

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure des matériaux

Présentée par

Chattibi née El-Haina Fouzia

Sujet de thèse

**Contribution à l'étude du comportement mécanique
des structures composites**

Devant le Jury composé de :

BENACHOUR Abdelkader	MCA	Président	UDL SBA
BENRAHOU Kouider Halim	Pr	Directeur de thèse	UDL SBA
ADDA BEDIA El Abbas	Pr	Examineur	UDL SBA
BENYOUCEF SAMIR	MCA	Examineur	UDL SBA
YEGHNEM REDHA	MCA	Examineur	U DE SAIDA
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	Examineur	U DE MASCARA
TOUNSI Abdelouahed	Pr	Invité	UDL SBA

Année universitaire : 2014-2015

Dédicaces

A la mémoire de mes parents,

A mon mari, mes enfants et mes petits enfants

Je dédie cet humble mémoire.

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse a été effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie du département de génie civil.

Je tiens tout d'abord à remercier vivement Monsieur ADDA BEDIA EL ABBES professeur et directeur de laboratoire des matériaux et d'hydrologie, de m'avoir accueilli dans son laboratoire et intégré dans son équipe de recherche.

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse Monsieur le Professeur BENRAHOU Kouider Halim pour sa motivation, son enthousiasme et sa disponibilité.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements et toute ma gratitude à Monsieur le professeur ABDELOUAHED TOUNSI pour son aide considérable, sa disponibilité, sa patience, et ses conseils durant ces quatre années.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Messieurs, BENACHOUR Abdelkader, YEGHNEM Redah, BOURADA Mohamed et Mademoiselle SAIDI Hayat pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et dont les remarques et les suggestions m'ont permis d'améliorer le présent manuscrit .

Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LM&H) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes avec qui j'ai passé d'agréables moments. A tous mes collègues du département de Génie Civil, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

ملخص

استجابة الانحناء الميكانيكي الحراري للوحات المركبة بوقائق قطريّة المضادة للتناظر ودرست باستخدام نظرية اللوحات البسيطة الجيبية بلوبعة متغيرات. تشرح النظرية التوزيع الجيبي لإجهاد القص العرضي وتجمع شروط بطلان إجهاد القص على السطوح الحرة العلويّة والسفليّة للوحة من دون مساعدة معامل تصحيح القص. من خلال تقسيم أجزاء النزوح عرضي الى جزء الانحناء والقص، ويتم تقليل عدد المجاهيل والمعادلات التي تحكم هذه النظرية، مما يسهل كثيرا من التحليل التقني. وتبجلى صحة هذه النظرية من خلال المقارنة مع الحلول المتاحة في الأدب. يتم عرض النتائج العددية لتوضيح سلوك النظام. تأثيرات مختلف جوانب التقرير: تقرير من جانب واحد للسّمك، يتم دراسة نسبة معاملات التمدد الحراري وتسلسل التراص على الاستجابة الناجمة عن الحرارة. ويتم تكييف هذه الدراسة في الطيران وفي الدراسات الكيميائية، وفي الهندسة النووية للهياكل المحتمل أن تتعرض للأحمال الحرارية المكثفة.

مفاتيح الكلمات: الاحمال الحرارية الميكانيكية – لوحة صفح- النمذجة التحليلية

Abstract

The thermomechanical bending response of anti-symmetric cross-ply composite plates is investigated by the use of the simple four variable sinusoidal plate theory. The theory accounts for sinusoidal distribution of transverse shear stress, and satisfies the free transverse shear stress conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction factor. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations for the present theory is reduced, significantly facilitating engineering analysis. The validity of the present theory is demonstrated by comparison with solutions available in the literature. Numerical results are presented to demonstrate the behavior of the system. The influences of aspect ratio, side-to-thickness ratio, thermal expansion coefficients ratio and stacking sequence on the thermally induced response are studied. The present study is relevant to aerospace, chemical process and nuclear engineering structures which may be subjected to intense thermal loads.

Keywords: Thermo-mechanical load; Laminated plates; Analytical modelling

Résumé

La réponse de flexion thermomécanique des plaques composites à structure diagonale antisymétrique est étudiée par l'utilisation de la théorie des plaques simple sinusoidale à quatre variables. La théorie explique la répartition sinusoidale de la contrainte de cisaillement transversal et satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces libres supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide du facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues et d'équations régissant la présente théorie est réduit, ce qui facilite considérablement l'analyse technique. La validité de la présente théorie est démontrée par comparaison avec des solutions disponibles dans la littérature. Les résultats numériques sont présentés pour illustrer le comportement du système. Les influences des divers aspects de rapport : le rapport d'un côté à l'épaisseur, le rapport de coefficients de dilatation thermique et la séquence d'empilage sur la réponse induite par la chaleur sont étudiées. La présente étude est adaptée en aérospatiale, en études chimiques et en génie nucléaire des structures susceptibles d'être soumises à des charges thermiques intenses.

Mots-clés: Charge thermomécanique; plaques stratifiées; modélisation analytique.

Liste des abréviations

ESLM	Equivalent Single Layer models
LW	Layer-Wise
CLPT	Classical Laminated Plate Theory
FSDT	First Order Shear Deformation Theory
TSDT	Third Order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher Order Shear Deformation Theory
SSDT	Sinusoidal Shear Deformation Theory
ESDPT	Exponential Shear Deformation Plate Theory
RPT	Refined Plate Theory
GD	Composites à Grande Diffusion
HP	Composites à Hautes Performances
CMO	Composites à matrice organique
CMM	Composites à matrice métallique
CMC	Composites à matrice céramique
TD	Matrices thermodurcissables
TP	Matrices thermoplastiques
PP	Polypropylène
PPS	Polysulfure de phénylène
PA	Polyamide
PES	Polyéther-sulfone
PEI	Polyéther-imide
PEEK	Polyéther-éther-cétone
HR	Fibres à haute résistance classique
HM	Fibres à haut module
PP	Polypropylène
PA	Polyamides
PE	Polyéthylène
ABS	Acrylonitrile butadiène styrène
PEEK	Polyéther-éther-cétone
RAAF	Royal Australian Air Force
AMR	Aeronautical and Maritime Research Laboratory

Liste des Figures

Chapitre I : Synthèse bibliographique sur les matériaux composites

Figure I.1 : Constituants d'un matériau composite	5
Figure I.2 : Exemple d'un matériau composite	6
Figure I.3 : Les composantes d'un matériau composite	7
Figure I.4 : Les matériaux composites dans le transport aérien	8
Figure I.5 : Les matériaux composites dans l'automobile de masse	9
Figure I.6 : Les matériaux composites dans l'aérospatial, fusée et satellite	9
Figure I.7 : Les matériaux composites dans l'électrique	10
Figure I.8 : Les matériaux composites dans le sport et loisirs	10
Figure I.9 : Les matériaux composites dans la construction nautique	11
Figure I.10 : Les principaux matériaux de renfort	12
Figure I.11 : Les fibres de Carbone	14
Figure I.12 : Les fibres de Verre	15
Figure I.13 : Les fibres de Kevlar	16
Figure I.14 : Chaîne et trame d'un tissu	19
Figure I.15 : Armure taffetas	19
Figure I.16 : Armure Sergé	20
Figure I.17 : Armure croisé	20
Figure I.18 : Armure unidirectionnelle	21
Figure I.19 : Les différentes Familles des Matrices	22
Figure I.20 : Composite à fibre	30
Figure I.21 : Les types de composites à base de la forme	30
Figure I.22 : Les matériaux composites Monocouches	31
Figure I.23 : Les matériaux Composite sandwich	32
Figure I.24 : Les matériaux Composite Stratifiés	32

Chapitre II : Théories des plaques composites stratifiées

Figure II.1: Nomenclature des stratifiés composites.	36
Figure II.2: Modélisation géométrique de stratifié	42
Figure II.3 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée.	47
Figure II.4 : Moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée.	49
Figure II.5 : Directions principales : a) d'un matériau unidirectionnel, b) d'un matériau à renfort tissu	51
Figure II.6 : Stratifié hors axes.	53
Figure II.7 : Cinématique de Love-Kirchhoff.	56
Figure II.8 : Cinématique de Reissner-Mindlin.	57
Figure II.9 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.	59
Figure II.10 : Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche	61

Chapitre III : Étude analytique du comportement thermomécanique à la flexion Des plaques stratifiées

Figure III-1: système de coordonnées et épaisseurs des couches d'un stratifié	65
--	----

Chapitre IV : Présentation et discussion des résultats

Figure IV-1: Effet de l'épaisseur sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à deux couches (0/90), ($t_3 = 0$).	77
Figure IV-2: Effet de l'épaisseur sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à quatre couches (0/90)2, ($t_3 = 0$).	77
Figure IV-3: Effet du rapport du coefficient de dilatation α_2 / α_1 sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à quatre couches (0/90)2, ($t_3 = 0$).	78
Figure IV-4: Effet de l'aspect du rapport (a/b) sur la déflexion combinée adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique (0/90)2, ($t_3 = 0$).	79
Figure IV-5: Effet de l'anisotropie matérielle E_1 / E_2 sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique (0/90)2, ($t_3 = 0$).	80

Liste des Tableaux

Chapitre I : Synthèse Bibliographique sur les Matériaux Composites

Tableau I.1 : <i>Caractéristiques mécaniques des fibres de bore</i>	13
Tableau I.2 : <i>Les propriétés mécaniques des Fibres de carbone</i>	14
Tableau I.3 : <i>Les différents types de verre</i>	15
Tableau. I.4 : <i>Les propriétés des fibres de Verre</i>	16
Tableau. I.5 : <i>Les Propriétés des fibres de Kevlar</i>	17
Tableau. I.6 : <i>les Caractéristiques mécaniques des fibres aramides</i>	17
Tableau. I.7 : <i>les Propriétés des Résines thermodurcissables</i>	23
Tableau. I.8 : <i>Les propriétés principales des résines polyesters</i>	24
Tableau. I.9 : <i>Les propriétés principales des résines phénoliques</i>	24
Tableau. I.10 : <i>Les propriétés principales des résines époxydes</i>	25
Tableau. I.11 : <i>Caractéristiques des Polypropylène et Polyamide</i>	27
Tableau. I.12 : <i>Les critères essentiels des matrices TD et TP</i>	27
Tableau. I.13 : <i>Propriétés de certains matériaux importants en céramique</i>	29
Tableau I.14 : <i>les principaux composites et leurs domaines d'application</i>	33

Chapitre IV : Présentation et discussion des résultats

Tableau IV.1 : <i>Déflexions adimensionnelles au centre: $\bar{w} = 10 wh / (\alpha_1 \bar{T}_2 a^2)$ de la plaque stratifiée carrée (0°/90°) soumise à une charge thermique ($\bar{T}_3 = 0$).</i>	75
Tableau IV.2 : <i>Déflexion adimensionnelles au centre \tilde{w} de la plaque stratifiée carrée (0°/90°) soumise à une charge combinée ($q_0 = 100$, $\bar{T}_2 = 100$, $\bar{T}_3 = 0$, $\alpha_1 = 10^{-6}$).</i>	76

