

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbes  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil



## THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Elaborée par :

**ABDELHAK Zohra**

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & Matériaux**

Intitulée de la thèse

**Analyse et modélisation du comportement des  
plaques en matériaux à gradient de propriétés type  
FGM sous chargement thermomécanique**

Soutenue publiquement, le 12/06/2016

Composition de jury :

<b>TOUNSI Abdelouahad</b>	Professeur	<b>Président du jury</b>	<b>UDL S.B.A</b>
<b>HASSAINE DAOUADJI Tahar</b>	M.C.A	<b>Directeur de thèse</b>	<b>UIK Tiaret</b>
<b>ADDA BEDIA El Abbas</b>	Professeur	<b>Co-directeur</b>	<b>UDL S.B.A</b>
<b>AMEUR Mohamed</b>	M.C.A	<b>Examineur</b>	<b>ENP Oran</b>
<b>BOURAADA Mohamed</b>	M.C.A	<b>Examineur</b>	<b>UDL S.B.A</b>
<b>ZIDOUR Mohamed</b>	M.C.A	<b>Examineur</b>	<b>UIK Tiaret</b>
<b>HADJI Lazreg</b>	M.C.A	<b>Invité</b>	<b>UIK Tiaret</b>

Année universitaire 2015/2016

*Travaillez sans relâche à acquérir la sagesse,  
comme si vous aviez toujours à acquérir davantage.  
De plus, craignez de perdre ce que vous avez acquis.*

*Celui qui ne progresse pas chaque jour,  
recule chaque jour*

*Confucius*

## **Remerciements**

*Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon encadreur Dr **HASSAINE DAOUADJI Tahar** d'avoir accepté d'être le directeur de cette thèse et de m'avoir accordé la chance de faire ce travail et pour les remarques et suggestions qui ont permis de l'améliorer. Je le remercie pour ses conseils, ses recommandations et sa confiance, c'est un grand honneur pour moi.*

*J'adresse également mes remerciements les plus vifs à mon Co-encadreur Mr **ADDA BEDIA El abbes**, Je le remercie pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail au sein de laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH).*

*Je remercie également Mr **TOUNSI** pour avoir accepté de présider le jury de thèse, ainsi que Mr **AMEUR**, Mr **BOURAADA** et Mr **ZIDOR** d'avoir voulu examiner et juger ce travail et participer au jury.*

*J'exprime une grande gratitude et ma reconnaissance à Mr **HADJI**, je le remercie pour son soutien, sa disponibilité à m'aider à chaque fois que j'ai fait appel à lui.*

*Je veux saisir cette occasion aussi pour remercier tous les membres de laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel-Abbès.*

*Je n'oublierai jamais de remercier du fond du mon cœur la source de mon courage et mon empressement mes chers parents et mes chères sœurs **Mouna** et **Kheira**, merci pour tout.*

*Dédicaces*

---

*À mes parents  
Pour votre amour  
Pour tous vos sacrifices  
Pour tous l'enseignement que  
vous m'avez transmis  
En témoignage de mon éternelle  
reconnaissance ...*



## **Abstract**

---

*In this research work, an exact analytical solution is developed, Firstly, to analyze the thermal buckling of functionally graded sandwich plates (FGM) subjected to uniform, linear and non linear temperature variation rises across the thickness direction, and secondly, to propose a new shear function to study the buckling of FGM sandwich plates with various boundary conditions. Theoretical formulations are based on a refined theory of shear strain. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, while the other shear deformation theories requires five unknowns.*

*This theory considers a parabolic distribution of the transverse shear stress through the thickness of the plate, and satisfied the nullity of this stress to the upper and lower surfaces of the plate without using shear correction factor. We suppose that the material properties of FGM sandwich plate are assumed to be graded in the thickness direction according to a simple power-law distribution (P-FGM) in terms of the volume fractions of the constituents. The validity of the present theory is investigated by comparing some of the present results with those of the classical, the first-order and the other higher-order theories. The influences played by the transverse shear deformation, thermal load, plate aspect ratio ( $a/b$ ), and side-to- thickness ratio ( $a/h$ ) and volume fraction distribution are studied.*

*The numerical results of the critical buckling load of functionally graded sandwich plates were presented and discussed. It can be conclude that the present theory is accurate and simple to study the thermal buckling functionally graded plates under thermal loading and buckling with several boundary conditions.*

**Keywords** *Functionally Graded Materials, sandwich Plate, buckling, thermal load, Analytical modeling.*

في هذا البحث , تم تطوير حل تحليلي دقيق, من جهة, لتحليل الإنبعاج الحراري لصفائح متعددة الطبقات (سندويش) من مواد متدرجة وظيفيا FGM خضعت لمختلف أنماط التحميل الحراري , المنتظم, الخطي و غير الخطي , عبر سمك الصفائح, و من جهة أخرى,نقترح داله قطع جديدة لدراسة إنبعاج الصفائح متعددة الطبقات FGM مع مختلف الشروط الحدية.

تستند الصيغ النظرية على نظرية التشوه بالقص المكررة. عكس كل النظريات , عدد المجاهيل لهذه النظرية أربع فقط , في حين باقي النظريات تستلزم خمس مجاهيل.

هذه النظرية تأخذ بعين الاعتبار التوزيع المكافئ لإجهادات القص عبر سمك الصفيحة , و تحقق إنعدام هذه الإجهادات عند الحواف العلوية و السفلية للصفيحة بدون إستعمال معاملات تصحيح القص. نقترح أن الخصائص المادية للصفيحة ال FGM تتغير بدون إنقطاع في إتجاه السمك وفقا لتوزيع بسيط لقانون القوة P-FGM بدلالة جزء حجبي للمكونات. ثبت نجاعة النظرية المقترحة بمقارنة النتائج المتحصل عليها من خلال هذه النظرية بغيرها من النتائج المتحصل عليها بنظرية الترتيب الأول و النظريات ذات الترتيب العالي. تأثيرات تشوه القص العرضي, الحملية الحرارية, حاصل قسمة أبعاد الصفيحة (a/b) , حاصل القسمة طول-سمك (a/h) و مؤشر القوة للجزء الحجبي k تمت دراستها.

النتائج الرقمية للحمولة الحرجة لإنبعاج الصفحات متعددة الطبقات المتدرجة وظيفيا تم عرضها و مناقشتها. يمكن الاستنتاج أن النظرية المقترحة هي نظرية دقيقة و بسيطة لدراسة الإنبعاج الحراري للصفائح المتدرجة وظيفيا و التي تخضع لحمولة حرارية و إنبعاج الصفائح مع مختلف شروط الحدود.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة وظيفيا. صفائح متعددة الطبقات. الإنبعاج. الحملية الحرارية. نمذجة تحليلية.

## Résumé

---

*Dans ce travail de recherche, une solution analytique exacte est développée, d'une part, pour analyser le flambement thermique des plaques sandwich en matériau à gradient évaluée (FGM) soumises à une variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur, et d'autre part, à proposer une nouvelle fonction de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwich en FGM avec diverses conditions aux limites. Les formulations théoriques sont basées sur une théorie raffinée de déformation en cisaillement. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnus impliqués dans cette théorie est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement nécessite cinq inconnus.*

*Cette théorie prend en considération une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, et satisfait la nullité de cette contrainte aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance (P-FGM) en fonction de la fraction volumique des constituants. La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats déterminés par cette théorie à ceux obtenus par la théorie de premier ordre et les autres théories d'ordre élevé. Les effets de la déformation de cisaillement transversale, la charge thermique, le rapport des dimensions de la plaque ( $a/b$ ), le rapport longueur-épaisseur ( $a/h$ ), et l'indice de puissance de la fraction volumique ( $k$ ) sont étudiés.*

*Les résultats numériques de la charge critique de flambement des plaques sandwich fonctionnellement graduées ont été présentés et discutés. On peut conclure que la présente théorie est précise et simple pour étudier le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermique et le flambement avec diverse condition aux limites.*

**Mots clé :** Matériaux à gradient de propriétés, Plaques sandwichs, flambement, charge thermique, modélisation analytique.



## Table des Matières

Remerciement.....	i
Dédicace.....	ii
Abstract.....	iii
ملخص.....	iv
Résumé.....	v
Tables des matières.....	vi
Symboles et notations.....	viii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xii
Avant Propos.....	01
Introduction générale.....	02

### Chapitre 01 : Matériaux à Gradient de Propriétés

1.1 Introduction.....	06
1.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	08
1.3 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	11
1.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	12
1.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	14
1.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	15
1.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	16
1.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	17
1.6 Conclusion.....	18

### Chapitre 02 : Théories des Structures en FGM

2.1 Introduction.....	19
2.2 Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	20
2.2.1 Modèle couche équivalente.....	20
2.2.2 Approche par couche.....	27
2.2.3 Les modèles des couches discrètes.....	30
2.3 Conclusion.....	32

### Chapitre 03 : Investigation sur les travaux de recherche réalisés sur les structures FGM

3.1 Introduction.....	33
3.2 Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés.....	33
3.3 Etudes sur les contraintes résiduelles.....	35
3.4 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique.....	36
3.5 Etude sur les problèmes de vibration des plaques en FGM.....	38
3.6 Conclusion.....	42

### Chapitre 04 : Flambement Thermique des plaques sandwich en FGM

4.1 Introduction.....	43
4.2 Formulation du Problème.....	43
4.2.1 Configuration géométrique.....	43
4.2.2 Théorie des plaques raffinée pour les FGM.....	45
a. Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT).....	45
b. Cinématique et équations constitutives.....	46

## *Table des matières*

c.	Equations d'équilibre.....	48
d.	Solution trigonométrique de flambement thermique.....	51
e.	Flambement sous une augmentation de température.....	54
4.3	Conclusion.....	54

### **Chapitre 05 : Flambement Mécanique des plaques sandwich en FGM**

5.1	Introduction.....	56
5.2	Formulation du problème.....	56
5.2.1	Configuration géométrique.....	56
5.2.2	Equations gouvernantes.....	57
5.2.3	Solution analytique de flambement de mécanique.....	60
5.2.4	Types de plaques sandwich.....	63
5.3	Conclusion .....	64

### **Chapitre 06 : Validation des Résultats**

6.1	Introduction.....	65
6.2	Flambement thermique des plaques sandwich en FGM avec diverses conditions aux bords.....	66
6.3	Flambement mécanique des plaques sandwich en FGM avec diverses conditions aux bords.....	75
6.3.1	Validation des résultats.....	75
6.4	conclusion.....	80
	<b>Conclusion générale</b> .....	81
	<b>Bibliographie</b> .....	83

## *Symboles et Notations*

---

$\{ \}$	Vecteur colonne ;
$[ ]$	Matrice.

### *Lettres latines majuscules*

$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque ;
$A_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque ;
$B_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque ;
$D_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$F_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux ;
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement ;
$N_x^T, N_y^T$	Effort due à la charge thermique ;
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}, M_y^{sT}$	Moment due à la charge thermique
$T(x, y, z)$	Distribution de la température à travers l'épaisseur ;
$\{P\}$	Vecteur des efforts généralisés.
$P_c$ :	Propriété Matérielle de la céramique ;
$P_m$ :	Propriété Matérielle de métal ;
$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z) ;
$E$	Module de Young suivant x ;
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z » ;
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z » ;
$V(z)$	Fraction volumique.

---

### *Lettres latines minuscules*

$a$	Longueur de la plaque ;
$b$	Largeur de la plaque ;
$h$	Épaisseur de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) ;
$i, j$	Nombres naturels ;
$k$	Indice de la fraction volumique.
$u_0, v_0, w_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen du plaque ;
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions x, y, z.

### *Lettres grecques*

$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique ;
$\nu$	Coefficient de Poisson ;
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés ;
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales ;
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement ;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z ;
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion ;
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel ;
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel ;
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement ;
$\delta W_{int}$	Travail virtuel intérieur ;
$\delta W_{ext}$	Travail virtuel extérieur.



---

## Liste des figures

---

### Chapitre 01 : Matériaux à Gradient de Propriétés

Figure 1.01	Variation continue des propriétés.....	08
Figure 1.02	Variation discrète des propriétés.....	08
Figure 1.03	Variation continue de la microstructure (schématisée).....	09
Figure 1.04	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	10
Figure 1.05	Concept des matériaux à gradient de propriétés (Protection Thermique).....	11
Figure 1.06	Principaux domaines d'application des FGM.....	12
Figure 1.07	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	13
Figure 1.08	La distribution composante des matériaux .....	14
Figure 1.09	Géométrie d'une plaque FGM.....	15
Figure 1.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	16
Figure 1.11	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	17
Figure 1.12	Variation de Module de Young de la plaque E-FGM.....	17

### Chapitre 02 : Théories des Structures en FGM

Figure 2.01	Illustration de la Plaque de Love Kirchhoff.....	21
Figure 2.02	Illustration de la Plaque de Reissner-Mindl.....	22
Figure 2.03	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.....	23
Figure 2.04	Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	26
Figure 2.05	Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	26
Figure 2.06	Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.....	28
Figure 2.07	Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....	29
Figure 2.08	Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.....	30

### Chapitre 03 : les Investigation sur les travaux de recherche réalisés sur les structures FGM

Figure 3.01	Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et le modèle de Mori-Tanaka.....	35
-------------	--	----

### Chapitre 04 : Flambement Thermique des Plaques Sandwich en FGM

Figure 4.01	La géométrie de la plaque sandwich en FGM avec une épaisseur uniforme suivant des coordonnées cartésiennes.....	44
-------------	---	----

**Chapitre 05 : Flambement Mécanique des Plaques Sandwich en FGM**

Figure 5.01 La géométrie de la plaque sandwich en FGM..... 56

**Chapitre 06 : Validation des résultats**

Figure 6.01 Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich encadrée en FGM sous les trois types de chargement pour  $(a/h = 10)$  en fonction de  $k$  et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d)..... 72

Figure 6.02 Température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de  $(a/h)$  d'une plaque sandwich carrée encadrée en FGM sous les trois types de chargement pour  $k=1$  et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3)..... 73

Figure 6.03 Température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de  $(b/a)$  d'une plaque sandwich encadrée en FGM sous les trois types de chargement pour  $(k=1, a/h=10)$  et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3)..... 74

Figure 6.04 Effet de l'indice de puissance  $k$  sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées sous chargement de compression biaxial  $\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a=10h$ ..... 78

Figure 6.05 Effet des déformations de cisaillement sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées soumise à une compression biaxiale  $k = 1$ ..... 79

Figure 6.06 Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  de la plaque (1-3-1) sous chargement de compression biaxiale  $k = 1$ ..... 79

---

<b>Chapitre 01 : Matériaux à Gradient de Propriétés</b>		
Tableau 1.01	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	10
<b>Chapitre 04 : Flambement Thermique des Plaques Sandwich en FGM</b>		
Tableau 4.01	Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_m(y)$ .....	51
<b>Chapitre 05 : Flambement Mécanique des Plaques Sandwich en FGM</b>		
Tableau 5.01	Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_m(y)$ .....	61
<b>Chapitre 06 : Validation des Résultats</b>		
Tableau 6.01	Différentes théories et le nombre des inconnus pour chaque théorie.....	66
Tableau 6.02	Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM.....	66
Tableau 6.03	Température critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ , avec $(a/h=5)$ .....	68
Tableau 6.04	Température critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance, avec $(a/h=5)$ .....	69
Tableau 6.05	Température critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation non linéaire de température avec $(\gamma=5, a/h=5)$ .....	70
Tableau 6.06	Température critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque sandwich encadrée de type (1-1-1) sous une variation non linéaire de température pour différentes valeurs de $k$ et $\gamma$ et le rapport $(a/b)$ avec $(a/h=10)$ .....	71
Tableau 6.07	Température critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque sandwich encadrée de type (1-1-1) sous une variation non linéaire de température pour différentes valeurs de $k$ et $\gamma$ et le rapport $(a/b)$ avec $(a/h=20)$ .....	71
Tableau 6.08	Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM.....	75
Tableau 6.09	Charge dimensionnelle de flambement $\bar{N}$ des plaques sandwichs carrées soumise à une compression uniaxiale $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, a/h = 10)$ .....	76
Tableau 6.10	Charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression Biaxiale $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, a/h = 10.)$ .....	76
Tableau 6.11	Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM avec diverses conditions aux bords $(a/h=10)$ .....	77

## *Avant-propos*

---

Cette thèse est réalisée au Laboratoire des matériaux et hydrologie (LMH) de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel-Abbès, sous la direction de Mr **HASSAINE DAOUADJI Tahar**, Maitre de Conférences A à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, et Mr **ADDA BEDIA El abbes**, Professeur à L'UDL. Le LMH s'inscrit dans le contexte de la chaire de recherche scientifique sur la réparation, réhabilitation et le renforcement des structures en génie civil (poutres, plaques, coques...), et s'inscrit sur l'analyse des matériaux à gradient évalué sous différentes sollicitations (Mécaniques, thermiques et hygrothermiques, vibrations et autres) dirigée par le Professeur ADDA BEDIA El abbes.

Ce travail s'articule autour d'un manuscrit rédigé sous forme d'article scientifique, soumis pour publication dans un journal international. Une introduction vient apporter la cohésion nécessaire à cette thèse de doctorat et souligner la contribution du présent travail au domaine. Ensuite, le premier chapitre consacré à une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application. Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les théories des structures FGM. Dans le troisième chapitre, on présente quelques travaux réalisés sur les structures en FGM pour souligner l'ampleur qu'a pris ces matériaux durant ces dernières décennies. Le chapitre quatre quant à lui sera consacré à la formulation d'un modèle analytique basé sur la théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse de flambement thermique des plaques sandwich en FGM dont l'objectif est d'examiner les conditions pour lesquelles les équations d'équilibre sont vérifiées. La charge critique de flambement est déterminée pour les trois cas de chargement thermique retenus. Le cinquième chapitre présente une formulation théorique du flambement mécanique des plaques sandwichs avec diverse condition aux bords. Le sixième chapitre est consacré à la validation du modèle utilisé à travers quelques exemples connus dans la littérature et de présenter les résultats numériques et graphiques de l'analyse du flambement thermique et mécanique des plaques sandwich en FGM avec diverse conditions aux bords. Ce travail de thèse se termine par des conclusions relatives à ce travail de recherche.

