assumed to vary through the thickness of the plate by a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. During manufacture, defects such as porosities can appear. It is therefore necessary to consider the vibration behavior of FG plates having porosities in this investigation. The proposed theory is based on assumption that the in-plane and transverse displacements consist of bending and shear components, in which the bending components and, the shear components. The neutral surface position for a functionally graded plate which its material properties vary in the thickness direction is determined. The equation of motion for FG rectangular plates is obtained through Hamilton's principle.

Secondly, an analytical model was developed to investigate the flexural behavior of a pultruded fiber reinforced plastic deck of rectangular unit module. The model is based on higher-order shear deformable plate theory (HSDT), and capable of predicting deflection of the deck with Arbitrary laminates tacking sequences.

Numerical results are presented to interpret the dynamic behavior of functionally graded material (FGM) plates.

Keywords: plate; vibration; porosity; functionally graded material;

Table des matières

Table des matières

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale..... 1

CHAPITRE I : Etude bibliographique

I-1 Introduction	8
I-2 Généralités sur les matériaux composites	8
I -2-1 Revue des différents renforts disponibles.....	8
I -2-1-1 Les fibres de carbone	9
I -2-1-2 Les fibres de Kevlar.....	10
I -2-1-3 Les fibres de Verre	11
I -2-2 Notion sur les matrices	11
I -2-2-1 Les matrices organiques.....	12
I -2-2-2 Les matrices métalliques	12
I -2-3 Loi de mélange.....	13
I -2-4 Loi de comportement	14
I -2-5 Matériaux anisotropes.....	15
I -2-6 Matériau monoclinique	15
I -2-7 Matériaux orthotropique	15
I -2-8 Matériau transversalement isotrope	16
I -2-9 Matériaux isotropes.....	16
I-3- Généralités sur les matériaux à Gradient de propriétés	18
I-3-1- Introduction	18
I-3-2- Le concept des matériaux a gradient de propriétés.....	18
I-3-3- Revue des méthodes d'élaboration des F.G.M	21
I-3-4- Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	27
I-3-5- Propriétés matérielles de la plaque FGM.....	27
I-4- Généralités sur la théorie des plaques	32
I-4-1- La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	32
I-4-2- La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	33
I-4-2- La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	34
I-5- Théorie des stratifiés.....	37
I-5-1 Champs des déplacements.....	37
I-5-2 Champs des déformations.....	37
I-5-3 Champs des contraintes	39
I-5-4 Expression des résultantes et moments	40
I-5-5 Equation constitutive d'un stratifié	43
I-5-6 Conclusion	44

CHAPITRE II : Analyse Du Comportement En Flexion Des Plaques En Matériaux Composites Avec Raidisseurs

II-1- Introduction	46
II-2-Développement de la théorie.....	46
II-2-1 Hypothèses de Base	47
II-2-2-Expression générale	47
II-2-3- Elément représentative.....	48
II-2-4- Equations constitutives pour chaque partie.....	50
II-2-5- Equations constitutives pour model de pont.....	53
II-3 Conclusion	54

CHAPITRE III : Analyse du comportement en vibration libre des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés contenant des pores

III -1 Introduction	56
III -2 Etude paramétrique pour une plaque en FGM.....	56
III -3-1 Modèle théorique.....	57
III -3-2 Hypothèse de base.....	58
III -3-3 Cinématique.....	59
III -3-4 Relation constitutive.....	60
III -3-5 Equation de mouvement.....	60
III -3-6 Solution de Navier pour une plaque rectangulaire simplement appuyé.....	63
III -4- Conclusion	64

CHAPITRE IV : Résultats et Discussion

IV -1 Comportement d'une plaque sans fondation élastique.....	66
IV -1-1 Etudes comparatives.....	67
IV -1-2 Etudes paramétriques	72
IV -2 Comportement d'une plaque avec fondation élastique	79
Conclusion générale.....	81
Références bibliographiques.....	83
ANNEXE.....	

Liste des tableaux

CHAPITRE I : Etude bibliographique

Tableau I - 1 : Propriétés des fibres de carbone	9
Tableau I -2 : Propriétés des fibres de Kevlar	10
Tableau I -3 : Propriétés des fibres de Verre	11
Tableau I -4 : Propriétés des Résines thermodurcissables	12

CHAPITRE IV : Résultats et Discussion

Tableau IV.1 propriétés des matériaux utilisées	66
Tableau IV.2 Comparaison du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ de la plaque carrée Al/ZrO ₂	67
Tableau IV.3 Comparaison du paramètre de fréquence Naturelle $\hat{\beta}$ de la plaque carrée Al/Al ₂ O ₃	69
Tableau. IV.4 Comparaison du paramètre de fréquence $\bar{\omega}$ de la plaque rectangulaire Al/Al ₂ O ₃ (b=2a)	71
Tableau. IV.5 Les neufs premier Paramètre de fréquences $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée Al/Al ₂ O ₃ (a/h=5)	78
Tableau (IV-6) : Comparaison des six premières fréquences naturelles de plaque carrée FG Al/Al ₂ O ₃ $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$	81
Tableau (IV-7) : comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ isotrope plaque carrée	82

Listes des figures

CHAPITRE I : Etude bibliographique

Figure I.1 : Caractéristiques des matériaux composites F.G.M en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Kawal et al, 1990).....	19
Figure I.2 : Principe de la méthode coulage en bande (Williams et al, 1976)	21
Figure I.3 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Yuki et al, 1990).....	25
Figure I.4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh et al, 1987).....	26
Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM	27
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	29
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	30
Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	31
Figure I.9 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, [9]).....	33
Figure I.10 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, [9]).....	34
Figure I.11 : Illustration de la plaque (Reddy, [9]).....	35
Figure I.12 : Les couches d'un stratifié.....	39
Figure I.13 : Forces par unités de longueur.....	40
Figure I.14 : Moments par unités de longueur.....	42

CHAPITRE II : Analyse Du Comportement En Flexion Des Plaques En Matériaux Composites Avec Raidisseurs

Figure II.1 : Géométrie d'une plaque stratifiée rectangulaire en coordonnées cartésiennes.....	46
Figure II.2 : Elément représentative pour un model de pont.....	48
Figure II.3 : Résultante des contraintes pour un élément représentative d'un model de pont.....	50
Figure II.4 : La résultante des contraintes longitudinal au sens y pour l'âme.....	53

CHAPITRE III : Analyse du comportement en vibration libre des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés contenant des pores

Figure III.1 : Position de la surface neutre et la surface moyenne pour une plaque en FGM.....	56
---	----

CHAPITRE IV : Résultats et Discussion

Figure IV.01. l'effet de l'indice matériel sur le paramètre de la fréquence fondamentale pour une plaque carré FGM : (a) $a/h=5$, (b) $a/h=100$	73
---	----

Figure. IV.02. L'effet du rapport de l'épaisseur sur le paramètre de fréquence d'une plaque carré FGM : (a) $p=1$, (b) $p=100$	74
--	----

Figure. IV.03. L'effet du rapport géométrique a/b sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire : (a) $p=1$, (b) $p=100$	75
---	----

Figure IV.04. l'effet de l'indice matériel sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM pour différentes valeurs de porosité : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0.1$, (c) $\alpha = 0.2$	77
--	----

Figure (IV- 5) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaque P-FG sans la fondation élastique ($K_0=K_1=0$)	83
---	----

Figure (IV- 6a) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaques P-FG posées sur une fondation élastique $K_1=10$	83
---	----

Figure (IV- 6b) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaques P-FG posées sur une fondation élastique $K_0=100$	84
--	----

Figure (IV- 7a) : L'effet du paramètre matériel « γ » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaques E-FG posées sur une fondation élastique $K_1=10$	84
---	----

Figure (IV- 7b) : L'effet du paramètre matériel « γ » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D_c}$) de plaques E-FG posées sur une fondation élastique $K_0=100$	85
--	----

Liste des notations

Liste des Notations

RT	Résistance à la rupture.
EoT	Module de Young.
AR	L'allongement à la rupture.
E_L	Module de Young dans le sens longitudinal.
E_T	Module de Young dans le sens transversal.
E_m	Module de Young de la matrice.
E_f	Module de Young de la fibre.
C_{ij}	Les constantes élastiques de la matrice de rigidité.
$[\bar{Q}]$	Matrice de rigidité réduite.
k	Nombre de couche.
$u_0, v_0, et w_0$	Les déplacements d'un point situé dans le plan médian.
$\varepsilon_{mf}(M)$	Le champ des déformations en membrane-flexion.
$\gamma_c(M)$	Le champ des déformations en cisaillement transverse.
ε_{ij}	Tenseur de déformations.
σ_{ij}	Tenseur des contraintes des éléments.
A_{ij}	Coefficient de rigidité en membrane (dans le plan).
B_{ij}	Coefficient de rigidité de couplage membrane –flexion.

D_{ij}	Coefficient de la rigidité en flexion.
α_{ij}	Coefficient de souplesse en membrane (dans le plan).
β_{ij}	Coefficient de souplesse de couplage membrane –flexion.
δ_{ij}	Coefficient de la souplesse en flexion.
σ_{yz}, σ_{xz}	Contraintes de cisaillement transversales.
γ_{xz}	Déformation du cisaillement.
ν	Coefficient de poisson.
$g(z)$	Fraction volumique de la plaque FGM.
$E(z)$	Module de Young de la plaque.
E_1	Module de Young de la céramique.
E_2	Module de Young du métal.
p	Paramètre matérielle.
a	demi- largeur de la plaque.
h	Épaisseur de la plaque.
x, y, z	Coordonnées.
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{p\}$	Le vecteur des efforts généralisés

Introduction générale

Introduction générale

Durant ces dernières années, les plastiques renforcés par des fibres et les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés d'une façon croissante dans les structures de génie civil.

Les matériaux composites sont largement applicables dans l'aéronautique, les domaines de génie civil, mécanique et d'autres industries de la technologie moderne en raison de leurs caractéristiques favorables de grande rigidité et de résistance.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) sont une nouvelle classe de matériau composite présentant une variation spatiale continue des propriétés matérielles à travers une, deux ou trois directions. Puisque les interfaces sont absentes dans ce type de matériau, le phénomène de concentration des contraintes qui est souvent trouvé dans les composites stratifiés conventionnels est complètement évité. Initialement, les FGMs sont principalement développés comme des barrières thermiques dans l'industrie aérospatiale (Liu *et al.* 2010). En outre, les FGMs sont largement utilisés aussi dans plusieurs applications d'ingénierie, tel que l'industrie des avions, l'industrie thermoélectrique, le génie civil (Miyamoto, *et al.* 1999, Lu, *et al.* 2009, Liang, *et al.* 2014; Liang *et al.* 2015ab). Les FGMs sont actuellement développés pour une utilisation générale comme des éléments de structure dans des environnements de haute température et dans des cas dynamiques ; par conséquent plusieurs études sur les caractéristiques vibratoires des plaques FGMs sont disponibles dans la littérature ou on peut citer par exemple (Praveen and Reddy 1998, Yang and Shen 2001, 2002, Vel and Batra 2004). Lin and Tseng (1998) ont analysé la vibration libre des plaques stratifiées orthotropes circulaires et annulaires en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre et la méthode des éléments finis. Liew and Yang (2000) and Hosseini Hashemi *et al.* (2008) ont employé la méthode de RITZ pour l'analyse de la vibration libre tridimensionnelle des plaques épaisses annulaires avec différentes conditions aux

limites. Sundararajan *et al.* (2005) ont investigué les vibrations libres non linéaires des plaques FG rectangulaire et oblique dans des environnements thermiques. La température est supposée être variée selon la discussion de l'épaisseur seulement. Les propriétés matérielles des constituants sont considérées dépendant de la température. Lee *et al.* (1998) ont analysé la vibration libre et la réponse dynamique transitoire des plaques multicouches. En utilisant la méthode des éléments finis, les équations d'équilibres et de mouvements sont déterminées par la théorie de Zigzag de déformation de cisaillement. Li *et al.* (2009) ont analysé la vibration libre des plaques rectangulaires FGM dans un environnement thermique en se basant sur la théorie d'élasticité tridimensionnelle, les deux conditions aux limites simplement appuyée et encadrée sont considérées. Les résultats sont obtenus pour différents types de distribution de température. Huang and Shen (2004) ont étudié la vibration non linéaire des plaques FGMs dans des environnements thermiques. Les formulations développées sont basées sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé et l'équation de von-Karman. Allahverdzadeh *et al.* (2008) ont développé une approche semi analytique pour les vibrations non linéaires libres et forcées des plaques circulaires minces en FGM. La formulation est basée sur la théorie classique des plaques (CPT) et l'autre formulation est basée sur la théorie classique des plaques (CPT) et l'équation de von-Karman. Woo *et al.* (2006) ont présenté une solution analytique pour le comportement dynamique non linéaire des plaques FGMs.

Les équations de mouvements pour des plaques minces rectangulaires en FGM sont obtenues en utilisant la théorie de von-Karman, et les séries mixtes de Fourier sont utilisées pour déterminer la solution. Shufrin and Eisenberger (2005) ont utilisé la méthode de Kantorovich pour les analyses de la stabilité et de la vibration des plaques. En se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et d'ordre élevé,

ils ont obtenus les équations de vibrations et de stabilité d'une plaque isotrope et ils ont proposé une méthode pour obtenir les fréquences et la charge critique de flambement.

En ce basant sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre de Reddy, les solutions analytiques exactes ont été présentées par Hosseini-Hashemi *et al.* (2011a) pour la vibration transversale des plaques rectangulaires épaisses. Baferani *et al.* (2011) ont présenté une solution exacte pour la vibration libre des plaques rectangulaires épaisses en FGM reposant sur une fondation élastique. Dehghan and Baradaran (2011) ont proposé la solution des équations des valeurs proposés en utilisant la méthode des éléments finis mixtes et la méthode différentielles quadratiques afin de la charge de flambement. Amini *et al.* (2009) ont examiné la vibration libre des plaques FG des fondations élastiques en utilisant la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Ait Atmane Hassen *et al.* (2010) ont analysé aussi la vibration libre des plaques FGM simplement appuyée reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée. En employant une nouvelle théorie raffinée à quatre variables, Hadji *et al.* (2011) ont examiné la vibration libre des plaques sandwich rectangulaires en FGM. La théorie présentée est variationnellement consistante et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans plusieurs aspects, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et engendre une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversale à travers l'épaisseur tout en respectant les conditions de la surface libre. Benachour *et al.* (2011) ont développé un modèle pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM avec un indice matérielle arbitraire. Les solutions analytiques ont été obtenues en utilisant la technique de NAVIER. ElMeiche *et al.* (2011) ont développé une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement pour le flambement et la vibration des plaques sandwich FGM. Zidi *et al.* (2014) ont étudié la flexion des plaques FGM reposant sur une fondation élastiques et soumise à un chargement hygro-thermo-mécanique. Tounsi *et al.* (2013) ont présenté une théorie

trigonométrique de déformation de cisaillement pour la flexion thermo élastique des plaques sandwich FGM. La même théorie a été utilisée pour étudier le comportement mécanique des plaques fonctionnellement graduée. (Bourada *et al.*, 2012; Bachir Bouiadjra *et al.*, 2012; Kettaf *et al.*, 2013; Khalfi *et al.*, 2014; Attia *et al.*, 2014; Bakhti *et al.*, 2013; Boudierba *et al.*, 2013; Ait Amar Meziane *et al.*, 2014; Draiche *et al.*, 2014; Nedri *et al.*, 2014; Sadoune *et al.*, 2014).

Puisque, les propriétés matérielles des plaques fonctionnellement graduée varient à travers la direction de l'épaisseur, la surface neutre de la plaque peut ne pas coïncider avec la surface médiane. Par conséquent, les déformations de membrane et de la flexion de la plaque FGM sont couplées. Certain chercheur (Morimoto *et al.* 2006, Abrate 2008, Zhang and Zhou 2008, Saidi and Jomehzadeh 2009, Yahoobi and Feraidoon 2010, Bachir Bouiadjra *et al.* 2013, Eltaher *et al.* 2013) ont montrée qui n'ya pas de couplage membrane-flexion dans les équations constitutive si la surface de référence est judicieusement choisi.

Dans la fabrication des FGMs, les pores peuvent être engendrés dans le matériau durant le processus de la fabrication. Cela est due à la grande différence dans la température de solidification entre les constituants des matériaux (Zhu *et al.*, 2001). Wattanasakulpong *et al.* (2012) ont présenté sur l'apparition des pores à l'intérieure des FGMs fabriqué par une infiltration séquentielle à multi étape Wattanasakulponga and Ungbhakorn (2014) ont analysé les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des poutres FGM contenant des pores. Cependant dans la littérature scientifique, il n'existe aucun travail sur le comportement des plaques FGMs avec des pores. Récemment, Ait Yahia *et al.* (2014) ont examiné la propagation des ondes dans des plaques FGM en considérant l'influence des pores.

L'objectif principal de ce travail est d'obtenir en premier lieu la solution analytique de la vibration libre des plaques composites contenant des pores et en

deuxième lieu la solution de flexion statique des plaques stratifiées creuses. L'analyse est basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée et le concept de la position de la surface neutre. La présente théorie possède uniquement quatre variables et quatre équations d'équilibre, mais elle satisfait les conditions aux limites de la surface libre sans introduire les facteurs de correction de cisaillement. Les effets de porosités sont considérés aussi dans ce travail pour comprendre le comportement dynamique des plaques FGMs.

Afin d'atteindre cet objectif principal, la présente étude est divisée de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, on débute par une synthèse générale sur les matériaux composites. Un détail est présenté concernant les constituants (fibres et matrices), des généralités sur les matériaux à gradient de propriétés tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau. Et une synthèse sur les différents modèles de la théorie classique des plaques et sur la théorie des stratifiées.

Dans le deuxième chapitre, on a défini l'équation nécessaire pour l'évaluation du comportement à la flexion des plaques stratifiées avec raidisseurs cas des ponts. Cette évaluation est basée sur la théorie des plaques stratifiées avec l'utilisation des théories de cisaillement de déformation d'ordre supérieur (HSDT).

Dans le troisième chapitre, est consacré à l'évolution de la formulation théorique d'un modèle de plaque comme matériau les FGM en flexion avec vibration libre et sous la présence des pores.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation numérique de la solution analytique de la vibration libre des plaques composites contenant des pores.

En dernier, une conclusion générale présentant les différents paramètres influents sur le comportement mécanique des structures en stratifiées et en FGM.

Chapitre I

Etude Bibliographique

Chapitre I : Etude Bibliographique

I-1 Introduction :

Dans un premier temps, on présente dans ce chapitre une généralité sur les matériaux composites, leurs constituants, leurs propriétés ainsi que leurs hypothèses de base, puis une généralité sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs caractéristiques et une revue sur les méthodes d'élaboration de ces matériaux et on se termine par une généralité sur la théorie des plaques et la théorie des stratifiés.

I-2 Généralités sur les matériaux composites :

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, associées possède des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants (Berthelot, 1996).

Les matériaux composites structuraux sont principalement constitués de deux phases :

Le renfort : son rôle est d'assurer la fonction mécanique. Il se présente généralement sous la forme des fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elle doit supporter.