Table des Matières

Remerciements	I
Dédicace	II
Résumé	II
Abstract	IV
ملخص	V
Table des matières	VI
Liste des tableaux	VII
Liste des figures	VIII
Notations et Symboles	IX
Introduction Générale	1
Chapitre I : Synthèse bibliographique des matériaux composites	
I.1. Introduction	5
I.2. Définition des matériaux composites	6
I.3. Historique	7
I.4. Domaine d'application des matériaux composites	7
I.4.1 les composites dans l'aéronautique civile et militaire	7
I.4.2. les composites dans l'agriculture	8
I.4.3. les composites dans l'automobile de masse	8
I.4.4. les composites dans l'aérospatial, fusée et satellite	9
I.4.5. les composites dans l'électrique	9
I.4.6. les composites dans le sports et loisirs	10
I.4.7. Les composites dans la construction nautique	10
I.4.8. Les composites dans la construction industriel	11
I.4.9. Les composites dans le ferroviaire	11
I.4.10. Les composites dans le secteur médical	11

I.4.11. Les composites dans la construction civile	11
I.5. Les composants des matériaux composites	12
I. 5.1. Notions sur les Renforts	12
I.5.1.1. Les principales fibres	12
I.5.1.1.1.1. Les fibres minérales	12
I.5.1.1.1.2. Les fibres organiques	16
I. 5.1.3. Architecture des renforts	18
I. 5.1.3.1. Forme linéique	18
I. 5.1.3.2. Forme surfacique	18
I. 5.1.3.2.1. Les mats	19
I. 5.1.3.2.2. les tissus et rubans	19
I. 5.1.3.3. Formes multidirectionnelles	21
I. 5.1.3.3.1. Tresses et préformes	21
I. 5.1.3.3.2. Tissus multidirectionnels.	21
I. 5.2. Notions sur les matrices	21
I. 5.2.1. les différentes Familles de matrice	22
I. 5.2.1.1. Les matrices organiques	22
I. 5.2.1.1.1. Les divers types de résines	22
I.3.2.1.1.1.a. Les Résines thermodurcissables –TD-	23
I. 5.2.1.1.1.b. Les Résines thermoplastiques –TP-	26
I. 5.2.1.1.2.c. Les résines thermostables	28
I. 5.2.1.2. les matrices minérales	28
I. 5.2.1.2.1. Les matrices métalliques	28
I. 5.2.1.2.2. Les matrices céramiques	28
I. 5.2.1.2.3. les charges et additifs	29
I.6. Classification des matériaux composites	29
I. 6.1. Classification suivant la forme des constituants	29

I. 6.1.1. Composites à fibres	30
I. 6.1.2. Composites à particules	30
I. 6.2. Classification suivant la nature des constituants	31
I.7. Les matériaux composites structuraux	31
I.7.1. Les Monocouches	31
I.7.2. Les Sandwichs	31
I.7.3. Les Stratifiés	32
I.8. Les principaux composites et leurs domaines d'application	33
I.9. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites	33
I.10. Conclusion	34

Chapitre II : Théorie des plaques composites stratifiées

II.1. Introduction	35
II.2. Définition d'un stratifié	35
II.3 Loi de mélange	38
II. 4 Loi de comportement	39
II. 4.1 Matériaux anisotropes	40
II. 4.2 Matériau monoclinique	40
II.4.3 Matériaux orthotropiques :	40
II. 4.4 Matériau transversalement isotrope	42
II. 4.5 Matériaux isotropes	41
II. 5 Modélisation géométrique	42
II.6 Comportement mécanique des matériaux stratifiés	42
II.6.1. Champ de déplacements	43
II.6.2. Champ de déformations	44
II.6.3. Champ de contraintes	46
II.6.4. comportement en membrane flexion –torsion	46

II.6.4.1 comportement en membrane	46
II.6.4.2. comportement en flexion et torsion	48
II.6.5.équation constitutive de la théorie classique	50
II.7. constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope	50
II.7.1 équations de mouvement des stratifiés orthotropes	52
II.7.1.1.stratifié orthotrope dans ses axes	52
II.8.stratifié orthotrope hors axes	53
II.9 Modèles de structures multicouches	54
II.10 Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente	54
II.11 Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT)	55
II.12 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	56
II.13 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	57
II.14 Approche par couche	60
II.15 Approche développement asymptotique	62
II.16 Conclusion	62
Chapitre III : Etude analytique du comportement mécanique et thermique des structures composites	
III.1. Introduction	64
III.2. Formulation théorique	64
III.3 Hypothèses de base	65
III.4 Cinématique	66
III.5 Équations constitutives	67
III.6 Solutions analytiques pour les plaques antisymétriques	71
III.7. Conclusion	73
Chapitre IV : Présentation des résultats et discussion	
IV.1. Introduction	74
IV.2. Effet de l'épaisseur sur la déflexion	76
IV.3. Effet du rapport des coefficients de dilatation thermiques sur la déflexion	78

IV.4. Effet du rapport (a/b) sur la déflexion	79
IV.5. Effet de l'anisotropie matérielle (E_1/E_2) sur la déflexion	79
IV.6. Conclusion	80
Conclusion générale et perspectives	81

Introduction générale

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. L'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble, comme elle permet également de transmettre au renfort les sollicitations auxquelles est soumis le composite. La nature de la matrice et des renforts, la forme et la proportion des fibres, la qualité de l'interface et le procédé de production utilisé sont autant de paramètres qui peuvent influencer les propriétés du matériau composite. L'utilisation des matériaux composites a augmenté considérablement pendant les deux dernières décennies, en particulier dans la construction aérospatiale, structures des véhicules et en génie civil (ponts en composites).

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans l'aérospatiale, l'automobile, la marine, les applications civiles et d'autres techniques en raison de caractéristiques avantageuses telles que les ratios élevés de rigidité et de résistance au poids et au faible coût d'entretien. Les propriétés physiques, comme le rapport de haute résistance-poids, le rapport de la rigidité-poids polyvalence, sont obtenues en combinant différents matériaux pour répondre à l'exigence spécifique.

Dans la littérature existante, deux approches différentes ont été essentiellement utilisées pour étudier les structures composites stratifiées: la théorie à une seule couche équivalente (équivalent single layer théorie (ESLT)) et la théorie de la couche discrète. Dans la théorie à une seule couche équivalente (ESLT) les structures stratifiées sont supposées être composées d'une seule couche alors que dans la deuxième théorie, chaque couche est prise en compte dans l'analyse. Les théories ESLT peuvent être divisées en trois catégories principales: la théorie classique de la plaque (classical plate theory (CPT)), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (first order shear deformation theory (FSDT)), la théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé (higher-order shear deformation theory (HSDT)). La CPT ne tient pas compte des effets de déformation de cisaillement et fournit des résultats raisonnables pour les stratifiés minces. Cependant, elle sous-estime la déflexion et surestime le flambement et la fréquence des stratifiés à moyenne ou grande épaisseur, où les effets de déformation de cisaillement sont plus prononcés (Whitney et Leissa, 1996; Grover et al, 2014; Nedri et al, 2014; Draiche et al, 2014; Mahi et al, 2014). La FSDT proposée par

Reissner (1945) et Mindlin (1951) tiennent compte des effets de déformation de cisaillement par la voie de la variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Cependant la FSDT ne justifie pas les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser la différence entre l'état de contrainte réelle et l'état de contrainte constant (Castellazzi et al, 2013; Cui et al, 2011; Bouremana et al, 2013; Sadoune et al, 2014; Yaghoobi, 2013; Berrabah et al, 2013; Tounsi et al, 2013ab). Les HSDT tiennent compte des effets de déformation de cisaillement d'ordre élevé par variations des déplacements dans le plan ou les deux dans le plan et transversales déplacements à travers l'épaisseur, et satisfont aux conditions d'équilibre sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Par exemple, Ambartsumian (1958), a proposé une fonction transversale de cisaillement pour expliquer la déformation de la plaque. Une méthode similaire a été utilisée plus tard par Soldatos et Timarci (1993), pour l'analyse dynamique de coquilles stratifiées. Plus tard, quelques nouvelles fonctions ont été proposées par Reddy (1984), Karama et al. (2003), Zenkour (2004), Ait Atmane et al. (2010), Benachour et al. (2011), EL Meiche et al. (2011), et Ait Amar Meziane et al. (2014). La recherche sur la flexion thermique des plaques stratifiées symétriques soumises à une seule charge thermique sinusoïdale est réalisée par Ali et al. (1999) en utilisant la théorie à ordre élevé basé sur le déplacement. Wu et al. (2007) a présenté une théorie à ordre élevé global-local, y incluant la déformation normale transversale pour étudier le comportement thermique d'une plaque stratifiée soumise à une seule charge thermique sinusoïdale. Récemment, de nouvelles théories hyperboliques inverses ont été développées par Sahoo et Singh (2013) et Grover et al. (2013). Une théorie à une seule couche équivalente (ESLT) est présentée par Ghugal et Kulkarni (2013ab) pour l'évaluation des déplacements et des contraintes sur des plaques laminées à structure diagonale soumises à une charge thermomécanique uniformément répartie non linéaire. Ghugal et Kulkarni (2011) ont analysé les contraintes thermiques dans des plaques de verre feuilleté à structure diagonale soumises à une charge thermique sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque en utilisant la théorie de déformation de cisaillement raffiné. Pour l'évaluation des déplacements, de la température critique de flambage et des contraintes dans les structures à gradient es à des sollicitations thermiques et mécaniques, une théorie de déformation d'ordre élevé à deux dimensions est développée par Matsunaga (1999), Bachir Bouiadjra et al. (2013), Boudjerba et al. (2013), Tounsi et al. (2013c), Houari et al. (2013), Kettaf et al. (2013), Saidi et al. (2013), Larbi Ould et al. (2013), Khalfi et al. (2014), Zidi et al. (2014), Hebali et al. (2014), Belabed et al. (2014), Bousahla et al. (2014), et Naveenkumar Swaminathan (2014), Said et al. (2014),

Bourada et al. (2014), Hamidi et al. (2014), Ait Yahia et al. (2014), Larbi Chaht et al. (2014), Belkorissat et al. (2014) et Bouchafa et al. (2014).

Parmi les théories HSDT susmentionnées, celle de Reddy est la plus largement utilisée en raison de sa grande efficacité et simplicité. Depuis, les déplacements dans le plan de la théorie de Reddy ont été étudiés en fonction du cube des coordonnées de l'épaisseur, les équations du mouvement sont plus compliquées que celles des FSDT. Par conséquent, il ya une possibilité de développer une théorie précise, qui est simple à utiliser. En outre, l'utilisation de structures composites dans un environnement présentant de grandes variations de température nécessite la connaissance des déformations et des contraintes d'origine thermique. De plus, les contraintes thermiques sont également induites lors de la fabrication des matériaux composites. Par exemple, la réponse thermoélastique statique de plaques en verre feuilleté à structure diagonale symétrique et antisymétrique a été étudiée par Zenkour (2004) en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT).

Dans la présente étude, une théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé est développée pour l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques en matériaux composites stratifiés. Le champ de déplacement est choisi en fonction d'une variation sinusoïdale dans le plan de déplacements transversaux et à travers l'épaisseur. La partition du déplacement transversal dans la courbure, et les éléments de cisaillement conduit à une réduction du nombre d'inconnues, par conséquent, rend la nouvelle théorie beaucoup plus favorable à la mise en œuvre. Des solutions pour des plaques composites stratifiées à structure diagonale antisymétrique simplement appuyées sont obtenues et les résultats sont comparés avec les solutions existantes. L'étude est pertinente en aérospatiale, en études chimiques et en génie nucléaire des structures susceptibles d'être soumises à des charges, thermiques intenses.