## ***Introduction Générale***

---

L'industrie moderne dans la mécanique de construction, l'aéronautique, le génie civil et plus généralement le domaine des transports sont à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée. Un matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser des matériaux composites.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets, peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou à une fissuration. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material* " F.G.M ").

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des composites de pointe, dont la microstructure est hétérogène. Généralement ces matériaux sont fabriqués de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. Les FGM trouvent leur application dans divers domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé ; ces types de matériaux

ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs avantages, puisqu'ils réduisent la disparité dans les propriétés matérielles et les contraintes thermiques.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21<sup>ème</sup> siècle.

Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topics qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement mécanique des structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles thermomécanique liées à un chargement thermique donné en chaque point de la structure.

La détermination des contraintes thermiques (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, qui diffèrent entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées .

Une analyse précise et détaillée des déplacements et des contraintes dans une plaque FGM soumise à des charges thermiques et mécaniques a attiré l'attention de nombreux chercheurs à ce jour.

La théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, est inexacte pour l'analyse de la distribution des déplacements et des contraintes dans les plaques FGM. L'inexactitude est due à la négligence des effets de cisaillement transverse dans les plaques FGM. Afin de prendre en compte cet effet, un certain nombre de théories de déformation en cisaillement de premier ordre ont été développées. Cependant, ces théories supposent une distribution uniforme des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. A cet effet, des facteurs de correction de cisaillement sont introduites pour contourner ce problème. La précision des solutions de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre sera fortement liée à la meilleure estimation des facteurs de correction de cisaillement. Il a été

montré que la théorie classique et la théorie du premier ordre sont inadéquates pour prédire les solutions exactes des plaques FGM.

Les théories d'ordre supérieur proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement. Elles sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure contrairement à celles du premier ordre dans les poutres de Timoshenko et de Midlin-Reissner dans les plaques. Elles donnent donc lieu à des déformations et des contraintes de cisaillement non homogènes dans l'épaisseur. Plus récemment, Touratier a montré que cette forme cubique du déplacement pouvait être généralisée par un « sinus ».

Récemment, une théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a été développée pour les plaques isotropes par Shimpi [Shimpi, 2006, (a)]. Ensuite cette théorie a été étendue aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel [Shimpi, 2006, (b)]. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques (CLPT) dans certains aspects tels que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour le comportement statique et thermo-élastique des plaques FGM par Mechab et al [Mechab, 2010] et Houari et al [Houari, 2011, (b)]. Par conséquent, il semble important d'étendre cette théorie à l'analyse de déformation thermomécanique des plaques sandwichs en FGM.

Reddy [Reddy, 2000] a présenté la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) dans laquelle les contraintes de cisaillement transverses varient d'une façon quadratique à travers l'épaisseur, et par conséquent elle n'exige aucun facteur de correction de cisaillement. Un modèle d'éléments finis basé sur cette théorie a été aussi développé.

Cheng et Batra [Cheng, 2000, (a)] ont trouvés des relations liant les flèches d'une plaque polygonale FGM simplement appuyée, obtenues par les théories de déformation de cisaillement du premier ordre et du troisième ordre, à celles d'une plaque homogène équivalente de Kirchhoff. Cheng et Batra [Cheng, 2000, (b)] ont aussi présentés des résultats pour les vibrations et le flambement d'une plaque polygonale simplement appuyée en FGM, en se basant sur la théorie des plaques de Reddy. Les solutions analytiques en 3D pour les plaques sont utilisées puisqu'elles fournissent des résultats de référence afin d'évaluer l'exactitude des diverses théories des plaques en 2D et les formulations des éléments finis. Cheng et Batra [Cheng, 2000, (c)] ont également utilisé la méthode d'expansion



asymptotique pour étudier les déformations thermo-élastique 3D d'une plaque FGM elliptique.

Vel et Batra [Vel, 2002] ont présentés une solution exacte en 3D pour les déformations thermo-élastique des plaques FGM simplement appuyé de dimensions finies. Récemment, Ying et al [Ying, 2009] ont utilisés une méthode semi-analytique pour étudier les déformations thermiques des plaques FGM épaisses où l'analyse est directement basée sur la théorie de l'élasticité en 3D.

Dans ce travail, une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables est développée pour la modélisation du flambement thermique et mécanique des plaques sandwichs en FGM sous divers conditions aux limites sur les bords. Les structures étudiées (plaque sandwich en FGM) sont supposées isotropes à n'importe quel point dans leurs volumes, avec un module de Young variant à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque sandwich. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. Les présentes théories satisfaites les conditions d'équilibre dans les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Pour obtenir les solutions analytiques, nous avons utilisé la méthode des variables séparées proposé par Sobhy [Sobhy, 2013] pour les plaques sandwiches. Les effets de la variation de la fraction volumique et le rapport d'épaisseur des couches et les différentes conditions aux bords sur la charge critique de flambement sont traités pour montrer l'efficacité des présentes théories de cisaillement.

# *Chapitre 01*

## *Matériaux à Gradient de Propriétés*

---

### **1.1 Introduction**

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [**Miyamoto, 1999 ; Suresh, 1998**] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [**Öchsner, 2008**]. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit

d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semiconducteurs et en génie civil [Baron, 2008].

Les plaques et les poutres constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur

comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

## 1.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (*figure 1.1*) ou discrète (*figure 1.2*) à travers l'épaisseur [Hirai, 1996]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

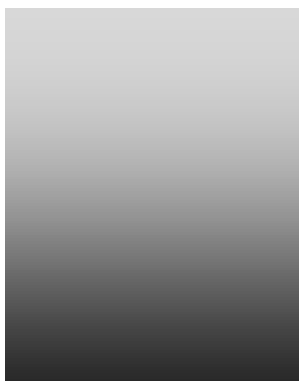


Figure (1.1) Variation continue des propriétés

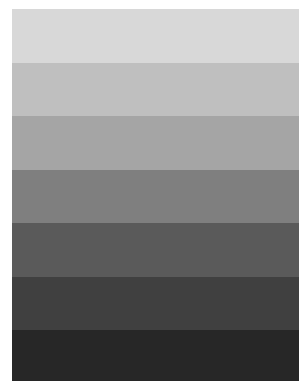


Figure (1.2) Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (*figure 1.3*) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;

- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

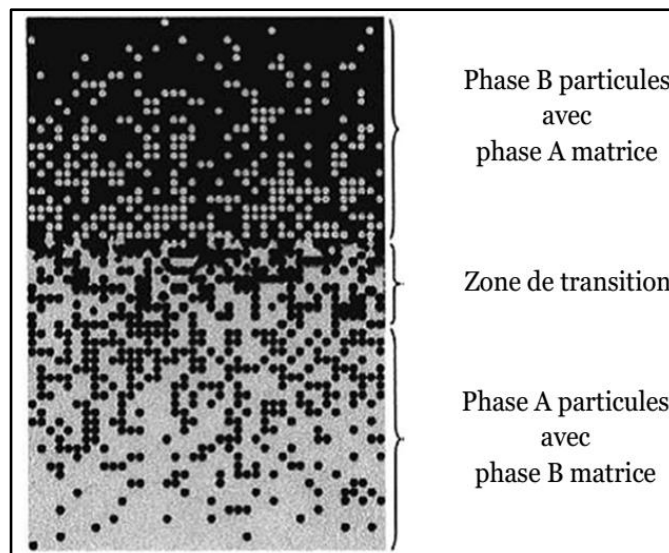


Figure (1.3) Variation continue de la microstructure (schématisée)

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [Jian, 1995 ; Kawasaki, 1997].

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau 1.1.

Tableau (1.1) comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface. -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure 1.4. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

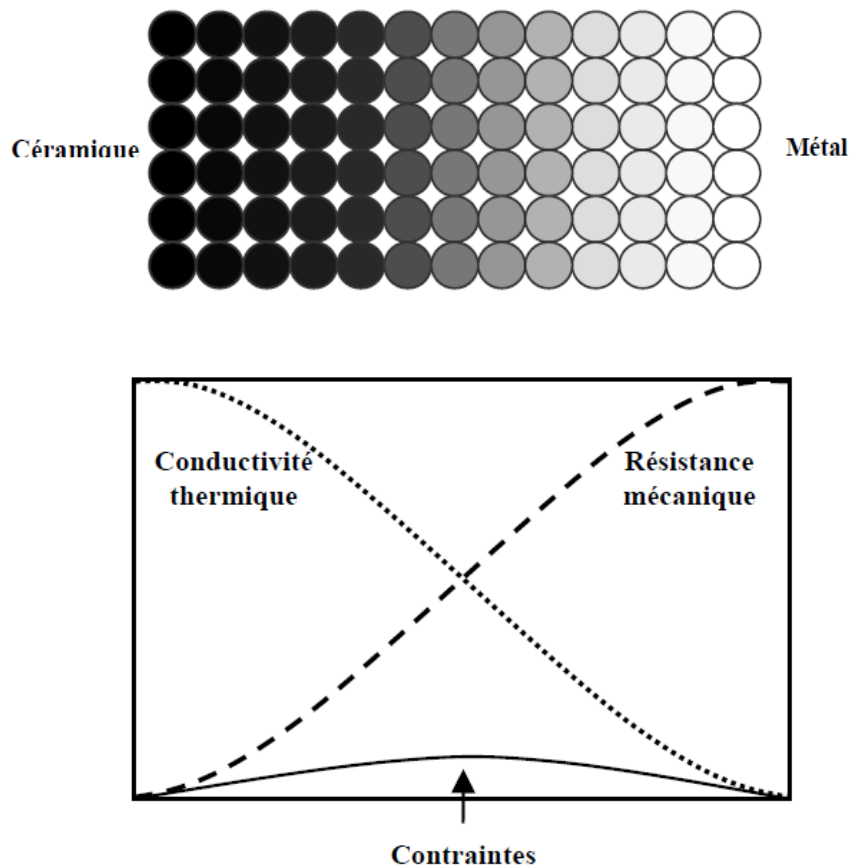


Figure (1.4) Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.5 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

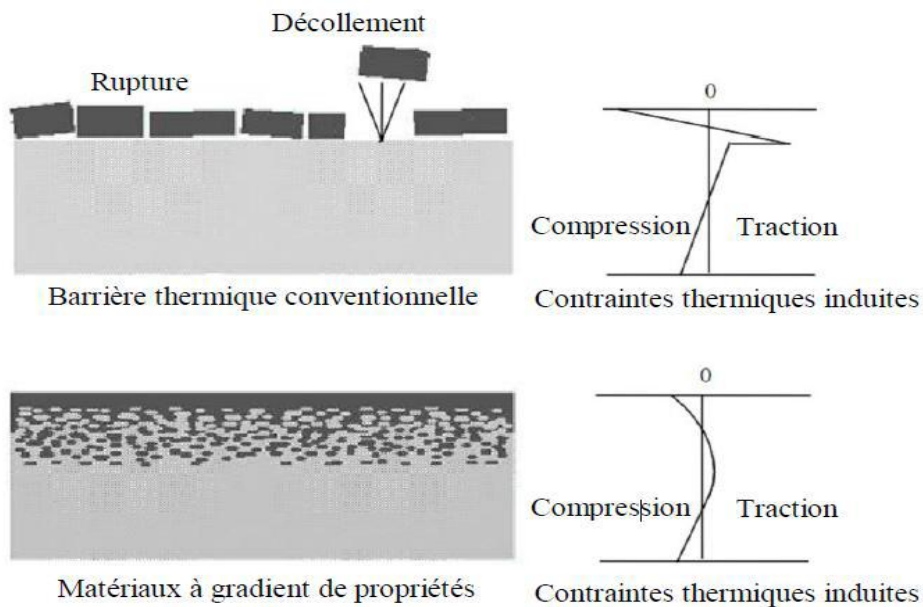


Figure (1.5) Concept des matériaux à gradient de propriétés (Protection Thermique).

### 1.3 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure 1.6. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

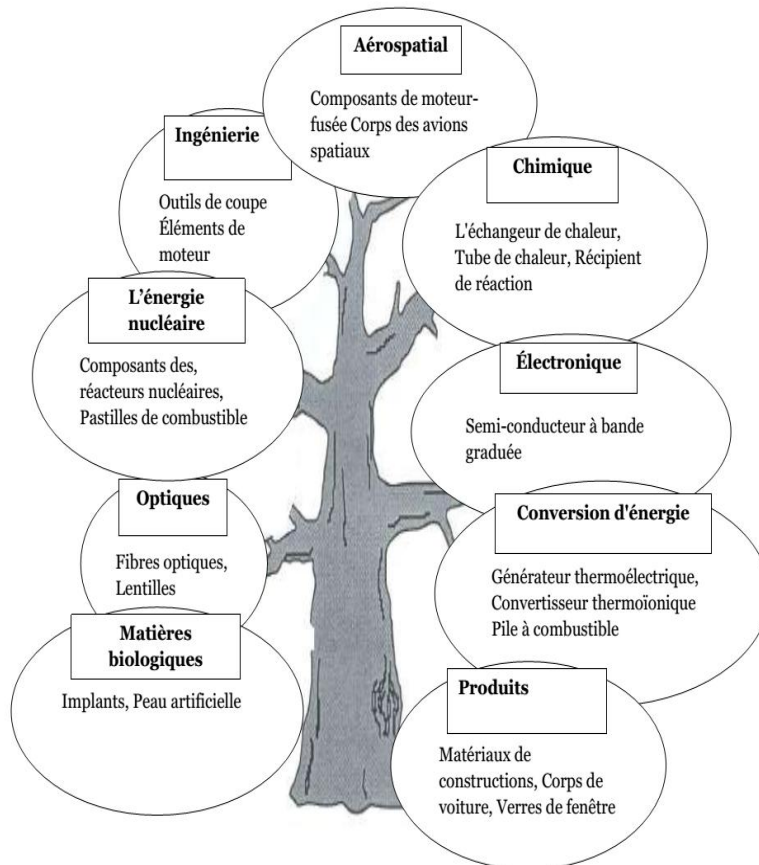


Figure (1.6) Principaux domaines d'application des FGM.

## 1.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure 1.7) [Koizumi, 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-



ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

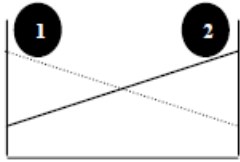
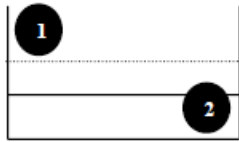
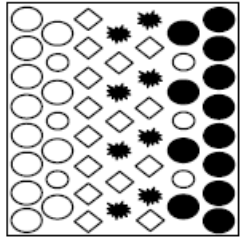
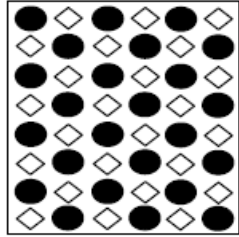
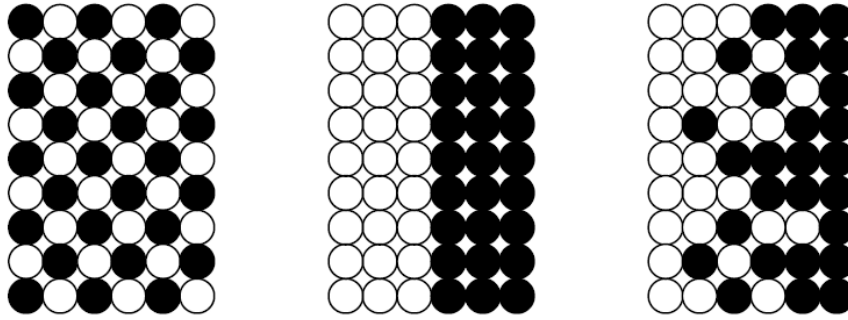
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure (1.7) Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi, 1996]

Yoshihisa [Yoshihisa, 2004] à établir un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure 1.8). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure (1.8) *La distribution composante des matériaux [Yoshihisa, 2004].*

### 1.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen 2009].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1.1)$$

$P_i$  et  $V_i$  sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant  $i$ , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.2)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

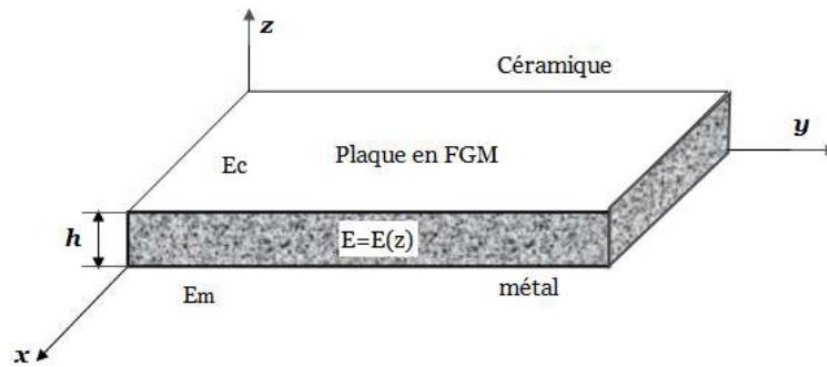


Figure (1.9) Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$  et  $\nu = \nu(z)$ .