La matrice : son but est de réaliser la liaison entre les renforts, leur protection vis-à-vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique.

D'une manière générale, les matériaux composites structuraux de part la nature du renfort sont fortement anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont très différentes suivant la direction considérée (Berthelot, 1996).

D'autre part, les matériaux composites sont légers, c'est-à-dire que les masses volumiques de leurs constituants sont de l'ordre de 1 à 3.5 g / cm³.

I-2-1 Revue des différents renforts disponibles :

Les principales fibres utilisées sont :

- Fibre de Carbone ;

- Fibre de Kevlar ;

- Fibre de Bore ;

- Fibre de Verre.

I -2-1-1 Les fibres de carbone :

Suivant les conditions de fabrication, il existe toute une variété de fibres de carbone. Mais, actuellement trois sortes sont commercialisées :

- 1- Les fibres haute résistance classique (types : As4, As6, T300 et X635) ;
- 2- Les fibres à haute résistance module intermédiaire (types : IM6, X636);
- 3- Les fibres à haut module (types : M40 et HM5).

D'un fabricant à l'autre, les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques moyennes. Elles sont données dans le tableau ci - dessous:

Propriétés en traction	HR		IM	HM	
	R_t (MPa)	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500
E_{oT} (MPa)	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 500000
A_R (%)	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g / cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

Tableau I - 1 : Propriétés des fibres de carbone

R_T : Résistance à la rupture ;

E_{oT} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

Une particularité importante de ces fibres est leur coefficient de dilatation thermique négatif ou quasi nul dans le sens de la fibre, c'est-à-dire que les fibres se raccourcissent quand on les chauffe et s'allongent quand on les refroidit.

I -2-1-2 Les fibres de Kevlar :

Les fibres de Kevlar sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatique (les aramides). Actuellement, il existe deux types de produits :

- 1- les fibres de Kevlar 49 ;
- 2- les fibres de Kevlar 29

Les premiers sont principalement utilisés pour la confection des composites, alors que les autres entrent surtout dans la constitution des cordes, cordages et câbles.

Les propriétés physiques et mécaniques de ces deux types de fibres sont représentées dans le tableau I-2.

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
R_t (MPa)	3000	2700
E_{oT} (MPa)	120000 à 130000	60000
A_R (%)	2.1	4
Masse volumique (g / cm ³)	1.45	1.44

Tableau I -2 : Propriétés des fibres de Kevlar

Du point de vu dilatation, le Kevlar présente la même particularité dans le sens de fibres que celle du carbone.

I -2-1-3 Les fibres de Verre :

Il existe une multitude de fibres de verre dont les propriétés dépendent de leur composition.

Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. Ce sont les variétés E, S et R. Ces deux derniers sont très voisines (l'une est Américaine et l'autre est Française)

Les propriétés des ces fibres sont présentées dans le tableau I-3.

Propriétés en traction	Verre E	Verre R	Verre S
R_t (MPa)	3400	4400	4900
E_{oT} (MPa)	73000	86000	87000
A_R (%)	4.9	5.2	-----
Masse volumique (g / cm ³)	2.54	2.55	2.54

Tableau I -3 : Propriétés des fibres de Verre

I -2-2 Notion sur les matrices :

Actuellement, on distingue deux catégories de matrices :

- Les matrices organiques (résines synthétiques) ;
- Les matrices métalliques.

I -2-2-1 Les matrices organiques :

Un très grand nombre de matériaux plastiques peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites. Elles peuvent aussi bien appartenir à la famille des résines « Thermodurcissables » qu'à celles des résines « thermoplastiques ».

a- Résines thermodurcissables :

Les résines thermodurcissables sont employées comme matrice des matériaux composites structuraux. Comme leur nom le laisse indiquer, ces produits durcissent après un cycle de chauffage appelé « cycle de polymérisation ». A l'issue de celui-ci, le matériau est un solide relativement rigide qui ne fond pas et ne se ramollit pas en température (Berthelot, 1996).

De ce fait, ils ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois et ceci avant qu'ils ne durcissent, donc avant l'accomplissement du cycle de polymérisation.

Les résines thermodurcissables les plus répandues sont les polyesters, les époxydes, les polyamides et les phénoliques.

Le tableau I-4 présente les propriétés physiques et mécaniques de ces résines après polymérisation.

Propriétés en traction	Polyester	Epoxyde	Polyamide	Phénolique	Silicone
E_{oT} (MPa)	30 à 90	30 à 100	Environ 90	20 à 60	20 à 60
A_R (%)	2000 à 3000	2500 à 4000	Environ 3000	1000 à 5000	Environ 3000
Densité (g / cm ³)	1.1 à 1.3	1.1 à 1.3	Environ 1.3	1.2 à 1.4	1 à 1.1

Tableau I -4 : Propriétés des Résines thermodurcissables

b- Résines thermoplastiques :

Les résines thermoplastiques chauffées, elles deviennent facilement déformables. Lorsqu'on les soumet à des gradients de température, elle commence par se ramollir puis elles fondent.

De ce fait, leur utilisation en température est limitée par leurs mises en œuvre qui sont grandement facile.

Les variétés qui pourraient être appliquées sont: les poly sulfones, les polysulfures, les polycarbonates et le nylon polyester thermoplastique.

I -2-2-2 Les matrices métalliques :

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000 C° interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

I -2-3 Loi de mélange :

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre, il vient alors (Berthelot, 1996) :

$$E_L \text{ en sens long : } E_L = c_m E_m + c_f E_f \quad (I.1)$$

$$E_T \text{ en sens trans : } \frac{1}{E_T} = \frac{c_m}{E_m} + \frac{c_f}{E_f} \quad (I.2)$$

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = c_m \varepsilon_{T_m} + c_f \varepsilon_{f_m} \quad (I.3)$$

Chacune des déformations latérales ε_{Tm} et ε_{Tf} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{Tm} = \nu_{LTm} \varepsilon_L$ et $\varepsilon_{Tf} = \nu_{LTf} \varepsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = c_m \nu_m + c_f \nu_f \quad (I.4)$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{\mu_{LT}} = \frac{c_m}{\mu_m} + \frac{c_f}{\mu_f} \quad (I.5)$$

I-2-4 Loi de comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée (Berthelot, 1996):

$$\sigma = C \varepsilon \quad (I.6)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

I -2-5 Matériaux anisotropes :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique (Berthelot, 1996).

I -2-6 Matériau monoclinique :

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau. La loi de Hooke se résume à l'expression suivante (Berthelot, 1996) :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

I -2-7 Matériaux orthotropique :

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

I -2-8 Matériau transversalement isotrope:

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit (Berthelot, 1996):

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'ingénieurs.

I -2-9 Matériaux isotropes:

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope, dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) (Berthelot, 1996) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2}$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

I-3- Généralités sur les matériaux à Gradient de propriétés :

I-3-1- Introduction :

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais: **Functionally Graded Materials "F.G.M"**).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

I-3-2- Le concept des matériaux a gradient de propriétés :

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux (Sarkar et al, 2002). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels (fig. II.1) (Kawal et al, 1990). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des F.G.M. Dans certains cas, on peut avoir un F.G.M constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al, 1986).

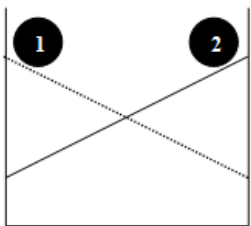
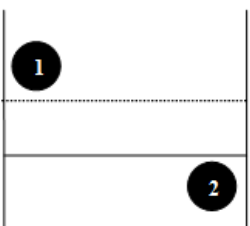
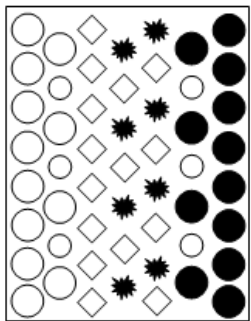
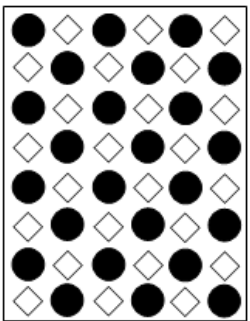
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constitutifs: <ul style="list-style-type: none"> Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ◆ 		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.1 : Caractéristiques des matériaux composites F.G.M en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Kawal et al, 1990).

En
198
7,

le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la

relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Kawal et al, 1990).

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

-Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;

-Ténacité du matériau côté basse température;

-Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau (Abdizadeh et al, 1987).

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température) (fig. II.1).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches(Takahashi et al, 1990).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des F.G.M s'est

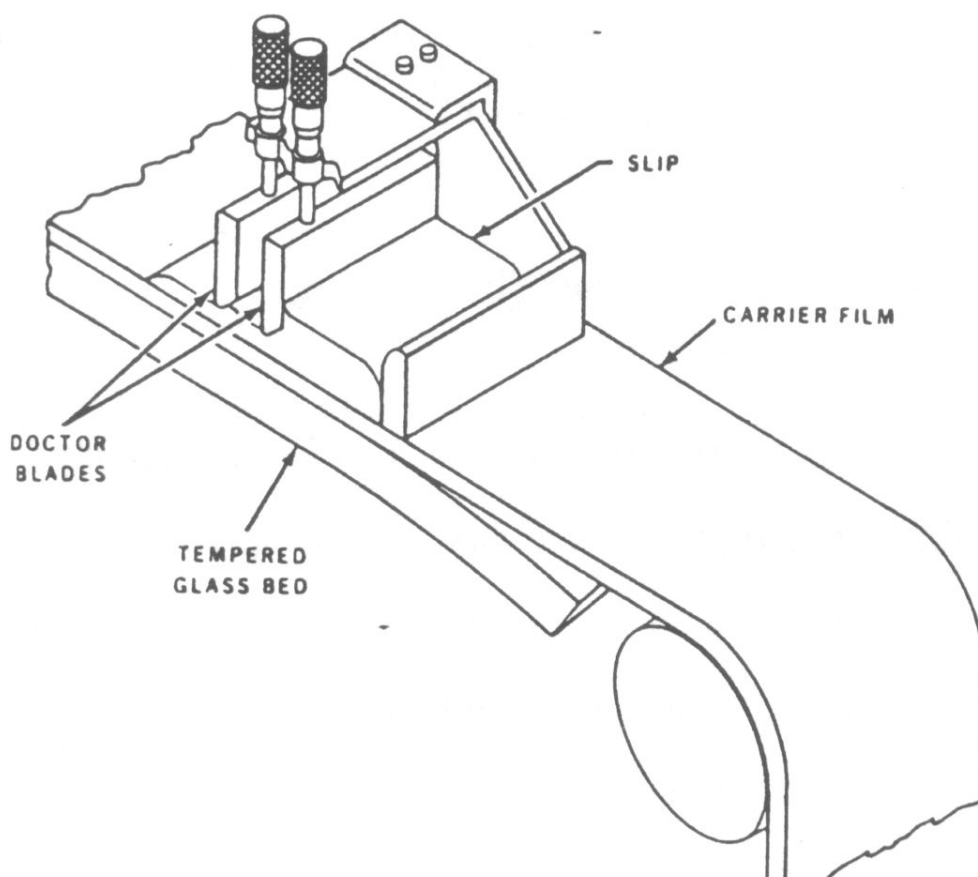
développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: bio-mécaniques, technologie de capteur, optique, etc... (Takahashi et al, 1990).

I-3-3- Revue des méthodes d'élaboration des F.G.M :

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après:

I-3-3-1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (fig. I.2). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le déliantage.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947 (voir Williams et al, 1976), et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Boch et al, 1986), (Boch et al, 1987). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (Mistler et al, 1973) ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch et al, 1986), (Boch et al, 1987).

I-3-3-2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Basiquement, le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un

tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

-formation du tesson ou "prise";

-consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

-du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (Moya et al, 1992));

-ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I-3-3-3. Dépôt par Electrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (Sarkar et al, 1996). L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh et al, 1987).

I-3-3-4.Compaction Sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (Bichop et al, 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I-3-3-5.Projection Plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des F.G.M L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens et al, 1990).

I-3-3-6.C. V. D. et P. V. D. :

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées, (kawal et al, 1990).

I-3-3-7.Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi et al, 1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I-3-3-8.Frittage Laser Différentiel :

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki et al, 1990) ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.3 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

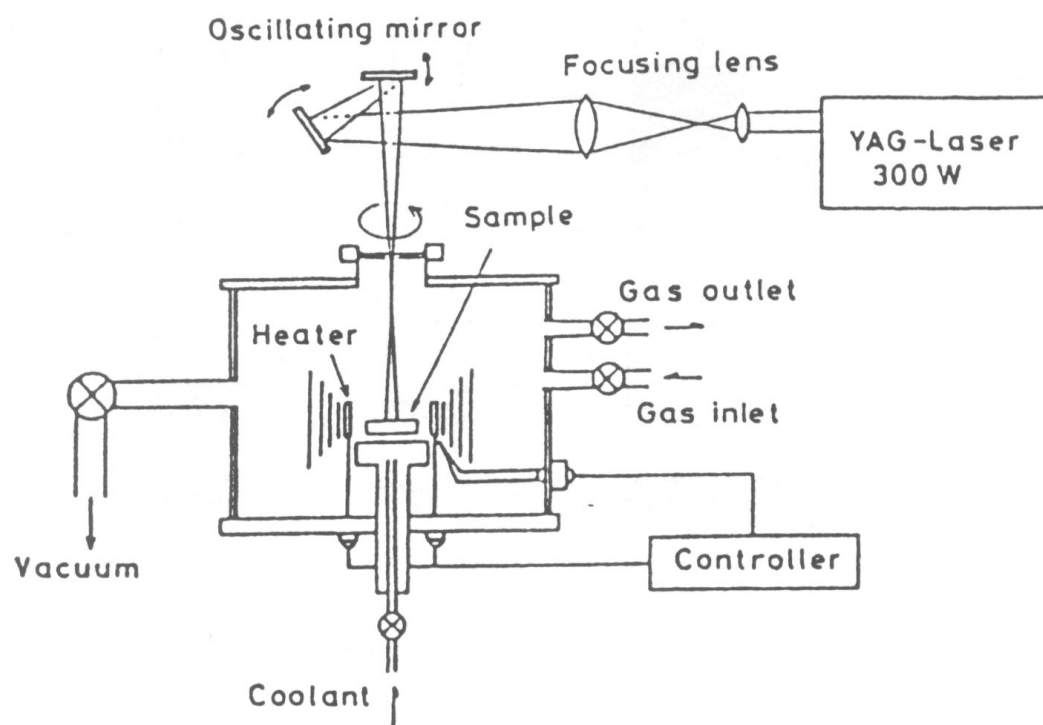


Figure I.3 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Yuki et al, 1990)

I-3-3-9. Implantation Ionique (Sputtering) :

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh et al, 1987).

I-3-3-10. Dépôt par Centrifugation :

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (fig. I.4) (Abdizadeh et al, 1987).

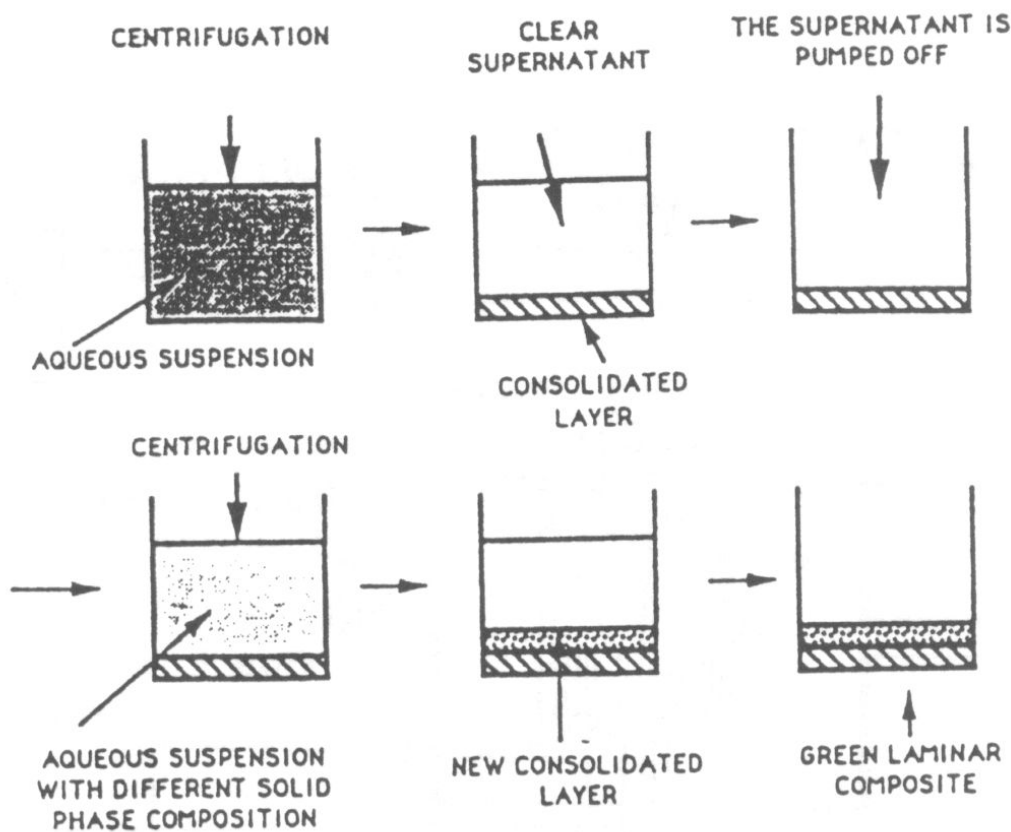


Figure I.4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh et al, 1987).

I-3-4- Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau.

Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

I-3-5- Propriétés matérielles de la plaque FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

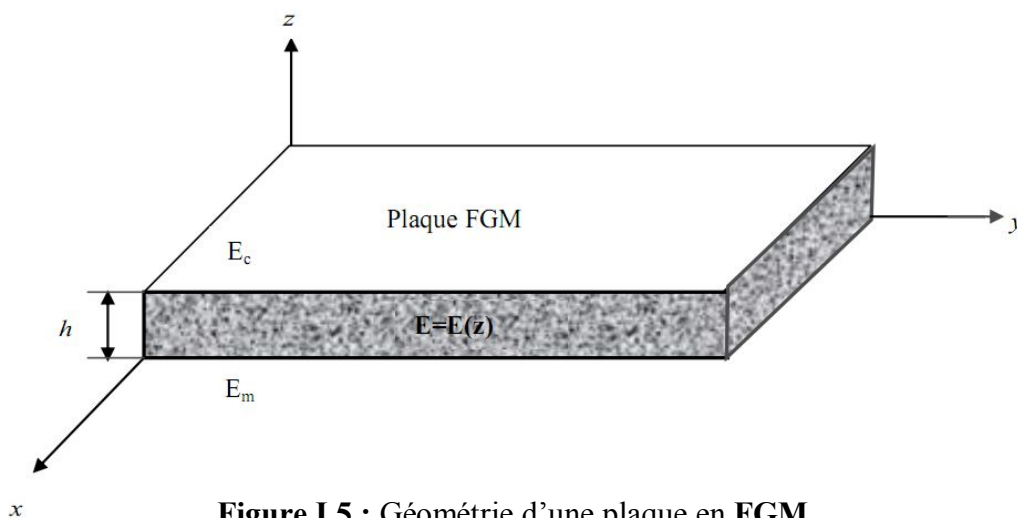


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont

le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue,

dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (**P-FGM**) ou la fonction exponentielle (**E-FGM**) ou avec la fonction sigmoïde (**S-FGM**).