Objectif de la thèse

L'objectif de ce travail est de développer une approche simple et efficace pour l'étude analytique du comportement thermomécanique des composites stratifiés.

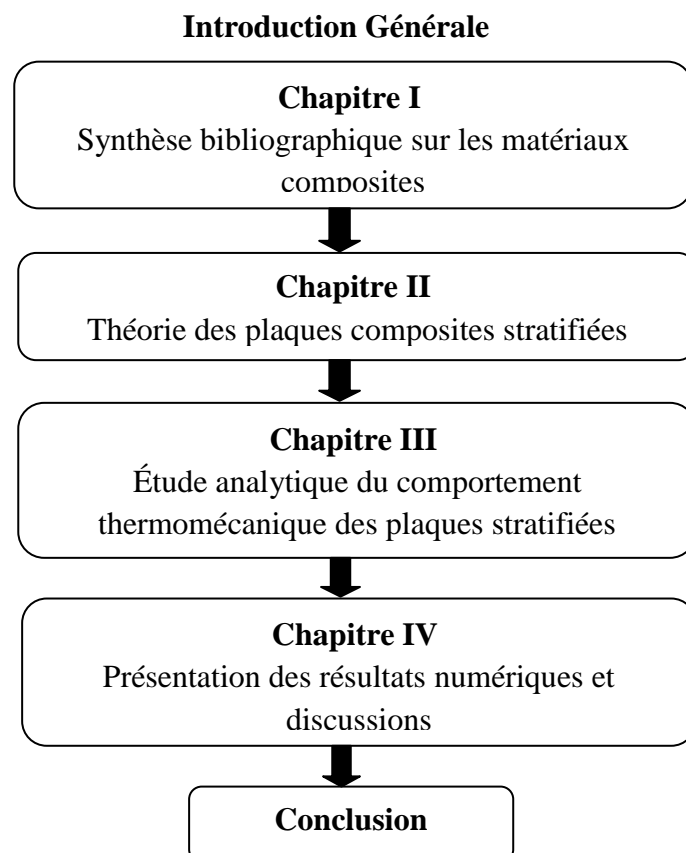
Pour ce fait notre thèse est composée de quatre chapitres comme illustré dans la figure 01. Dans le premier chapitre on a essayé d'étudier la synthèse bibliographique des matériaux composites. Dans le deuxième chapitre on a présenté la théorie des plaques composites stratifiées.

Le chapitre trois est consacré à l'étude analytique du comportement thermomécanique des plaques carrées à quatre couches stratifiées.

Quant au chapitre quatre il a été réservé pour la présentation des résultats numériques et discussions élaborés pour les plaques précitées.

Enfin ce travail se termine par une conclusion générale qui fait apparaître les différentes méthodes de calcul des plaques stratifiées qui nécessite une attention particulière en vue de leurs particularités de résistance aux chargements mécaniques et à des hautes températures.

Cette thèse est donc structurée ainsi :



I.1 Introduction

Le matériau composite est un matériau solide, constitué par l'association à l'échelle microscopique de plusieurs autres matériaux aux caractéristiques complémentaires (BOGDANOVICH 1996). Cela permet d'associer un ensemble de propriétés mécaniques ou physiques qu'il serait impossible à obtenir avec les composants pris de façon isolée. ‘

Un matériau composite est donc une combinaison d'au moins de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés, possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renforts et ainsi joue le rôle de « Ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Les propriétés mécaniques des matériaux composites sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renforts dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort matrice

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

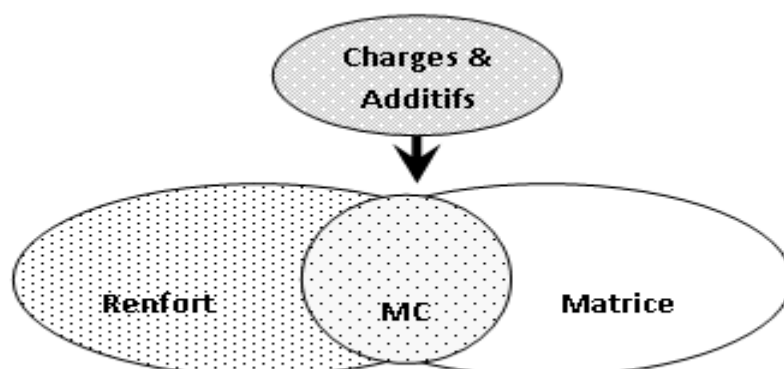


Figure I.1 Constituants d'un matériau composite

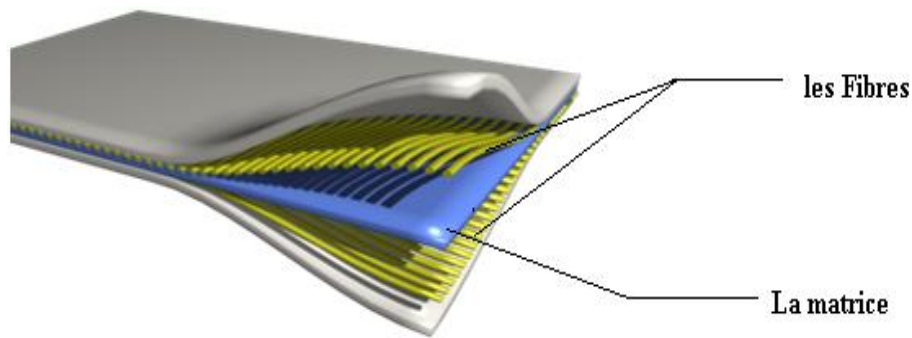


Figure I.2 Exemple d'un matériau composite

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, constructions civils, aéronautique et spatiale. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

I.2. DEFINITION DES MATERIAUX COMPOSITES

Dans un sens large, le mot « **composite** » signifie constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». Les matériaux composites sont formés par la combinaison de deux ou plusieurs matériaux, dans le but d'obtenir des propriétés physiques et chimiques qui sont supérieures à celles de ses constituants (Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2013a)). D'une manière générale on distingue deux phases :

Une phase continue appelée la matrice et une phase discontinue appelée le renfort. Ces renforts sont noyés dans une matrice qui les maintient en place et assure la cohésion de l'ensemble (Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2013b)).

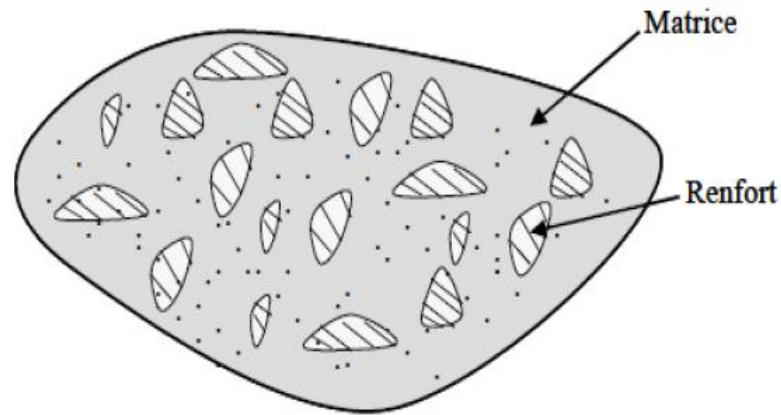


Figure I.3 Les composantes d'un matériau composite

I.3. HISTORIQUE

Le bois fut le premier matériau composite naturel utilisé, ensuite le torchis a été utilisé en construction pour ses propriétés d'isolation et de coût. Parmi les premiers composites fabriqués par l'homme on trouve également les arcs Mongols (2000 ans av. J.-C.). Leur âme en bois était contrecollée de tendon au dos et de corne sur sa face interne. Les sabres japonais traditionnels sont aussi un exemple de matériaux composites très anciens. Les forgerons nippons procédaient au pliage et au martèlement du métal jusqu'à d'obtenir une sorte de pâte feuilletée pouvant être composée de plus de 4 000 couches.

I.4. DOMAINE D'APPLICATION DES MATERIAUX COMPOSITES

Les composites trouvent leurs principales applications dans le transport aérien (civil et militaire), maritime et ferroviaire, le génie civil, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs, notamment grâce à leur bonne tenue mécanique comparable aux matériaux homogènes comme l'acier et leur faible masse volumique.

I.4.1 les composites dans l'aéronautique civile et militaire

Avec l'augmentation du prix du pétrole, l'utilisation des matériaux composites est devenue une nécessité. Chaque kilogramme gagné sur la structure d'un avion, fait gagner

aux compagnies de voyageurs de l'argent et protège en parallèle l'environnement par réduction des émanations de CO₂.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent.

Donc avec son aspect lisse, et ses caractéristiques mécaniques propres, le composite est le choix des constructeurs aéronautiques.



Figure I.4 *Les matériaux composites dans le transport aérien*

I.4.2. les composites dans l'agriculture

Le composite parmi les matériaux de fabrication du matériel agricole : tant sur le matériel roulant (tracteurs) que sur le matériel fixe (robots de traite, cuves, abreuvoirs,...).

I.4.3. les composites dans l'automobile de masse

Conforme au niveau d'exigence des plus grandes marques de voiture de sport, mais aussi apprécié pour son poids réduit, le composite est présent chez les constructeurs et dans les écuries sportives. Son prix modéré est également l'un des critères de choix chez les carrossiers industriels qui peuvent ainsi proposer à leurs clients des véhicules beaux et économiques (Nev de Bombardier, Viper de Chrysler...).



Figure I.5 *Les matériaux composites dans l'automobile de masse*

I.4.4. les composites dans l'aérospatial, fusée et satellite

- Propulseur NASA
- Station internationale
- Canadarm de Spar



Figure I.6 *Les matériaux composites dans l'aérospatial, fusée et satellite*

I.4.5. les composites dans l'électrique

- Isolateur de ligne
- Perche isolante
- Luminaire de rue
- Échelle isolante



Figure I.7 *Les matériaux composites dans l'électricité*

I.4.6. les composites dans les sports et loisirs

Les performances sportives exigent des matériaux performants, les matériaux composites répondent bien à ces exigences, malgré un coût relativement élevé.

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports (Ski alpin, Planche à voile, Vélo de compétition, Patin à roues alignées).



Figure I.8 *Les matériaux composites dans le sport et loisirs*

I.4.7. Les composites dans la construction nautique

On retrouve le composite autant dans la navigation de loisir (péniches fluviales et bateaux pour bases de loisir), que dans la plaisance (voiliers, yachts) ou encore la pêche (barques, bateaux gonflables à fond rigide). D'ailleurs la construction nautique est le seul domaine exploité en Algérie.



Figure I.9 *Les matériaux composites dans la construction nautique*

I.4.8. Les composites dans la construction industrielle

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels.

I.4.9. Les composites dans le ferroviaire

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux raisons :

Un bon comportement au feu et un moulage facile des pièces utilisées

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût.

I.4.10. Les composites dans le secteur médical

L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion.

I.4.11. Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de

l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif.

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques.

I.5. LES COMPOSANTS DES MATERIAUX COMPOSITES

I.5.1. Notions sur le Renfort

Son rôle est d'assurer la fonction mécanique. Il se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elle doit supporter. Le renfort apporte aux matériaux composites ses performances mécaniques élevées (Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2011)).