Jin et Batra [Jin, 1996] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### 1.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left( \frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (1.3)$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.4)$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = +h/2$ ) de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure 1.10. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

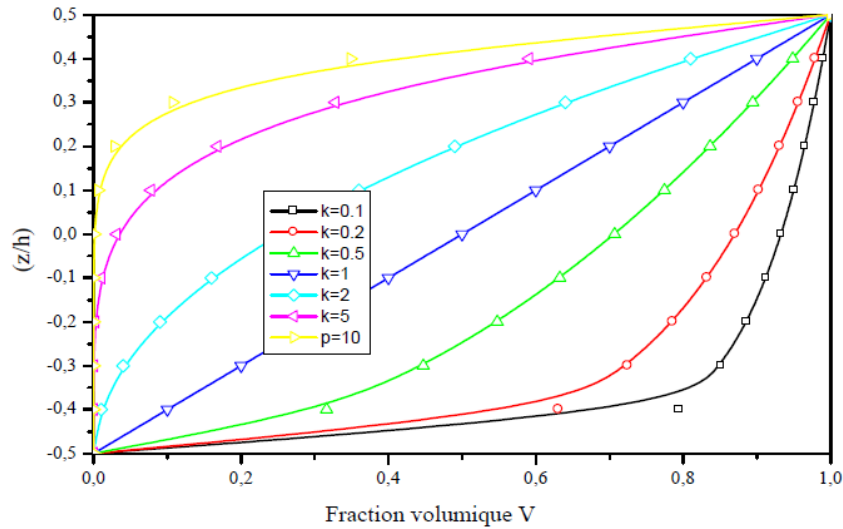


Figure (1.10) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

### 1.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Chung et chi [Chi, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.5a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (1.5b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.6a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.6b)$$

La figure 1.10 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1.6a) et (1.6b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

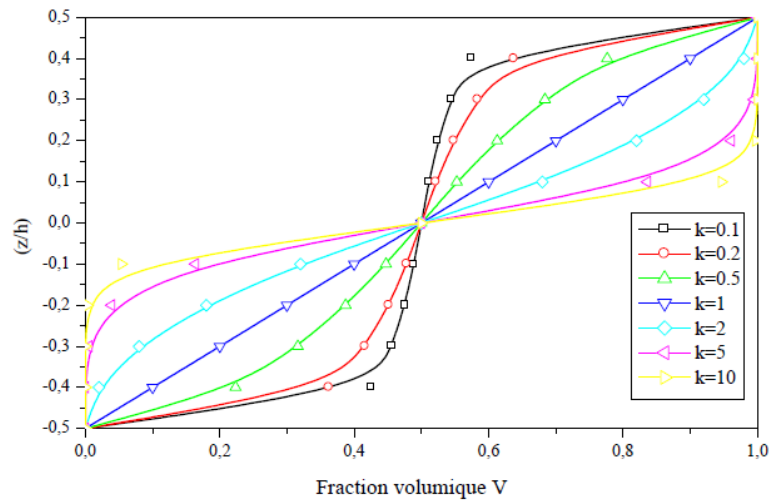


Figure (1.11) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

**1.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :**

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s’écrit sous la forme [Delale, 1983].

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{1.7a}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{1.7b}$$

La variation du module de Young à travers l’épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure 1.12.

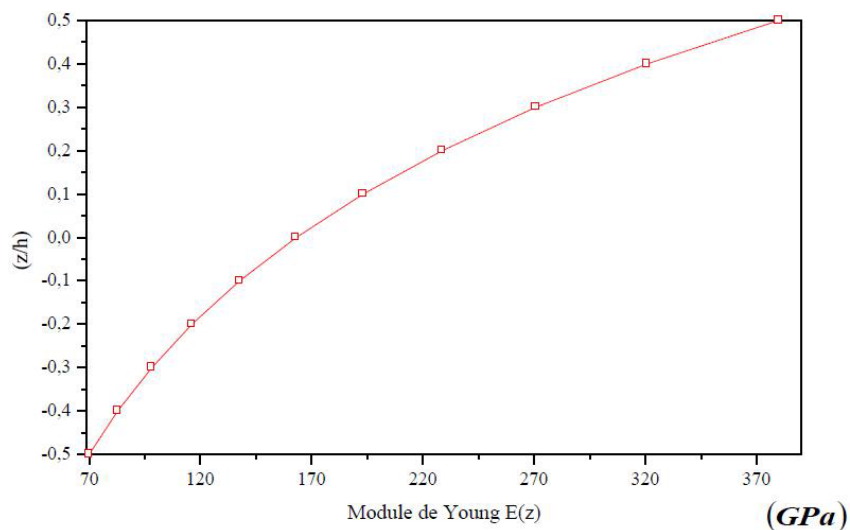


Figure (1.12) Variation de Module de Young de la plaque E-FGM

## **1.6 Conclusion**

*Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.*

## *Chapitre 2. Théories des Structures en FGM*

---

### **2.1 Introduction**

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans Noor et Burton [Noor, 1989], Kapania et Raciti [Kapania, 1989], Carrera. [Carrera, 2000] et Kant [Kant, 2002] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (**3D**) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte les cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ;
- Approche par couche ;
- Approche développement asymptotique.

## 2.2 Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

### 2.2.1 Modèle couche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés.

Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

#### *a. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)*

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure 2.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger, (1959) et Reddy [Reddy, 1997 ; Reddy, 1999].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.3)$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



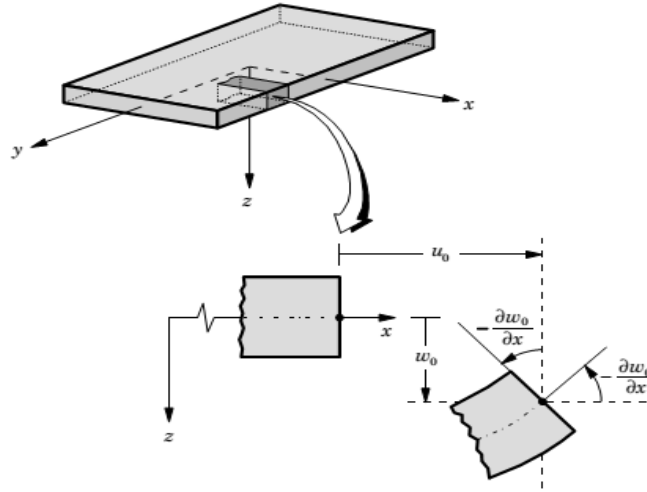


Figure (2.1) Illustration de la Plaque de Love Kirchhoff [Reddy 2007].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

**b. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)**

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références [Reissner 1945; Mindlin 1951].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (2.4)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (2.5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.6)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \gamma_{xz}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

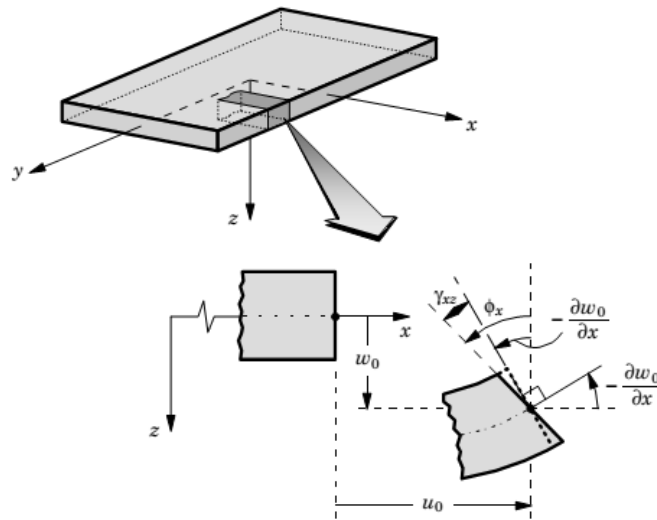


Figure (2.2) Illustration de la Plaque de Reissner-Mindlin [Reissner 1945; Mindlin 1951].

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

***c. Les modèles d'ordre élevé (La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT))***

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, 1949]; [Naghdi 1957]; [Reissner, 1975]; [Reddy 1984]; [Kant, 2002].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriétés.

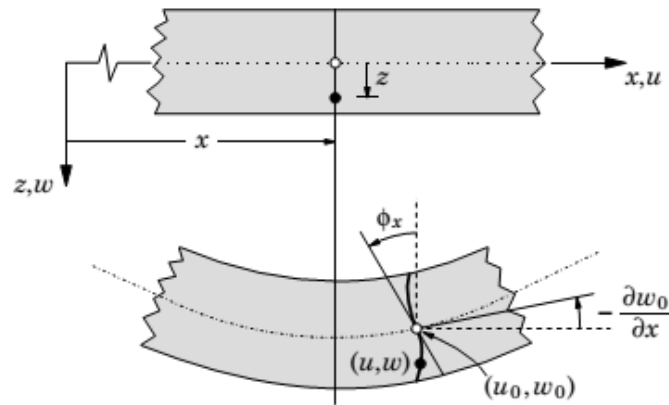


Figure (2.3) Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [Reddy 2007]

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (2.7)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (2.8)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.9)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement  $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y)$ ,  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$ . Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy [Reddy, 1997 ; Reddy, 1999] est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (2.10)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.11)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al [Karama, 2003] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.12)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{\left[\cosh(\pi/2)-1\right]} \quad (2.13)$$

#### - *Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé*

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure 2.3) [Whitney, 1973 ; Nelson, 1974 ; Lo, 1977 ; Touratier, 1991]. Nous citons en particulier :

#### - *L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan, 1969] avec ;*

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (2.14)$$

- L'approche de Reissner Reissner [Reissner, 1945] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (2.15)$$

- L'approche de Levinson, Murthy Murthy [Murthy, 1981] et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (2.16)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$ , est constant [Reddy, 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant [Kant, 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier, 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [Reddy, 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six noeuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit [Polit, 1997] et Dau [Dau, 2006].

Récemment, Afaq et al [Afaq, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.18)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de Touratier [Touratier, 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

- L'approche de Aydogdu avec ;

$$f(z) = z \alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \left( \frac{z}{h} \right)} \quad \alpha > 0 \quad (2.19)$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

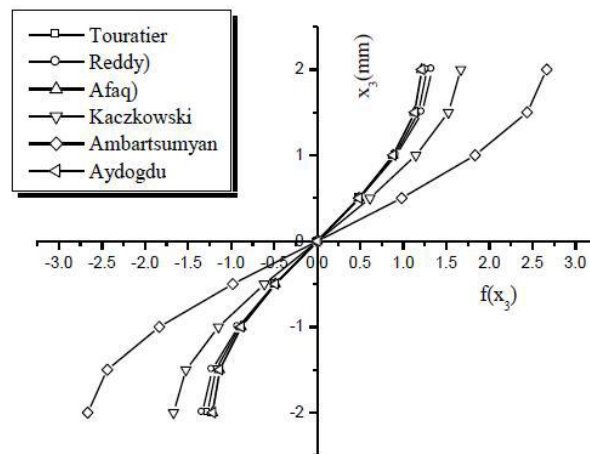


Figure (2.4) Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur

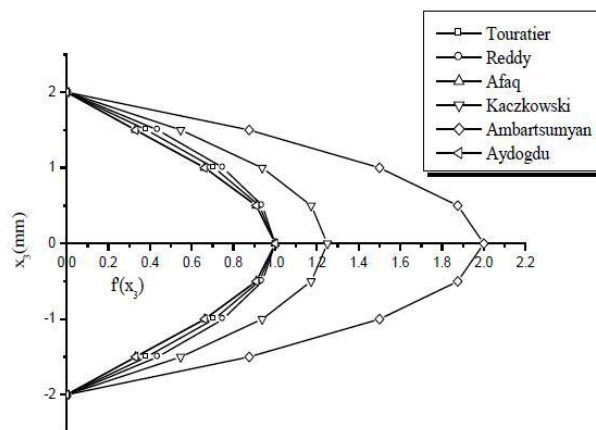


Figure (2.5) Variation de la dérivée de la fonction de forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures (2.4) et (2.5) on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ;

Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

#### ***d. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :***

Shimpi [Shimpi, 2002] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* [Ait Atmane, 2010] ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim [Thai, 2010],[Thai, 2011] et Hadji *et al.* [Hadji, 2011] ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude de flambement thermique et mécanique des plaques FGM.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (2.19)$$

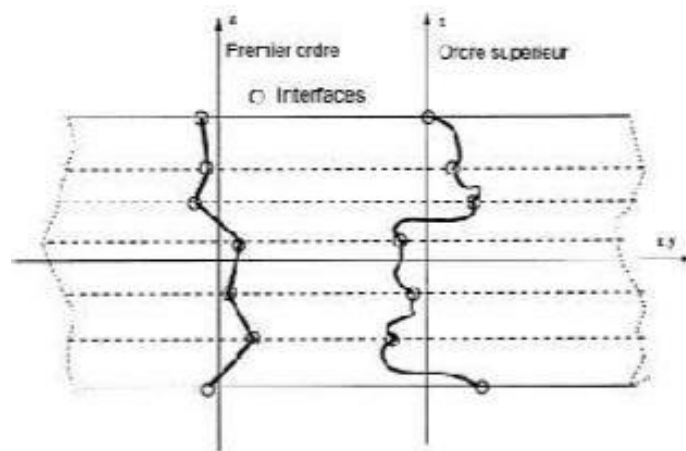
### **2.2.2 Approche par couche**

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure 1.2 et les Equations (1.1) et (1.2) montrent aussi

que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [A. Chabot, 1997 ; E. Carrera, 2000 ; Afak, 2003 (b) ; Reddy, 1984 ; M. Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces ;
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (Figures 2.6 et 2.7).



**Figure (2.6)** Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Vient, 2004]



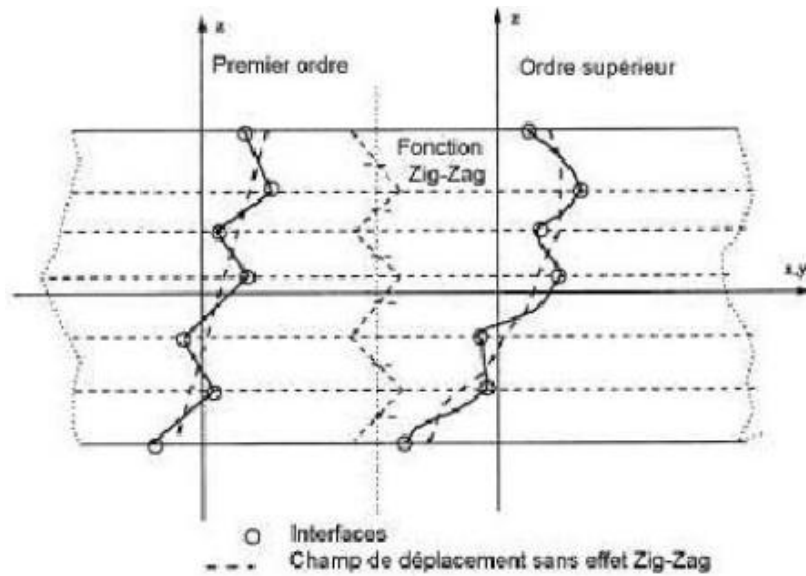


Figure (2.7) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.

[Vient, 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de Di Sciuva [M. Di Sciuva, 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Vient, 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (Figure 2.8).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

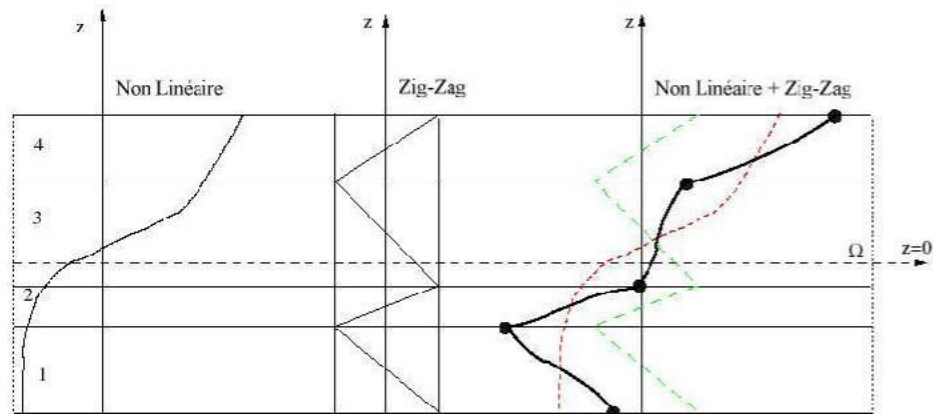


Figure (2.8) Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [Vient, 2004].

Dans les travaux de Karama et Ossadzow [M.Karama, 1998 ; C. Ossadzow], la fonction sinus de Touratier [Touratier, 1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et *al.* [Afaq, 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zigzag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [U.Icradi, 2001]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

### 2.2.3 Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure 2.8).

En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de Srinivas, Reddy et Tahani [Srinivas, 1973 ; Reddy, 1987 ; Tahani, 2003], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de Ren, Kassapoglou et Yin [Ren, 1986 ; Kassapoglou, 1987 ; Yin, 1994] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique.

Ainsi Ren [Ren, 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans Kassapoglou [Kassapoglou, 1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans

Yin [Yin, 1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiales dans l'épaisseur. Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans Pagano [Pagano, 1978]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Viet.Tung, 2004].

### **2.3 Conclusion**

*Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.*

*Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'ya pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarté.*

*Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.*

# ***Chapitre 3. Investigation sur les travaux de recherche réalisés sur les structures FGM***

---

## **3.1 Introduction**

Durant les dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient de propriétés, et il est prudent de réduire la recherche bibliographique dans ce chapitre en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes liés aux plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, l'étude des problèmes de vibration des structures en FGM ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

## **3.2 Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés**

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique

de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [Zuiker, 1995] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et le modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références [T.Reuter, 1997]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et al [Cho, 2001] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [Pal, 2005] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié [Yin, 2004]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des

propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans figure 2.2, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [Yin, 2004] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

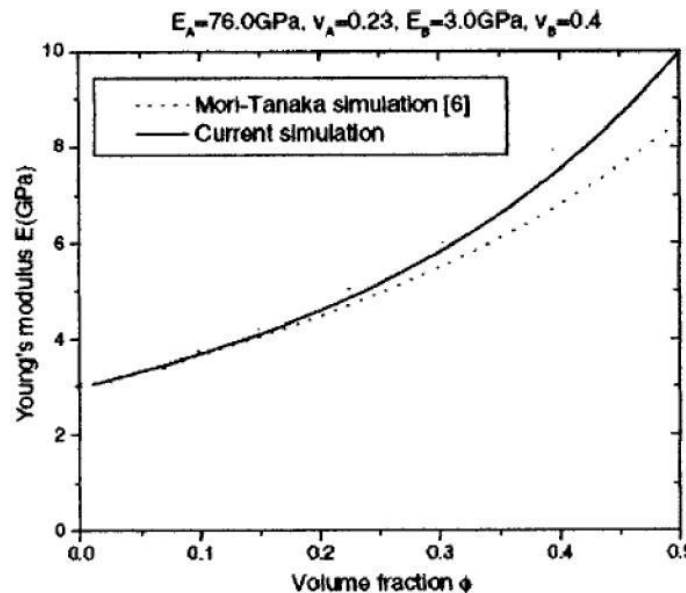


Figure (3.1) Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al [Yin, 2004] et le modèle de Mori-Tanaka

### 3.3 Etudes sur les contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la

propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux micromécanique et macromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée. Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujetti à un environnement haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drake et al [Drake et al, 1993] et Williamson et al [Williamson, 1993]. Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos, Suresh et al. [Giannakopoulos, 1995] ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson et al. [Williamson, 1993] Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot et al. [Finot, 1996] complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran. [Ravichandran, 1995] a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin. [Hill, 2002] qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

### 3.4 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à



ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique. L'une des premières études sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Shen [Shen, 2002]. Il s'est intéressé au post-flambage des coques cylindriques dans un environnement thermique. La même année, Javaheri et Eslami [Javaheri, 2002a] proposent des solutions exactes au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires gradées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambement sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambement d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'indice  $k$  de la loi de distribution en puissance, la température critique de flambement est réduite.