I-3-5-1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM sont défini comme suit :

$$v(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (I.12)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque **P-FGM** peuvent être déterminées par la loi des mélanges [35] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)v(z) \quad (I.13)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure $z = (-h/2)$ et de la surface supérieure $z = (h/2)$ de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque **P-FGM** est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

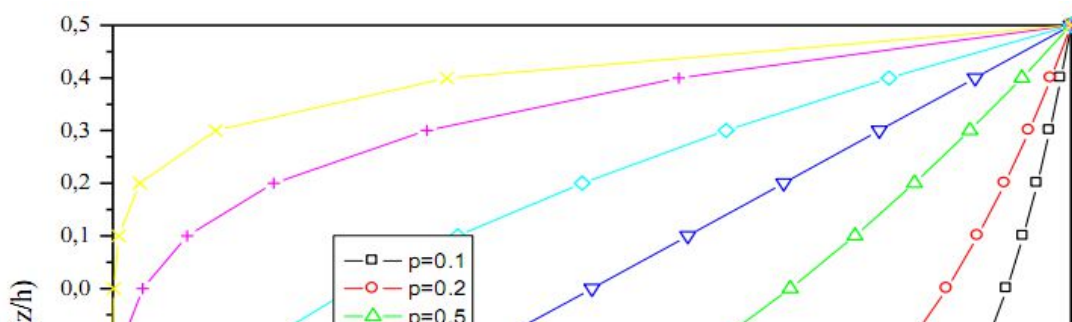


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque **P-FGM**.

I-3-5-2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.14.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.14.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.15.a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.15.b)$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.14.a) et (I.14.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

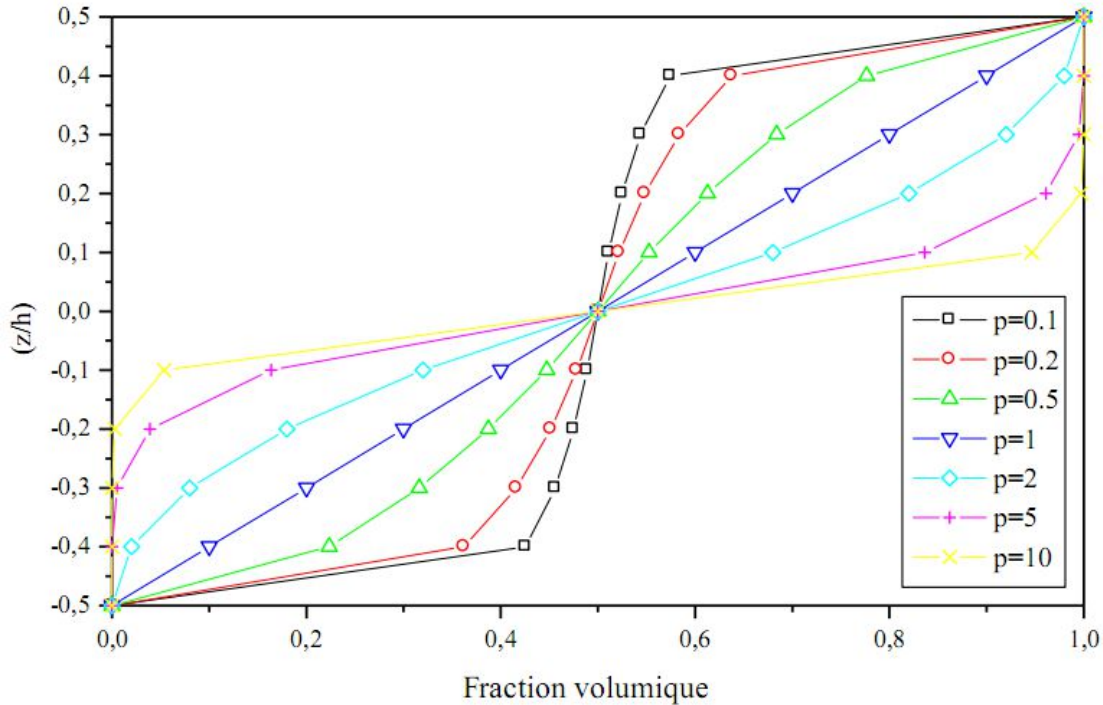


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I-3-5-3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [37] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.16.a)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (I.16.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

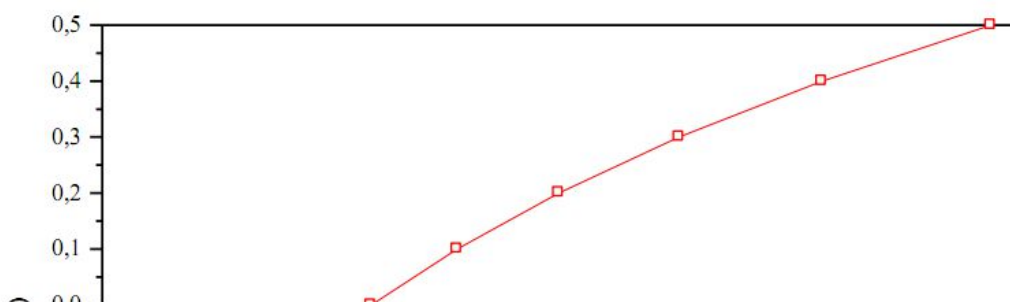


Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.

I-4- Généralités sur la théorie des plaques :

I-4-1- La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

Si on parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'éclatement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure I.9), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [7]

(1959), Reddy ([9] 1997, [10] 1999),

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (I.17)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

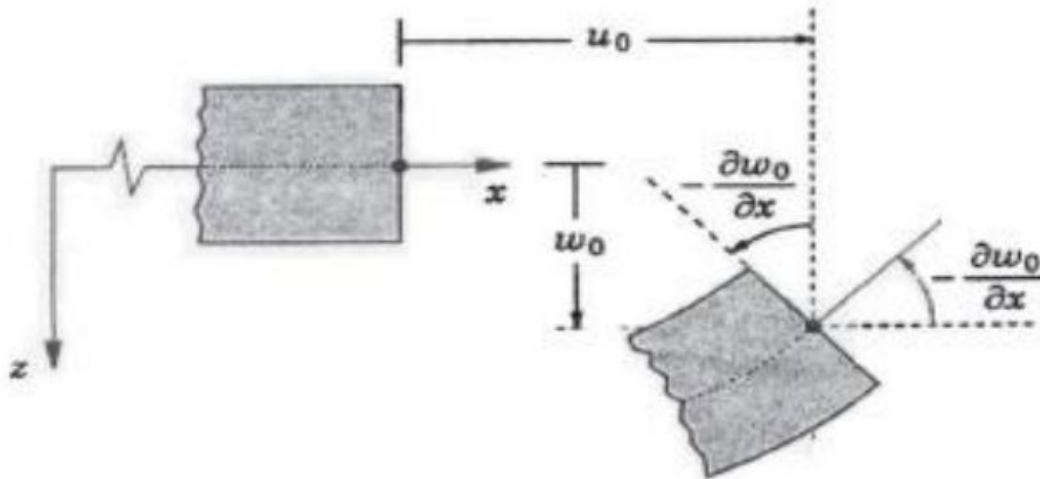


Figure I.9 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, [9]).

I-4-2- La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la

plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans (Reissner [3], 1945, Mindlin [4], 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [7] (1959), Reddy ([9] 1997, [10] 1999).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (I.18)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et ϕ_x, ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

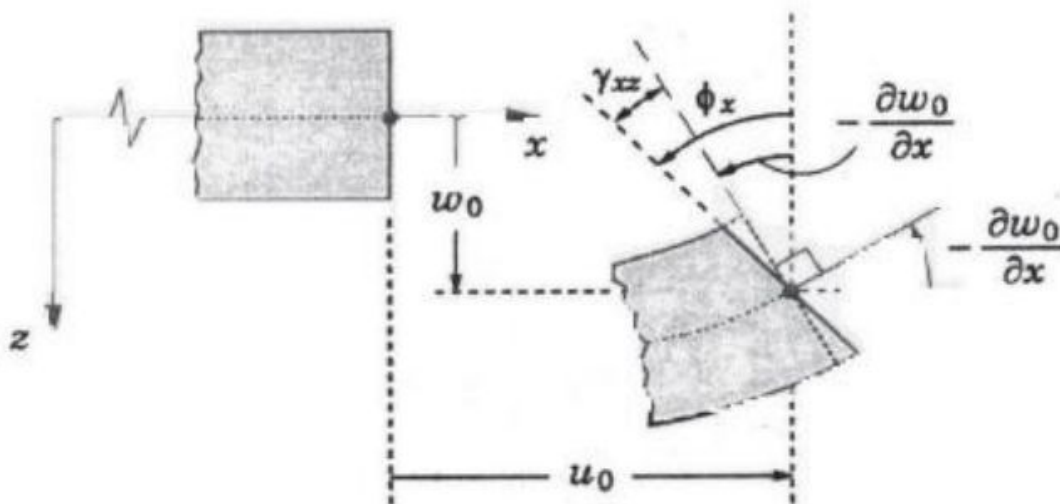


Figure I.10 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, [9]).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

I-4-2- La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al [38], 1949 ; Naghdi [39], 1957 ; Reissner [40], 1975 ; Reddy [41], 1984 ; Kant et Swaminathan [42], 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

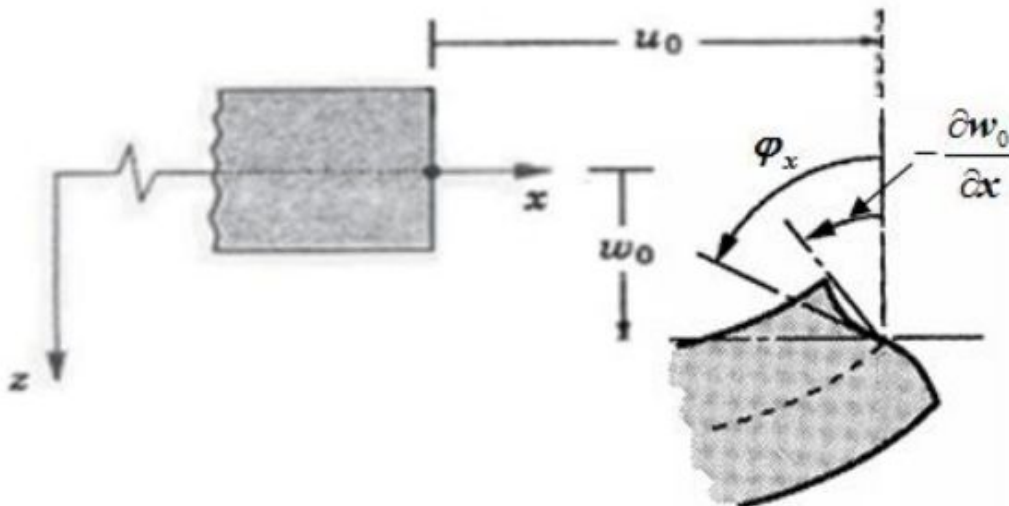


Figure I.11 : Illustration de la plaque (Reddy, [9]).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (I.19)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et φ_x, φ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy

(TSDT) (Reddy, [9] 1997, [10] 1999) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2) \quad (I.20)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Touratier [43] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (I.21)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

(The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [44] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (I.22)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. [22] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sin(\frac{\pi}{h}z)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (I.23)$$

I-5- Théorie des stratifiés :

I-5-1 Champs des déplacements :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Henkey-indlin, schéma de Kirchhoff) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (I.24)$$

(u_0, v_0, w_0) est le déplacement du plan moyen

I-5-2 Champs des déformations :

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements soit

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{cases} \quad (I.25)$$

Pour un schéma où les déformations en cisaillement transverse sont nulles :

$$\gamma_{xz} = 0 \text{ ET } \gamma_{yz} = 0$$

Cette hypothèse implique :

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \quad (I.26)$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (I.27.a)$$

La matrice de la déformation se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.27.b)$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (I.27.c)$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (I.27.d)$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z \mathbf{k}(x, y) \quad (I.27.e)$$

En posant :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (I.27.f)$$

La matrice $\mathbf{k}(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion :

Ou plus simplement :

$$\{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + z \{k\}_x \quad (I.28)$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

I-5-3 Champs des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment de la façon suivante :

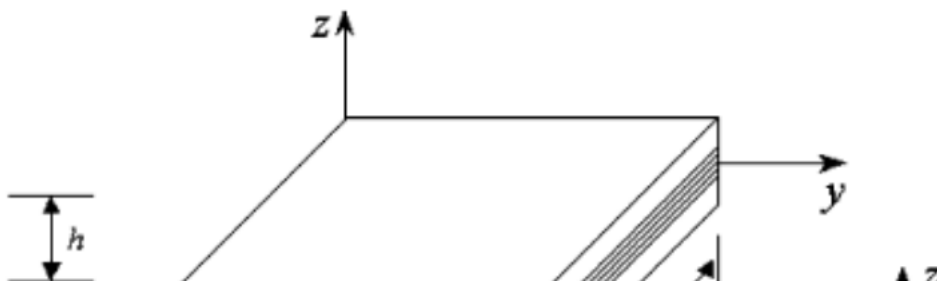


Figure I.12 : Les couches d'un stratifié

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.29.a)$$

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}_x \quad (I.29.b)$$

Ou $[\bar{Q}]^k$ matrice de rigidité réduite transformée du k ième correspondant à la cote z .

À partir d'équation (I.29.a) nous pouvons obtenir :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + [\bar{Q}]^k z \{k\}_x \quad (I.30)$$

I-5-4 Expression des résultantes et moments :

a. Résultantes en membrane

Les forces par unité de longueur (N_x, N_y, N_{xy}) (voir Figure ci-dessous) sont définies

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad (I.31.a)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad (I.31.b)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (I.31.c)$$

Comme suit :

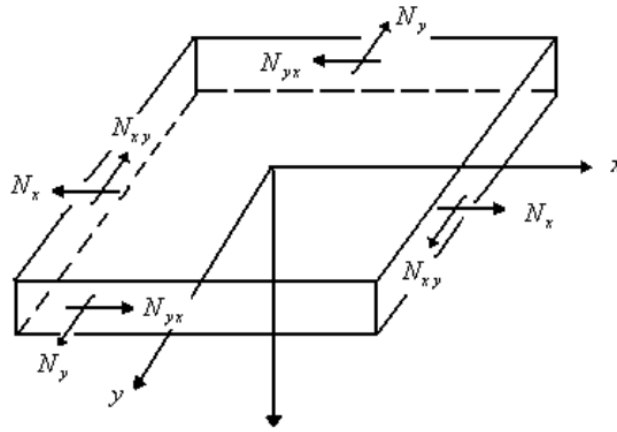


Figure I.13 : Forces par unités de longueur

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad (I.32)$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad (I.33)$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]^k z dz \right) \{k\} \quad (I.34)$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \quad (I.35)$$

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1}) \quad (I.36)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (I.37)$$

Ou :

La matrice $[\bar{Q}]^k$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (35) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{k\}$ par les matrices [A] et [B]. La

matrice [A] représente « la membrane » et la matrice [B] représente « la matrice de couplage membrane – flexion »

b. Moments par unité de longueur :

On définit les moments par unité de longueur (M_x, M_y, M_{xy}) comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi :

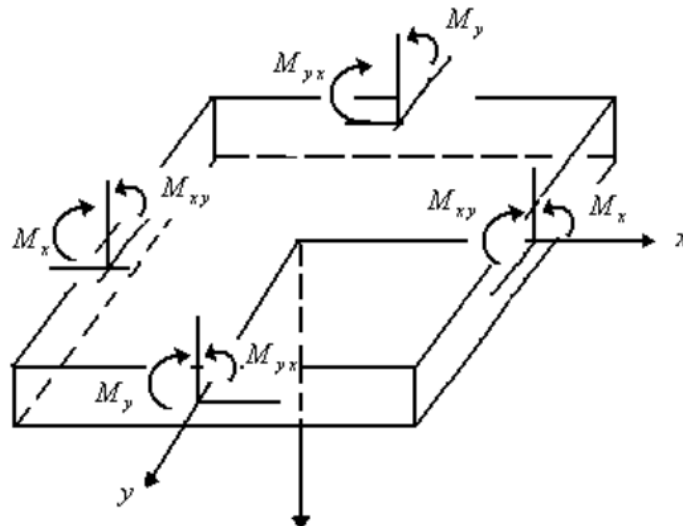


Figure I.14 : Moments par unités de longueur

M_x : Moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y.

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x\} z dz \quad (I.38.a)$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x.

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_y\} z dz \quad (I.38.b)$$

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \quad (I.38.c)$$

Ou bien sous une forme condensée :

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz \quad (I.39)$$

Substituant l'équation (II-47) dans les équations (II-56), (II-57) et (II-58), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{s^0\} + [D]\{k\} \quad (I.40)$$

Ou la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (I.41)$$

I-5-5 Equation constitutive d'un stratifié :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les forces et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, Elle s'obtient en regroupant les expressions des résultantes et moments suivant une seule écriture matricielle sous la forme.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.42)$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (I.43)$$

Les termes de la matrice introduite sont donnés par les expressions suivantes :

$$[A] = \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{Q} dz \quad (I.44)$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{Q} z dz \quad (I.45)$$

$$[D] = \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{Q} z^2 dz \quad (I.46)$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et la matrice de couplage membrane- flexion- torsion. Ce couplage existe même

si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristique mécanique différente. Le couplage est nul ($B=0$), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une propriété des couches, de leurs cotes et de leurs orientations.

I-5-6 Conclusion :

Nous avons vu dans ce chapitre une généralité sur les matériaux composites leurs constituants leurs revue d'élaboration ainsi que leurs différents types de ces matériaux selon les lois de comportement, une généralité sur les matériaux à gradient propriétés et on se fini par les différents approches sur la théorie des plaques et la théorie des plaques stratifié.

Chapitre II
Analyse Du Comportement En Flexion Des
Plaques En Matériaux Composites
Avec Raidisseurs

**Chapitre II Analyse Du Comportement En Flexion Des Plaques En Matériaux
Composites Avec Raidisseurs**

II-1- Introduction :

L'objet de toutes théories est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à l'analyse du comportement en flexion et en vibration des plaques stratifiées antisémitiques en utilisant cette théorie de déformation du cisaillement à ordre élevée (HSDT), Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement, La formulation repose sur le principe de Hamilton.

II-2-Développement de la théorie :

Pour l'étude d'un model de ponts en matériaux composites nous Considérons une plaque rectangulaire sous forme d'un caisson d'épaisseur h , la longueur a et la largeur b , référence aux coordonnées cartésiennes rectangulaires (x , y , z). Le plan $x - y$ est prise égal à la mi-plane non déformée de la plaque, et l'axe z est perpendiculaire au plan $x - y$ (Fig.01).