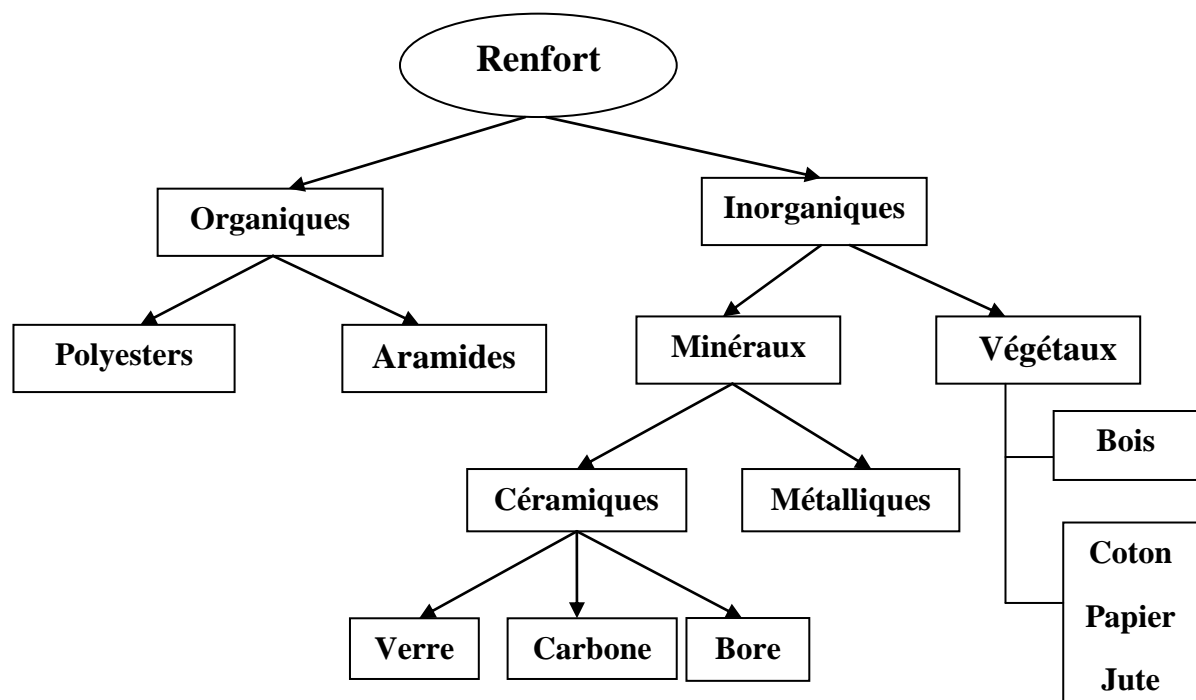


Figure I.10 Les principaux matériaux de renfort (Grover, N.et al. (2013))

I.5.1.1. Les principales fibres

I.5.1.1.1. Les fibres minérales

- Les fibres de la Céramique
- Les fibres de Bore

Se sont des Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt de vapeur chimique à partir de trichlorure né à des températures

chaudes substrat. Le substrat le plus couramment utilisé est un fil de tungstène chauffé d'environ 10 cm de diamètre (Grover, N. et al. (2013)).

Leurs propriétés mécaniques sont données dans le tableau ci – dessous :

Tableau. I.1 *Caractéristiques mécaniques des fibres de bore*

Caractéristiques	Bore
Masse volumique (ρ) Kg/m ³	2600
Diamètre μm	100-150
Module de Young (E) GPA	430
Module Spécifique (E/ ρ) MNm/Kg	165
Contrainte à la rupture (σ_R) MPa	3800
Contrainte spécifique (σ_R/ ρ) KNm/Kg	1460

Les fibres de Carbone

Les fibres de carbone sont le groupe le plus développé à raison de leurs propriétés :

- faible densité.
- Haute résistance.
- Module de Young élevé.
- Grande stabilité de la masse fondue dans les systèmes métalliques divers.
- Possible grande variation dans les profils de propriété.
- Faible coefficient de dilatation thermique.
- Une bonne conductivité thermique et électrique.
- Rapport coût-efficacité (Grover, N., et al. (2014)).



Figure I.11 Les fibres de Carbone

Il y a une variété de fibres de carbone mais les trois qui sont actuellement commercialisées sont :

- 1- Les fibres à haute résistance classique (*types : As4, As6, T300 et X635*).
- 2- Les fibres à haute résistance module intermédiaire (*types : IM6, X636*)
- 3- Les fibres à haut module (*types : M40 et HM5*).

Une particularité importante de ces fibres est leurs coefficients de dilatation thermique négatif ou quasi nul dans le sens de la fibre, c'est-à-dire que les fibres se raccourcissent quand on les chauffe et s'allongent quand on les refroidit.

Leurs propriétés mécaniques sont données dans le tableau ci – dessous :

Tableau I.2 Les propriétés mécaniques des Fibres de carbone

Propriétés en Traction	HR		IM	HM	
	R_t (MPa)	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500
E_{0T} (MPa)	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 5000000
A_R (%)	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse Volumique (g/cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

R_t: Résistance à la rupture.

E_{0T}: Module de Young.

A_R: l'allongement à la rupture.

- **Les fibres de Verre**

Le verre possède une très bonne résistance à la rupture dépassant même celle de certains métaux. Cependant, le verre est un matériau très fragile du fait de sa forte sensibilité aux microfissures. Cette fragilité diminue lorsque le verre est sous forme de fibre puisque les microfissures sont moins nombreuses. Cela lui donne de bonnes performances. Il est obtenu à partir de sable (*silice*) et d'additifs (*alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore*) (Hamidi, A., et al. (2014)).

Suivant leur composition, différents type de verre filables peuvent être obtenus :

Tableau I.3 Les différents types de verre (Grover, N.et al. (2013)).

Type	Caractéristiques générales
E	A usage général, bonnes propriétés électriques
D	Hautes propriétés diélectriques
A	Hautes teneur en alcali
C	Bonne résistance chimique
R, S	Haute résistance mécanique

Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. Se sont les variétés **E, S et R**. Ces deux derniers sont très voisines (*l'une est américaine et l'autre est française*).



Fibre de Verre



Tissu en Fibre de Verre

Figure I.12 Les fibres de Verre

Les Fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (*de l'ordre de 3 micromètres*) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des cancers.

Leurs propriétés mécaniques sont données dans le tableau ci – dessous :

Tableau. I.4 Les propriétés des fibres de Verre

Propriétés en Traction	Verre E	Verre R	Verre S
R_t (MPA)	3400	4400	4900
E_{0T}(MPA)	73000	86000	87000
A_R(%)	4,9	5,2	-
Masse Volumique (g/cm³)	2,54	2,55	2,54

Enfin, il est intéressant de noter que les fibres de verre conservent leurs caractéristiques mécaniques jusqu'à des températures assez élevées par exemple de l'ordre de 200°C pour le verre E et de 250°C pour le verre R (Grover, N.et al. (2013)).

- **Les fibres métalliques**

Comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermiques et électriques ainsi que leurs caractéristiques thermomécaniques élevées (Grover, N.et al. (2013)).

I.5.1.1.2. Les fibres organiques

a- Les fibres aramides

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de Kevlar.

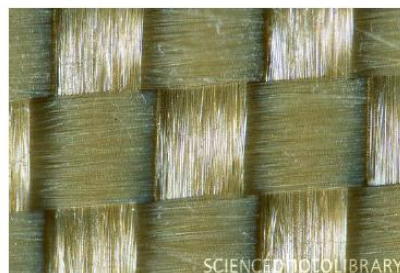


Figure I.13 Les fibres de Kevlar

Les fibres de Kevlar sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatique, il existe deux types:

- les fibres basses modules (Kevlar 29) : utilisées pour la constitution des cordes, et des câbles.
- les fibres hautes modules (Kevlar 49) : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

Leurs propriétés mécaniques sont données dans le tableau ci – dessous :

Tableau. I.5 Les Propriétés des fibres de Kevlar

Propriétés en Traction	Kevlar 49	Kevlar 29
R_t (MPA)	3000	2700
E_{0T} (MPA)	120000à130000	60000
A_R (%)	2.1	4
Masse Volumique (g/cm ³)	1.45	1.44

Les caractéristiques mécaniques des fibres aramides sont regroupées dans le tableau suivant (Houari, M.S.A., et al. (2013)).

Tableau. I.6 les Caractéristiques mécaniques des fibres aramides

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149
Masse Volumique ρ (Kg/m ³)	1440	1450	1470
Diamètre (μ m)	12	12	12
Module d' Young E(Gpa)	60	120	160
Module Spécifique E/ ρ (MNn/Kg)	42	83	110
Contrainte de rupture σ_{fu} (MPa)	3000	3000	2400
Contrainte Spécifique σ_{fu} (MNm/Kg)	2080	2070	1630
Allongement à la rupture (%)	3,6	1,9	1,5

- **Les fibres synthétiques**

Dans cette famille, on trouve :

- Les fibres polyester (*tergal, dacron, térylène, etc.*).
- Les fibres polyamides.
- Les fibres polyéthylène.
- Les fibres polypropylène.

I.5.1.3. Architecture des renforts

Les matériaux composites sont des matériaux offrant de grands potentiels pour la conception des pièces de haute performance mécanique pouvant présenter des formes relativement complexes. Par ailleurs, de nombreuses géométries et configurations possibles des renforts permettent une grande variété de propriétés et un bon contrôle de leur anisotropie (Hebali, H., et al. (2014)).

La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement, il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales (Grover, N., et al. (2014)):

- ✓ Sous forme linéique (*fil, mèche*)
- ✓ Sous forme de Tissus surfacique (*Tissus simple, mats*)
- ✓ Sous forme multidirectionnelle (*tresses, tissus complexes*)

I.5.1.3.1. Formes linéiques

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres, et ne peuvent pas conséquemment être utilisées sous forme unitaire (*filament élémentaires ou monofilament*). Ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes (Grover, N., et al. (2013)).

I.5.1.3.2. Formes surfaciques

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus et rubans (Grover, N., et al. (2013)).

I.5.1.3.2.1. Les mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécanique de mat dans son plan (Grover, N., et al. (2013)).

I.5.1.3.2.2. Les tissus et rubans

Le tissu comporte des fils de chaîne ou de trame (*fibres bidirectionnelles*) suivant le monde de croisement de la trame et de la chaîne, le tissu sera une toile, un sergé ou en satin. On réalise également, pour des applications particulières (*aérospatial, défense*), des armatures de renforcements bi-ou tridimensionnelles.

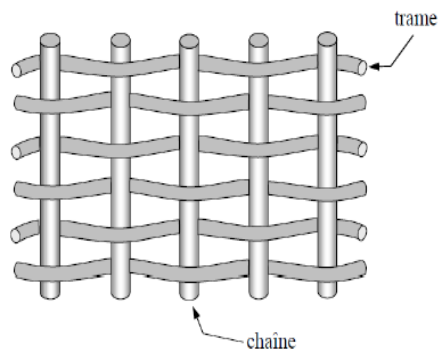


Figure I.14 Chaîne et trame d'un tissu

- **Taffetas :**

Sont des fils de chaîne et de trames qui s'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame. Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites (Grover, N., et al. (2013)).

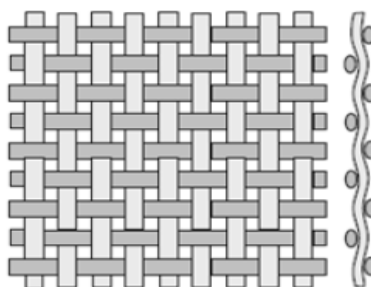


Figure I.15 Armure taffetas

- **Sergé**

Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé (2x1), les fils trames passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu sous forme de nervures diagonales. L'armure sergée offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaînes et trames et s'adapte bien à des moulages de formes complexes (Grover, N., et al. (2013)).