Na et Kim [Na, 2005] analysèrent le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambement thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural. En 2004, Wu [Wu, 2004] a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées.

L'analyse du post-flambement des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen [Shen, 2007]. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques. Bodaghi et Saidi [Bodaghi, 2010] ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à

résoudre. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. Les auteurs ont ensuite aisément résolu le problème en se servant de la méthode de [Levy, 1899]. D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par ([Tidji, 2016], [Javaheri, 2002b ,2002c], [Shariat, 2005], [Adim, 2016]). Boudarba et al [Boudarba, 2013] ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique. En utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, Yaghoobi, H et Yaghoobi, P [Yaghoobi, 2013] ont présentés une étude analytique pour l'analyse du flambement des plaques FG sandwichs symétriques sur fondation élastique et soumises à un chargement mécanique.

Tounsi et son groupe de travail ([Houari, 2011], [Merdaci, 2011],[Bourada, 2012], [Tounsi, 2013]) ont mis au point de nouvelles théories de plaque raffinés pour la réponse de flexion et flambement des plaques FG sandwichs avec seulement quatre fonctions inconnues. Saidi, Houari et al [Saidi, 2013] ont développé une solution analytique pour la flexion thermomécanique des plaques sandwichs fonctionnellement graduées en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Ils ont utilisés un nouveau champ de déplacement en incluant l'effet « *stretching* ». Kettaf et al [Kettaf, 2013] ont étudié le flambement thermique des plaque sandwich fonctionnellement graduées on utilisant un modèle de cisaillement hyperbolique de déplacement. . Khalfi et al. [Khalfi, 2014] ont utilisé une théorie de déformation en cisaillement simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique. Zidi et al [Zidi, 2014] ont étudié le comportement hygro-thermomécanique des plaques FG supportées par des fondations élastiques en proposant une théorie des plaques simple et raffinée a quatre variables. Ait Amar Meziane et al. [Ait Amar, 2014] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyses de flambement et de la vibration des plaques FGM sandwichs sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites.

### 3.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu

d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques. Nous rappelons que le problème de vibration des plaques FGM n'a pas été traité dans le cadre de cette thèse. Nous le présentons juste dans le but de monter l'importance que la communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverses sollicitations.

Praveen et Reddy [**Praveen, 1998**] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy [**Reddy, 2000**] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Hassaine Daouadji et al [**Hassaine Daoauadji, 2012**] et Yang et Shen [**Yang, 2001**] et ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement ( $h/a$  et/ou  $h/b$ ), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM.

Reddy et Chen [**Reddy, 2003**] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2004, Huang et Shen [**Huang, 2004**] ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra [**Vel, 2004**] pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur ( $h/a$  et/ou  $h/b$ )

sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian et al [Qian, 2004] ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur.

En 2006, les travaux de Ferreira et al [Ferreira, 2006] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu. [Uymaz, 2007] ont examiné l'influence de la géométrie ( $a/h$  et  $a/b$ ) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li et al [Li, 2008]. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM.

L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie ( $h/a$  et  $a/b$ ) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse.

Matsunaga [Matsunaga, 2008] a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les

fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

Ait Atmane et *al* [Ait Atmane, 2010] ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier. Hasani et *al* [Hasani, 2011] ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré) ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration. Hadji et *al* [Hadji, 2011] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches. Benachour et *al* [Benachour, 2011] ont utilisé la même théorie développée par Hadji pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité. Houari et *al* [Houari, 2013] ont développé une nouvelle théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques FGM sandwiches qui a été utilisée par Bessaim et *al* [Bessaim, 2013] pour l'analyse des vibrations statiques et libres des plaques FGM sandwiches. Sobhy [Sobhy, 2013] a étudié la vibration et le comportement en flambement des plaques sandwiches en matériau à gradient exponentiel (EGM) reposant sur fondations élastiques sous diverses conditions aux limites.

Draiche et *al* [Draiche, 2014] ont examiné la vibration libre des plaques composites rectangulaires avec une masse de pièce en utilisant un modèle de plaque à quatre variables trigonométriques. Klouche et *al* [Klouche, 2014] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables d'ordre « n » pour le comportement en flexion et en vibration libre des plaques FG. Hebali et *al* [Hebali, 2014] ont étudié les réponses en flexion et en vibration libre des plaques FG à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D. Nedri et *al* [Nedri, 2014] ont proposé une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique raffinée pour le comportement en vibration libre des plaques composites

stratifiées reposant sur des fondations élastiques. Ait Amar Meziane et al [Ait Amar, 2014] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyse de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwiches sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites.

### **3.6 Conclusion**

*Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire.*

# ***Chapitre 4. Flambement Thermique des Plaques***

## ***Sandwich en FGM***

---

### **4.1 Introduction**

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Cette partie est consacrée à la modélisation du comportement thermique du flambement des plaques sandwich en matériaux à gradient évaluée FGM sous divers conditions aux limites sur les bords utilisant une théorie de cisaillement raffinée à quatre variables.

La présente théorie est variablement constante, ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à une contrainte de cisaillement transversale parabolique à travers l'épaisseur et satisfaisant les conditions de nullités sur les surfaces libres. Contrairement à toutes autres théories de déformation en cisaillement, le nombre de fonctions inconnues impliqués est seulement quatre au lieu de cinq. Les propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM sont supposées variables à travers l'épaisseur selon une distribution simple en loi de puissance et aux termes des fractions volumiques des constituants.

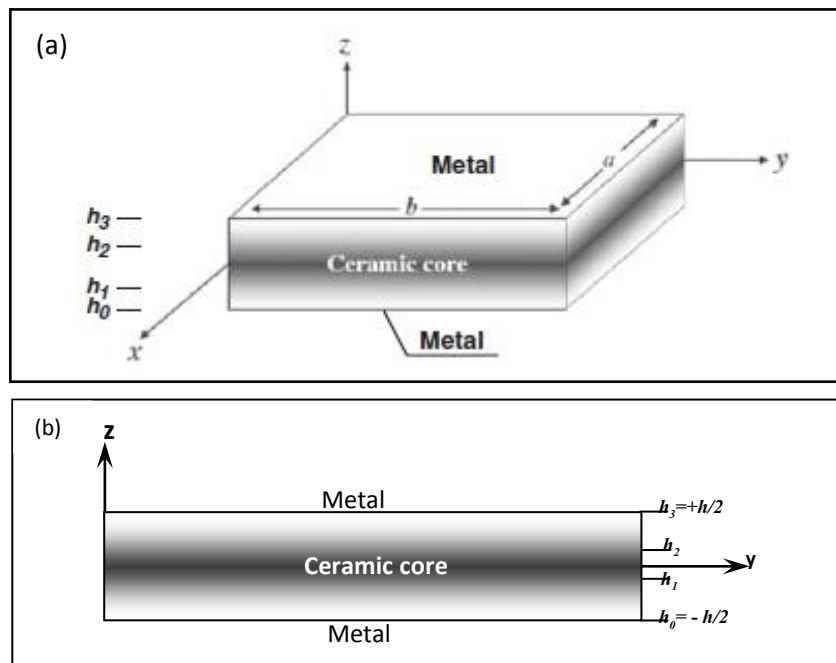
### **4.2 Formulation du problème**

#### **4.2.1 Configuration géométrique**

Considérons une plaque sandwich en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  comme le montre la figure 4.1.

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h / 2$ , et les bords de la plaque sont Parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques : " couche 1", " couche 2" et " couche 3" du bas vers le haut de la plaque (Figure 1.4.b). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par :  $h_0 = -h / 2$ ,  $h_1, h_2, h_3 = h / 2$ , respectivement. Le volume et la surface supérieure sont notés par  $V$  et  $\Omega$  respectivement. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-2-2", "1-1-3" et ainsi de suite.



**Figure (4.1)** La géométrie de la plaque sandwich en FGM avec une épaisseur uniforme suivant des coordonnées cartésiennes.

La fraction volumique des plaques sandwich en FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur:

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (4.1.a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (4.1.b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (4.1.c)$$



Où :

$V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$  ;  $k$  est l'indice de la fraction volumique ( $0 < k < +\infty$ ), qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , peuvent être exprimées par la loi de mélange [P.Marur, 1999] :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (4.2)$$

$P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective de la couche  $n$ ,  $P_c$  et  $P_m$  correspondent à la propriété des faces supérieure et inférieure respectivement de la couche 1 ( $h_0 \leq z \leq h_1$ ), et vice versa pour la couche 3 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ), selon la fraction de volume  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ). On note que  $P_c$  et  $P_m$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes à la céramique et au métal de la plaque sandwich FGM. Dans cette étude le coefficient de poisson de la plaque est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young [F.Delale, 1983].

#### 4.2.2 Théorie des plaques raffinée pour les FGM

Contrairement aux autres théories, le nombre des inconnues dans la théorie raffinée est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement ([Reddy, 1984], [Tourati, 1991], [Karama, 2003] [Zenkour, 2010], [Hassaine Daouadji, 2012]) le nombre d'inconnus est cinq. La théorie utilisée est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement, et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions des surfaces libres.

##### a. Hypothèses de la théorie raffinée des plaques

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimaux.

Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes :  $w_b$  due à la flexion et  $w_s$  due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées  $x$  et  $y$  seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4.3)$$

La contrainte normale transverse  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . Le déplacement  $u$  suivant la direction  $x$  et  $v$  suivant la direction  $y$  sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s, \quad (4.4)$$

Les composants de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont considérées semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  et  $v_b$  peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (4.5)$$

Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent lieu, en relation avec  $w_s$ , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  et des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle façon que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  seront nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de  $u_s$  et  $v_s$  peut être donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (4.6)$$

Avec

$$f(z) = z - \frac{1}{2} z \left( \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (4.7)$$

### **b. Cinématique et équations constitutives**

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations (4.3) – (4.6).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les équations non linéaires de Von Karman des déformations associées aux déplacements sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Et 
$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (4.10.b)$$

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.11)$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  sont les composantes de la contrainte et de la déformation respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (4.2), les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont exprimés comme suit

$$Q_{11}^n = Q_{22}^n = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (4.12.a)$$

$$Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (4.12.b)$$

$$Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (4.12.c)$$

### c. Équations d'équilibre

L'énergie potentielle d'une plaque sandwich en FGM peut être écrite comme suit

$$U = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}] dx dy dz \quad (4.13)$$

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$\iint \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dx dy = 0 \quad (4.14)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (4.15.a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (4.15.b)$$

Soit  $h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les coordonnées supérieure et inférieure de la  $n^{i\text{ème}}$  couche.

En substituant l'équation (4.11) dans l'équation (4.15), les résultantes des efforts de la plaque sandwich seront :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (4.16)$$

Avec

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (4.17.a)$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t \quad (4.17.b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \mathbf{k}^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \mathbf{k}^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (4.17.c)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.17.d)$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (4.17.e)$$

$$\mathbf{S} = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}^t, \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (4.17.f)$$

Où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc, sont les éléments de la matrice de rigidités définies comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\right) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{array} \right\} dz, \quad (4.18.a)$$

Et :

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (4.18.b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (4.18.c)$$

Les efforts et les moments résultants :  $N_x^T = N_y^T, M_x^{bT} = M_y^{bT}$  and  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  due à la charge thermique sont définies comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu} \alpha^{(n)}(z) \mathbf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{bmatrix} dz, \quad (4.19)$$

Les équations de stabilité de la plaque peuvent être dérivées par critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque sandwich en FGM sous des charges thermiques est défini en termes des composantes de déplacement  $(u_0^0, v_0^0, w_b^0, w_s^0)$ . Les composantes de déplacement d'un Etat stable voisin différencié par  $(u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1)$  par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, les déplacements totaux d'un Etat voisin sont :

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1, \quad (4.20)$$

Où le chiffre 1 se réfère à l'état de stabilité et le chiffre 0 se réfère à l'état des conditions d'équilibre. Substituant les équations. (4.9) et (4.20) dans l'équation (4.14) et en intégrant par partie et ensuite en fait égale les coefficients de  $\delta u_0^1, \delta v_0^1, \delta w_b^1, \delta w_s^1$  à zéro, séparément, les équations de stabilité gouvernantes sont obtenus pour les théories des plaques de déformation en cisaillement comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N} &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{Avec} \quad \bar{N} = \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (4.22)$$

Où les termes  $N_x^0$  et  $N_y^0$  sont les forces de pré-flambement résultantes obtenue comme :

$$N_{cr} = N_x^0 = N_y^0 = - \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha(z) E(z) T}{1-\nu} dz. \quad (4.23)$$

Les équations de stabilité en termes de composants de déplacement peuvent être obtenues par la substitution de l'équation (4.16) dans l'équation (4.21). Les équations résultantes sont quatre équations de stabilité basées sur la présente théorie raffinée de déformation en cisaillement.

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = 0, \end{aligned} \quad (24.a)$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s = 0, \end{aligned} \quad (24.b)$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 \\ + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b \\ - D_{11}^s d_{1111} w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s - D_{22}^s d_{2222} w_s + N_{cr} = 0 \end{aligned} \quad (24.c)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 \\
& + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b \\
& - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s \\
& - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s + N_{cr} = 0
\end{aligned} \tag{24.d}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{4.25}$$

#### d. Solution trigonométrique de flambement thermique

La solution exacte des équations (4.24) pour la plaque sandwich en sous diverses conditions aux bords peuvent être construites. Les conditions aux limites pour un bord arbitraire avec coté simplement appuyée et encastré sont :

- *Encastré (C)* :

$$u_0 = v_0 = w_b = \partial w_b / \partial x = \partial w_b / \partial y = w_s = \partial w_s / \partial x = \partial w_s / \partial y = 0 \text{ à } x = 0, a \text{ et } y = 0, b \tag{4.26}$$

Tableau (4.1) Fonctions admissibles  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$

	Conditions aux bords		Fonctions $X_m$ et $Y_n$	
	$x = 0, a$	$y = 0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$		
	$X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$		

(') Représente la dérivée des coordonnées correspondants.

- *Simplement appuyé (S)* :

$$v_0 = w_b = \partial w_b / \partial y = w_s = \partial w_s / \partial y = 0 \text{ à } x = 0, a \tag{4.27.a}$$

$$u_0 = w_b = \partial w_b / \partial x = w_s = \partial w_s / \partial x = 0 \text{ à } y = 0, b \tag{4.27.b}$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui remplissent les conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème:

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) \end{cases} \quad (4.28)$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$  et  $W_{smn}$  sont des paramètres à déterminer.

Les fonctions  $X(x)_m$  et  $Y(y)_n$  sont proposées par Sobhy [M.Sobhy, 2013] pour remplir au moins les conditions aux limites géométriques données dans les équations (4.26) et (4.27), et représentent des formes approximatives de la surface déformée de la plaque. Ces fonctions, pour les différents cas de conditions aux limites, sont calculées dans le tableau 4.1 notant que  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$

En substituant les expressions (4.28) dans l'équation (4.24), on obtient, après quelques opérations mathématiques, les équations suivantes:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \beta N_{cr} & S_{34} - \beta N_{cr} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} - \beta N_{cr} & S_{44} - \beta N_{cr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.29)$$



Dans laquelle:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8 \\
 S_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_8 \\
 S_{13} &= -B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8 \\
 S_{14} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_8 - B_{11}^s\alpha_{12} \\
 S_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10} \\
 S_{22} &= A_{22}\alpha_4 + A_{66}\alpha_{10} \tag{4.30.b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{23} &= -B_{22}\alpha_4 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10} \\
 S_{24} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{10} - B_{22}^s\alpha_4 \\
 S_{31} &= B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} \tag{4.30.a} \\
 S_{32} &= (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + B_{22}\alpha_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{33} &= -D_{11}\alpha_{13} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} - D_{22}\alpha_5 \\
 S_{34} &= -D_{11}^s\alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} - D_{22}^s\alpha_5 \\
 S_{41} &= B_{11}^s\alpha_{13} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11} \\
 S_{42} &= (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11} + B_{22}^s\alpha_5 \\
 S_{43} &= -D_{11}^s\alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} - D_{22}^s\alpha_5 \\
 S_{44} &= -H_{11}^s\alpha_{13} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha_{11} - H_{22}^s\alpha_5 + (A_{44}^s)\alpha_9 + (A_{55}^s)\alpha_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{cr} &= N_x^0 \\
 \xi &= N_y^0/N_x^0
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \beta &= \xi\alpha_3 + \alpha_9 \\
 (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n, X_m Y_n'', X_m Y_n''') X_m Y_n dx dy \\
 (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n', X_m Y_n''', X_m'' Y_n') X_m Y_n' dx dy \\
 (\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m' Y_n dx dy \\
 (\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n', X_m'' Y_n, X_m'' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m' Y_n dx dy
 \end{aligned}$$

La solution non triviale est obtenue quand le déterminant de l'équation (4.29) est égal à zéro.