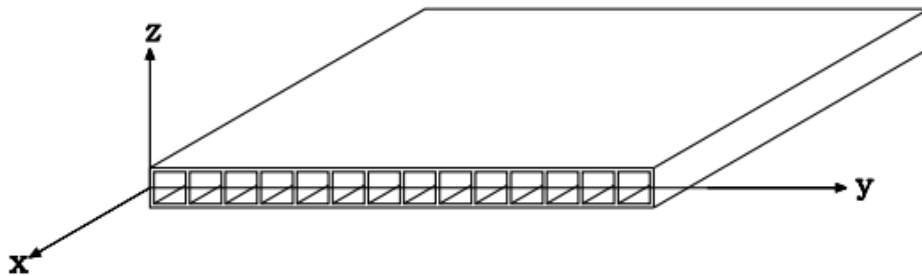


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque stratifiée rectangulaire en coordonnées cartésiennes.

II-2-1 Hypothèses de Base :

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

-Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.

- La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .

II-2-2-Expression générale :

En se basant sur les hypothèses de la section précédente et sur la théorie de déformation du cisaillement à ordre élevée (HSDT), le champ de déplacement d'un model ponts peut être obtenu comme suit (Reddy, 1984) :

$$U(x, y, z) = u(x, y) + z \left(\psi_x - c_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - z^3 c_1 \psi_x \quad (\text{II.1.a})$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) + z \left(\psi_y - c_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z^3 c_1 \psi_y \quad (\text{II.1.b})$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Ou Avec (u, v, w) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$), ψ_x et ψ_y sont les rotations transversales dans les axes (x, y).

c_0 et c_1 Sont deux paramètres qui changent selon le cas de la théorie comme suit :

Le cas de la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre **FSDT**

$$c_0 = c_1 = 0$$

Le cas de la théorie classique des plaques **CPT** $c_0 = 1$ et $\psi_x = \psi_y = 0$

Le cas de la théorie de déformation du cisaillement à ordre élevée **HSDT**

$$c_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2, \quad c_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{h^2} \right)$$

(II.2)

On utilisant la théorie d'élasticité les déformations associées aux déplacements dans l'équation (1) sont :

$$\epsilon_x = \epsilon_x^{(0)} + z \left(k_x^{(0)} + z^2 k_x^{(2)} \right)$$

(II.3.a)

$$\epsilon_y = \epsilon_y^{(0)} + z \left(k_y^{(0)} + z^2 k_y^{(2)} \right)$$

(II.3.b)

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(0)} + z \left(k_{xy}^{(0)} + z^2 k_{xy}^{(2)} \right)$$

(II.3.c)

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{(0)} + z^2 k_{yz}^{(2)}$$

(II.3.d)

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 k_{xz}^{(2)}$$

(II.3.e)

Dans les équations (3) les déformations au plan moyen et les courbures sont définies comme suit :

$$\epsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k_{xy}^{(0)} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}$$

(II.4.a)

$$\epsilon_y^{(0)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad k_x^{(2)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

(II.4.b)

$$\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad k_y^{(2)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

(II.4.c)

$$\gamma_{yz}^{(0)} = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y, \quad k_{xy}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

(II.4.d)

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x, \quad k_{yz}^{(2)} = -\frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)$$

(II.4.e)

$$k_x^{(0)} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad k_{xz}^{(2)} = -\frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)$$

(II.4.f)

$$k_y^{(0)} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$$

(II.4.g)

II-2-3- Elément représentative:

Pour obtenir les équations constitutives d'un model de pont, nous considérons notre étude par élément représentative dans la figure II.2 qui sont déterminé par unité de longueur dans la direction x , par hauteur H dans direction z et par la largeur B dans le sens y .

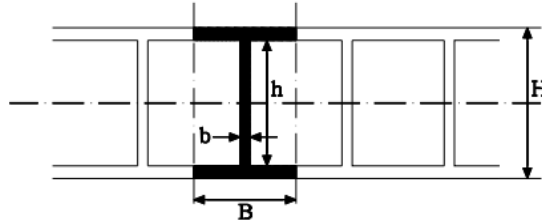


Figure II.2 : Elément représentative pour un model de pont.

Ces éléments représentatifs sont divisés en deux parties :

Partie I : dans cette partie on va étudier les deux semelles de l'élément.

La Résultante des contraintes pour un élément représentative d'un model de pont à la normal x sont schématisée dans la figure II.3. Suite à la théorie des plaques stratifiés les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié de la couche k -ième sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^I \\ \sigma_y^I \\ \sigma_{xy}^I \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(II.5)

Et les relations contrainte-déformation de cisaillement sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^I \\ \sigma_{xz}^I \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

(II.6)

Où \bar{Q}_{ij} sont les constantes de rigidités.

Partie II : dans cette partie on va étudier l'âme de l'élément.

Les relations contrainte-déformation sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{II} \\ \sigma_z^{II} \\ \sigma_{xz}^{II} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

(II.7)

On peut simplifier ces relations par la contrainte $\sigma_z = 0$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{II} \\ \sigma_{xz}^{II} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

(II.8)

Avec :

$$\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{11} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{22}}$$

(II.9.a)

$$\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{16} - \frac{Q_{12}Q_{26}}{Q_{22}}$$

(II.9.b)

$$\bar{Q}_{66} = \bar{Q}_{66} - \frac{Q_{26}^2}{Q_{22}}$$

(II.9.c)

Et les relations contrainte-déformation de cisaillement sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^{II} \\ \sigma_{xy}^{II} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(II.10)

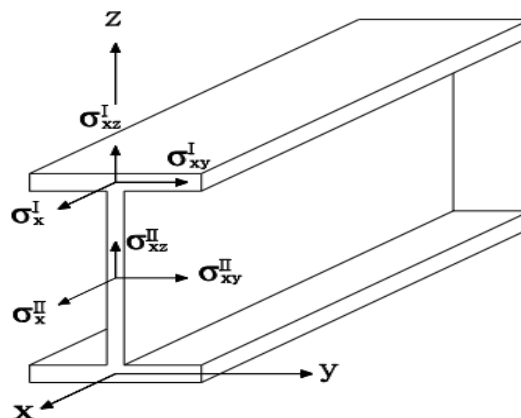


Figure II.3 : Résultante des contraintes pour un élément représentative d'un model de pont.

II-2-4- Equations constitutives pour chaque partie :

Les efforts résultants sont déterminés par l'intégration des contraintes pour chaque partie de l'élément représentative.

$$(N_x, N_y, N_{xy})^I = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^I dz$$

(II.11.a)

$$(M_x, M_y, M_{xy})^I = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^I z dz$$

(II.11.b)

$$(P_x, P_y, P_{xy})^I = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^I z^3 dz$$

(II.11.c)

$$(Q_{yz}, Q_{xz})^I = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz})^I dz$$

(II.11.d)

$$(R_{yz}, R_{xz})^I = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz})^I z^2 dz$$

(II.11.e)

$$(N_x, N_y, N_{xy})^{II} = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^{II} dy dz$$

(II.12.a)

$$(M_x, M_y, M_{xy})^{II} = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^{II} z dy dz$$

(II.12.b)

$$(P_x, P_y, P_{xy})^{II} = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^{II} z^3 dy dz \quad (\text{II.12.c})$$

$$(Q_{yz}, Q_{xz})^{II} = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz})^{II} dy dz$$

(II.12.d)

$$(R_{yz}, R_{xz})^{II} = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz})^{II} z^2 dy dz$$

(II.12.e)

Pour obtenir la résultante de l'effort longitudinal au sens x il faut faire la sommation des efforts de chaque partie de l'élément.

$$N_x = N_x^I + N_x^{II}$$

(II.13)

Avec N_x^I l'effort normal dans la partie I (Semelle).

N_x^{II} L'effort normal dans la partie II (l'âme).

Si on met les relations des déformations (3) dans les équations (7) et (8) les efforts résultants sont définis comme suit :

$$N_x = A_{11}^I \epsilon_x^{(0)} + A_{12}^I \epsilon_y^{(0)} + A_{16}^I \gamma_{xy}^{(0)} + B_{11}^I k_x^{(0)} + B_{12}^I k_y^{(0)} + B_{16}^I k_{xy}^{(0)} + E_{11}^I k_x^{(2)} + E_{12}^I k_y^{(2)} + E_{16}^I k_{xy}^{(2)} + A_{11}^{II} \epsilon_x^{(0)} + A_{16}^{II} \gamma_{xz}^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{16}^{II} k_{xz}^{(2)}$$

(II.14)

$$N_{xy} = A_{16}^I \epsilon_x^{(0)} + A_{26}^I \epsilon_y^{(0)} + A_{66}^I \gamma_{xy}^{(0)} + B_{16}^I k_x^{(0)} + B_{26}^I k_y^{(0)} + B_{66}^I k_{xy}^{(0)} + E_{16}^I k_x^{(2)} + E_{26}^I k_y^{(2)} + E_{66}^I k_{xy}^{(2)} + A_{45}^{II} \gamma_{yz}^{(0)} + A_{55}^{II} \gamma_{xy}^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{45}^{II} k_{yz}^{(2)}$$

(II.15)

$$M_x = B_{11}^I \epsilon_x^{(0)} + B_{12}^I \epsilon_y^{(0)} + B_{16}^I \gamma_{xy}^{(0)} + D_{11}^I k_x^{(0)} + D_{12}^I k_y^{(0)} + D_{16}^I k_{xy}^{(0)} + F_{11}^I k_x^{(2)} + F_{12}^I k_y^{(2)} + F_{16}^I k_{xy}^{(2)} + \frac{h^2}{12} A_{11}^{II} k_x^{(0)} + \frac{h^4}{80} A_{11}^{II} k_x^{(2)}$$

(II.16)

$$M_{xy} = B_{16}^I \epsilon_x^{(0)} + B_{26}^I \epsilon_y^{(0)} + B_{66}^I \gamma_{xy}^{(0)} + D_{16}^I k_x^{(0)} + D_{26}^I k_y^{(0)} + D_{66}^I k_{xy}^{(0)} + F_{16}^I k_x^{(2)} + F_{26}^I k_y^{(2)} + F_{66}^I k_{xy}^{(2)} + \frac{h^2}{12} A_{55}^{II} k_{xy}^{(0)} + \frac{h^4}{80} A_{55}^{II} k_{xy}^{(2)}$$

(II.17)

$$P_x = E_{11}^I \epsilon_x^{(0)} + E_{12}^I \epsilon_y^{(0)} + E_{16}^I \gamma_{xy}^{(0)} + F_{11}^I k_x^{(0)} + F_{12}^I k_y^{(0)} + F_{16}^I k_{xy}^{(0)} + H_{11}^I k_x^{(2)} + H_{12}^I k_y^{(2)} + H_{16}^I k_{xy}^{(2)} + \frac{h^4}{80} A_{11}^{II} k_x^{(0)} + \frac{h^6}{448} A_{11}^{II} k_x^{(2)}$$

(II.18)

$$P_{xy} = E_{16}^I \epsilon_x^{(0)} + E_{26}^I \epsilon_y^{(0)} + E_{66}^I \gamma_{xy}^{(0)} + F_{16}^I k_x^{(0)} + F_{26}^I k_y^{(0)} + F_{66}^I k_{xy}^{(0)} + H_{16}^I k_x^{(2)} + H_{26}^I k_y^{(2)} + H_{66}^I k_{xy}^{(2)} + \frac{h^4}{80} A_{55}^{II} k_{xy}^{(0)} + \frac{h^6}{448} A_{55}^{II} k_{xy}^{(2)}$$

(II.19)

$$Q_{xz} = A_{45}^I \gamma_{yz}^{(0)} + A_{55}^I \gamma_{xz}^{(0)} + D_{45}^I k_{yz}^{(0)} + D_{55}^I k_{xz}^{(0)} + A_{16}^{II} \epsilon_x^{(0)} + A_{66}^{II} \gamma_{xz}^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{66}^{II} k_{xz}^{(2)}$$

(II.20)

$$R_{xz} = D_{45}^I \gamma_{yz}^{(0)} + D_{55}^I \gamma_{xz}^{(0)} + F_{45}^I k_{yz}^{(2)} + F_{55}^I k_{xz}^{(2)} + \frac{h^2}{12} A_{16}^{II} \epsilon_x^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{66}^{II} \gamma_{xz}^{(0)} + \frac{h^4}{80} A_{66}^{II} k_{xz}^{(2)}$$

(II.21)

Avec A_{ij}, B_{ij} etc. sont les rigidités de la plaque.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij})^I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

(II.22.a)

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij})^{II} = \frac{h}{B} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dy$$

(II.22.b)

La résultante de l'effort longitudinal au sens y sont présenté dans figure II.4, donc la contrainte σ_y sont considéré nul même pour $N_y^I = M_y^I = P_y^I = 0$. on remplacent les équations (5), (6), (8) et (10) dans les équations (11) et (12) nous donnants comme suit :

$$N_y = A_{12}^I \epsilon_x^{(0)} + A_{22}^I \epsilon_y^{(0)} + A_{26}^I \gamma_{xy}^{(0)} + B_{12}^I k_x^{(0)} + B_{22}^I k_y^{(0)} + B_{26}^I k_{xy}^{(0)} + E_{12}^I k_x^{(2)} + E_{22}^I k_y^{(2)} + E_{26}^I k_{xy}^{(2)}$$

(II.23)

$$M_y = B_{12}^I \epsilon_x^{(0)} + B_{22}^I \epsilon_y^{(0)} + B_{26}^I \gamma_{xy}^{(0)} + B_{12}^I k_x^{(0)} + D_{22}^I k_y^{(0)} + D_{26}^I k_{xy}^{(0)} + F_{12}^I k_x^{(2)} + F_{22}^I k_y^{(2)} + F_{26}^I k_{xy}^{(2)}$$

(II.24)

$$P_y = E_{12}^I \epsilon_x^{(0)} + E_{22}^I \epsilon_y^{(0)} + E_{26}^I \gamma_{xy}^{(0)} + F_{12}^I k_x^{(0)} + F_{22}^I k_y^{(0)} + F_{26}^I k_{xy}^{(0)} + H_{12}^I k_x^{(2)} + H_{22}^I k_y^{(2)} + H_{26}^I k_{xy}^{(2)}$$

(II.25)

$$Q_{yz} = A_{44}^I \gamma_{yz}^{(0)} + A_{45}^I \gamma_{xz}^{(0)} + D_{44}^I k_{yz}^{(2)} + D_{45}^I k_{xz}^{(2)} + A_{44}^{II} \gamma_{yz}^{(0)} + A_{45}^{II} \gamma_{xz}^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{44}^{II} k_{yz}^{(2)}$$

(II.26)

$$R_{yz} = D_{44}^I \gamma_{yz}^{(0)} + D_{45}^I \gamma_{xz}^{(0)} + F_{44}^I k_{yz}^{(2)} + F_{45}^I k_{xz}^{(2)} + \frac{h^2}{12} A_{44}^{II} \gamma_{yz}^{(0)} + \frac{h^2}{12} A_{45}^{II} \gamma_{xz}^{(0)} + \frac{h^4}{80} A_{44}^{II} k_{yz}^{(2)}$$

(II.27)

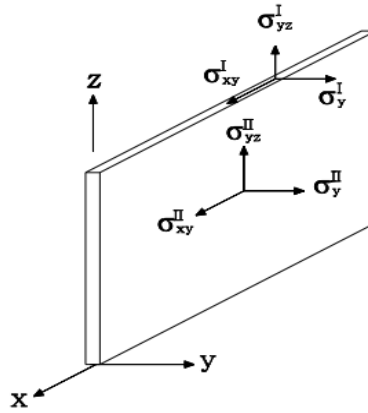


Figure II.4 : La résultante des contraintes longitudinal au sens y pour l'âme

II-2-5- Equations constitutives pour model de pont :

Suite a la sommation de la résultante des contraintes des deux partie I et II nous donnants les équations constitutives comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & 0 & A_{16}^{\text{II}} & 0 & \frac{h^2}{12} A_{16}^{\text{II}} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & A_{45}^{\text{II}} & 0 & \frac{h^2}{12} A_{45}^{\text{II}} & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & H_{11} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & A_{44} & A_{45} & D_{44} & D_{45} \\ & & & & & & & & & & A_{55} & D_{45} & D_{55} \\ & & & & & & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \kappa_x^{(0)} \\ \kappa_y^{(0)} \\ \kappa_{xy}^{(0)} \\ \kappa_x^{(2)} \\ \kappa_y^{(2)} \\ \kappa_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Avec :

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \left(A_{ij}^{\text{I}} + A_{ij}^{\text{II}} + D_{ij}^{\text{I}} + \frac{h^2}{12} A_{ij}^{\text{II}}, F_{ij}^{\text{I}} + \frac{h^4}{80} A_{ij}^{\text{II}}, H_{ij}^{\text{I}} + \frac{h^6}{448} A_{ij}^{\text{II}} \right) \quad (\text{II.29})$$

Les équations de mouvement de la plaque peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie de Hamilton [Reddy, 2002; Jones, 1999], Le principe sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt$$

(II.30)

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle ; et δK est la variation de l'énergie cinétique.

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

(II.31.a)

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

(II.31.b)

$$\delta w: \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q - \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) = 0$$

(II.31.c)

$$\delta \phi_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} + \frac{4}{h^2} R_{xz} - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0$$

(II.31.d)

$$\delta \phi_y: \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_{yz} + \frac{4}{h^2} R_{yz} - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} \right) = 0$$

(II.31.e)

II-3 Conclusion :

Dans ce chapitre, L'analyse des plaques stratifiées (cas d'un pont) sont examinées par une nouvelle théorie de déformation du cisaillement du ordre élève (HSDT). Cette théorie besoin d'une sommation de la résultante des efforts de la partie inférieure et supérieure de la plaque et la partie l'âme, L'équation du mouvement pour la plaque stratifiée est obtenue par le principe de Hamilton.

Chapitre III

Analyse du comportement en vibration libre des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés contenant des pores

Chapitre III Analyse du comportement en vibration libre des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés contenant des pores

III -1 Introduction :

Le matériel fonctionnellement évalué (FGM) peut être produit en variant sans interruption les constituants des matériaux multi phases dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures non-uniformes avec des macros propriétés sans interruption évalués. Un FGM peut être défini par la variation

des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de la loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

III -2 Etude paramétrique pour une plaque en FGM:

Pour cette étude nous considérons une plaque en FGM qui compose par deux matériaux différents sont céramique et métal, cette plaque est caractérisée par un épaisseur h longueur a et d'une largeur b . les coordonnées x , y sont le des directions dans le plan et z le long de la direction de l'épaisseur, la partie supérieur sont le céramique et la partie inférieur sont le métal.

La surface neutre ne peut coïncider avec sa surface médiane géométrique, en pratique la force de compression peut être supposée agir au milieu de la surface de la plaque, mais dans le plan la résultante des contraintes agissent le long de la surface neutre. Le non coïncidence de la ligne d'action de la résultante des contraintes et la force de compression sont représenté dans **Figure III.1**. Ici deux plans de référence différents sont considérés pour la mesure de z , a savoir z_{ms} et z_{ns} sont mesure a partir de la surface moyenne et la surface neutre de la plaque.