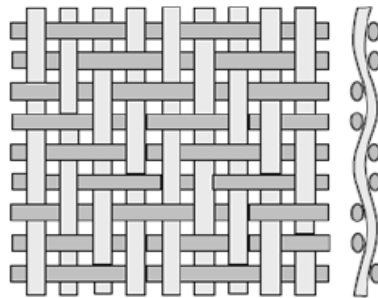


Figure I.16 Armure Sergé

- **Tissu croisé sans entrecroisement**

Dans un tissu croisé, deux nappes de fils sont superposées sans entrecroisement des fils, et réunies par une chaîne et une trame de fils fins, n'intervenant pratiquement pas sur les performances mécaniques du tissu. L'absence d'entrecroisement supprime les effets de cisaillement et donne un tissu très performant mais couteux (Grover, N., et al. (2013)).

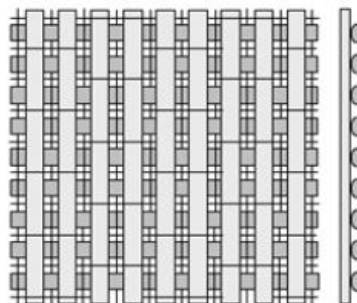


Figure I.17 Armure croisé

- **Tissu à armure unidirectionnelle**

Dans cette cas, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne (Grover, N., et al. (2013)).

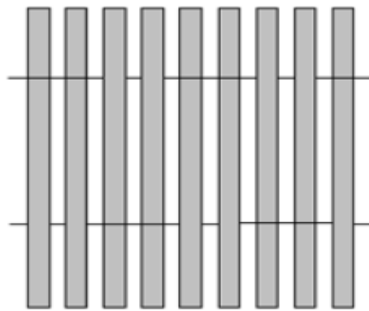


Figure I.18 Armure unidirectionnelle

I.5.1.3.3. Formes multidirectionnelles

I.5.1.3.3.1. Tresses et préformes

Il est possible de réaliser des tresses ou préformes par tissage cylindrique ou conique d'un tissu tubulaire. Les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation du pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit recouvrir. Il est ainsi possible de réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc. Par ce procédé, divers tissus peuvent être obtenus en forme de chaussettes coniques, ogivales ou hémisphériques, utilisés pour satisfaire aux besoins de la construction aéronautique (*cône de rentrée, tuyères*)

I.5.1.3.3.2. Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés et caractérisés par le nombre de directions de tissage : 3D, 4D. La structure la plus simple et celle de tissage 3D, les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales, dans un tissage 4D, les fils sont disposés suivant 4 directions.

I.5.2. Notions sur la matrice

C'est une matière plastique qui a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. Elle est plus ductile que les fibres, mais dont la résistance et la rigidité sont inférieures (Houari, M.S.A., et al (2013)).

La matrice a pour rôle de :

- Lier les fibres de renforts.
- Répartir les contraintes.
- Apporter la tenue chimique de la structure.

I.5.2.1. les différentes Familles de matrice

Les différentes familles de matrice sont présentées dans l'organigramme suivant :

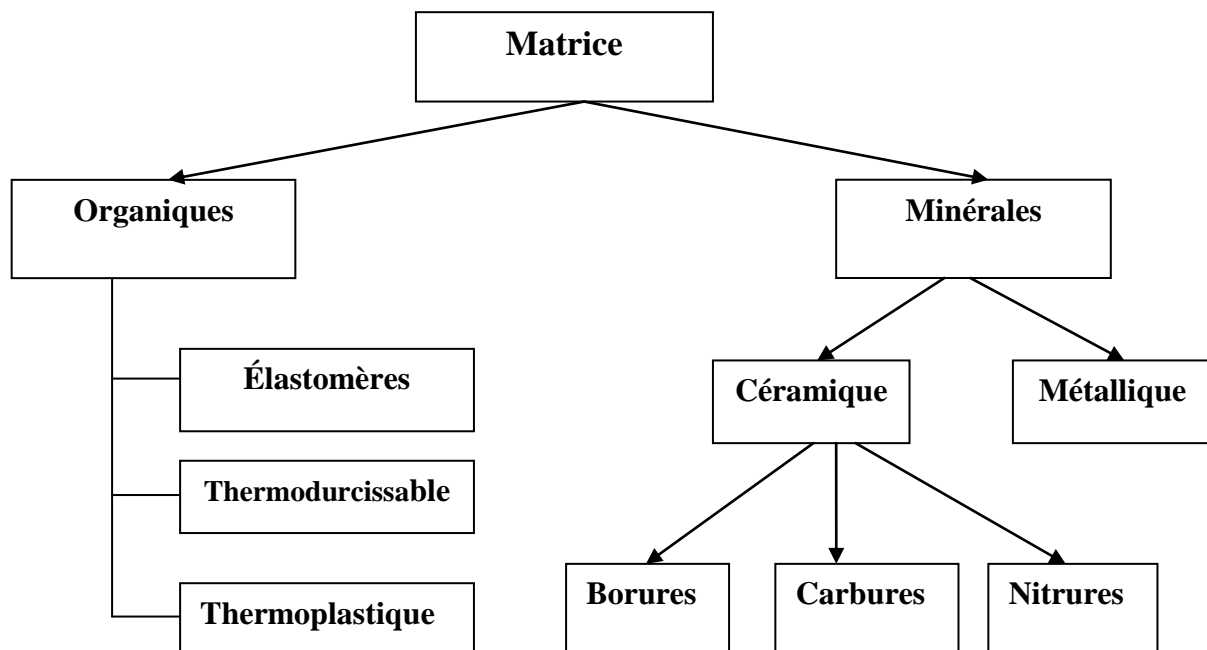


Figure I.19 Les différentes Familles des Matrices [Nodal 2001]

I.5.2.1.1. Les matrices organiques

Un très grand nombre de matériaux plastiques peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites. Elles peuvent aussi bien appartenir à la famille des résines « *Thermodurcissables* » qu'à celles des résines « *thermoplastiques* ».

I.5.2.1.1.1. Les divers types de résines

Les résines utilisées dans les matériaux composites sont des polymères modifiés par différents adjuvant ont pour rôle de transférer les sollicitations mécanique aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur.les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres et elles doivent avoir aussi une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

I.5.2.1.1.a. Résines thermodurcissables –TD-

Qui sont, en général, associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel. Elles sont employées comme matrice des matériaux composites. Ces produits durcissent après un cycle de chauffage appelé «cycle de polymérisation». A l'issue de celui-ci, le matériau est un solide relativement rigide qui ne fond pas et ne se ramollit pas en température. De ce fait, ils ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois et ceci avant qu'ils ne durcissent.

Les résines thermodurcissables les plus répandues sont :

- Les Résines de polyesters insaturés.
- Les Résines phénoliques.
- Les Résines époxydes (Karama, M., et al. ((2003))).

Leurs propriétés physiques et mécaniques après polymérisation sont données dans le tableau ci – dessous :

Tableau. I.7 les propriétés des Résines thermodurcissables

Propriétés en Traction	Polyester	Epoxyde	Phénolique
E0T (MPA)	30 à 90	30 à 100	20 à 60
A _R (%)	2000 à 3000	2500 à 4000	1000 à 5000
Densité (g/Cm3)	1.1 à 1.3	1.1 à 1.3	1.2 à 1.4

- **Les Résines de polyesters**

Le plus largement utilisé de toutes les résines dans la fabrication de composites sont des résines de polyester insaturé. Leur développement est le résultat de:

- Faible coût de production.
- Leur adaptation à certains procédés de fabrication qui sont faciles à réaliser et d'automatiser.
- Une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité relativement élevé.
- Bonne résistance chimique à des températures ambiantes.

En fonction de leur module de Young, les résines de polyester sont classés en souple, résines semi-rigides et rigides. Les résines habituellement utilisés dans la fabrication de matériaux composites sont de type rigide. Ces résines durcies ont les caractéristiques suivantes (Karama, M., et al. ((2003))).

Tableau. I.8 Les propriétés principales des résines polyesters

La densité	1200 Kg/m ³
Le Module de Traction	2.8 - 3.5 Gpa
Le Module de Flexion	3 - 4.5 Gpa
La Résistance à la Traction	50 - 80 Mpa
La Résistance à la Flexion	90 - 130 Mpa
D'allongement à la Traction	2 - 5%
D'allongement à la Flexion	7 - 9%
La Température de déformation thermique (sous <i>une contrainte de 1.8</i>)	60 - 100°C

Parmi les inconvénients sont les suivants:

-Comportement médiocre avec la température, qui est inférieure à 120 ° C en utilisation continue.

-Sensibilité à la fissuration, de l'ordre de 8-10%.

- Mauvais comportement à la vapeur (Karama, M., et al. ((2003))).

- **Les Résines phénoliques.**

Sont les plus anciennes des résines thermodurcissables est caractérisé par les propriétés suivantes :

Tableau. I.9 Les propriétés principales des résines phénoliques

Masse Volumique	1200 Kg/m ³
Le Module d'élasticité en Flexion	3 Gpa
La Contrainte à la Rupture en Traction	40 Mpa
Allongement à la Rupture en Traction	2,50%
La Contrainte à la Rupture en Flexion	90 Mpa
Résistance à la Rupture en Compression	250 Mpa
La Température de fléchissement sous charge	120 °C

On peut citer leurs avantages et leurs inconvénients :

Les avantages des résines phénoliques :

- Une excellente stabilité dimensionnelle.
- Une bonne tenue à la chaleur et au fluage.
- Un faible retrait.
- De bonnes caractéristiques mécaniques.
- Un faible cout.

Les inconvénients des résines phénoliques :

- Une mise en œuvre sous pression, donc à faibles cadences.
- Les couleurs foncées des résines.
- Une non adaptation à des utilisations alimentaires.

Les résines phénoliques seront donc utilisées dans le cas de pièces nécessitant une tenue élevée en température ou une bonne résistance aux agents chimiques (Grover, N., et al. (2013)).

Les Résines époxydes :

Sont les matrices des composites à hautes performances (*constructions aéronautiques, espace, missiles, etc.*)

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont dans le tableau suivant :

Tableau. I.10 Les propriétés principales des résines époxydes

Masse Volumique	1100 à 1500 Kg/m ³
Le module d'élasticité en Traction	3 à 5 Gpa
La Contrainte à la Rupture en Traction	60 à 80 Gpa
Allongement à la Rupture	2 à 5 %
La Contrainte à la Rupture en Flexion	100 à 150 Mpa
Résistance au Cisaillement	30 à 50 Mpa
La Température de fléchissement sous charge	290°C

Parmi les avantages et les inconvénients des résines époxydes, on peut citer :

Les avantages des résines époxydes :

- De bonnes propriétés mécaniques (*en traction, flexion, compression fluage*)
- Une bonne tenue aux températures élevées : jusqu'à 150°C à 190°C en continu.
- Une excellente adhérence aux matériaux métalliques.
- Une excellente résistance chimique.
- Une faible retrait au moulage (*de 0.5 à 1%*).

Les inconvénients des résines époxydes :

- Un temps de polymérisation long.
- Un cout élevé.
- La nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre.
- Une sensibilité à la fissuration.

I.5.2.1.1.b. Résines thermoplastiques –TP-:

La famille des résines thermoplastiques est très vaste et peut être séparée en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques (*technopolymères*).

-Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés.