***e. Le flambement de la plaque sandwich en FGM sous une augmentation de température***

*- Flambement sous une augmentation uniforme de température*

La température initiale de la plaque est supposée être  $T_i$ , ensuite elle augmente uniformément à une valeur finale  $T_f$  dans laquelle la plaque se déforme. La variation de température est  $\Delta T = T_f - T_i$ . La charge critique de flambement est donnée par :

$$T_{cr} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha(z)E(z)(T_f - T_i)}{1 - \nu} dz. \quad (4.31)$$

*- Flambement sous une augmentation linéaire de température*

Pour les plaques sandwich fonctionnellement graduées, la variation de température n'est pas uniforme. La température est supposée être variée linéairement à travers l'épaisseur de la façon suivante :

$$T(z) = \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_i \quad (4.32)$$

Où la différence de température de flambement  $\Delta T = T_b - T_i$  et  $\gamma$  est l'exposant de la température ( $0 < \gamma < \infty$ ). A noter que la valeur égale à l'unité représente un changement linéaire de température à travers l'épaisseur. Alors qu'une valeur différente à l'unité représente un changement non linéaire de température.

Similaire au cas de chargement précédent, l'expression de la charge critique de flambement est obtenue en substituant l'équation (4.32) dans l'équation (4.31).

### **4.3 Conclusion**

*Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale de la réponse au flambement thermique des plaques sandwich en matériaux à gradient de propriétés « FGM », encadrées et simplement appuyées, sujettes aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur a été étudiée sur la base de la théorie parabolique de déformation de cisaillement. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque. Dans cette étude la plaque sandwich est composée de deux peaux en FGM et cœur en céramique. On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une*

*distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres pour la plaque sandwich en FGM ont été obtenues par l'utilisation du principe d'énergie des travaux virtuel. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode des variables séparées, et les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant le problème de valeurs propres.*

# Chapitre 5. Flambement Mécanique des Plaques

## Sandwich en FGM

---

### 5.1 Introduction

La présente analyse étudie le flambement mécanique d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec une épaisseur constante. L'objet est d'obtenir les solutions analytiques décrivant le comportement de flambement de la plaque avec diverses conditions aux limites et de déterminer, par la suite, les effets de la variation de la configuration géométrique et de la variation du matériau suivant l'épaisseur sur la charge critique de flambement.

### 5.2 Formulation du problème

#### 5.2.1 Configuration géométrique

Il sera considéré dans cette partie une plaque sandwich en FGM, avec les faces externes (peaux) en FGM et cœur homogène en céramique (Fig 5.1).

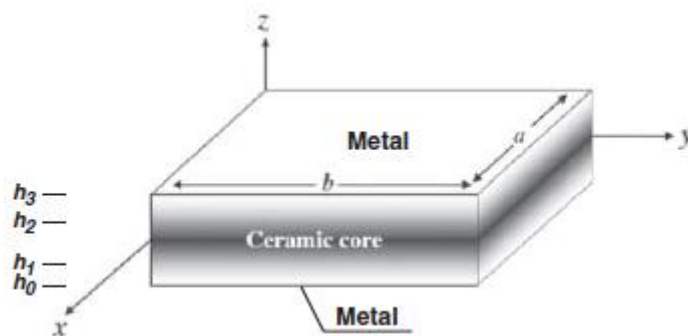


Figure (5.1) La géométrie de la plaque sandwich en FGM

Les propriétés matérielles effectives, sont exprimées par la loi de mélange suivante :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (5.1)$$

La fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur suivant l'équation (4.1).

### 5.2.2 Équations gouvernantes

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement de la présente théorie raffinée d'une plaque sandwich en FGM est donné par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.2.a)$$

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Avec 
$$f(z) = z - ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (5.2.b)$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'Eq. (5.2) soit

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g\gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ g &= 1 - f'(z) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Les coefficients de rigidité sont donnés par les équations (4.12).

Les équations gouvernantes d'équilibre peuvent être obtenues, en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} \bar{N} \delta w d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

Avec

$$\bar{N} = \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] \quad (5.7)$$

En remplaçant les équations (5.4) et (5.5) dans l'équation (5.6) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$\int_{\Omega} \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} \bar{N} \delta w d\Omega = 0 \quad (5.8)$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\ (S_{xy}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (5.9)$$

$h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les coordonnées supérieure et inférieure de la  $n^{\text{ième}}$  couche.

Substituant l'équation (5.5) dans l'équation (5.9) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (5.11.a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (5.11.b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.11.c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (5.11.d)$$

Où les composantes de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc , sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q \left( 1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (5.12.a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (5.12.b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (5.12.c)$$

En remplaçant l'équation (5.9) dans l'équation (5.6) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients  $\delta u, \delta v, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations d'équilibres pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned}
\delta u &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v &= \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_b &= \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \\
\delta w_s &= \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Équations (5.13) peuvent être exprimées en termes des déplacements ( $u_s, v_s, w_b, w_s$ ) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (5.11). Les équations d'équilibre (5.13) prennent la forme :

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
-B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{5.14.a}$$

$$\begin{aligned}
(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
-B_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{5.14.b}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
-2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{5.14.c}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
-2(H_{12} + 2H_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{5.14.d}$$

### 5.2.3 Solution analytique de flambement mécanique

Pour une solution analytique des équations (5.14), la méthode des variables séparées est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM sous diverses conditions aux bords.



- Encastré (C) :

$$u = v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ Pour } x = 0 \text{ et } y = 0, b \quad (5.15.a)$$

- Simplement appuyé (S) :

$$v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ Pour } x = 0, a \quad (5.15.b)$$

$$u = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \text{ Pour } y = 0, b \quad (5.15.c)$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (5.15) sont développées comme suit :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Ou  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$  et  $W_{smn}$  sont des paramètres à déterminer. Les fonctions  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  données dans le tableau (5.1) sont proposés par Sobhy [Sobhy, 2013] pour satisfaire les diverses conditions aux limites dans les équations (5.15) et (5.16) et  $\lambda = m\pi/a$ ,  $\mu = n\pi/b$ .

**Tableau (5.1) Fonctions admissibles  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$**

Conditions aux bords					Fonctions $X_m$ et $Y_n$	
Notation	$x = 0$	$y = 0$	$x = a$	$y = b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	S	S	S	S	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSCS	C	S	C	S	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	C	C	C	C	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FCFC	F	C	F	C	$\cos^2(\lambda x) [\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

Substituant les équations (5.16) dans les équations d'équilibres (5.14) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de la solution, Nous pouvons obtenir, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \\ S_{12} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n' dx dy \\ S_{13} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{14} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m'' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{21} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_n'' Y_m' X_m' Y_n' dx dy \\ S_{22} &= \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m' Y_n' dx dy \\ S_{23} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{24} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{31} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{32} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{33} &= \int_0^a \int_0^b - [B_{22} X_m''' Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\ S_{34} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
S_{41} &= \int_0^a \int_0^b \left[ B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'' \right] X_m Y_n dx dy \\
S_{42} &= \int_0^a \int_0^b \left[ B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'' \right] X_m Y_n dx dy \\
S_{43} &= \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n''' \right] X_m Y_n dx dy \\
S_{44} &= \int_0^a \int_0^b \left[ (H_{11}^s X_m''' Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n'' + H_{22}^s X_m Y_n''') + A_{55}^s X_m'' Y_n + A_{44}^s X_m Y_n'' \right] X_m Y_n dx dy \\
k &= N_{cr} \int_0^a \int_0^b (\gamma_1 X_m'' Y_n + \gamma_2 X_m Y_n'') X_m Y_n dx dy
\end{aligned}$$

En supposant qu'il existe un rapport entre les forces de compression de telle façon que  $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$ ,  $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$ ,  $N_{xy}^0 = 0$ .

Équation (5.17) présente un système aux valeurs propres pour le problème de flambement des plaques sandwichs en FGM :

$$([K] - [N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (5.19)$$

Où  $\{\Delta\}$  représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bn}, W_{sn}\} \quad (5.20)$$

#### 5.2.4 Types de plaques sandwich

On note que l'âme de la plaque non symétrique est entièrement en métal tandis que les peaux supérieure et inférieure de la plaque sont riches en céramique.

Plusieurs types de plaques sandwich sont considérées dans cette étude :

*La plaque sandwich en FGM (1-0-1) :*

C'est une plaque symétrique composée de deux couches de même épaisseur sans cœur. Nous avons Ainsi :

$$h_1 = 0, h_2 = 0$$

*La plaque sandwich en FGM (2-1-2) :*

C'est une plaque symétrique dont l'épaisseur du cœur est la moitié de l'épaisseur des peaux.

$$h_1 = -\frac{h}{10}, h_2 = +\frac{h}{10}$$

*La plaque sandwich en FGM (1-1-1) :*

C'est une plaque symétrique de trois couches dont l'épaisseur du cœur est le même que l'épaisseur des peaux.

$$h_1 = -\frac{h}{6}, h_2 = +\frac{h}{10}$$

*La plaque sandwichs en FGM (2-2-1) :*

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la peau inférieur et le double de celle de la peau supérieur.

$$h_1 = -\frac{h}{10}, h_2 = +\frac{3h}{10}$$

*La plaque sandwichs en FGM (1-2-1) :*

Dans cette configuration, la plaque est symétrique dont l'épaisseur du cœur est le double de l'épaisseur des peaux.

$$h_1 = -\frac{h}{4}, h_2 = +\frac{3h}{4}$$

### 5.3 Conclusion

*Dans le présent chapitre, la stabilité au flambement mécanique des plaques sandwich fonctionnellement graduées a été étudiée sur la base de la théorie raffinée de déformation de cisaillement. Par la division du déplacement transversal en deux composantes une de flexion et l'autre de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations d'équilibre a été réduit à quatre. Les propriétés matérielles de la plaque ont été considérées comme variant selon l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. Les équations gouvernantes d'équilibre ont été obtenues, en utilisant le principe des travaux virtuels. La méthode des variables séparées est utilisée pour résoudre les équations d'équilibres.*

## *Chapitre 6. Validation des Résultats*

---

### **6.1 Introduction**

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques pour valider le modèle proposé et vérifier l'exactitude de la présente théorie (théorie raffinée à quatre variables) dans l'étude, et l'analyse du flambement thermique et mécanique avec diverse conditions aux limites d'une plaque sandwich en FGM.

La théorie raffinée de déformation de cisaillement proposée [Abdelhak, 2016], est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiale et transversale sont constitués d'une partie de flexion et une autre de cisaillement de telle sorte que la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts de cisaillement et de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans la flexion.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque sandwich varient sans interruption à travers l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs configurations de plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont utilisés.

Les résultats numériques et graphiques obtenus sont comparés avec ceux de la littérature. On essaiera dans ce chapitre de décrire la relation entre la présente théorie raffinée et les différentes théories du premier ordre FSDPT, d'ordre élevé HSDPT et la théorie classique des plaques CPT. La description des différents modèles est présentée dans le tableau (6.1).

**Tableau (6.1)** Différentes théories et le nombre des inconnus pour chaque théorie

Modèles	Théories	Nombre de fonctions inconnus
CPT	Théorie classique des plaques (Classical plate theory)	3
FSPT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First order shear deformation theory) (Zenkour et Sobhy 2011)	5
TSDPT	Théorie de déformations de cisaillement du troisième ordre (third-order shear deformation plate theory) (Zenkour et Sobhy 2011)	5
HSPT	Théorie de déformations de cisaillement d'ordre élevé (Higher order shear deformation theory) (Zenkour et Sobhy 2011, Reddy 2000)	5
SSDPT	Théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques (sinusoidal shear deformation plate theory)	5

## 6.2 Flambement thermique des plaques sandwich en FGM avec diverses conditions aux bords

Dans cette partie, nous présentons et nous discutons plusieurs exemples numériques pour vérifier l'exactitude de la présente théorie de cisaillement [Abdelhak, 2016(b)] et nous étudions les effets de l'indice puissance, le rapport d'épaisseur des couches, types d'appuis, rapport entre largeur et l'épaisseur de la plaque, et l'effet de type de chargement thermique sur les valeurs de la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM.

La plaque sandwich en FGM est soumise au même cas de chargement décrit au chapitre 4 et qui varient suivant l'épaisseur. Ils sont donnés respectivement par les équations 4.31 et 4.32 pour le chargement uniforme et linéaire (ou non linéaire).

Pour la plaque sandwich étudiée, Les propriétés matérielles utilisées dans cette partie sont donnés dans le tableau suivant :

**Tableau (6.2)** Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM

Propriétés	Métal: Ti-6Al-4V	Céramique : ZrO2
$E(GPa)$	66.2	244.27
$\nu$	0.3	0.3
$\alpha(10^{-6} / K)$	10.3	12.766

Le facteur de correction de cisaillement pour la théorie FSDPT est pris égal à 5/6. Pour la température linéaire et non linéaire qui augmente à travers l'épaisseur, nous avons pris comme valeur de température de la face supérieure  $T_i = 25^\circ\text{C}$ .

La température initiale est  $T_i$ . La température augmente d'une manière uniforme pour atteindre une valeur finale de température  $T_f$  pour la quelle la plaque flambe. La variation de température est  $\Delta T = T_f - T_i$ . La charge critique de flambement est donnée par l'équation (4.31).

Pour les plaques sandwich fonctionnellement graduées soumise à un chargement non uniforme, La température est supposée être varié linéairement à travers l'épaisseur selon l'équation (4.32).

La corrélation entre la présente théorie [Abdelhak, 2016(b)] et les différentes théories des plaques à savoir la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (TSDPT, SSDPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT) et la théorie classique des plaques (CPT) est illustrée dans les tableaux (6.3-6.7). Ces tableaux donnent l'effet de l'indice de puissance « k », l'effet du rapport (a/b) et (a/h), et le nombre des couches sur la charge critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich en FGM sous une élévation de température uniforme travers l'épaisseur avec des conditions aux limites d'une plaque encastree et simplement appuyée sur les quatre bords (SSSS et CCCC). Il est clair que les résultats du présent modèle sont identiques aux autres, ce qui confirme la grande précision de la présente formulation.

Les tableaux (6.3-6.5) présentent les valeurs de la charge critique de flambement  $T_{cr}$  de la plaque sandwich simplement appuyée en FGM soumise à une température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Les valeurs de  $T_{cr}$  considérées sont pour des indices de puissance  $k = 0.2, 0.5, 1, 2, 5$  et  $10$ , et pour différent types de plaques sandwich symétrique en FGM. Il est montré à travers ces résultats que la température critique de flambement  $T_{cr}$  augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des couches et particulièrement pour les valeurs de  $k > 1$ .

Pour les différentes valeurs du paramètre d'homogénéité  $k$ , les valeurs de température critique de flambement sont entre ceux des plaques en céramique ( $\text{ZrO}_2$ ) et en métal (Ti-6Al-4V). Il est intéressant de noter que les températures de flambement critiques obtenues par la théorie CPT sont sensiblement plus grandes que les valeurs obtenues par les théories de déformation de cisaillement à ordre élevé.

**Tableau (6.3)** Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ , avec ( $a/h=5$ ).

$k$	Théorie	$T_{cr}$			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	3-1-3
0	CPT [ Bourada, 2012]	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470
	FSDPT [ Bourada, 2012]	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493
	SSDPT [ Bourada, 2012]	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775
	TSDPT [ Bourada, 2012]	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	Présente	3.23654	3.23654	3.23654	3.23654
0.2	CPT	3.66606	3.65640	3.64978	3.65144
	FSDPT	3.04858	3.03637	3.03394	3.03603
	SSDPT	3.07198	3.05591	3.05598	3.05875
	TSDPT	3.07042	3.05484	3.05461	3.05729
	Présente	3.07039	3.05484	3.05458	3.05725
0.5	CPT	3.34559	3.31343	3.30066	3.30593
	FSDPT	2.83507	2.80230	2.79675	2.80218
	SSDPT	2.87277	2.83331	2.83194	2.83855
	TSDPT	2.87074	2.83224	2.83030	2.83673
	Présente	2.87074	2.83223	2.83029	2.83673
1	CPT	3.06734	2.96299	2.95538	2.97216
	FSDPT	2.64222	2.55161	2.55053	2.56519
	SSDPT	2.69065	2.59015	2.59458	2.61100
	TSDPT	2.68781	2.58882	2.59241	2.60856
	Présente	2.68781	2.58883	2.59241	2.60855
2	CPT	2.96200	2.64806	2.68016	2.72994
	FSDPT	2.57355	2.31737	2.34734	2.38823
	SSDPT	2.63460	2.36196	2.39953	2.44337
	TSDPT	2.63018	2.36000	2.39637	2.43977
	Présente	2.63019	2.35999	2.39637	2.43977
5	CPT	3.32950	2.44274	2.59922	2.73600
	FSDPT	2.86226	2.16069	2.28926	2.39882
	SSDPT	2.94205	2.21327	2.35401	2.46905
	TSDPT	2.93446	2.21009	2.34898	2.46321
	Présente	2.93443	2.21008	2.34899	2.46321
10	CPT	3.82441	2.41650	2.68184	2.89384
	FSDPT	3.23289	2.14099	2.35529	2.52271
	SSDPT	3.31230	2.20150	2.42733	2.60199
	TSDPT	3.30340	2.19469	2.42186	2.59474
	Présente	3.30340	2.19469	2.42186	2.59476



**Tableau (6.4)** Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance, avec ( $a/h=5$ ).

$k$	Théorie	$T_{cr}$			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	3-1-3
0	CPT [ Bourada, 2012]	7.87940	7.87940	7.87940	7.87940
	FSDPT [ Bourada, 2012]	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986
	SSDPT [ Bourada, 2012]	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550
	TSDPT [ Bourada, 2012]	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305
	Présente	6.42307	6.42307	6.42307	6.42307
0.2	CPT	7.28211	7.26279	7.24955	7.25287
	FSDPT	6.04716	6.02273	6.01789	6.02207
	SSDPT	6.09396	6.06183	6.06197	6.06751
	TSDPT	6.09084	6.05968	6.05922	6.06459
	Présente	6.09084	6.05969	6.05922	6.06457
0.5	CPT	6.64118	6.57686	6.55131	6.56187
	FSDPT	5.62014	5.55460	5.54350	5.55435
	SSDPT	5.69554	5.61663	5.61389	5.62710
	TSDPT	5.69148	5.61449	5.61059	5.62346
	Présente	5.69144	5.61447	5.61061	5.62347
1	CPT	6.08468	5.87599	5.86076	5.89431
	FSDPT	5.23443	5.05323	5.05105	5.08038
	SSDPT	5.33130	5.13030	5.13918	5.17201
	TSDPT	5.32562	5.12765	5.13482	5.16711
	Présente	5.32566	5.12762	5.13484	5.16709
2	CPT	5.87400	5.24612	5.31032	5.40989
	FSDPT	5.09711	4.58475	4.64468	4.72645
	SSDPT	5.21920	4.67392	4.74908	4.83673
	TSDPT	5.21036	4.66999	4.74275	4.82954
	Présente	5.21039	4.66998	4.74277	4.82954
5	CPT	6.60901	4.83549	5.14843	5.42200
	FSDPT	5.67452	4.27139	4.52851	4.74763
	SSDPT	5.83411	4.37654	4.65805	4.88811
	TSDPT	5.81891	4.37017	4.64797	4.87641
	Présente	5.81891	4.37019	4.64795	4.87641
10	CPT	7.59882	4.78299	5.31369	5.73769
	FSDPT	6.41578	4.23198	4.66058	4.99542
	SSDPT	6.57459	4.35224	4.80638	5.15396
	TSDPT	6.55680	4.33937	4.79372	5.13948
	Présente	6.55682	4.33937	4.79372	5.13948