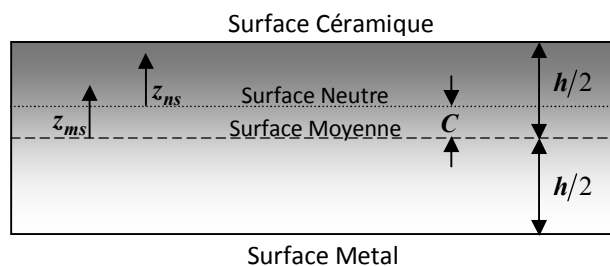


Figure III.1 : Position de la surface neutre et la surface moyenne pour une plaque en FGM

La fraction volumique de la céramique est exprimée sur la base des coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Avec p est l'indice de la loi de puissance.

C : la distance entre surface moyenne et la surface neutre.

Puisque les propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM ne sont pas homogènes peuvent être obtenus par la loi de mélange, ce dernier est défini comme suit :

$$P(z) = (P_C - P_M) \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_M - (P_C + P_M) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.2})$$

Ou P_M et P_C sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique. Dans ce travail nous supposons le module d'élasticité E et la densité du matériau ρ sont déterminés par l'équation (2), avec un coefficient de poisson ν est considéré comme constante sur toute l'épaisseur de la plaque, les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenus lorsque est égale à zéro

Si le module d'élasticité égale zéro on peut déterminer la position de la surface neutre de la plaque par la formule suivante (Zhang and Zhou 2008; Bachir Bouiadjra *et al.* 2013):

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenus sous la forme suivant :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (\text{III.4})$$

III -3-1 Modèle théorique:

Contrairement à la théorie de déformation par cisaillement conventionnel, la théorie présentée est cohérente variationnellement. Il n'a que quatre inconnues et quatre équations, mais il est satisfait aux conditions aux limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement.

III -3-2 Hypothèse de base :

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

- 1- L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FGM.
- 2- Les déplacements sont faibles en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et par conséquent les déformations impliquées sont infinitésimales.

- 3- Le déplacement transversal w comprend deux éléments de flexion w_b et de cisaillement w_s et ces composants sont en fonction des coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.5})$$

- 4- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec des contraintes dans le plan σ_x et σ_y .

- 5- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y consistent en extension des composants de la flexion et le cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.6})$$

Les composants de la flexion u_b et v_b sont supposés être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique de la plaque, par conséquent l'expression u_b et v_b peut être donné comme suit :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

Les composants de cisaillement u_s et v_s donnent lieu en liaison avec w_s et aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque et d'une manière générale tel que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque, par conséquent l'expression u_s et v_s peut être donné comme suit :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.8})$$

Ou

$$f(z_{ns}) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h}(z_{ns} + C)\right) - (z_{ns} + C)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{III.9})$$

III -3-3 Cinématique:

Sur la base des hypothèses formulée dans la partie précédente le champ de déplacement s'écrit comme suit par utilisations des équations (5)-(9):

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}, t) &= u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}, t) &= v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues de la manière suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12a})$$

Et

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \quad (\text{III.12b})$$

III -3-4 Relation constitutive:

Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Avec $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les contraintes et les déformations respectivement.

III -3-5 Equation de mouvement:

Le principe de Hamilton est utilise ici pour dériver les équations de mouvement, ce principe peut être écrit sous forme analytique :

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta K) dt \quad (\text{III.14})$$

Ou δU la variation de l'énergie de déformation; et δK la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque comme suit :

$$\delta U = \int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz_{ns} \quad (\text{III.15})$$

Remplacer Eqs. (11) et (13) dans Eq. (15) et l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (15) peut être écrit comme suit :

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + S_{xz}^s \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + S_{yz}^s \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \end{array} \right\} dA \quad (\text{III.16})$$

La résultants des contraintes de N , M and S sont définie par:

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{III.17a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (\text{III.17b})$$

En utilisant Eq. (13) dans Eq. (17), la résultantes des contraintes de la plaque FGM peuvent être lies au nombre total des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (III.18)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (III.19a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (III.19b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (III.19c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (III.19d)$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (III.19e)$$

Où A_{ij} , D_{ij} , etc., sont les termes de rigidités de la plaque

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} Q_{11} \left(1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns}) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (III.20a)$$

Où

$$Q_{11} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}, \quad (III.20b)$$

ET

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (III.20c)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{III.20d})$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimée comme suit :

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z_{ns}) dA dz_{ns} \quad (\text{III.21})$$

$$\delta K = \int_A \left\{ \begin{aligned} & I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & - J_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \\ & + K_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right] + J_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} dA \quad (\text{III.22})$$

$\rho(z)$ sont la densité de la masse.

$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont inertie de la masse définie comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} (1, z_{ns}, f, z_{ns}^2, z_{ns}f, f^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad (\text{III.23})$$

On remplace les expressions δU et δK de Eqs. (16) et (21) dans Eq. (14) et on utilise intégration par partie pour recueillant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s , les équations de mouvement obtenus sont :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.24})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

On remplace Eq. (18) dans Eq. (24), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s) par :

$$A \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.25a})$$

$$A\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}\right) - B\nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial y} - B^s \nabla^2 \frac{\partial w_s}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (\text{III.25b})$$

$$B\nabla^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - D\nabla^4 w_b - D^s \nabla^4 w_s = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (\text{III.25c})$$

$$B^s \nabla^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - D^s \nabla^4 w_b - H^s \nabla^4 w_s - A_s \nabla^2 w_s = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (\text{25d})$$

III -3-6 Solution de Navier pour une plaque rectangulaire simplement appuyé:

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes concernés dans ce cas par la solution exacte des équations (25) pour une plaque FGM qui est simplement appuyée, ces fonctions de déplacements sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de la plaque et sont choisies en série de Fourier.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta = \frac{n\pi}{b}$. ω Sont fréquence naturel. U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} sont

des paramètres arbitraires à déterminer. Remplacent Eq. (26) dans Eq. (25), les équations à valeurs propres obtenues sont :

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Ou

$$\begin{aligned} k_{11} &= A\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2} A\beta^2, \quad k_{12} = \frac{1+\nu}{2} A\alpha\beta, \quad k_{13} = -B\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \quad k_{14} = -B^s\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \\ k_{22} &= \frac{1-\nu}{2} A\alpha^2 + A\beta^2, \quad k_{23} = -B\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad k_{24} = -B^s\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad k_{33} = D(\alpha^2 + \beta^2)^2, \\ k_{34} &= D^s(\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad k_{44} = H^s(\alpha^2 + \beta^2)^2 + A^s(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = -\alpha J_1, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = -\beta J_1, \quad m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$m_{34} = I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

III -4- Conclusion :

Dans ce chapitre, Une théorie de déformation de cisaillement est présentée pour l'analyse des vibrations des plaques FGM. Cette théorie besoin le principe de Hamilton pour dériver les équations de mouvement, la solution de ces équations est déterminer par la solution de Navier et aux conditions des limites de la plaque FGM utilisé.

Chapitre IV

Résultats et Discussion

CHAPITRE IV : Résultats et Discussion

IV -1 Comportement d'une plaque sans fondation élastique:

Dans cette étude, l'analyse des vibrations libres des plaques FGM est effectuée en utilisant la théorie de la plaque proposée afin de la valider. Les solutions de Navier sont employées pour résoudre les équations de mouvement

Les propriétés du matériau de la plaque de FGM sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque en fonction d'une distribution en loi de puissance. Lorsque la valeur de l'indice matérielle « p » est nulle, on obtient une plaque entièrement en céramique, alors que pour une valeur infinie on aura une plaque entièrement métallique.

Puisque les effets de la variation du coefficient de Poisson ν sur la réponse de vibration des plaques FGM sont très petits [Kitipornchai, S., 2006, Allahverdizadeh, A., 2008] on a supposé que sa valeur est constante. Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont indiquées dans le tableau IV.1.

propriétés	Métal (Aluminium)	Céramique	
		Al ₂ O ₃	ZrO ₂
$E_c (GPa)$	70	380	200
$\rho_c = (kg / m^3)$	2702	3800	5700
ν	0,3	0,3	0,3

Tableau IV.1 propriétés des matériaux utilisées

Dans les exemples numériques, on a utilisé les paramètres adimensionnels suivants :

$$\bar{\beta} = wh \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad \hat{\beta} = wh \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \bar{w} = \frac{wa^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (IV.1)$$

IV -1-1 Etudes comparatives :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discuté afin de vérifier la précision de la présente théorie hyperbolique de déformation de cisaillement dans la prédiction du comportement dynamique des plaques FG simplement appuyée. Pour un but de validation, les résultats obtenus par la théorie proposée sont comparé avec d'autres théories existantes dans la littérature, telle que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) (Hosseini-Hashemi et al. 2011c), la solution exacte 3D (Vel et Batra 2004) et théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) (Hosseini-Hashemi et al. 2011b, Matsunaga 2008). Nous avons aussi considéré que le facteur de correction de cisaillement $K = 5/6$ dans la FSDPT.

Le tableau VI.2 démontre un bon accord dans les comparaisons du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ obtenus par la présente théorie (avec seulement quatre inconnus) avec d'autres théories dans le cas des plaques FG parfaite ($\alpha = 0$). En générale, les fréquences obtenues par la CPT sont très élevée par apport à ceux calculées par les théories de déformations de cisaillement. Cela implique que les résultats estimé par la CPT présentent des erreurs considérables pour une plaque épaisse. De plus, on

constate que dans le cas des plaques FG imparfaite ($\alpha = 0,1$ $\alpha = 0,2$), les fréquences obtenues par la présente méthode décroissent avec l'augmentation de la porosité.

Théorie	porosité	$p = 1$			$a/h = 5$		
		$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
<i>Vel and Batra (2004) 3-D</i>		0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
<i>Matsunaga (2008)HSDT</i>		0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.2270	0.2281
<i>Hosseini-Hashemi et al.(2011b) HSDT</i>		0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
<i>Hosseini-Hashemi et al.(2011c) FSDT</i>		0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291
<i>CPT</i>		0.2479	0.0634	0.0159	0.2473	0.2497	0.2526
<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.2276	0.0618	0.0158	0.2257	0.2263	0.2272
	$\alpha = 0.1$	0.2258	0.0612	0.0156	0.2228	0.2233	0.2244
	$\alpha = 0.2$	0.2231	0.0604	0.0154	0.2184	0.2186	0.2199

Tableau IV.2 Comparaison du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ de la plaque carrée Al/ZrO₂.

Dans le deuxième exemple, une étude comparative sur le paramètre de la fréquence naturelle $\hat{\beta}$ d'une plaque carré Al/Al₂O₃ avec différents rapport d'épaisseur (a/h) et différentes valeurs de l'indice matérielles « p » est effectuer en utilisant plusieurs théories de plaques et les résultats sont présentée dans le tableau VI.3. Les valeurs obtenues par la présente théorie dans le cas d'une plaque parfaite ($\alpha = 0$) sont en bon accord avec ceux données par les travaux de Hosseini-Hashemi et al (2011a, b). Les résultats montrent aussi que la CPT surestime la fréquence naturelle des plaques FG, en particulier pour une plaque épaisse et aux modes élevés de vibration. En outre, on peut constater que les fréquences naturelles croissent avec l'augmentation du paramètre de la porosité (α). Au fur et à mesure que l'indice matériel augmente pour les plaques FG, on constate que la fréquence naturelle croit. Ces fréquences sont aussi sensibles à la variation du rapport a/h .

<i>a/h</i>	<i>Mode (m,n)</i>	<i>Théorie</i>	<i>porosité</i>	<i>indice de loi de puissance (p)</i>				
				0.5	1	4	10	
5				0.1807	0.1631	0.1378	0.1301	
		<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.1805	0.1631	0.1397	0.1324	
		<i>CPT</i>		0.1959	0.1762	0.1524	0.1467	
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301	
			$\alpha = 0.1$	0.1806	0.1599	0.1280	0.1195	
			$\alpha = 0.2$	0.1803	0.1552	0.1111	0.1009	
		(1,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>		0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
			<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
			<i>CPT</i>		0.4681	0.4198	0.3603	0.3481
	<i>Présent</i>		$\alpha = 0$	0.3988	0.3606	0.2982	0.2772	
			$\alpha = 0.1$	0.3991	0.3544	0.2776	0.2534	
			$\alpha = 0.2$	0.3991	0.3453	0.2428	0.2128	
	(2,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>		0.5803	0.5254	0.4284	0.3948	
		<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.5779	0.5245	0.4405	0.4097	
		<i>CPT</i>		0.7184	0.6425	0.5478	0.5306	
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.5801	0.5253	0.4288	0.3950	
			$\alpha = 0.1$	0.5810	0.5171	0.4000	0.3601	
			$\alpha = 0.2$	0.5816	0.5050	0.3517	0.3018	
10	(1,1)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>		0.0490	0.0442	0.0381	0.0364	
		<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.0490	0.0442	0.0382	0.0366	
		<i>CPT</i>		0.0502	0.0452	0.0392	0.0377	
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363	
			$\alpha = 0.1$	0.0489	0.0432	0.0353	0.0336	
			$\alpha = 0.2$	0.0489	0.0418	0.0304	0.0285	
	(1,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>		0.1174	0.1059	0.0903	0.0856	
		<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.1173	0.1059	0.0911	0.0867	
		<i>CPT</i>		0.1239	0.1115	0.0966	0.0930	

		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.1173	0.1059	0.0902	0.0856		
			$\alpha = 0.1$	0.1172	0.1037	0.0837	0.0788		
			$\alpha = 0.2$	0.1170	0.1006	0.0724	0.0668		
	(2,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>			0.1807	0.1631	0.1378	0.1301	
				<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
				<i>CPT</i>		0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301		
			$\alpha = 0.1$	0.1631	0.1599	0.1280	0.1195		
			$\alpha = 0.2$	0.1599	0.1552	0.1111	0.1009		
20	(1,1)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011b) HSDT</i>		0.0125	0.0113	0.0098	0.0094		
				<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT</i>		0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
				<i>CPT</i>		0.0126	0.0114	0.0099	0.0095
	<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094			
		$\alpha = 0.1$	0.0125	0.0110	0.0090	0.0087			
		$\alpha = 0.2$	0.0124	0.0106	0.0078	0.0074			

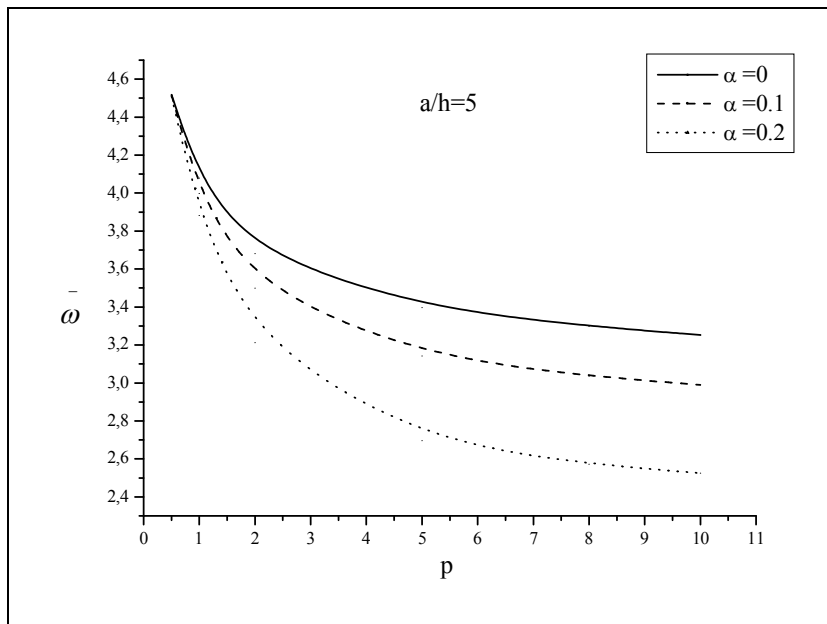
Dans le tableau IV.3, on a comparé le paramètre de fréquence naturelle $\bar{\omega}$ de la plaque carrée Al/Al₂O₃ rectangulaire Al/Al₂O₃ parfaite et imparfaite pour différentes valeurs de l'indice matériel « p » et du rapport d'épaisseur a/h . On constate qu'il existe une légère différence entre les résultats ; cela est dû à différentes approches utilisées pour prédire les fréquences naturelles. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) présente par Hosseini-Hashemi et al (2011c) contient cinq inconnus contrairement à la présente théorie qui utilise que quatre inconnus. De plus, la FSDT exige l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. On signale que tout les paramètres de fréquences, décroissent avec la présence de l'imperfection dans la plaque ($\alpha \neq 0$).

<i>a/h</i>	<i>Mode (m,n)</i>	<i>Théorie</i>	<i>porosité</i>	<i>indice de loi de puissance (p)</i>				
				<i>1</i>	<i>2</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>10</i>
5	(1,1)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	2.6476	2.3952	2.2285	2.1707	2.1414
			$\alpha = 0.1$	2.5934	2.2740	2.0610	2.0009	1.9723
			$\alpha = 0.2$	2.5150	2.0819	1.7655	1.6971	1.6703
	(1,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	4.0782	3.6812	3.3966	3.2987	3.2529
			$\alpha = 0.1$	3.9982	3.4997	3.1417	3.0358	2.9893
			$\alpha = 0.2$	3.8821	3.2118	2.6966	2.5724	2.5249
	(1,3)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	6.2664	5.6403	5.1481	4.9804	4.9085
			$\alpha = 0.1$	6.1508	5.3723	4.7631	4.5748	4.4985
			$\alpha = 0.2$	5.9821	4.9466	4.1001	3.8729	4.9804
	(2,1)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		7.7811	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		<i>Présente</i>	$\alpha = 0$	7.8762	7.0768	6.4153	6.1909	6.0995
			$\alpha = 0.1$	7.7369	6.7490	5.9372	5.6808	5.5811
$\alpha = 0.2$			7.5330	6.2278	5.1208	4.8076	4.6922	
10	(1,1)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	2.7937	2.5365	2.3920	2.3414	2.3112
			$\alpha = 0.1$	2.7328	2.4031	2.2122	2.1643	2.1370
			$\alpha = 0.2$	2.6452	2.1921	1.8894	1.8396	1.8189
	(1,2)	<i>Hosseini- Hashemi et al. (2011c)</i> <i>FSDT</i>		4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		<i>Présent</i>	$\alpha = 0$	4.4193	4.0092	3.7693	3.6855	3.2529
			$\alpha = 0.1$	4.3243	3.8001	3.4859	3.4043	2.9893

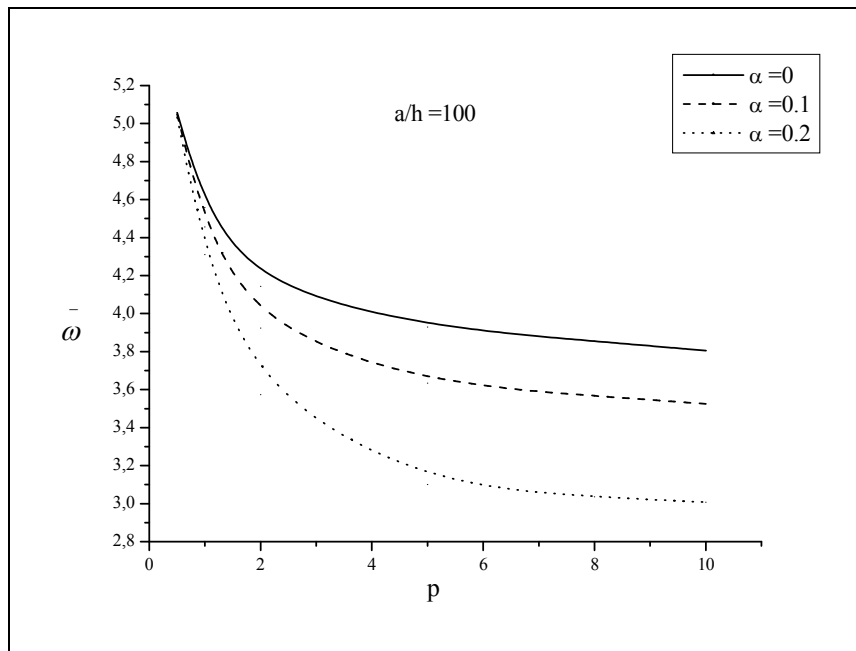
			$\alpha = 0.2$	4.1875	3.4693	2.9792	2.8922	2.5249
	(1,3)	Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT		7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Présent	$\alpha = 0$	7.0516	6.3893	5.9790	5.8362	5.7590
			$\alpha = 0.1$	6.9033	6.0604	5.5295	5.3858	5.3128
			$\alpha = 0.2$	6.6891	5.5398	4.7305	4.5720	4.5085
	(2,1)	Hosseini- Hashemi et al. (2011c) FSDT		9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Présent	$\alpha = 0$	9.0935	8.2319	7.6772	7.4847	7.3845
			$\alpha = 0.1$	8.9053	7.8123	7.1001	6.9022	6.8058
			$\alpha = 0.2$	8.6331	7.1479	6.0788	5.8564	5.7685

IV - II.2.1.2. Etude Paramétrique La variation du paramètre de fréquence $\bar{\omega}$ de la plaque rectangulaire dans AL_2O_3 (b=2a). Cette étude paramétrique est établie pour discuter l'influence des différents paramètres sur le comportement dynamique des plaques FG.