-Les plastiques techniques sont généralement mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle(*PVC*), le polyéthylène, le polystyrène, le polyamide, le polycarbonate. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible cout, résultant à la fois de matières premières disponibles et des procédés de fabrication (*injection, extrusion*). Nous donnons ci-après quelques caractéristiques pour le polypropylène et le polyamide (Grover, N., et al. (2013)).

Tableau. I.11 Caractéristiques des Polypropylène et Polyamide (Grover, N., et al. (2013)).

Caractéristiques	Polypropylène	Polyamide
Masse volumique (Kg/m ³)	900	1140
Contrainte à la rupture (MPa)	20-35	60-85
Module d'élasticité (GPA)	1.1-1.4	1.2-2.5
Température de fléchissement sous charge (°C)	50-60	65-100

Les critères essentiels des résines thermoplastiques : dans le tableau ci-dessous, on donne les critères des résines thermoplastiques.

Tableau. I.12 critères des résines thermoplastiques

	Thermoplastiques-TP-	Thermodurcissables-TD-
Etat de Base	Solide (Prêt à l'emploi polymérisé)	Liquide visqueux à polymériser
Stockage matière de base	Illimité	Temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des renforts	Difficile	aisée
Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement+refroidissement de fixation)	Chauffage continu
Cycle	Court	Plus long (polymérisation)
Caractéristiques spécifiques		
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue Thermique	Réduite sauf nouveaux TP thermostable	Meilleure
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus

I.5.2.1.1.2.c. Les résines thermostables

Les résines thermostables se caractérisent par leurs performances thermiques, puisque dans ces résines nous retrouvons les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, ou les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines (Grover, N., et al. (2013)).

I.5.2.1.2. les matrices minérales :

I.5.2.1.2.1. Les matrices métalliques :

Pour des applications plus haute température, on fait appel aux composites à matrice métallique (*C.M.M*) jusqu'à 600°C. Les métaux ou alliages métalliques utilisés dans la fabrication des *C.M.M.*, sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé (Grover, N., et al. (2014)). Ainsi, l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utilisés.

Les matrices métalliques présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en température et aux chocs thermiques ainsi qu'une bonne résistance à l'usure et à l'abrasion (Khalfi, Y., et al. (2014)).

Les principaux avantages des matrices métalliques :

- Une stabilité dimensionnelle exceptionnelle.
- Une plus grande stabilité à température élevée.
- Amélioration significative des caractéristiques de fatigue cycliques (Larbi Chaht, F. et al. (2014)).

I.5.2.1.2.2. Les matrices céramiques

La céramique est un terme qui couvre une grande variété de non-métalliques, des matériaux inorganiques, qui sont souvent traités à des températures élevées.

Ces céramiques avancées montrent une résistance exceptionnellement élevée à la chaleur supérieure à 1000 °C ((Karama, M. et al. (2003)),-(Kettaf, F.Z. et al. (2013))).

Le tableau suivant présente les propriétés de certains matériaux importants en céramique.

Tableau. I.13 Les propriétés de certains matériaux importants en céramique (Karama, M. et al. (2003))

Matériau	Module de Young $E(\text{GPa})$	Coef.de poisson ν	Coef. de dilatation thermique α (10^{-6} K^{-1})
SiC	420	0.22	4
Al_2O_3	380	0.25	8
<i>Cordierite</i> ($2\text{Al}_2\text{O}_3, \text{MgO}, 5\text{SiO}_2$)	130	0.25	2
<i>Mullite</i> ($3 \text{Al}_2\text{O}_3, 2 \text{SiO}_2$)	215	0.25	4
<i>Sodalime glass</i>	70	0.23	9

I.5.2.1.2.3. les charges et additifs :

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

- **Les Charges**

On distingue sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé.

- **Les additifs**

Les additifs fonctionnels ont pour rôle d'étendre la matrice tout en permettant au matériau d'atteindre des propriétés physiques, comme une résistance améliorée, une plus grande viscosité, une meilleure finition de surface, ou une couleur particulière.

I.6. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants (Grover, N., et al. (2013)).

I.6.1 Classification suivant la forme des constituants :

Dans cette classification les composites sont classés :

Les matériaux composites à particules et matériaux composites à fibres (Grover, N., et al. (2013)).

I.6.1.1 Composites à fibres :

Les renforts dans le matériau composite se trouvent sous forme de fibres continues ou discontinues (*fibres coupées, fibres courtes, etc*). L'arrangement des fibres, et leurs orientations permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan (Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2011), (Grover, N., et al. (2013)).

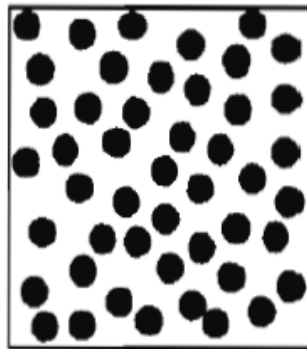


Figure I.20 Composite à fibre

I.6.1.2 Composites à particules :

Dans ce cas les renforts sont sous forme des particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait. Le choix de l'association matrice-particule dépend des propriétés souhaitées (Grover, N., et al. (2013)).

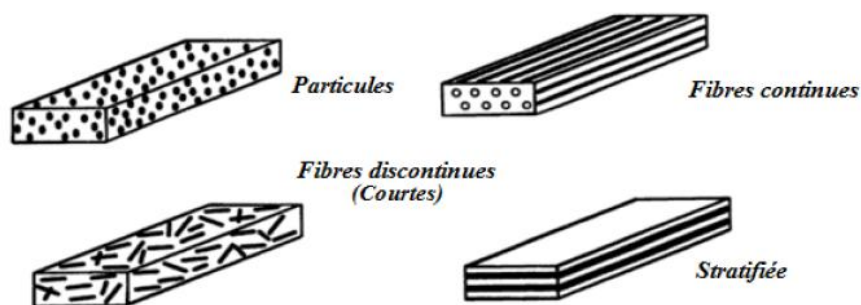


Figure I.21 Les types de composites à base de la forme

I.6.2 Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique ou minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices (Grover, N., et al. (2013)).

1.7. LES MATERIAUX COMPOSITES STRUCTURAUX

Les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- 1-Les monocouches
- 2-Les stratifiés
- 3-Les sandwichs

1.7.1. Les Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (*unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement*), à fibres tissées ou à fibres courtes.

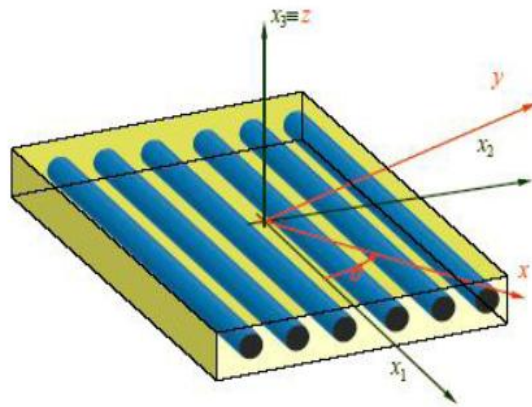


Figure I.22 les matériaux composites Monocouches

1.7.2. Les Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et un excellent isolement thermique.

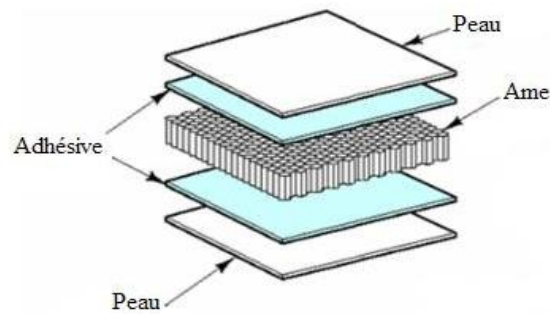


Figure I.23 les matériaux Composite sandwich

1.7.3. Les Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches désigné comme le référentiel du stratifié

Le choix de l'empilement, plus particulièrement des orientations permettront d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)$ est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , $+45^\circ$, 90° et -45° , l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite.

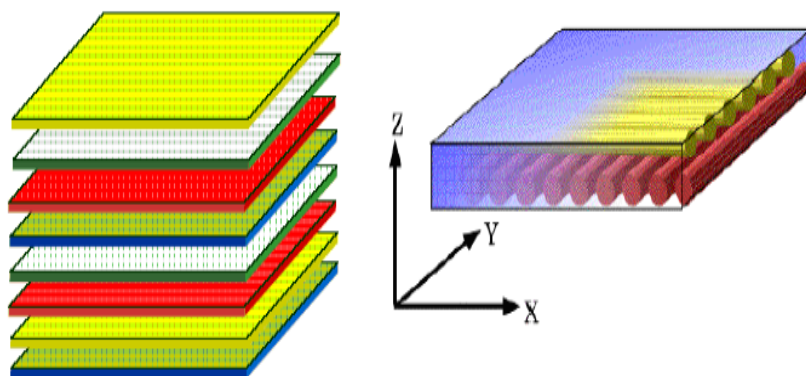


Figure I.24 les matériaux Composite Stratifiés

On pourra avoir des stratifiés de type :

1-Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant

La direction +0 que de couches orientées suivant la direction-0

2-Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement

Par rapport à un plan moyen.

3-Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90°.

I.8. LES PRINCIPAUX COMPOSITES ET LEURS DOMAINES D'APPLICATION

Tableau I.14 les principaux composites et leurs domaines d'application (Grover, N., et al. (2013)).

Type de composite	constituants	Domaines d'application
1-composite à matrice organiques Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduit Matériaux d'étanchéité Pneumatique Stratifié Plastique renforcés	Résines/charges/fibres Résine/copeaux de bois Résine/fibre de bois Résine souples/tissus Elastomères-bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résines, fibre de verre de carbone Résines microsphères	Imprimerie, emballage Menuiserie Bâtiments Sport, bâtiments Toitures, terrasses Automobiles Domaine multiples
2- composite à matrice minérale Béton Composite carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibre de céramique	Génie civil Aviation, espace, sports thermomécanique
3- composite à matrice métallique	Aluminium, fibre de bore	espace
4- sandwiches Peaux Ames	Métaux Mousses, nids d'abeilles	Domaines multiples

I.9. les avantages et les inconvénients des matériaux composites

I.9.1. Les avantages

Les qualités principales des matériaux composites sont :

-gain de masse (*légèreté*).

- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.
- mise en forme de pièces complexes (*principe du moulage*) et réduction du nombre d'interface (*boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques*).
- grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (*sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone*).
- insensibles aux produits chimiques (*mécaniques*) comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole...

I.9.2. les inconvénients

Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- Sensibilité aux agents atmosphériques (*humidité, température...*)
- Tolérance aux dommages
- cout parfois prohibitifs (*temps, cout, étude et mise en œuvre*).
- Problème d'assemblage (*grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches*).

I.10. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons acquis des connaissances sur les matériaux composites conventionnels ainsi que leurs domaines d'application et la diffusion de leurs utilisations à travers le monde, par la suite nous allons voir les différentes méthodes envisagées pour traiter des problèmes de structures composites multicouches, tout en traitant l'architecture du composite conventionnel, sachant que notre matériau d'étude est un composite plus ou moins spécifique par rapport au matériau conventionnel.

II.1. Introduction

Puisque les matériaux composites stratifiés se composent de deux matériaux ou plus, ils posent beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales tels que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles, la force de flambement et l'effet des états de frontière et de chargements externes. Les plaques stratifiées sont employées souvent dans l'industrie aérospatiale. Du fait de l'importance de l'aspect sécuritaire dans la conception et le développement des avions civils ou militaires, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales de ces plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques composites stratifiées.