**Tableau (6.5)** Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation non linéaire de température avec ( $\gamma=5$ ,  $a/h=5$ )

$k$	Théorie	$T_{cr}$			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	3-1-3
0	CPT [ Bourada, 2012]	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820
	FSDPT [ Bourada, 2012]	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957
	SSDPT [ Bourada, 2012]	19.27651	19.27651	19.27651	19.27651
	TSDPT [ Bourada, 2012]	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915
	Présente	19.26904	19.26904	19.26904	19.26904
0.2	CPT	24.58692	24.34093	24.43703	24.47887
	FSDPT	20.41729	20.18492	20.28528	20.32483
	SSDPT	20.57531	20.31595	20.43388	20.47819
	TSDPT	20.56479	20.30876	20.42463	20.46833
	Présente	20.56459	20.30887	20.42463	20.46807
0.5	CPT	25.21986	24.74530	24.91598	24.99617
	FSDPT	21.34246	20.89907	21.08307	21.15824
	SSDPT	21.62878	21.13244	21.35073	21.43534
	TSDPT	21.61337	21.12438	21.33822	21.42148
	Présente	21.61331	21.12453	21.33821	21.42153
1	CPT	25.60494	24.85771	25.09061	25.21549
	FSDPT	22.02700	21.37713	21.62417	21.73355
	SSDPT	22.43462	21.70318	22.00140	22.12553
	TSDPT	22.41074	21.69196	21.98279	22.10459
	Présente	22.41079	21.69199	21.98269	22.10458
2	CPT	25.96247	24.69501	25.02775	25.23797
	FSDPT	22.52869	21.58175	21.89055	22.04964
	SSDPT	23.06831	22.00152	22.38252	22.56412
	TSDPT	23.02926	21.98304	22.35275	22.53055
	Présente	23.02926	21.98310	22.35272	22.53058
5	CPT	26.92893	24.41235	25.04991	25.47341
	FSDPT	23.12129	21.56445	22.03367	22.30513
	SSDPT	23.77153	22.09533	22.66384	22.96510
	TSDPT	23.70963	22.06317	22.61489	22.91015
	Présente	23.70956	22.06303	22.61498	22.91029
10	CPT	27.82720	24.36712	25.28770	25.87769
	FSDPT	23.49484	21.55996	22.17958	22.52996
	SSDPT	24.07633	22.17208	22.86373	23.24502
	TSDPT	24.01127	22.10708	22.81317	23.17972
	Présente	24.01122	22.10699	22.81307	23.17970

Les tableaux (6.6) et (6.7) présentent les valeurs de La charge critique de flambement  $T_{cr}$  pour une plaques sandwich encastree de type (1-1-1) soumise à un chargement non linéaire à travers l'épaisseur, en fonction du rapport «  $a/b$  » et pour différentes valeur de l'indice de puissance «  $k$  » et «  $\gamma$  ».

Ces tableaux indiquent que nos résultats sont très satisfaisants.

**Tableau (6.6)** Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich encastrée de type (1-1-1) sous une variation non linéaire de température pour différentes valeurs de  $k$  et  $\gamma$  et le rapport ( $a/b$ ) avec ( $a/h=10$ )

	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
$k = 0$	6.8196	13.6392	25.0079	16.1553	32.3196	59.2291	26.3366	52.6613	96.6074
$k = 0.5$	6.2284	14.7407	32.3644	15.4609	36.5878	80.3265	26.5299	62.8141	137.8929
$k = 1$	5.8065	15.0311	35.9797	14.7528	38.1915	91.4186	26.0190	67.3533	161.2391
$k = 1.5$	5.5465	15.1145	37.5954	14.2867	38.9263	96.8358	25.6283	69.8179	173.6483
$k = 2$	5.3839	15.1332	38.2026	13.9879	39.3158	99.2407	25.3514	71.2838	179.9581
$k = 2.5$	5.2799	15.1335	38.3353	13.7952	39.5356	100.1528	25.1872	72.1845	182.8339
$k = 3$	5.2118	15.1281	38.2581	13.6705	39.6814	100.3539	25.0816	72.7937	184.0739
$k = 3.5$	5.1659	15.1218	38.0957	13.5884	39.7844	100.2058	25.0196	73.2352	184.5526
$k = 5$	5.0980	15.1124	36.4154	13.4757	39.9522	99.2061	24.9784	74.0240	183.7963

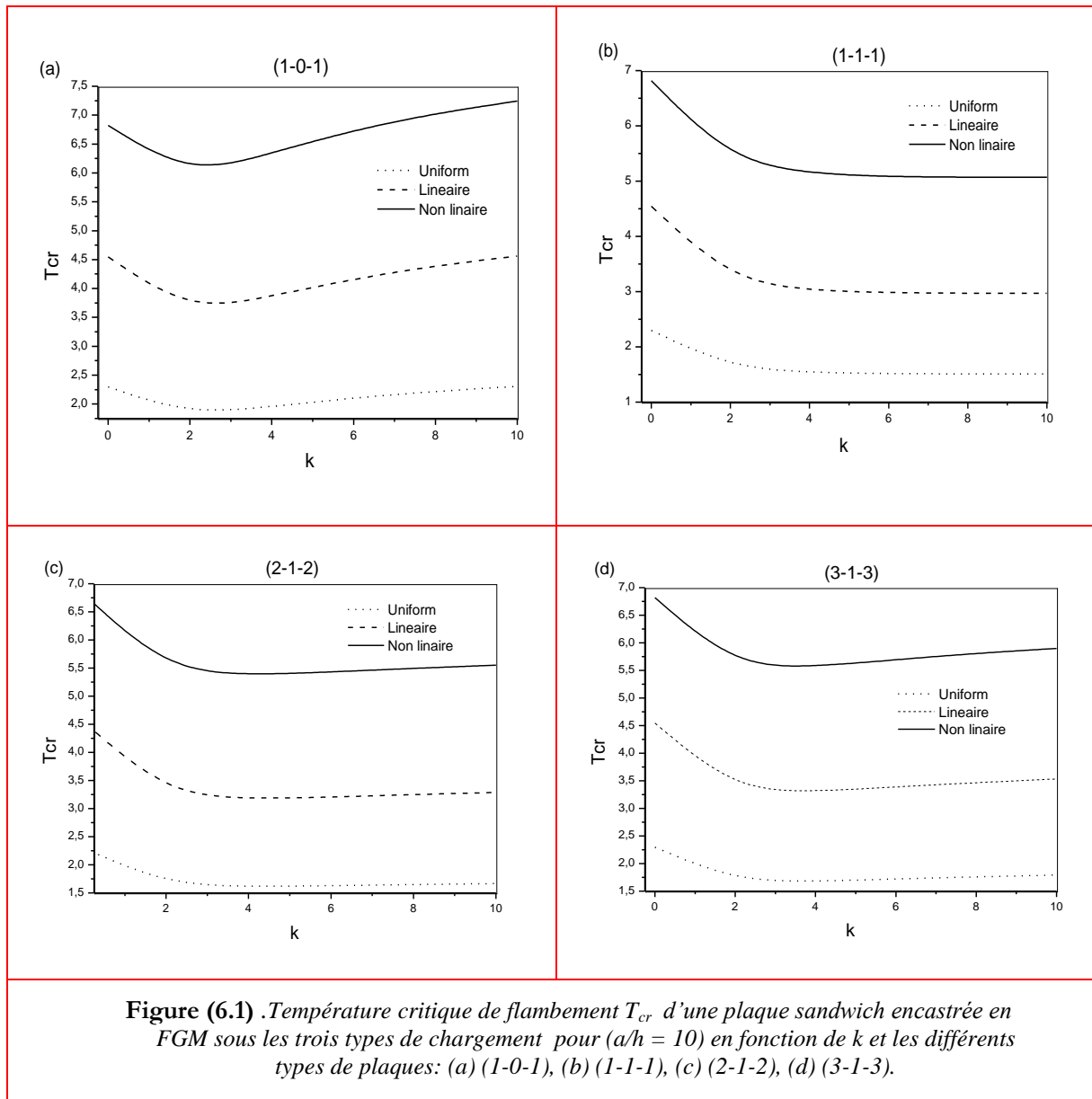
**Tableau (6.7)** Température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich encastrée de type (1-1-1) sous une variation non linéaire de température pour différentes valeurs de  $k$  et  $\gamma$  et le rapport ( $a/b$ ) avec ( $a/h=20$ )

	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
$k = 0$	1.8354	3.6708	6.7296	5.1898	10.3796	19.0323	10.4051	20.8102	38.0932
$k = 0.5$	1.6278	3.8528	8.4596	4.6995	11.1292	24.4312	9.6656	22.8458	50.3484
$k = 1$	1.4935	3.8682	9.2605	4.3659	11.3101	27.0502	9.1152	23.5889	56.4331
$k = 1.5$	1.4143	3.8546	9.5870	4.1587	11.3284	28.1749	8.7582	23.8403	59.3164
$k = 2$	1.3651	3.8358	9.6858	4.0294	11.3232	28.5933	8.5180	23.9319	60.4205
$k = 2.5$	1.3334	3.8214	9.6812	3.9482	11.3178	28.6707	8.3867	23.9810	60.8417
$k = 3$	1.3126	3.8110	9.6367	3.8954	11.3039	28.5818	8.2878	24.0388	60.6596
$k = 3.5$	1.2988	3.8017	9.5778	3.8607	11.2951	28.4453	8.2085	24.0229	60.6473
$k = 5$	1.2777	3.7880	9.4059	3.8061	11.2766	27.9945	8.1192	24.0628	59.6594

A partir des résultats obtenus, On peut remarquer que, comme l'indice de puissance augmente, la température critique de flambement diminue pour atteindre des valeurs plus faibles dans le cas où  $\gamma = 2$ . Pour  $\gamma = 5$  ou 10, lorsque l'indice de puissance augmente, la température critique de flambement augmente pour atteindre des valeurs plus grandes, puis diminue. On constate que  $T_{cr}$  augmente lorsque que l'indice de la non-linéarité augmente.

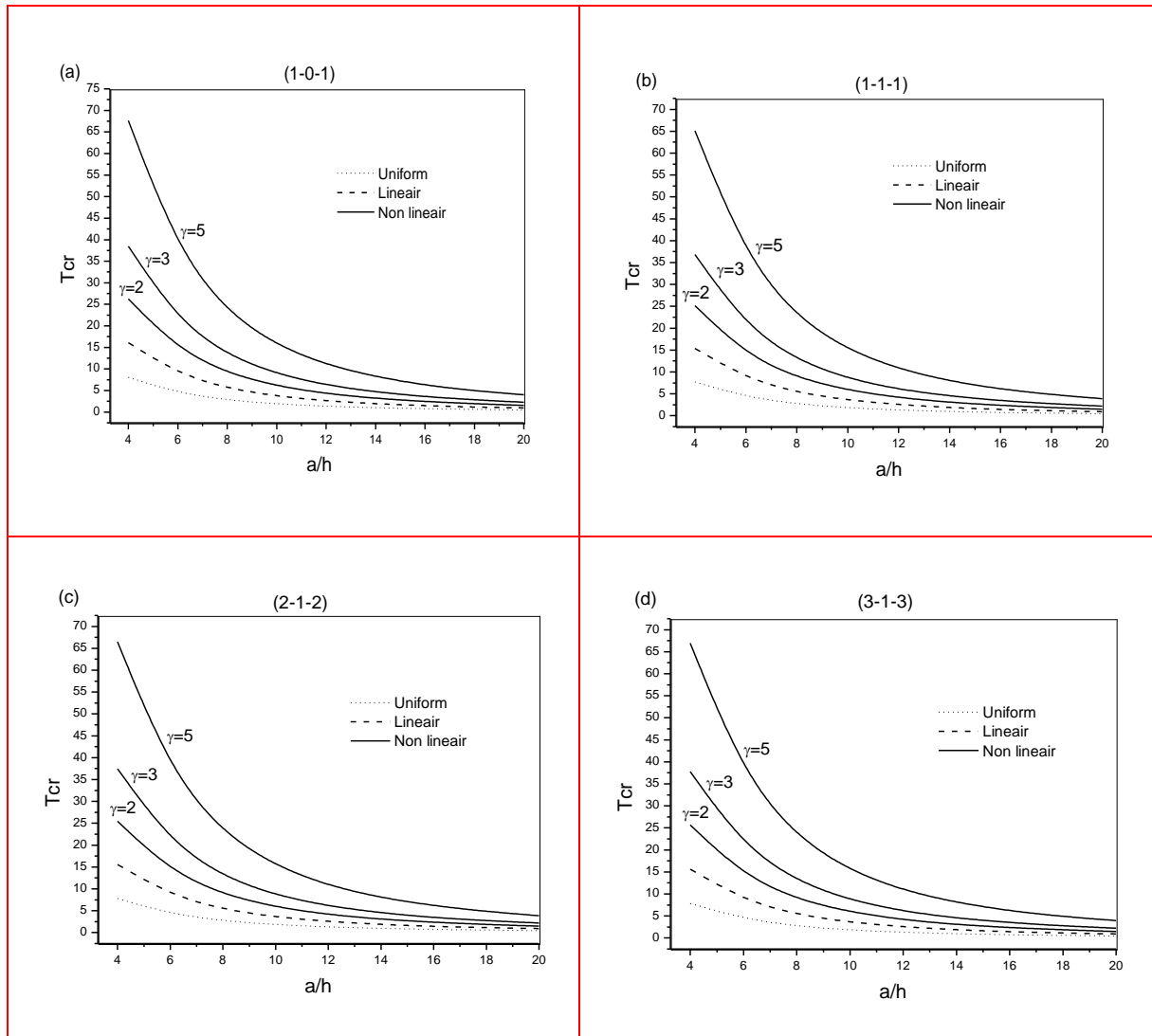
La figure (6.1) montre l'effet de l'indice de puissance sur la température critique de flambement  $T_{cr}$  pour les différents types de plaques sandwich carrées encastrées sous une variation uniforme, linéaire et non linéaire de température à travers l'épaisseur en utilisant la présente théorie raffinée à quatre variables. Il est clair que la température critique de flambement pour les plaques sous une variation de température non linéaire est supérieure à

celui des plaques soumise à une température uniforme. Alors que pour les plaques sous une température linéaire,  $T_{cr}$  est intermédiaire entre les deux cas précédents. Il est en outre observé que, pour la plaque sans cœur, la température critique de flambement décroît rapidement pour atteindre des valeurs minimales, puis augmente graduellement au fur et à mesure que le paramètre d'inhomogénéité  $k$  augmente comme montrée le cas (a).



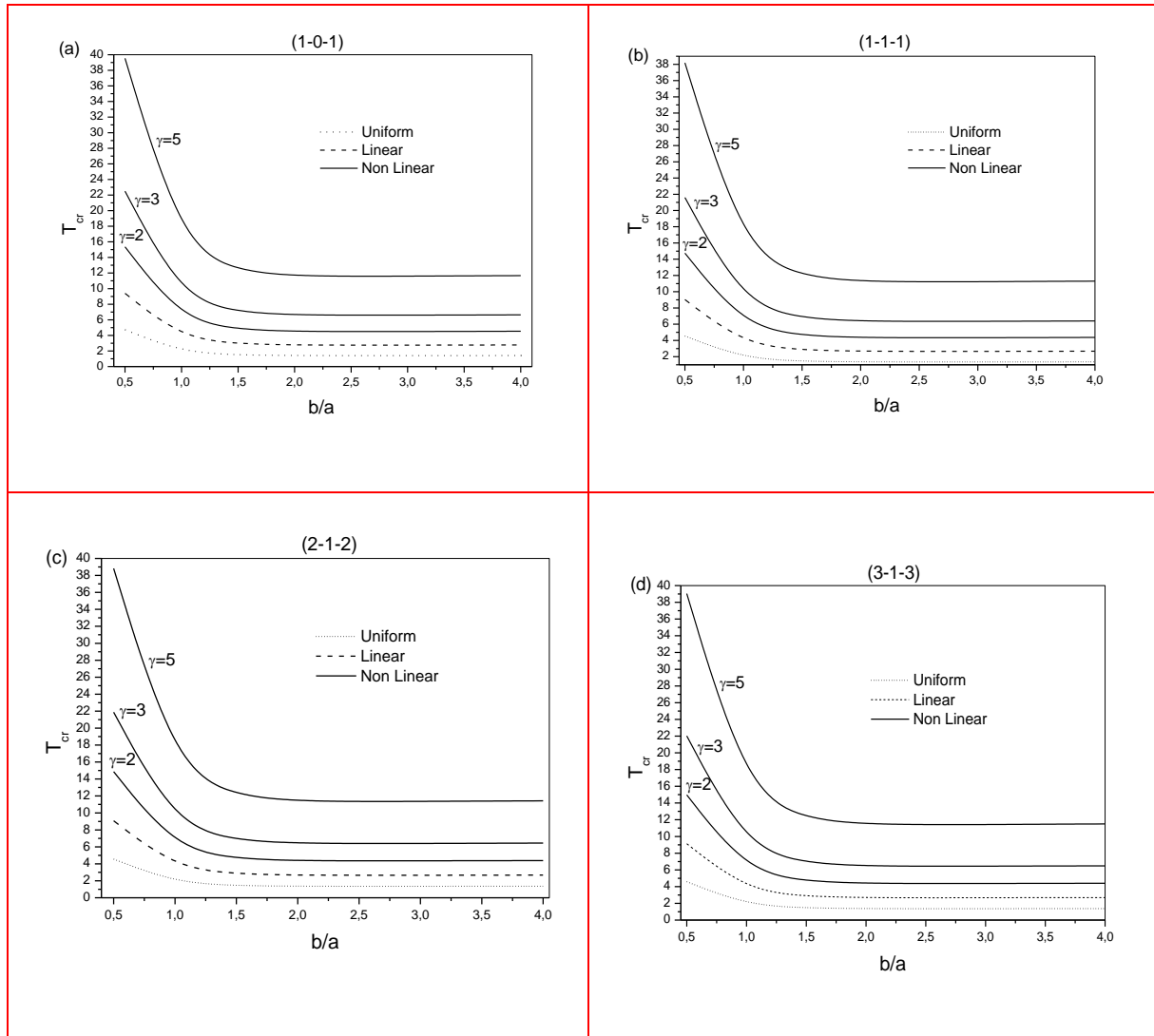
L'effet du rapport ( $a/h$ ) sur la variation des températures critiques  $T_{cr}$  des plaques sandwich carrées encastrées soumises à différents types de chargement thermiques sont présentés dans la figure (6.2). On remarque que la température critique diminue de façon monotone lorsque le rapport ( $a/h$ ) augmente. On notera que les températures critiques de la plaque sous un chargement uniforme est inférieure à celle de la plaque sous le chargement

linéaire et celle-ci est inférieure à celle de la plaque sous le chargement non linéaire. En outre, on constate que  $T_{cr}$  augmente lorsque le paramètre de la non-linéarité  $\gamma$  augmente.