Dans les figures VI.1(a) et (b), on a présente l'influence de l'indice matériel sur la variation du paramètre de fréquence pour respectivement $a/h = 5$ et $a/h = 100$ Selon ces résultats, on remarque que le paramètre de fréquence démunie avec l'augmentation de l'indice matériel et du paramètre de la porosité.



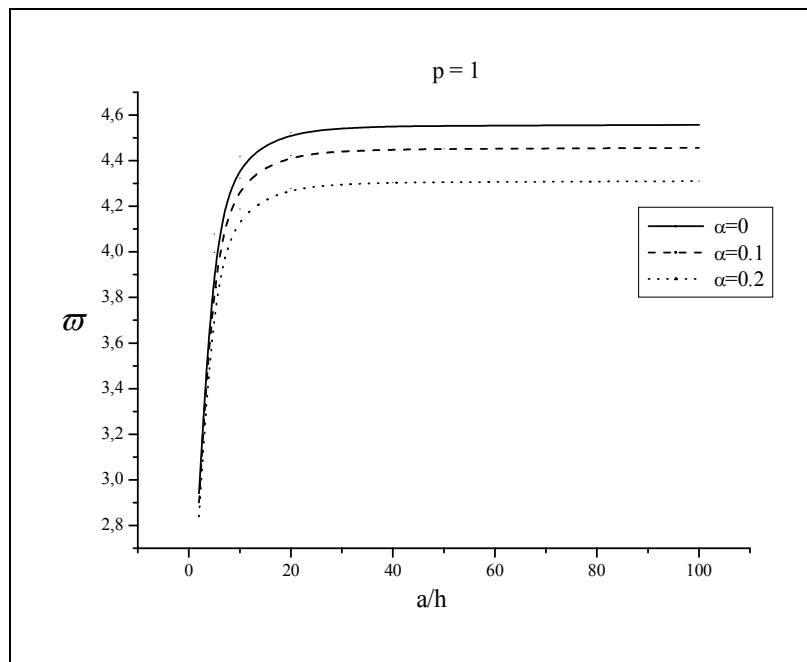
(a)



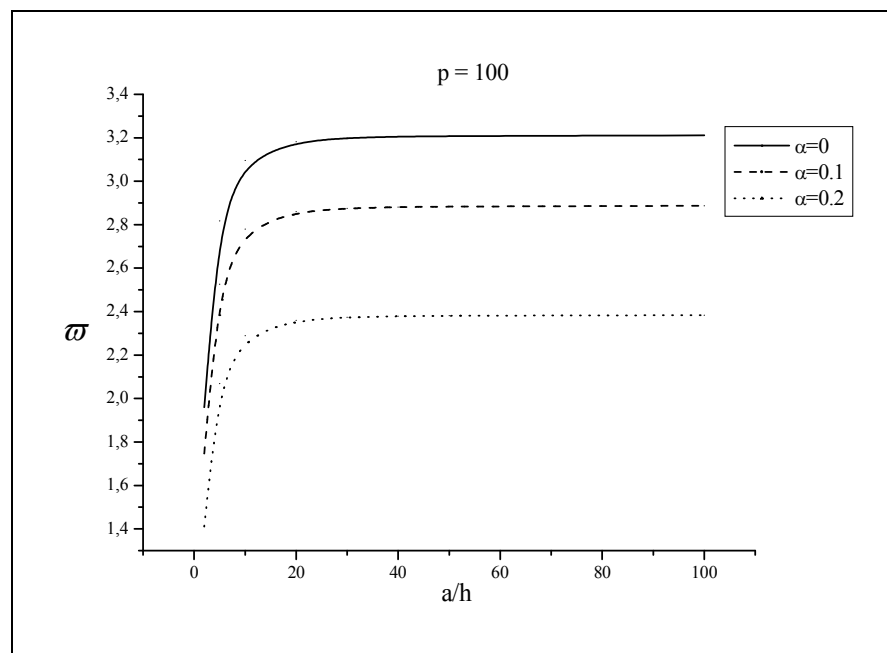
(b)

Figure IV.01. l'effet de l'indice matériel sur le paramètre de la fréquence fondamentale pour une plaque carré FGM : (a) $a/h=5$, (b) $a/h=100$

Les figures VI.2 (a) et (b) montrent la variation des paramètres de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de l'épaisseur d'une plaque FG avec respectivement $p=1$ et $p=100$. On constate que les résultats croissent lorsque le rapport de l'épaisseur diminue. Cependant, on constate que le paramètre de fréquence est non sensible à la variation du rapport a/h lorsque ce derniers est supérieur à 30 et cela pour le cas d'une plaque parfaite et imparfaite.



(a)

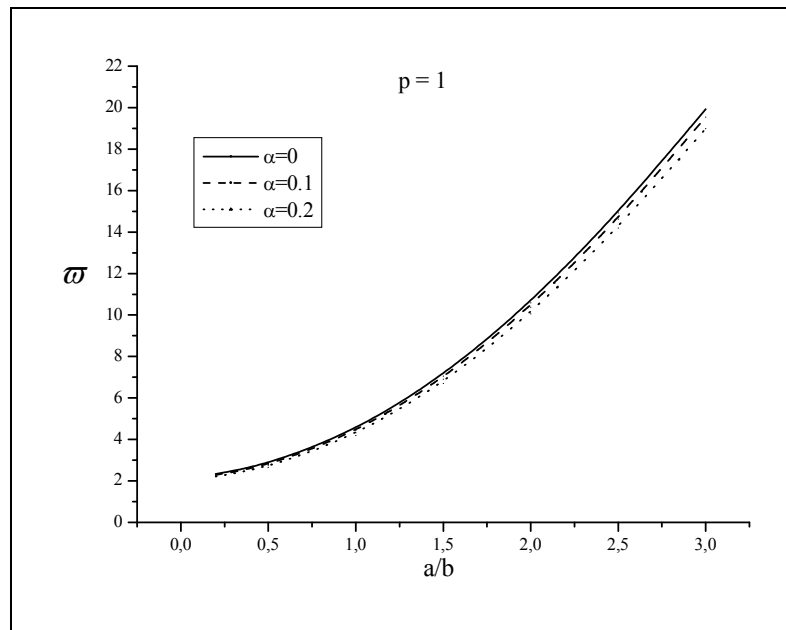


(b)

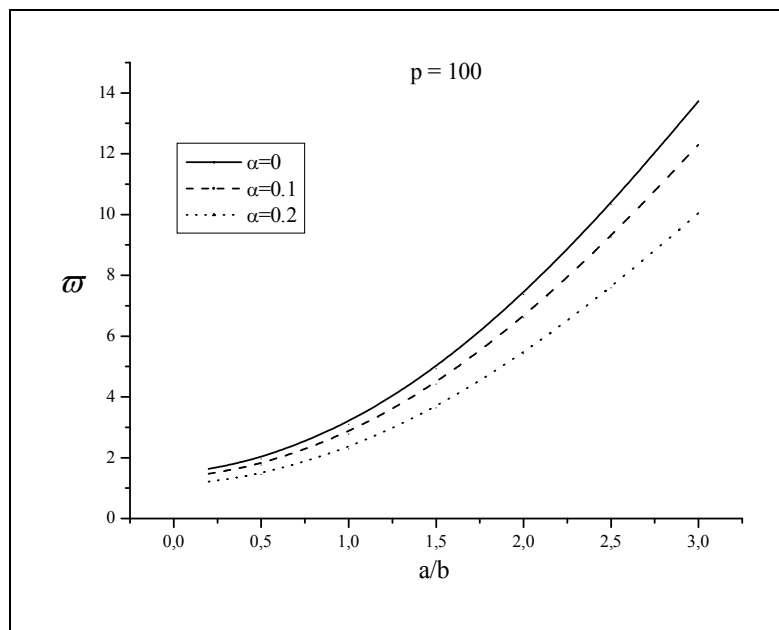
Figure. IV.02. L'effet du rapport de l'épaisseur sur le paramètre de fréquence d'une plaque carré FGM : (a) $p=1$, (b) $p=100$

A partir de la figure VI.3 (a), on constate que les fréquences sont confondues pour toutes les valeurs du paramètre de porosité. Cependant, dans le cas où $p=100$ on constate qu'il

y a une différence entre les valeurs du paramètre de fréquence quel que soit la valeur du paramètre de porosité (voir figure VI.3b).



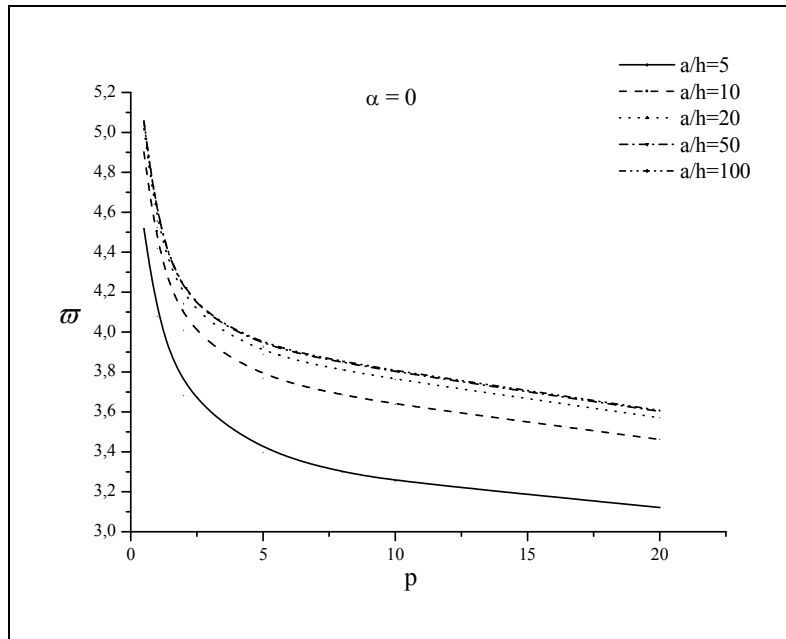
(a)



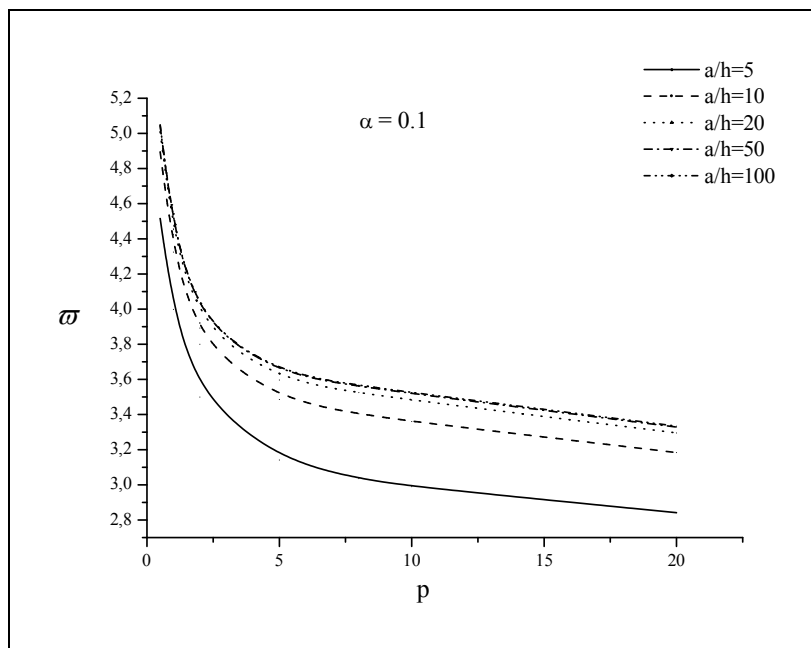
(b)

Figure. IV.03. L'effet du rapport géométrique a/b sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire : (a) $p=1$, (b) $p=100$.

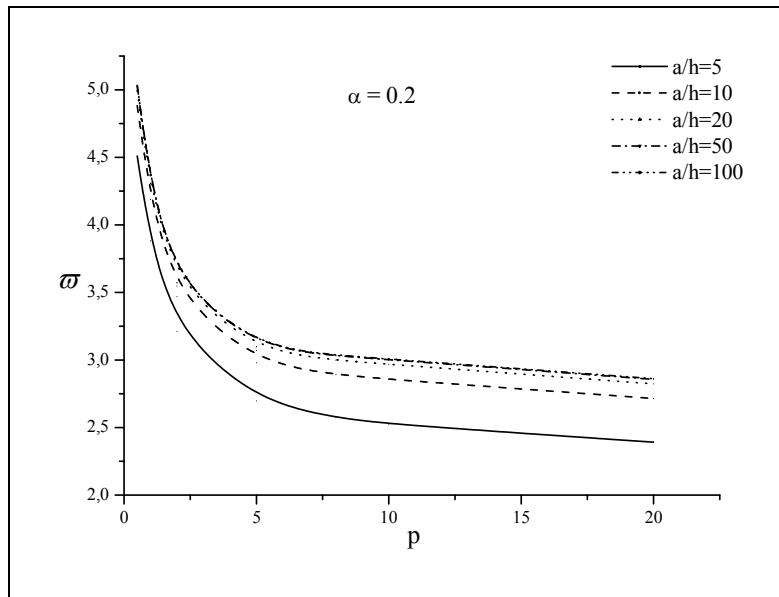
Dans les figures VI.4, on a présenté les variations du paramètre de la fréquence naturelle avec l'indice matériel pour les différents cas de porosité. A partir de ces figures, on constate que l'augmentation de l'indice matériel produit une réduction de la fréquence naturelle et cela quel que soit la valeur de la porosité.



(a)



(b)



(c)

Figure IV.04. l'effet de l'indice matériel sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM pour différentes valeurs de porosité : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0.1$, (c) $\alpha = 0.2$

Dans le tableau VI.5, on a présenté les neuves premières fréquences d'une plaque carré FG modérément épaisses ($a/h=5$) avec plusieurs valeurs de l'indice matériel et des modes de vibrations. On constate à partir de ces résultats, que quel que soit le mode de vibration, le paramètre de la fréquence croit avec la démunissions de l'indice matériel.

a/h	Mode N°	porosité	indice de loi de puissance (p)
-------	---------------------	----------	------------------------------------

(m,n)		0.5	1	2	5	10	100
1 (1,1)	$\alpha = 0$	4.5181	4.0782	3.6812	3.3966	3.2529	2.8175
	$\alpha = 0.1$	4.5158	3.9982	3.4997	3.1417	2.9893	2.5267
	$\alpha = 0.2$	4.5096	3.8821	3.2118	2.6966	2.5249	2.0688
2 (2,1)	$\alpha = 0$	9.9714	9.0164	8.0925	7.3040	6.9318	6.1291
	$\alpha = 0.1$	9.9783	8.8616	7.7240	6.7612	6.3365	5.4824
	$\alpha = 0.2$	9.9797	8.6343	7.1378	5.8394	5.3223	4.4593
3 (1,2)	$\alpha = 0$	9.9714	9.0164	8.0925	7.3040	6.9318	6.1291
	$\alpha = 0.1$	9.9783	8.8616	7.7240	6.7612	6.3365	5.4824
	$\alpha = 0.2$	9.9797	8.6343	7.1378	5.8394	5.3223	4.4593
4 (2,2)	$\alpha = 0$	14.5049	13.1339	11.7508	10.4660	9.8768	8.8372
	$\alpha = 0.1$	14.5261	12.9296	11.2462	9.6970	9.0043	7.8932
	$\alpha = 0.2$	14.5423	12.6272	10.4411	8.4136	7.5460	6.3957
5 (3,1)	$\alpha = 0$	17.1907	15.5781	13.9180	12.3165	11.5907	10.4286
	$\alpha = 0.1$	17.2224	15.3488	13.3393	11.4184	10.5546	9.3081
	$\alpha = 0.2$	17.2502	15.0078	12.4146	9.9325	8.8382	7.5288
6 (1,3)	$\alpha = 0$	17.1907	15.5781	13.9180	12.3165	11.5907	10.4286
	$\alpha = 0.1$	17.2224	15.3488	13.3393	11.4184	10.5546	9.3081
	$\alpha = 0.2$	17.2502	15.0078	12.4146	9.9325	8.8382	7.5288
7 (3,2)	$\alpha = 0$	20.8537	18.9173	16.8757	14.8221	13.9024	12.5875
	$\alpha = 0.1$	20.9019	18.6582	16.2029	13.7530	12.6443	11.2264
	$\alpha = 0.2$	20.9481	18.2705	15.1256	12.0027	10.5816	9.0621
8 (2,3)	$\alpha = 0$	20.8537	18.9173	16.8757	14.8221	13.9024	12.5875
	$\alpha = 0.1$	20.9019	18.6582	16.2029	13.7530	12.6443	11.2264
	$\alpha = 0.2$	20.9481	18.2705	15.1256	12.0027	10.5816	9.0621
9 (4,1)	$\alpha = 0$	25.2274	22.9124	20.4125	17.7953	16.6351	15.1525
	$\alpha = 0.1$	25.2978	22.6233	19.6365	16.5287	15.1139	13.5042
	$\alpha = 0.2$	25.3690	22.1875	18.3910	14.4786	12.6451	10.8801

Tableau. IV.5 Les neufs premier Paramètre de fréquences $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée AL/AL₂O₃ (a/h=5)

IV -2 Comportement d'une plaque avec fondation élastique:

Dans cette partie, l'analyse de la vibration libre des plaques FG posées sur des fondations élastiques est examinée en utilisant la nouvelle théorie de déformation de cisaillement. Les solutions de Navier sont adoptées dans cette étude. Le coefficient de

poisson est fixé à $\nu = 0.3$. En premier lieu une étude comparative a été menée on considère des solutions connues dans la littérature. Pour vérifier la précision de la présente méthode, quelques résultats numériques sont présentés. Les propriétés matérielles utilisées dans cette étude sont :

Métal (Aluminium, AL) : $E_M = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.3$; $\rho_M = 2702 \text{ Kg/m}^3$.