**Figure (6.2) :** Température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de  $(a/h)$  d'une plaque sandwich carrée encadrée en FGM sous les trois types de chargement pour  $k=1$  et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3).

La figure 6.3 montre l'effet du rapport  $b/a$  sur la charge critique de flambement  $T_{cr}$  pour des plaques sandwich encadrées sous les différents types de chargement. Il est clair, et quel que soit le type de chargement sollicité la plaque, que la charge critique diminue avec l'augmentation du rapport  $b/a$ . On remarque aussi que la charge  $T_{cr}$  augmente lorsque le paramètre de non-linéarité  $\gamma$  augmente.



**Figure (6.3)** .Température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de  $(b/a)$  d'une plaque sandwich encadrée en FGM sous les trois types de chargement pour  $(k=1, a/h=10)$  et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3).

### 6.3 Flambement mécanique des plaques sandwich en FGM avec diverses conditions aux bords

Dans cette étude paramétrique et pour démontrer la fiabilité de la théorie proposée [Abdelhak.Z, 2016(a)], l'approche générale décrite dans les sections précédentes pour le flambement mécanique de la plaque sandwich en FGM avec diverses conditions aux limites (FCFC, CCCC, CSCS et SSSS) a été illustrée par des exemples numériques.

Pour la plaque sandwich étudiée, Les propriétés matérielles utilisées dans cette partie sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau (6.8) Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM

Propriétés	Métal: Al	Céramique : Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
$E(GPa)$	70	380
$\nu$	0.3	0.3

Les résultats numériques sont présentés en termes des charges de flambement adimensionnelles défini comme :  $\bar{N} = \frac{N a^2}{100 h^3 E_0}$

#### 6.3.1 Validation des résultats

Afin de démontrer la validité de présente théorie raffinée des plaques à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de la présente théorie [Abdelhak.Z, 2016(a)] et ceux obtenus par El Meiche et al [El Meiche, 2011] et Thai [Thai, 2014]. Comme indiqué dans les tableaux (6.9) et (6.10), on peut voir que les résultats de cette théorie sont en bon accord avec les résultats publiés pour des plaques carrées en FGM simplement appuyées soumise à une charge de compression uniaxiale et biaxiale.

À partir des résultats obtenus, On constate que la charge critique de flambement est inversement proportionnelle à l'indice d'homogénéité du matériau, qui est due à la diminution de la quantité de céramique et l'augmentation de métal ce qui influe sur la rigidité de la plaque sandwich. En général, les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes valeurs des charges de flambement. La configuration 1-2-1 a donnée la grande valeur de la charge critique de flambement et la petite charge est obtenue par la configuration 1-0-1.

**Tableau (6.9)** Charge dimensionnelle de flambement  $\bar{N}$  des plaques sandwichs carrées simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale ( $\gamma_1 = -1$ ,  $\gamma_2 = 0$   $a/h = 10$ )

k	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT[ <b>Thai, 2014</b> ]	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055
	NFSDT[ <b>El Meiche, 2011</b> ]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	Présente	13.0093	13.0093	13.0093	13.0093	13.0093
0.5	HSDT	7.3638	7.9405	8.4365	8.8103	9.2176
	NFSDT	7.3634	7.9403	8.4361	8.8095	9.2162
	Présente	7.3677	7.9438	8.4386	8.8253	9.2175
1	HSDT	5.1663	5.8394	6.4645	6.9495	7.5072
	NFSDT	5.1648	5.8387	6.4641	6.9485	7.5056
	Présente	5.1602	5.8427	6.4665	6.9809	7.5066
5	HSDT	2.6568	3.0414	3.5787	4.1116	4.7346
	NFSDT	2.6415	3.0282	3.5710	4.1024	4.7305
	Présente	2.6621	3.0456	3.5818	4.1856	4.7352
10	HSDT	2.4857	2.7450	3.1937	3.7069	4.2796
	NFSDT	2.4666	2.7223	3.1795	3.6901	4.2728
	Présente	2.4916	2.7498	3.1973	3.78793	4.2808

**Tableau (6.10)** Charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques sandwichs carrées simplement appuyée en FGM soumise à une compression Biaxiale ( $\gamma_1 = -1$ ,  $\gamma_2 = -1$ ,  $a/h = 10$ .)

k	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT[ <b>Thai, 2014</b> ]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	NFSDT[ <b>El Meiche, 2011</b> ]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	Présente	6.5046	6.5046	6.5046	6.5046	6.5046
0.5	HSDT	3.6819	3.9702	4.2182	4.4051	4.6088
	NFSDT	3.6817	3.9702	4.2181	4.4047	4.6081
	Présente	3.6839	3.9719	4.2193	4.4126	4.6088
1	HSDT	2.5832	2.9197	3.2323	3.4748	3.7536
	NFSDT	2.5824	2.9193	3.2320	3.4742	3.7528
	Présente	2.5851	2.9214	3.2332	3.4904	3.7533
5	HSDT	1.3284	1.5207	1.7894	2.0558	2.3673
	NFSDT	1.3208	1.5141	1.7855	2.0512	2.3652
	Présente	1.3310	1.5228	1.7909	2.0928	2.3676
10	HSDT	1.2429	1.3725	1.5969	1.8534	2.1398
	NFSDT	1.2333	1.3612	1.5897	1.8450	2.1364
	Présente	1.2458	1.3749	1.5986	1.8939	2.1404

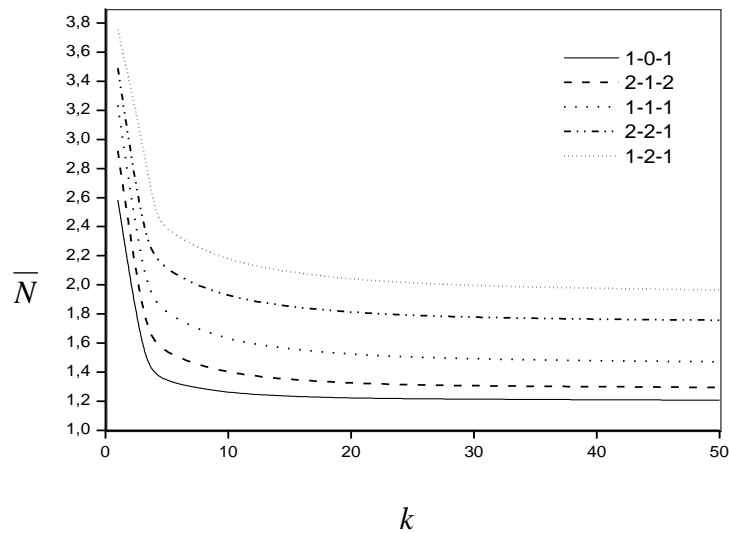
L'influence de type d'appuis sur la charge critique de flambement des plaques soumises à une compression biaxiale est montrée dans le tableau 6.11. On remarque que, les plaques sandwichs simplement appuyées donne la plus faible valeur par rapports aux autres conditions aux bords ce qui signifié que le changement de type d'appuis influe sur la réponse mécanique en flambement de la plaque sandwich en FGM.



**Tableau (6.11)** Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM avec diverses conditions aux bords,  $a/h = 10$ .

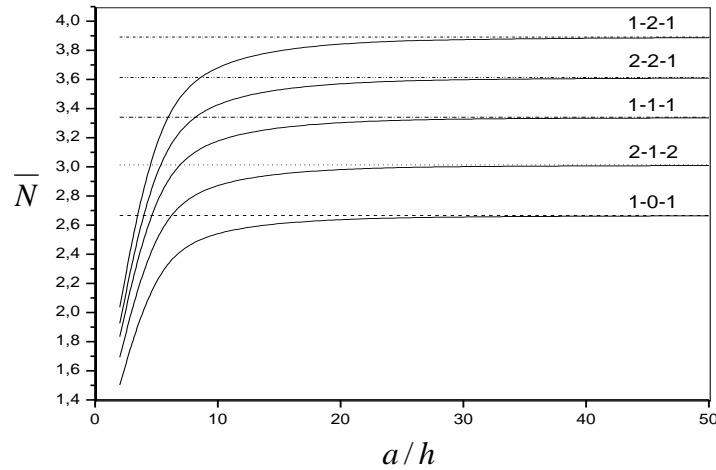
Condition aux limites	k	Configuration des Plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	6.5046	6.5046	6.5046	6.5046	6.5046
	0.5	3.6839	3.9719	4.2193	4.4126	4.6088
	1	2.5851	2.9214	3.2332	3.4904	3.7533
	2	1.7797	2.0833	2.4052	2.6995	2.9935
	5	1.3310	1.5228	1.7909	2.0928	2.3676
	10	1.2458	1.3749	1.5986	1.8939	2.1404
CSCS	0	11.9569	11.9569	11.9569	11.9569	11.9569
	0.5	6.8664	7.4006	7.8535	8.2187	8.5600
	1	4.8486	5.4784	6.0548	6.5607	7.0068
	2	3.3539	3.9294	4.5298	5.1349	5.6160
	5	2.5085	2.8840	3.3889	4.0383	4.4621
	10	2.3367	2.6054	3.0297	3.6764	4.0412
CCCC	0	15.9404	15.9404	15.9404	15.9404	15.9404
	0.5	9.2481	9.9649	10.5667	11.0326	11.4988
	1	6.5612	7.4124	8.1837	8.8220	9.4482
	2	4.5549	5.3400	6.1489	6.9016	7.6011
	5	3.4068	3.9315	4.6170	5.4105	6.0602
	10	3.1619	3.5533	4.1323	4.9161	5.4961
FCFC	0	18.6306	18.6306	18.6306	18.6306	18.6306
	0.5	10.8843	11.7258	12.4273	12.9730	13.5088
	1	7.7469	8.7513	9.6548	10.4128	11.1287
	2	5.3917	6.3238	7.2760	8.1828	8.9761
	5	4.0326	4.6659	5.4771	6.4469	7.1736
	10	3.7335	4.2184	4.9061	5.8695	6.5120

La figure (6.4) représente la variation de la charge critique de flambement adimensionnelle des différentes configurations des plaques sandwichs sous une charge de compression biaxiale en fonction de l'indice de fraction volumique  $k$ . Le rapport d'épaisseur de la plaque  $a/h$  est pris égal à 10. On peut voir que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance  $k$  conduit à une réduction de la charge de flambement. Cela est dû au fait que les grandes valeurs de l'indice de puissance  $k$  correspondent à un faible pourcentage de la quantité de céramique dans la plaque sandwich. Autrement dit, l'augmentation de l'indice de puissance  $k$  réduit la rigidité de la plaque en raison de la grande quantité du métal par rapport à la quantité de la céramique, et, par conséquent, une réduction de la charge de critique de flambement.



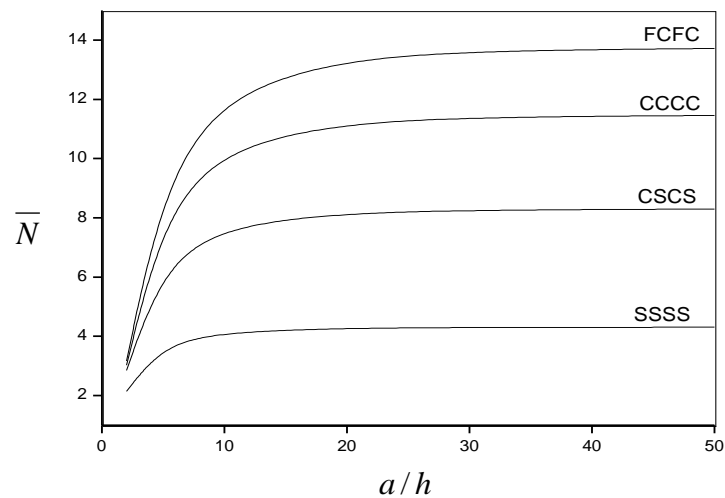
**Figure (6.4)** Effet de l'indice de puissance  $k$  sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées sous chargement de compression biaxial ( $\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a = 10h$ ).

Afin de voir l'effet de la déformation de cisaillement sur la charge critique de flambement, la figure 6.5 représente la variation de la charge critique de flambement des plaques sandwich en FGM soumise à une compression biaxiale en fonction du rapport  $a/h$  pour un indice de puissance  $k=1$ . La charge critique adimensionnelle de flambement est obtenue pour la théorie raffinée et la théorie CPT. Comme la théorie classique de plaque CPT néglige les déformations de cisaillement, elle surestime la charge critique de flambement. La différence entre la présente théorie et la CPT est significative pour les plaques épaisses et modérément épaisses, mais négligeable pour les plaques minces  $a/h > 20$ . Ceci signifie que la prise en considération des déformations de cisaillement réduit la charge de flambement, et l'effet de déformations de cisaillement est considérable pour les plaques épaisses et négligeables pour les plaques minces.



**Figure (6.5)** Effet des déformations de cisaillement sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées soumise à une compression biaxiale  $k = 1$

L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement est représenté sur la figure 6.6. On observe que les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour les conditions aux limites CSCS et CCCC, les résultats prennent des valeurs intermédiaires.



**Figure (6.6)** Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement  $\bar{N}$  de la plaque (1-3-1) sous chargement de compression biaxiale  $k = 1$

## 6.4 Conclusion

*Dans ce chapitre, la stabilité au flambement thermique et mécanique des plaques sandwich fonctionnellement graduées sujettes aux divers chargements a été étudiée sur la base de la théorie raffinée de déformation de cisaillement. Par la division du déplacement transversal en deux composantes une de flexion et l'autre de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations d'équilibre a été réduit à quatre.*

*Une très bonne corrélation a été trouvée entre les résultats de la présente méthode et ceux de la littérature. Plusieurs études paramétriques ont été menées pour monter les effets des différents paramètres sur la charge critique de flambement.*

*Finalement, il est à noter que la solution proposée est non seulement fiable mais aussi une approche facile pour simuler le comportement au flambement des plaques FGM avec diverses conditions aux bords.*

## **Conclusion Générale**

---

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans une suite logique des travaux précédents menés au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'UDL de S.B.A

Dans le cadre de cette étude, une théorie raffinée de déformation de cisaillement des plaques sandwich est utilisée pour étudier le flambement thermique et mécanique des plaques sandwich fonctionnellement graduées avec diverses conditions aux limites. La théorie ne contient que quatre déplacements inconnus et satisfait les conditions de nullité des contraintes sur les bords.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de comportement des plaques sandwich en FGM au flambement sous diverses conditions d'appuis.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons utilisé un modèle analytique basé sur la théorie raffinée à quatre variables avec une fonction de cisaillement parabolique, pour l'analyse de flambement thermique des plaques sandwichs en FGM sous divers chargements thermiques uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur avec diverses conditions aux limites. L'étude paramétrique menée a démontré que la géométrie de la plaque représentée par les rapports d'épaisseur, le type de la charge thermique, le paramètre de non linéarité thermique ont une très grande influence sur la charge critique de flambement. Pour valider ce modèle, nous avons comparé les résultats obtenus aux résultats des autres modèles proposés dans la littérature.

Deuxièmement, nous avons étudié le comportement du flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords, en utilisant une fonction de cisaillement exponentielle. Dans cette étude, les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de la plaque seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibre ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie des travaux virtuels. La méthode des variables séparées est utilisée pour la résolution des équations d'équilibre. Les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant un système de valeur propre. Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé avec d'autres issues

de la littérature. Toutes les études comparatives ont démontrées que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut déduire les points suivants :

- les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes charges critiques de flambement ;
- les charges critiques de flambement diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau qui est due à la diminution du pourcentage de céramique et l'augmentation de la quantité de métal, et aussi de l'épaisseur du cœur ;
- la charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}$  augmente progressivement avec le rapport  $a/h$  de la plaque ;
- La charge critique de flambement uniaxiale est le double de celui de la charge biaxiale dans le cas des plaques simplement appuyées et encastré sur les quatre bords quelle que soit la valeur de l'indice de puissance  $k$  de la fraction volumique ;
- les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour la plaque sandwich FGM avec des conditions aux limites intermédiaires, les résultats prennent des valeurs intermédiaires ;
- la prise en considération des déformations de cisaillement réduit la charge de flambement, et l'effet de déformations de cisaillement est considérable pour les plaques épaisses et négligeables pour les plaques minces.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures **FGM** sous la combinaison des différents types de chargement (vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des plaques sandwich en FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En fin, On espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient de propriétés *FGM* et précisément leurs comportement vis-à-vis le flambement thermique et mécanique.