Céramique (Alumine, Al_2O_3) : $E_C = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.3$; $\rho_C = 3800 \text{ Kg/m}^3$.

Dans tout les exemples, les paramètres de fondation sont présentés sous forme adimensionnelle : $K_0 = k_0 a^4 / D$ et $K_1 = k_1 a^2 / D$ avec $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$

Telle que D : c'est la rigidité flexionnelle de la plaque

Dans le premier exemple, les 6 premières fréquences naturelles de la plaque FG sont comparées dans le tableau (IV-6) avec ceux données par Matsunaga (2008) et Ait atmane et al (2010) pour les différentes valeurs de l'indice matérielle « p ». On note respectivement par (α, β) les nombres d'ondes le long des directions x et y , et par i l'ordre de la solution des valeurs propres. D'après les valeurs du tableau (IV-6), un excellent accord entre les résultats données par le présent modèle et ceux de la littérature est à constater:

a/h	Mode n°	Mode (α, β, i)	Théorie	Puissance indice de loi				
				p=0	p=1	p=4	p=10	p= ∞
2	1	101	Matsunaga(2008)	0,55720	0,43750	0,35790	0,33130	0,28290
			Ait Atmane hassen	0,55240	0,43240	0,35540	0,32890	0,28120
			Présent	0,55460	0,43390	0,53920	0,33230	0,28230
	2	111	Matsunaga(2008)	0,94000	0,74770	0,59970	0,54600	0,47730
			Ait Atmane hassen	0,93000	0,77250	0,62440	0,55730	0,47300
			Présent	0,93370	0,73840	0,60080	0,54780	0,47530
3	102	Matsunaga(2008)	0,97420	0,80050	0,63250	0,56640	0,49460	

			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,97420	0,80130	0,63560	0,56680	0,49580
			<i>Présent</i>	0,97420	0,80150	0,63700	0,56710	0,49580
	4	112	<i>Matsunaga(2008)</i>	1,37770	1,11660	0,87310	0,78850	0,69950
			<i>Ait Atmane hassen</i>	1,37770	1,12090	0,87510	0,78950	0,70120
			<i>Présent</i>	1,37770	1,12090	0,87850	0,79030	0,70120
	5	201	<i>Matsunaga(2008)</i>	1,50900	1,21630	0,95910	0,85880	0,76610
			<i>Ait Atmane hassen</i>	1,49070	1,19330	0,94660	0,85260	0,75870
			<i>Présent</i>	1,49650	1,19730	0,95890	0,86190	0,76170
	6	103	<i>Matsunaga(2008)</i>	1,60780	1,30910	1,00080	0,90500	0,81630
			<i>Ait Atmane hassen</i>	1,64660	1,33910	1,04400	0,94260	0,83810
			<i>Présent</i>	1,64660	1,34030	1,04953	0,94390	0,83810

Tableau (IV-6a)

<i>a/h</i>	<i>Mode n°</i>	<i>Mode (α,β,i)</i>	<i>Théorie</i>	<i>Puissance indice de loi</i>				
				<i>p=0</i>	<i>p=1</i>	<i>p=4</i>	<i>p=10</i>	<i>p=∞</i>
5	1	101	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,11200	0,08614	0,07356	0,06999	0,05686
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,11200	0,08600	0,07346	0,06984	0,05689
			<i>Présent</i>	0,11190	0,08600	0,07371	0,07007	0,05697
	2	111	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,21210	0,16400	0,13830	0,13060	0,10770
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,21130	0,17400	0,15200	0,13690	0,10750
			<i>Présent</i>	0,21170	0,16340	0,13870	0,13080	0,10780
	3	201	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,38740	0,30200	0,25020	0,23000	0,19670
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,38500	0,30000	0,25000	0,23000	0,19580
			<i>Présent</i>	0,38610	0,30020	0,25120	0,23440	0,19650
	4	102	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,38970	0,32360	0,26070	0,23370	0,19790
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,38970	0,32360	0,26060	0,23240	0,19830
			<i>Présent</i>	0,38970	0,32360	0,26070	0,23002	0,19830
	5	121	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,46580	0,36440	0,30000	0,27900	0,23650
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,46220	0,36740	0,30370	0,27940	0,23530
			<i>Présent</i>	0,46390	0,36180	0,30120	0,27980	0,23610
	6	112	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,55110	0,45670	0,36680	0,32430	0,27980
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,55110	0,45680	0,36680	0,32430	0,28040
			<i>Présent</i>	0,55110	0,45690	0,36710	0,32440	0,28050

Tableau (IV-6b)

<i>a/h</i>	<i>Mode n°</i>	<i>Mode (α,β,i)</i>	<i>Théorie</i>	<i>Puissance indice de loi</i>				
				<i>p=0</i>	<i>p=1</i>	<i>p=4</i>	<i>p=10</i>	<i>p=∞</i>
10	1	101	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,02936	0,02246	0,01942	0,01861	0,01491
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,02934	0,02244	0,01941	0,01859	0,01493
			<i>Présent</i>	0,02935	0,02244	0,01943	0,01861	0,01494
	2	111	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,05777	0,04427	0,03811	0,03642	0,02933
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,05770	0,04718	0,04210	0,03832	0,02936
			<i>Présent</i>	0,05773	0,04422	0,03815	0,03644	0,02938
	3	201	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,11200	0,08614	0,07356	0,06999	0,05686
			<i>Ait Atmane hassen</i>	0,11200	0,08600	0,07346	0,06984	0,05689

		<i>Présent</i>	0,11190	0,08597	0,07371	0,07007	0,05696
4	121	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,13810	0,10630	0,09045	0,08588	0,07012
		<i>Ait Atmane hassen</i>	0,13800	0,10920	0,09455	0,08764	0,07006
		<i>Présent</i>	0,13790	0,10600	0,09066	0,08600	0,07017
5	102	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,19480	0,16200	0,13080	0,11530	0,09890
		<i>Ait Atmane hassen</i>	0,19480	0,16200	0,13080	0,11520	0,09916
		<i>Présent</i>	0,19480	0,16200	0,13080	0,11530	0,09917
6	221	<i>Matsunaga(2008)</i>	0,21210	0,16400	0,13830	0,13060	0,10770
		<i>Ait Atmane hassen</i>	0,21130	0,17400	0,15200	0,13680	0,10750
		<i>Présent</i>	0,21170	0,16342	0,13870	0,13800	0,10770

Tableau (IV-6c)

Tableau (IV-6) : Comparaison des six premières fréquences naturelles de plaque carrée FG

$$Al/Al_2O_3 \quad \Omega = \omega h \sqrt{\rho_p/E_p}$$

Pour valider la présente méthode dans le cas des plaques posées sur des fondations élastiques, les résultats de la fréquence fondamentale d'une plaque épaisse isotrope avec différentes valeurs de rapport des dimensions (a/h) et différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique sont présentés dans le tableau (IV-7). Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Akhavan et al (2009) et Ait Atman et al (2010). Un excellent accord entre les trois méthodes peut être observé.

épaisseur au rapport de longueur	K0,K1	Théorie		
		<i>Akhavan et al (2009)</i>	<i>Ait Atmane hassen</i>	<i>Présent</i>
<i>h/a=0,001</i>	0,0	19,7391	19,7392	19,7391
	100,10	26,2112	26,2112	26,2112
	1000,100	57,9961	57,9962	57,9961
<i>h/a=0,1</i>	0,0	19,0840	19,0658	19,0786
	100,10	25,6368	25,6236	25,6328
	1000,100	57,3969	57,3923	57,3955
<i>h/a=0,2</i>	0,0	17,5055	17,4531	17,4899
	100,10	24,3074	24,2728	24,2971

	1000,100	56,0359	56,0311	56,0345
--	----------	---------	---------	---------

Tableau (IV- 7): comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ isotrope plaque carrée

Dans les figures (IV-5a) et (IV-5b), les variations des fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG avec l'indice matériel « p » sont présentées pour différents rapports « a/h ». Il est constaté à partir de cette figure que l'augmentation de l'indice matériel « p » produit une réduction des valeurs de la fréquence fondamentale.

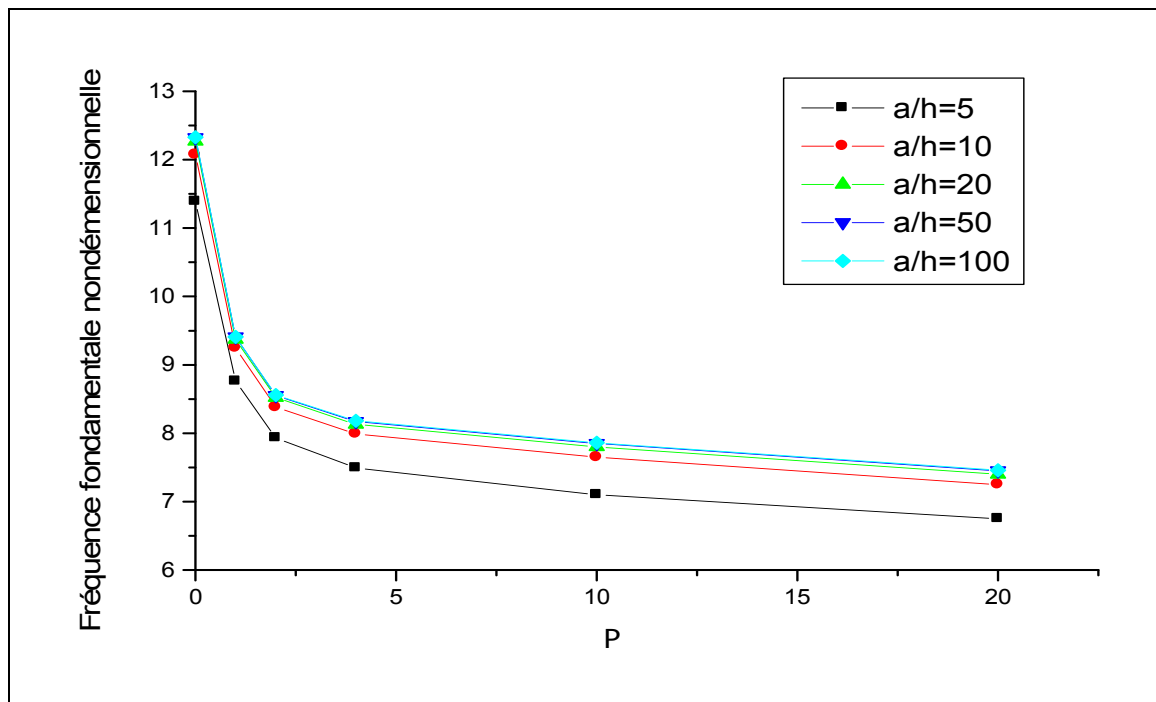


Figure (IV- 5a) : Plaque carrée ($a/b=1$)

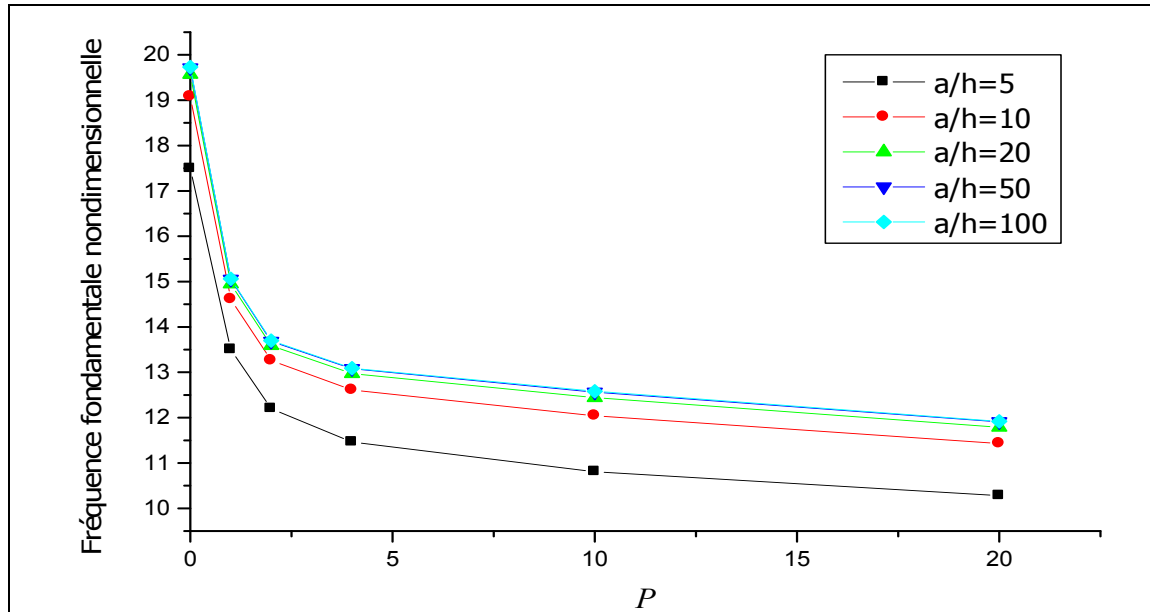


Figure (IV- 5b) : Plaque rectangulaire ($a/b=0.5$)

Figure (IV- 5) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D \epsilon}$) de plaque P-FG sans la fondation élastique ($K_0=K_1=0$)

L'effet des paramètres de la fondation élastique sur la vibration des plaques FG est montré dans les figures (IV-6a) et (IV-6b) pour « $a/h=10$ ». On constate que l'augmentation des valeurs des paramètres de la fondation engendre une augmentation de la fréquence fondamentale. Ainsi, la présence de la fondation élastique rend la plaque rigide.

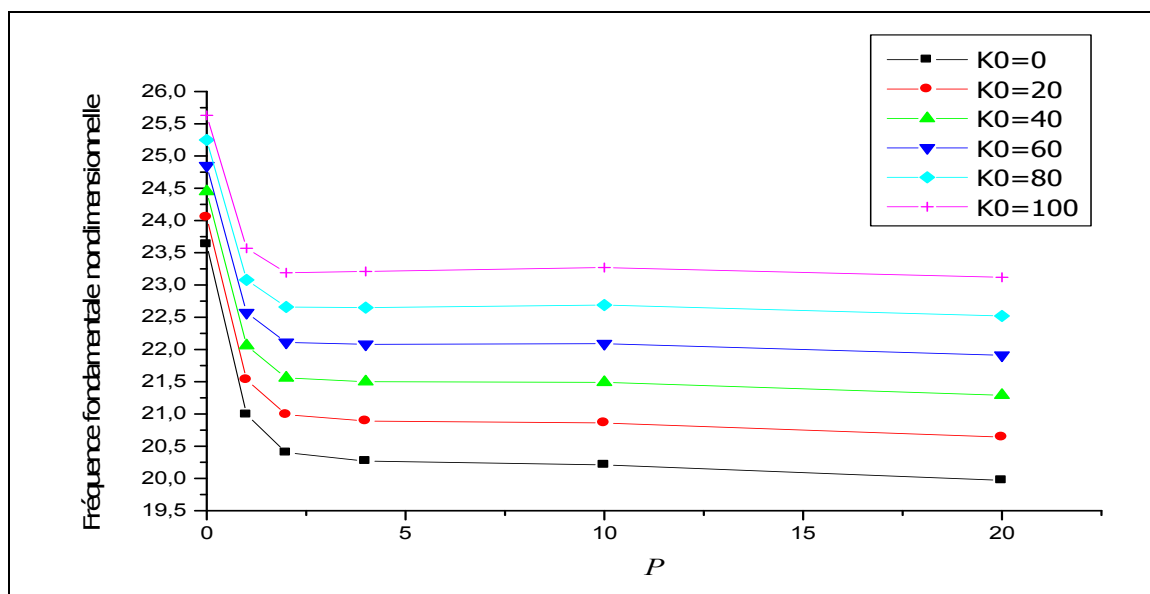


Figure (IV- 6a) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c h / D \epsilon}$) de plaques P-FG posées sur une fondation élastique $K_1=10$

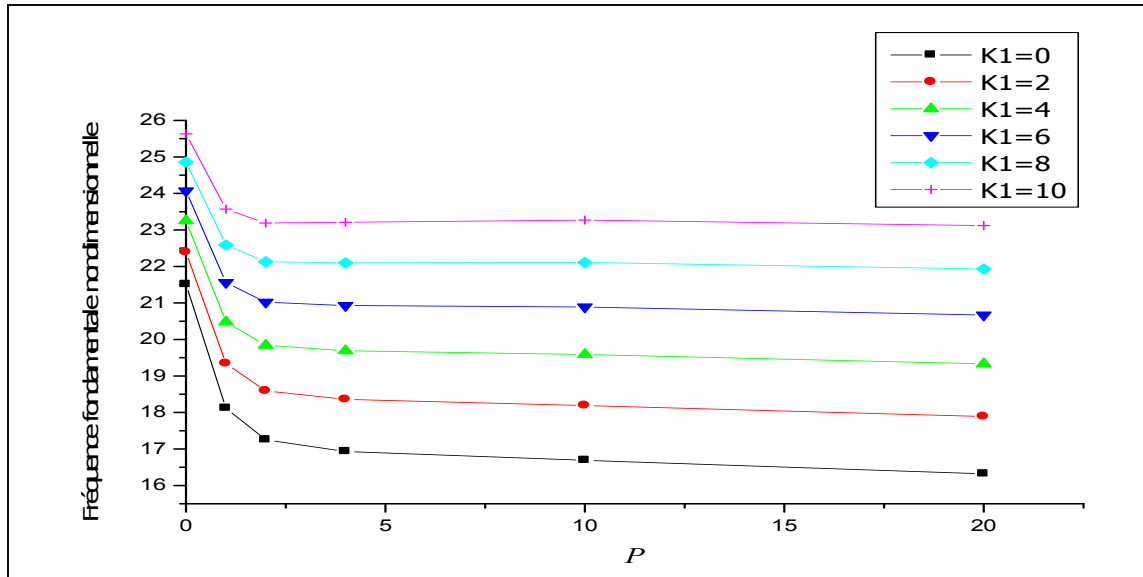


Figure (IV- 6b) : L'effet de l'indice matériel « p » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / D_0}$) de plaques P-FG posées sur une fondation élastique $K_0=100$

Les effets du paramètre matériel « γ » sur la fréquence naturelle des plaques exponentiellement graduées sont montrés dans les figures (IV-7a) et (IV-7b) pour différentes valeurs de coefficient de la fondation élastique et pour un rapport « $a/h=10$ ». On peut constater que l'augmentation de paramètre « γ » réduit fréquence naturelle. Les résultats montrent aussi que les fréquences naturelles des plaques E-FG croissent lorsque les paramètres de la fondation augmentent.

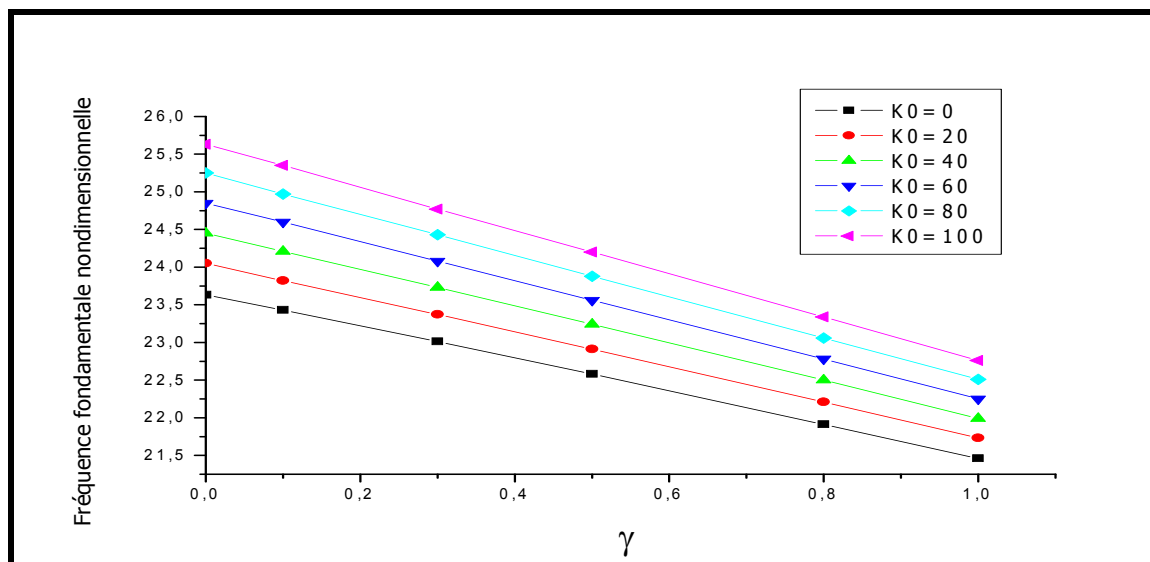


Figure (IV- 7a) : L'effet du paramètre matériel « γ » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / D_0}$) de plaques E-FG posées sur une fondation élastique $K_1=10$

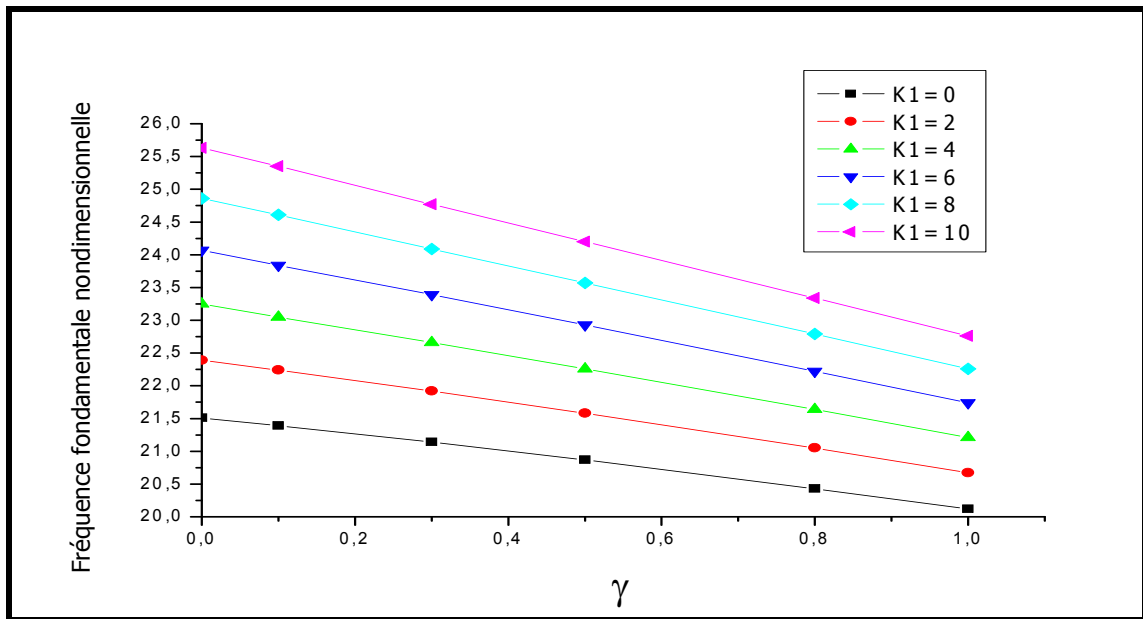


Figure (IV- 7b) : L'effet du paramètre matériel « γ » sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$) de plaques E-FG posées sur une fondation élastique $K_0=100$

Conclusion générale

Conclusion Générale :

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur l'analyse du comportement en vibration libre des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés contenant des pores. Pour cela, une théorie raffinée de déformation de cisaillement à quatre variables a été développée. Une loi de mélange modifiée a été présentée en tenant compte de la présence des pores dans les plaques FGM. La position de la surface neutre des plaques étudiées a été déterminée et la formulation mathématique a été établie en choisissant la surface neutre comme une surface de référence afin d'éliminer le couplage membrane – flexion. Contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement, la théorie proposée utilise quatre inconnues et présente seulement quatre équations de mouvement. Cela a réduit considérablement le temps de calcul numérique.

L'exactitude de la théorie proposée a été démontrée en comparant les résultats trouvés à ceux d'autres théories connues dans la littérature où un bon accord a été constaté. En outre, l'influence de plusieurs paramètres de la plaque tels que l'indice matériel, le rapport de dimension et la porosité sur les fréquences naturelles des plaques FG a été examinée et discutée.

La formulation développée se prête aussi bien à d'autres phénomènes tels que la propagation des ondes dans les milieux homogènes (Mahmoud et al., 2014) et la vibration des plaques composites stratifiées (Draiche et al., 2014; Nedri et al., 2014).

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- Abrate, S. (2008), "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Compos. Part B-Eng.*, **39**, 151-158.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293 – 318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **6**, [Issue 2](#), pp 113-121.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, Accepted.
- Allahverdizadeh, A., Naei, M.H., Nikkhah Bahrami, M. (2008), "Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates", *J. Sound Vib.*, **310**, 966–984.
- Amin, MH., Soleimani, M., Rastgoo, A. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation". *Smart. Mater. Struct.*, **18**:1–9.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2014), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and Composite Structures*, (In press).
- Abdizadeh, H., Elaboration Et Caractérisation de composites duplex « Composites Laminaire Tri-Couches A Base D'Alumine», Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et L'université Claude Bernard Lyon I-France, 1987,212 p.
- Akhavan, H., Hosseini Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh.: Solutions exactes pour des plaques rectangulaires de Mindlin sous charges dans le plan posées sur une fondation élastique de Paternak. Partie II: L'analyse de fréquence. *Comput. Mater. Sci.*44, 951-961, (2009).

Berthelot J-M, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures".
2ème Edition, Masson, Paris, 1996, ISBN: 2-225-85425-4.

Boch, P. Tape Casting of Layered Composites, in Processing of Advanced Ceramic .Edited by
J.S.Moya and S. de Aza .Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, 1987, p.103-
112.

Boch, P., Chartier, T. & Huttepaïn, M. Tape Casting of AL₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites,
J.Am.Ceram. Soc., 1986, Vol.69, N^o.8, p.C-191-C-192.

Bishop, A, Lin, C. Y.,Nvaratnam, M .,Rawlings, R.D.,& Mcshene, H.B., A Functionally Gradient
Material Produced by a Power Metallurgical Process, Journal of Materials Science
Letters,1993,Vol.12,p.1516-18.

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2013),” Nonlinear thermal buckling
behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”
Struct .Eng. Mech., **48**, No. 4, 547-567.

Baferani, AH., Saidi, AR., Ehteshami, H. (2011), “Accurate solution for free vibration analysis of
functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”, *Compos. Struct.* ; **93(7)**,
1842–53.

Benachour, A., Daouadji, H. T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011),”A four variable
refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary
gradient”, *Compos. Part B-Eng.*, **42**, 1386–1394.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM
thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*,
14(1), 85 – 104.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined
plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandwich
Structures Materials*, **14**, 5 – 33.

Dehghan, H., Baradaran, GH. (2011),”Buckling and free vibration analysis of thick rectangular
plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature
method”, *Appl. Math. Comput.* ; **218**, 2772–84.

- Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.
- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53(4)**, 237-247.
- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E. and Mahmoud, F.F. (2013), “Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams”, *Compos. Struct.*, **99**, 193-201.
- Hadji. L, A. Atmane H., Tounsi. A, Mechab. I, Adda Bedia E.A. (2011),” Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory” *Appl. Math. Mech. - Engl. Ed.*, **32(7)**, 925–942.
- Hosseini Hashemi. Sh, Rokni Damavandi Taher. H, Omid. M. (2008),”3-D free vibration analysis of annular plates on Pasternak elastic foundation via p-Ritz method”, *J. Sound. Vib.*, **311**, 1114–1140.
- Hosseini-Hashemi. S., Fadaee. M., Rokni. D., Taher Hossein. (2011a),” Exact solutions for free flexural vibration of Levy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory”, *Appl. Math. Model.*, **35**:708–27.
- Hosseini-Hashemi. S., Fadaee. M., Atashipour, S.R. (2011b), “Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure”, *Compos. Struct.*, **93(2)**, 722–735.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R, (2011c) “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”. *Int. J. Mech. Sci.*, **53(1)**, 11–22.
- Huang, X.L., Shen, H.S. (2004), ”Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments”, *Int. J. Solids Struct.*, **41**, 2403–2427.
- Kawal, C., Wakamatsu, S., Sakagami, S., & Igarachi, T., Oxidation Resistant Coating With TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan, 1990, p.77-43.

- Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, **11(5)**, 135007.
- Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, **15(4)**, 399-423.
- Lee, D., Waas, A.M, Karnopp. B.H, (1998), "Analysis of a rotating multi layer annular plate modeled via layer wise zig-zag theory: free vibration and transient analysis", *Comput. Struct.*, **66**, 313–335.
- Liang, X., Wang, Z., Wang, L., Liu, G. (2014), "Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation", *J. Sound Vib.*, **333(12)**, 2649-2663.
- Liang, X., Wu, Z., Wang, L., Liu, G., Wang, Z., and Zhang, W. (2015a), "Semianalytical three-dimensional solutions for the transient response of functionally graded material rectangular plates", *J. Eng. Mech.*, **141(9)**,
- Liang, X., Kou, H., Liu, G., Wang, L., Wang, Z., Wu, Z. (2015b), "A semi-analytical state-space approach for 3D transient analysis of functionally graded material cylindrical shells", *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, **16(7)**, 525 - 540.
- Lu, C.F., Lim, C.W., and Chen, W.Q. (2009). "Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-D elasticity solutions", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **79(1)**, 25-44.
- Li, Q., Iu, V.P., Kou, K.P. (2009), "Three dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment", *J. Sound. Vib.*, **324**:733–50.
- Liew, K.M., Yang, B. (2000), "Elasticity solutions for free vibrations of annular plates from three-dimensional analysis", *J. Sound. Vib.*, **37**, 7689–7702.
- Lin, C.C., Tseng, C.S. (1998), "Free vibration of polar orthotropic laminated circular and annular plates", *J. Sound. Vib.*, **209**, 797–810.
- Liu, D.Y., Wang, C.Y. and Chen, W.Q. (2010), "Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity", *Compos. Struct.*, **92**, 1047–1051.
- Mistler, R. E High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique, *Am.Cearm.Soc .Bull.* 1973, Vol.52, N^o.11, p.850-54.

Moya , J .S., Sanchez-Herancia, A .J.,Requena ,J .& Moreno,R, Functionally Graded Ceramics by Sequential Slip Casting ,*Materials Letters*,1992,Vol.14,p333-35.

Mahmoud, S.R., Abd-Alla, A.M., Tounsi, A., Marin, M. (2014), “The problem of wave propagation in magneto-rotating orthotropic non-homogeneous medium”, *Journal of Vibration and Control*, (In press).

Miamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., and Ford, R. G., (1999). "Functionally graded materials: design, processing and applications", Kluwer Academic Publishers, Boston.

Matsunaga, H. (2008), “Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory”, *Compos. Struct.*, **82**(4), 499–512.

Morimoto, T., Tanigawa, Y. and Kawamura, R. (2006), “Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating”, *Int. J. Mech. Sci.*, **48**, Issue 9, Pages 926-937.

Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mechanics of Composite Materials*, 49(6), 641 – 650.

Praveen, GN., Reddy, JN. (1998), ”Non linear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic metal plates”, *Int. J. Solids. Struct.*, **35**, 4457–76.

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures*, **17**(3), 321-338

Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E. (2009), “On analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported”, *Proc. I. Mech. E., Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, **223**, 2009-2016.

Reddy JN.A Refined non linear theory of plates with transverse shear deformation.*Int J Solid Struct* 1984;20:881–906.

Sarkar, P.& Nicholson,P.S.,Electrophoretic Deposition (EPD) : Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics, *J.Am.Ceram.Soc .*,1996,Vol.79, N^o.8,p.1987-2002.

Steffens, H. D., Dvorak, M. & Wewel, M., & Wewel, M., Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Application, in Proceeding of the first International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan,1990,p.139-43.

Shufrin, I., Eisenburger, M. (2005), "Stability and vibration of shear deformable plates- first order and higher order analysis", *Int. J. Solid Struct.*, **42**, 1225–1251.

Sundararajan, N., Prakash, T., Ganapathi, M. (2005), "Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environments", *Finite. Elem. Anal. Des.*, **42**:152–68.

Suresh, S., Mortensen, A. (1998), "Fundamentals of Functionally Graded Materials", (*IOM Communications Ltd., London*).

Tounsi, A., Houari Mohammed, S. A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**, 209–220.

Takahashi, M., Itoh, Y. & Kashiwaya, H., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering an Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan, 1990, p.129-34.

Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates". *J. Sound. Vib.*, **272**:703–30.

Williams, J.C., Doctor-Blade Process, in Treatise on Materials Science and Technology, New York :Academic Press, 1976,p.173-98.

Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Hoffman, M. (2012), "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", *Mater. Des.*, **36**, 182–190.

Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V. (2014), "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerospace Science and Technology*, **32(1)**, 111–120.

Woo. J., Meguid, S.A, Ong. L.S. (2006), "Nonlinear free vibration of functionally graded plates", *J. Sound Vib.*, **289**, 595–611.

Yuki, M., Murayama, T.& Irisawa, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser Beam Heating, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan, 1991, p.203.

Yahoobi, H. and Feraidoon, A. (2010), "Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load", *World Appl. Sci. J.*, **10(3)**, 337-341.

- Yang, J., Shen, H-S. (2001), "Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates", *Compos. Struct.*, **54**:497–508.
- Yang, J., Shen, H-S. (2002), "Vibration characteristic and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environment", *J. Sound. Vib.*, **255**:579–602.
- Zhang, D.G. and Zhou, Y.H., (2008), "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Comp. Mater. Sci.*, **44**, 716-720.
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J., Lee, S. (2001), "Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy", *Mater. Chem. Phys.*, **68**, 130–135.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari Mohammed, S. A., Adda Bedia, E. A., Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24–34

Annexe

ANNEXE

La théorie du premier ordre pour les plaques en FGM

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Relation déformations-déplacements:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

La relation contraintes-déformations est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kQ_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kQ_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

9)

$$k = 5/6$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

Equation d'équilibre

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient les équations d'équilibre :

$$W_{\text{int}} = \iiint \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

$$W_{\text{int}} = \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV$$

$$W_{\text{int}} = \iiint \left(\sigma_x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

$$W_{\text{int}} = \iiint \left(\sigma_x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

On pose:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \qquad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \qquad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

$$W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} + Q_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$

Intégrons par partie ;

$$\int_0^a \int_0^b N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} dx dy = \int_0^b N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} dx dy = \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} dx dy = \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} dx dy = \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_x \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} dx dy = \int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy - \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_y \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial y^2} dx dy = \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx - \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b M_{xy} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy - \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy = \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx dy = \int_0^a Q_y \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy = \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^b Q_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dx dy = \int_0^b Q_x \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^a \int_0^b \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy \\ & + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \left(\int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy - \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy \right) - \left(\int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx - \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy \right) \\ & - 2 \left(\int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy - \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy \right) \\ & + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy - \left(\int_0^a Q_y \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \right) \\ & + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \left(\int_0^b Q_x \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy \right) \end{aligned} \right) dx dy$$

$$\delta W_{\text{int}} = \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy \\ & + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy + \int_0^b \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy - \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx + \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy \\ & - 2 \int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy + 2 \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy \\ & + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy - \int_0^a Q_y \delta \phi dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \\ & + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \int_0^b Q_x \delta \phi dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy \end{aligned} \right)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \left(\begin{aligned} & \int_0^b N_x \delta u_0 dy + \int_0^a N_y \delta v_0 dx + \int_0^a N_{xy} \delta u_0 dx + \int_0^b N_{xy} \delta v_0 dy - \int_0^b M_x \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dy + \int_0^a \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \phi dy - \int_0^a M_y \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dx + \int_0^a \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \phi dx \\ & - 2 \int_0^b M_{xy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} dy + 2 \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \phi dx + \int_0^a Q_y \delta w dx - \int_0^a Q_y \delta \phi dx + \int_0^b Q_x \delta w dy - \int_0^b Q_x \delta \phi dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta \phi dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta \phi dx dy - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta \phi dx dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta \phi dx dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta \phi dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w dx dy \end{aligned} \right)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \iint q \cdot \delta w \cdot dx \cdot dy$$

Les équations d'équilibre

$$\delta u_0 : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\delta v_0 : A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

$$\delta \phi : B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 2B_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\delta w : A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A_{44} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = q$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ \Phi \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

Les composantes a_{ij} de la matrice symétrique $[k]$ et $[M]$ sont données comme suit:

$$a_{11} = -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2)$$

$$a_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = \lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2]$$

$$a_{14} = 0$$

$$a_{22} = -(A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2)$$

$$a_{23} = \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22} \mu^2]$$

$$a_{24} = 0$$

$$a_{33} = -(D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4)$$

$$a_{34} = 0$$

$$a_{44} = -A_{55} \lambda^2 - A_{44} \mu^2$$

$$m_{11} = m_{22} = -I_0$$

$$m_{13} = \lambda I_1$$

$$m_{23} = \mu I_1$$

$$m_{33} = -I_2 (\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{44} = -I_0$$