## Bibliographie

---

- [Abdelhak, 2016.a] Abdelhak.z, Hassaine Daouadji.T, Adda Bedia.E, Hadji.L & Khelifa.z « *Analysis of buckling response of functionally graded sandwich plates using a refined shear deformation theory*», Wind and Structures, Vol. 22, No. 3 (2016) 291-305;
- [Abdelhak, 2016.b] Abdelhak.z, Hassaine Daouadji.T, Adda Bedia.E, Hadji.L «*Thermal buckling response of functionally Graded sandwich plates with clamped boundary Conditions*», Smart Structures and Systems, Vol.18 No.2, 2016. (Apparaître);
- [Abdelhak, 2015] Abdelhak, T.H. Daouadji, L. Hadji et E.A Bedia « *Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory* » Advances in Materials Research, Vol.4, No.1 (2015) 31-44, ISSN: 2234-0912, <http://www.technopress.org/?page=container&journal=amr&volume=4&num=1>.
- [A.Chabot, 1997] A. Chabot «*Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches* ». PhD thesis, ENPC, 1997 ;
- [Adim, 2016] Adim.B, T.H. Daouadji, Aberezak Rabahi , «*A simple higher order shear deformation theory for mechanical behavior of laminated composite plates*», Int J Adv Struct Eng DOI 10.1007/s40091-016-0109-x, May, 2016;
- [Afaq, 2003.a] Afaq. K.S, « *Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord* ». PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, (2003);
- [Afaq, 2003.b] Afaq, M. Karama & S. Mistou. «*Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches*». In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ait Amar, 2014] Ait Amar Meziane, A. HadjHenni, and A. Tounsi, «*An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates under Various Boundary Conditions*», Journal of Sandwich Structures and Materials, vol.16, no, 3, pp. 293–318, 2014.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, « *Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory*». Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121, 2010 ;
- [Ait Atmane, 2011] Ait Atmane. «*Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement* », 2011 ;
- [Ambartsumian, 1969] Ambartsumian. S.A, «*Theory of anisotropic plate*». Technomic Publishing Co, (1969);

- [Bao, 1995] Bao. G, Wang. L. «*Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings*», Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, (1995).
- [Baron, 2008] Baron. C, Naili. S. «*Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide*», Compte Rendue Mécanique ; 336 (9) : 722–730, (2008).
- [Benachour, 2011] Benachour, A., HassaineDaouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A. «*A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient*»Composites: Part B 42, 1386–1394, (2011).
- [Bessaim, 2013] Bessaim, M. S. A. Houari, A. Tounsi, S. R. Mahmoud, E. A. Adda Bedia, «*A New Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Functionally Graded Isotropic Face Sheets*», Journal of Sandwich Structure Materials, vol. 15, no. 6, pp. 671–703, 2013.
- [Boch, 1986] Boch., T. Chartier., M. Huttepain, «*Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites*, J. Am. Ceram». Soc; 69 ( 8):191-192,1986.
- [Bodaghi, 2010] Bodaghi, M. et Saidi, A.R, «*Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory*», Applied Mathematical Modelling, 3659–3673, (2010).
- [Bouderba, 2013] Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A., «*Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations*», Steel and Composite Structures, vol. 14, no. 1, pp. 85–104, 2013.
- [Bourada, 2012] Bourada.M., A. Tounsi, M. S. Houari, and E. A. Adda Bedia, «*A New Four-Variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates*», Journal of Sandwich Structures and Materials, vol. 14, pp. 5–33, 2012.
- [Carrera, 2000] Carrera.E. «*An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*». Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [Cheng, 2000.a] Cheng ZQ, Batra RC. «*deflection relationships between the homogeneous kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories*». Arch Mech 2000; 52 (1):143–58.
- [Cheng, 2000.b] Cheng ZQ, Batra RC. «*Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates*». J Sound Vib 2000;229(4):879–95
- [Cheng, 2000.c] Cheng ZQ, Batra RC. «*Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate*». Composites: Part B 2000, 31(2):97–106.
- [Cho, 2001] Cho. J. R, D.Y. Ha, «*Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials*», Mater. Sci. Eng., A; 302 (2): 187–196, 2001.



- [Chi, 2003] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. «Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings». Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243,(2003).
- [C. Ossadzow] C. Ossadzow & M. Touratier. «An improved shear-membrane theory for multi-layered shells». Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2.
- [Dau, 2006] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier «C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures». Computers and Structures, 84:1264-1274, (2006).
- [Delale, 1983] Delale. F, Erdogan. F. «The crack problem for a non homogeneous plane». ASME Journal of Applied Mechanics», 50 (3): 609-614, (1983).
- [Draiche, 2014] Draiche, A. Tounsi, and Y. Khalfi, «A Trigonometric Four Variable Plate Theory for Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass», Steel and Composite Structures, vol. 17, no. 1, pp. 69–81, 2014.
- [Drake, 1993] Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H. «Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces», Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", Journal of Applied Physics, 74, 1321-1326, (1993).
- [E.Carrera, 2000] E. Carrera. «An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates». Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [El Meiche, 2011] El Meiche.M , A. Tounsi, N. Ziane , I. Mechab et E. Adda Bedia, «A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate», International Journal of Mechanical Sciences, vol. 53, n° 14, pp. 237-247, 2011.
- [Ferreira, 2006] Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., «Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method», Composite Structures, 75, 593–600, (2006).
- [Finot, 1996] Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S. «Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al 2 O 3 Multi-Layered Material», Materials Science and Engineering, 205, 59-71, (1996).
- [Giannakopoulos, 1995] Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M. «Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients», Acta Metallurgica et Materialia, 43, 1335-1354, (1995).
- [Hassaine Daouadji, 2012] Hassaine Daouadji.T, A. Tounsi, L.Hadji, A.Hadj Henni, E.Adda Bedia, « A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates», Materials Physics and Mechanics, 14 (2012) 110-128, Received: May 11, 2012;
- [Hadji, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. «Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory», Applied Mathematics and Mechanics, 925–942, (2011).
- [Hasani, 2011] Hasani et al, 2011] Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Ehteshami, H., «Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation», Composite Structures, (2011).

- [Hebali, 2014] H. Hebali, A. Tounsi, M. S. A. Houari, A. Bessaim, and E. A. Adda Bedia, «*New Quasi- D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates*», Journal of Engineering Mechanics, vol. 140, pp. 374–383, 2014.
- [Hildebrand, 1949] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, «*Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells*». NACA T. N. N°:1833, (1949).
- [Hill, 2002] Hill, R. et Lin, W. (2002), «*Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material*», Journal of Engineering Materials and Technology, 124, 185-191.
- [Hirai, 1996] Hirai, T. (1996), «*Functional gradient materials", Processing of ceramics*»Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- [Houari , 2011] Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Addabedia, E.A. (2011), «*Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates*», J. Thermal Stresses, 34(4), 315-334.
- [Houari , 2013] Houari, A. Tounsi, and O. A. Beg, «*Thermoelastic Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using a New Higher Order Shear and Normal Deformation Theory*», International Journal of Mechanical Science, vol. 76, pp. 102–111, 2013.
- [Houari , 2011] Houari.S.A, «*Analyse des contraintes thermo-élastiques*» : lois des puissances, 2011.
- [Huang , 2004] Huang, X.-L. and Shen, H.-S., (2004), «*Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments*», International Journal of Solids and Structures, 41, 2403–2427.
- [H.T. Thai, 2014] H.T. Thai, T.-K. Nguyen et T. Vo, «*Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory*» European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 45, pp. 211-225, 2014.
- [Javaheri, 2002.a] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002), «*Thermal buckling of functionally graded plates*», AIAA Journal, 40, 162–9.
- [Javaheri, 2002.b] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002), «*Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory*», J. Therm. Stress., 25(1), 603-625.
- [Javaheri, 2002.c] Javaheri. R and Eslami. M. R (2002), «*Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading*», ZAMM, 82, No. 4, 277-283.
- [J.G. Ren, 1986] J.G. Ren. «*A new theory of laminated plate*». Composite Science and Technology, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [Jian, 1995] Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), «*Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method*», Composites Engineering, (1995), 879–889.
- [Jin, 1996] Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), Journal of Thermal Stresses 19, 317–339.
- [Kant, 2002] Kant, K. Swaminathan, «*Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order*

*refined theory*». Composite. Structure; 56 (4): 329-344, 2002.

- [Kapania, 1989] Kapania & S. Raciti. «*Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates*», Part I: Shear effects and buckling, Volume 27, pages: 923-934, 1989.
- [Karama, 2003] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). «*Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*», Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546.
- [Kassapoglou, 1987] Kassapoglou & P.A. Lagace. «*Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates*». Journal of Composite Materials, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [Kawasaki, 1997] Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), «*Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials*», Composites Part B, Engineering, 29–35.
- [Kettaf, 2013] Kettaf, M. S. A. Houari, M. Benguediab, and A. Tounsi, «*Thermal Buckling of Functionally Graded Sandwich Plates Using a New Hyperbolic Shear Displacement Model*», Steel Composite Structures, vol. 15, no. 4, pp. 399–423, 2013.
- [Khalfi, 2014] Khalfi, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, «*A Refined and Simple Shear Deformation Theory for Thermal Buckling of Solar Functionally Graded Plates on Elastic Foundation*», International Journal of Computational Methods, vol. 11, no. 5, 2014.
- [Klouche, 2014] Klouche Djedid, A. Benachour, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and M. Ameer, «*A norder Four Variable Refined Theory for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Plates*», Steel and Composite Structures, vol. 17, no. 1, pp. 21–46, 2014.
- [Koizumi, 1996] Koizumi, M. (1996), «*FGM activities in Japan*», department of materials chemistry». Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- [Levy, 1899] Levy, M.,(1899), «*Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes*», Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 3, 219–306.
- [Li, 2008] Li, Q., Iu, V.P. and Kou, K.P., (2008), «*Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates*», Journal of Sound and Vibration, 498-515.
- [Lo, 1977] Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977). «*A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's*» .journal of applied mechanics, Vol.44, N° 4, pages 669-676.
- [Matsunaga, 2008] Matsunaga, H., (2008), «*Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory*», Composite Structures, 499–512.
- [M. Di Sciuva, 1987] M. Di Sciuva. «*An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates*». Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [M. Di Sciuva, 1984] M. Di Sciuva. «*A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates*». Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279, 295, 1984.
- [Mechab, 2010] Mechab I, Ait Atmane H, Tounsi A, Belhadj HA, Adda bedia EA. «A

*two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates*». Acta Mech Sin 2010;26(6):941.

- [Merdaci,2011] Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Mechab, I., Hebali, H. and Benyoucef, S. (2011), «*Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates*», Arch. Appl. Mech., 81(11), 1507-1522.
- [Mindlin, 1951] Mindlin. R.D, (1951). «*Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*». Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38.
- [Miyamoto, 1999] Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), «*Functionally Graded Materials Design*». Processing and Applications.
- [M. Karama, 1998] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. «*Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model*». Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [M. Karama, 2003] M. Karama, K. S. Afaq et S. Mistou, «*Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*» Int. J. Solids Structures, vol. 40, n° 16, pp. 1525-1546, 2003.
- [Murthy, 1981] Murthy. M.V.V, (1981). «*An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate*». Rapport technique, NASA.
- [Naghdi, 1957] Naghdi. P. M, (1957). «*On the theory of thin elastic shells*». Quarterly Appl. Math, 14: 369-380.
- [Nedri, 2014] Nedri, N. El Meiche, and A. Tounsi, «*Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory*», Mechanics of Composite Materials, vol. 49, no. 6, pp. 641–650, 2014.
- [Nelson, 1974] Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). «*A refined theory for laminated orthotropic plates*». ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183.
- [N.J Pagano, 1978] N.J Pagano. «*Stress fields in composite laminates*». International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.
- [Noor, 1989] Noor & W. S. Burton. «*Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates*». ApplMech Rev, Volume 42, pages: 1-12, 1989.
- [Öchsner, 2008] Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), «*Cellular and Porous Materials*», WILEY-VCH, 398-417.
- [Pal, 2005] Pal. R, «*New Models for Effective Young's modulus of particulate composites, Part B*»; 36 (6-7): 513–523. 2005.
- [P. Marur, 1999] P. Marur, «*Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials*», Alabama: : Auburn University,1999.
- [Polit, 1997] Polit. O and M. Touratier, (1997). «*A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses*». Composite Structures, 38(1-4):37-44.
- [Praveen ,1998] Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), «*Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates*»,

International Journal of Solids and Structures, 44:76.

- [Qian ,2004] Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., (2004), «*Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method*», Composite: Part B, 685-697.
- [U. Icardi ,2001] U. Icardi. «*Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations*». Composites: Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Uymaz, 2007] Uymaz, B. and Aydogdu, M., (2007), «*Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions*», Composites of Reinforced Plastics and Composites, 26, 1847-1863.
- [Ravichandran, 1995] Ravichandran, K.S. (1995), «*Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System*», Materials Science and Engineering, A-201, 269-276.
- [Reddy, 1987] Reddy, «*A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates*». Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [Reddy, 2000] Reddy, J.N., «*Analysis of functionally graded plates*», International Journal for Numerical Methods in Engineering, (2000), 47, 663–684.
- [Reddy, 1984] Reddy J. N, «*A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*», ASME J. Appl. Mech, vol. 51, n° 14, p. 745–752, 1984.
- [Reddy, 2003] Reddy, J.N. et Chen, Z.Q., «*Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach*», Journal of Engineering Mechanics, (2003), 129, 896–900.
- [Reddy, 1997] Reddy. J.N, (1997). «*Mechanics of Laminated Composites Plates Theory and Analysis*», CRC Press, Boca Raton.
- [Reddy, 1999] Reddy. J.N, (1999). «*Theory and Analysis of Elastic plates*», Taylor & Francis, Philadelphia.
- [Reddy, 2007] Reddy J. N., «*Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*», Boca Raton: CRC Press, 2007.
- [Reissner, 1975] Reissner. E, (1975). «*On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation*», Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502.
- [Reissner, 1945] Reissner.E, (1945). «*The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates*». J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77.
- [Reuter, 1997] Reuter.T, G. J. Dvorak., V. Tvergaard, «*Micromechanical models for graded composite materials*», J. Mech. Phys. Solids; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [Saidi, 2013] Saidi, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and E. A. Adda Bedia, «*Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory*», Steel Composite Structures, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [Samsam Shariat, 2005] Samsam Shariat. B. A, Javaheri. R, and M. R. Eslami (2005), «*Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive*

loading», *Thin-Wall. Struct*, 43, 1020- 1036.

- [Samsam Shariat, 2005] Shariat and M. R. Eslami, «*Buckling of Thick Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal Loads*», *Composite Structures*, vol. 78, pp. 433–439, 2005.
- [Shen, 2009] Shen, H.-S. (2009), «*Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*», New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [Shen, 2002] Shen, H.S, (2002), «*Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments*», *Composite Science and Technology*, 62, 977- 987.
- [Shimpi, 2006.a] Shimpi RP, Patel HG. «*A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis*». *Int J Solids Struct*;43(22):6783–99, 2006.
- [Shimpi, 2006.b] Shimpi RP, Patel HG. «*Free vibrations of plate using two variable refined plate theory*». *J Sound Vib*;296(4–5):979–99, 2006.
- [Shimpi, 2002] Shimpi, R.P. (2002), «*Refined plate theory and its variants*», *AIAA Journal*, 137–146.
- [Sobhy, 2013] Sobhy, «*Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions*», *Composite Structures*, vol. 99, pp. 76–87, 2013.
- [Suresh, 1998] Suresh, S., Mortensen, A. (1998), «*Fundamentals of Functionally Graded Materials*» (IOM Communications Ltd., London).
- [S. Srinivas, 1973] S. Srinivas & A.K. Rao. «*Flexure of thick plates*». *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [Tahani, 2003] Tahani & A. Nosier. «*Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate*». *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [Thai, 2010] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), «*Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory*», *International Journal of Mechanical Sciences*, 626–633.
- [Thai, 2011] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), «*Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory*», *Composite Structures*, 1738–1746.
- [Tounsi, 2013] Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, «*A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates*», *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013.
- [Touratier, 1991] Touratier.M, «*An efficient standard plate theory*». *Engng Sci*, vol. 29, n° 8, pages 901,916, 1991.
- [Vel, 2002] Vel S.S, Batra RC. «*Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates*». *AIAA J* 2002;40(7):1421–33.
- [Vel, 2004] Vel, S.S. et Batra, R.C., «*Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates*», *Journal of Sound and Vibration*, (2004), 703-730.
- [Viet, 2004] Viet.Tung. Nguyen. «*Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques* ». Thèse de doctorat de

l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

- [Whitney,1973] Whitney. J.M, (1973). «*Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads*». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304.
- [Williamson,1993] Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T. (1993) «*Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces*», Part I: Model Description and Geometrical Effects", Journal of Applied Physics, 74, 1310-1320.
- [Wu, 2004] Wu, L., (2004), «*Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate*», Composite Structures, 64, 211–218.
- [Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. «*Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach*», Meccanica , 48:2019–2035, 2013.
- [Yang, 2001] Yang, J. and Shen, H.-S., (2001), «*Dynamic response of initially stressed functionally graded*», Composite Structures, 497-508.
- [Ying, 2009] Ying J, Lü CF, Lim CW. «*3D thermoelasticity solutions for functionally graded thick plates*». J Zhejiang Univ Sci A 2009;10(3):327–36.
- [Ying, 1994] Yin. «*Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/ layer model*». International Journal of Solids and Structures, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [Ying, 2004] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), «*Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*», Acta Materialia, 52, 3535–3543.
- [Yoshihisa, 2004] Yoshihisa Uchida (2004), «*Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*», 39-51-B, Vol. 39-B.
- [Zenkour, 2010] Zenkour et A. N. Alghamdi, «*Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*» Mech. Adv. Mater.Struct., vol. 17, p. 419–432, 2010.
- [Zidi, 2014] Zidi, A. Tounsi, M. S. A., Houari, E. A. Adda Bedia, and O. Anwar Bég, Bending «*Analysis of FGM Plates under Hygro-thermomechanical Loading Using a Four Variable Refined Plate Theory*», Aerospace Science and Technology, vol. 34, pp. 24–34, 2014.
- [Zuiker, 2014] Zuiker J. R., Functionally graded materials, «*choice of micromechanics model and limitations in property variations*», Composites Eng, 5 (7): 807–819, 1995.