La théorie classique des plaques stratifiées est celle basée sur la plus ancienne hypothèse de Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin (1951) qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de part l'hypothèse (des sections droites restent droites) à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, ce qui oblige l'introduction des facteurs de corrections. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney (1969), qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

II.2. Définition d'un stratifié

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux (figure II.1). Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses

couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type $[90^\circ, 0^\circ]_2s$ est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0° , puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90° . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

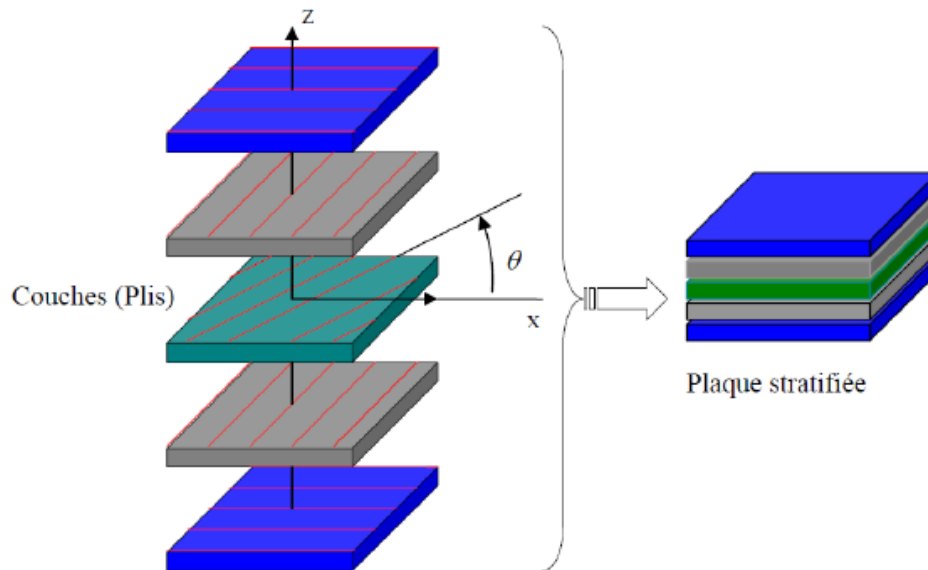


Figure II.1: Nomenclature des stratifiés composites.

Une des propriétés essentielles des matériaux composites est le caractère directionnel de leurs propriétés mécaniques. En effet, ces matériaux ne possèdent pas du tout les mêmes propriétés dans le sens des renforts que dans la direction perpendiculaire aux renforts. Ce type de propriétés est souvent modélisé par une loi de comportement élastique orthotrope, loi qui permet de représenter un matériau dont les propriétés mécaniques élastiques possèdent trois directions principales orthogonales (soit trois plans de symétrie). Ce type de loi permet à la fois de modéliser des composites fibreux unidirectionnels et des composites à fibres tissées, comme aussi des matériaux plus isotropes comme par exemple les plastiques renforcés de fibres courtes ou même des matériaux isotropes standard. La loi de comportement d'un matériau orthotrope élastique en déformations infinitésimales, exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau, s'écrit Reddy (1997).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1a})$$

Où les constantes de rigidités sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \bar{C}_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \bar{C}_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \bar{C}_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \bar{C}_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \end{aligned} \quad (\text{II.1b})$$

$$\bar{C}_{44} = G_{23}, \quad \bar{C}_{55} = G_{13}, \quad \bar{C}_{66} = G_{12}$$

$$\text{Avec : } \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Et le lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de poisson est exprimé par :

$$\nu_{ji} = \frac{E_j}{E_i} \nu_{ij} \quad \text{Pour } i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.1c})$$

Où les différentes variables sont définies ainsi :

σ_{ij} : Tenseur des contraintes nominales représenté sous forme vectorisée ;

ε_{ij} : Tenseur des déformations infinitésimales représenté sous forme vectorisée ;

\bar{C}_{ij} : Tenseur d'élasticité linéaire orthotrope exprimé sous forme matricielle dans le repère des directions principales du matériau ;

E_L : Module d'élasticité dans la direction principale i ;

ν_{ij} : Coefficient de Poisson dans la direction j pour une traction en i ;

G_{ij} : Module de cisaillement dans le plan ij .

Nous remarquons que pour définir un matériau avec ce modèle, dix paramètres constitutifs doivent être déterminés, soit trois modules d'élasticité, trois coefficients de Poisson, trois modules de cisaillement, ainsi que la masse volumique du matériau. Dans ce modèle, les directions principales forment un trièdre orthogonal droit. Il faut également noter que le

modèle d'élasticité orthotrope est plus général qu'un modèle de composite unidirectionnel, souvent considéré comme isotrope transverse. On obtient un modèle de matériau composite fibreux isotrope transverse en imposant que :

- E_2 et E_3 sont égaux au module d'élasticité transverse E_T , E_1 étant alors égal au module d'élasticité E_L dans la direction principale (des fibres).
- G_{12} et G_{13} sont égaux au module de cisaillement G_{LT} entre la direction principale et le plan transverse, G_{23} étant alors égal au module de cisaillement G_{TT} dans le plan transverse.
- ν_{12} et ν_{13} sont égaux au coefficient de Poisson ν_{LT} entre les directions principale et transverse, ν_{23} étant alors égal au coefficient de Poisson ν_{TT} dans le plan transverse.

On peut ainsi décrire un matériau composite unidirectionnel isotrope transverse par six constantes de matériau : E_L , E_T , G_{LT} , G_{TT} , ν_{LT} et ν_{TT} . Cependant, en raison des procédés de mise en œuvre des matériaux composites, on remarque souvent qu'un matériau composite unidirectionnel réel ne peut pas être considéré comme parfaitement isotrope transverse. Ainsi, en toute généralité, pour des structures plaques ou coques, les constantes nécessaires à la caractérisation d'un matériau orthotrope sont E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , G_{13} et finalement ν_{12} .

II.3 Loi de mélange

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre on a alors :

$$E_L \text{ en sens long : } E_L = V_m E_m + V_f E_f \quad (\text{II-2})$$

$$E_T \text{ en sens long : } \frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (\text{II-3})$$

V_m : Fraction volumique de matrice

v_f : Fraction volumique de fibre

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (\text{II-4})$$

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et v_f .

Matrice: comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients E_m et v_m .

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = V_m \varepsilon_{T_m} + V_f \varepsilon_{T_f} \quad (\text{II-5})$$

Chacune des déformations latérales ε_{T_m} et ε_{T_f} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{T_m} = v_{LTm} \varepsilon_L$ et $\varepsilon_{T_f} = v_{LTf} \varepsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$v_{LT} = V_m v_m + V_f v_f \quad (\text{II-6})$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (\text{II-7})$$

II. 4 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (\text{II-8})$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II-9})$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 constantes de rigidité C_{ij} .

II. 4.1 Matériaux anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

II. 4.2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. La loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-10})$$

La matrice de souplesse a la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

II.4.3 Matériaux orthotropiques :

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

II. 4.4 Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II-12})$$

II. 4.5 Matériaux isotropes

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope, dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{II-13})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-14})$$

II. 5 Modélisation géométrique

Les coordonnées du stratifié sont définies avec un axe z perpendiculaire au plan de stratifié. L'origine de l'axe z est au centre géométrique (plan médian) du stratifié et les coordonnées dans le plan xy sont arbitraires. Il est cependant habituel d'assigner l'axe des x à une direction spécifique de changement ou une direction principale de la structure. Une fois que le système de coordonnées est établi, les angles des strates θ_k sont définis comme indiqué à la (figure II.1) c'est-à-dire que θ_k est l'angle entre la direction des fibres et l'axe x . Pour des raisons d'analyse et de conception du stratifié, il est pratique de définir les coordonnées de la couche (k), comme montré sur la (figure II.2) suivante :

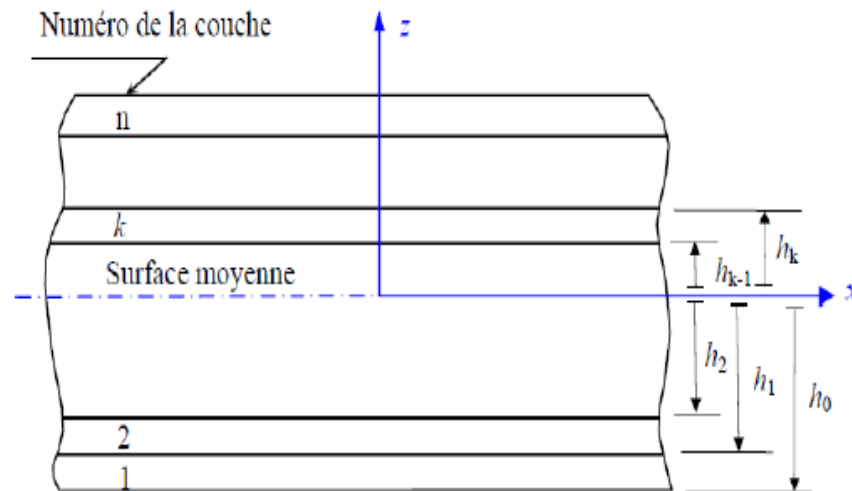


Figure II.2: Modélisation géométrique de stratifié

Les notations utilisées sont reportées sur la (figure II.2). L'élément stratifié est constitué de n couches numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme un plan de référence Oxy (plan moyen) et l'axe Oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche (k) est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

II. 6 Comportement mécanique des matériaux stratifiés

L'étude du comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysée par la théorie des plaques stratifiées, basé sur une

évaluation du champ des contraintes et champs des déplacements en tout point de la structure. Cette étude comportera deux phases:

1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau composite;
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

Nous développerons donc de manière assez détaillée les éléments de cette théorie en considérant les hypothèses suivantes :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaque minces : La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation ; Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

II. 6.1 Champ des déplacements

La théorie classique des stratifiés se situe dans le cadre général des schémas du premier degré de la théorie des plaques qui ne prend pas en compte le cisaillement transverse. Ces schémas expriment les déplacements u , v et w en un point de la plaque, de coordonnées (x, y, z) rapportées au plan moyen de la plaque, sous la forme :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{II.15}$$

Sachant que u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point du plan moyen ($x, y, z = 0$)

$$\begin{aligned}
u_0(x, y) &= u_0(x, y, 0), \\
v_0(x, y) &= v_0(x, y, 0), \\
w_0(x, y) &= w_0(x, y, 0)
\end{aligned}
\tag{II.16}$$

II.6.2 Champ des déformations

A partir du champ de déplacement de la relation (II.2), on peut déduire le champ de déformation qui peut être exprimé en coordonnées cartésiennes par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y,
\end{aligned}
\tag{II.17}$$

La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation de la plaque, donc la théorie classique des stratifiés néglige le cisaillement transverse: $\gamma_{xz} = 0$ et $\gamma_{yz} = 0$ ce qui conduit d'après les relations (II.4) à définir les rotations dues à la flexion (sans cisaillement):

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{II.18})$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après les expressions (II.2) par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (\text{II.19})$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}\quad (\text{II.20})$$

En introduisant les déformations en membrane :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), \quad \gamma_{xy}^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)\quad (\text{II.21})$$

Et les déformations en flexion et torsion dépendent de la matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y)\quad (\text{II.22})$$

L'état de déformation $\{\varepsilon\}$, en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane $\{\varepsilon^0\}$ et de la courbure $\{k\}$ du plan moyen en utilisant l'expression finale qui emploie l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\}\quad (\text{II.23})$$

II.6.3 Champs de contraintes

Le champ de contraintes dans la couche k s'exprime par la relation générale sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (\text{II.24})$$

L'utilisation des relations (II.7) et (II.11), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z [\bar{Q}]^k \{k\} \quad (\text{II.26})$$

La matrice $\{\sigma\}^k$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$

La matrice de rigidité réduite $[\bar{Q}_{ij}]^k$ varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

II.6.4 Comportement en membrane-flexion-torsion

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli.

Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

II.6.5 Comportement en Membrane

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté h . il est constitué de n plis. Le pli numéro k a une épaisseur notée e_k . Le plan $(x-y)$ est le plan de symétrie (ou plan moyen).

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées (N_x, N_y, N_{xy}) par unité de longueur suivant la direction y ou la direction x (figure II.3). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié. Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité de longueur de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{(II.27)}$$

N_x : Effort résultant dans la direction x par unité de longueur suivant y .

N_y : Effort résultant dans la direction y par unité de longueur suivant x .

N_{xy} : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y .

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre.

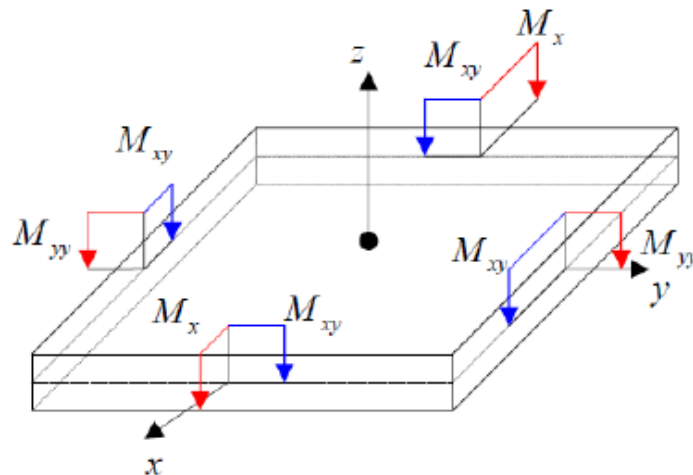


Figure II.3 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée.

Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{(II.28)}$$

Où h_{k-1} et h_k sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre k et $k-1$ dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la figure II.2.

La substitution de l'équation (II.12) dans l'équation (II.15) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{II.29})$$

Puisque la matrice $[\bar{Q}_{ij}]^k$ n'étant pas en fonction de la distance z , $\{\varepsilon^0\}$ et $\{k\}$ sont

Indépendantes de z et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié la relation (II.16) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Dont les coefficients A_{ij} sont appelés les rigidités de membrane :

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k \quad (\text{II.31})$$

Et Les coefficients B_{ij} sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k z_k \quad (\text{II.32})$$

II.6.6 Comportement en flexion et torsion

▪ Résultantes en flexion

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \quad (\text{II.33})$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la (figure II.4).

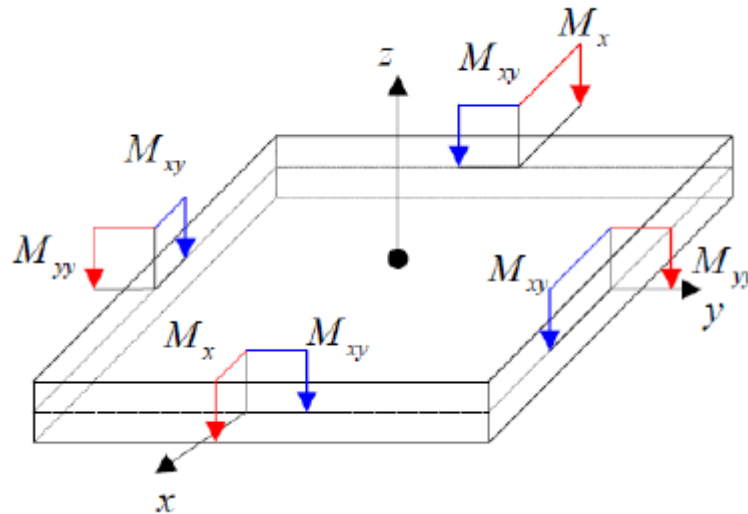


Figure II.4 : Moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée.

Substituant l'équation (II.12) dans l'équation (II.20), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme contractée suivante :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.35})$$

Dont les coefficients D_{ij} sont appelés les rigidités de flexion :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left(e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12} \right) \quad (\text{II.36})$$

▪ **Résultantes en cisaillement**

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié (figure II.3) :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.37})$$

II.7 Equation constitutive de la théorie classique

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures dans le cadre de la théorie classique. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.17) et (II.21) suivant une seule écriture matricielle sous la forme (Berthelot J.-M.(1999)):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

II.7.1 Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope

Un matériau orthotrope, soumis à un état de contraintes planes est caractérisé par ses modules de l'ingénieur, E_T , ν_{LT} et G_{LT} rapportés à ses axes principaux (L , T , T'). La direction L est la direction des fibres pour un composite unidirectionnel ou la direction chaîne pour un composite à renfort tissu. Les directions T et T' sont les directions transverses aux fibres pour le composite unidirectionnel (figure II.5a). Pour un matériau à renfort tissu, la direction T est celle de la trame et la direction T' est orthogonale au plan du tissu (figure I.5b).

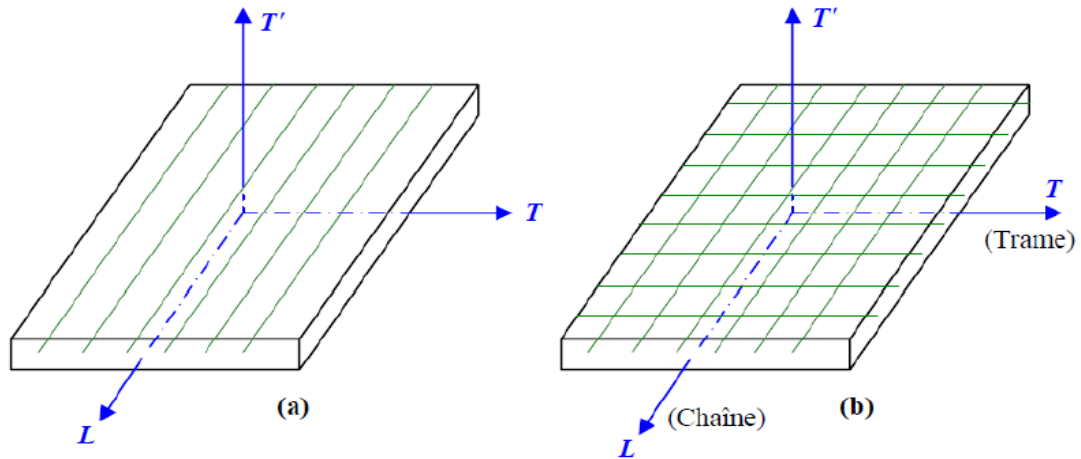


Figure II.5 : Directions principales : a) d'un matériau unidirectionnel, b) d'un matériau à renfort tissu

Pour un état de contraintes planes, les relations contraintes déformations s'écrivent dans les axes des matériaux suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} \quad \text{(II.40)}$$

Où les constantes de la matrice de rigidité Q_{ij} sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \quad \text{(II.41)}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \quad Q_{66} = G_{LT}$$

En fonction des modules de l'ingénieur : E_L et E_T les modules d'Young longitudinal et transversal, ν_{LT} le coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction longitudinale et G_{LT} le module de cisaillement mesuré dans le plan de la couche.

II.7.2 Équations de mouvement des stratifiés orthotropes

II.7.2.1 Stratifié orthotrope dans ses axes

Dans le cas d'une couche orthotrope d'épaisseur h , et dans le cas où les axes (L, T, T') du stratifié orthotrope coïncident avec les axes (x, y, z) de référence de la plaque, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}h, & D_{11} &= Q_{11} \frac{h^3}{12}, \\ A_{12} &= Q_{12}h, & D_{12} &= Q_{12} \frac{h^3}{12}, \\ A_{22} &= Q_{22}h, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= Q_{22} \frac{h^3}{12}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= Q_{66}h, & D_{66} &= Q_{66} \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas d'un stratifié orthotrope rapporté à ses axes, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations en membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

Les équations de mouvement sont ensuite obtenues en reportant l'équation constitutive (II.29) du stratifié dans les relations fondamentales des plaques. Ces équations de mouvement s'écrivent :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.44})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.45})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.46})$$

Où q est la charge de pression exercée sur le stratifié.

II. 8 Stratifié orthotrope hors axes

Dans le cas où les axes du matériau orthotrope font un angle θ avec les axes de référence, (figure II.6), l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij} h, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} \quad (\text{II.48})$$

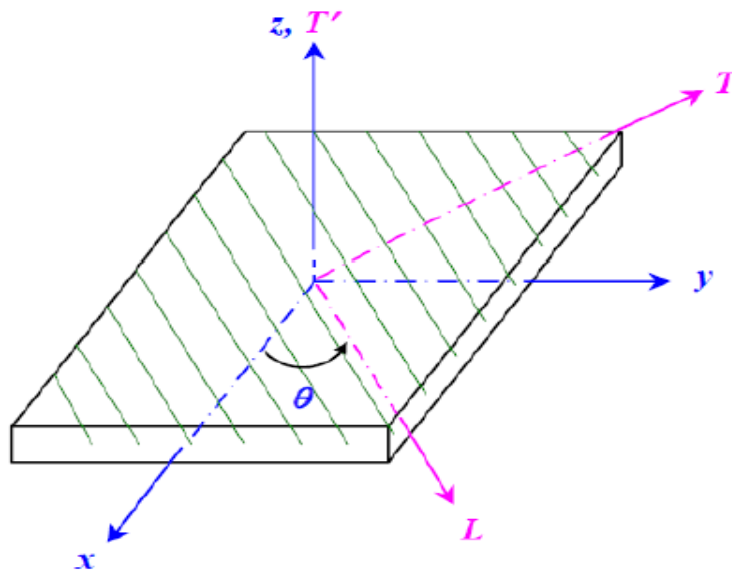


Figure II.6 : Stratifié hors axes.

Ces relations introduisent les coefficients de rigidité réduite hors axes exprimés en fonction des coefficients rapportés aux axes du stratifié. A nouveau, il y a l'absence de couplage membrane flexion-torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une couche orthotrope dont les axes coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons un couplage traction-

cisaillement, au niveau du comportement en membrane, ainsi qu'un couplage flexion-torsion. Les équations de mouvement (II.31) à (II.33) sont alors modifiées suivant :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.49})$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.50})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.51})$$

II.9 Modèles de structures multicouches

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models)
- Approche par couche LW (Layer-wise)
- Approche développement asymptotique

II.10 Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente

Parmi les différentes classes de théories, l'approche de monocouche équivalente est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter un stratifié hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent (homogénéisation), ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D bien plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu à travers l'épaisseur de la structure multicouche. Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère

bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur du stratifié, cette classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes inter-laminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit.

II.11 Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT)

La théorie CLPT, qui est une généralisation aux stratifiés composites de la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches ESL. Cette théorie se base sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation et gardera la même longueur (figure II.7), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ainsi, la réponse d'une plaque stratifiée ne peut être précisément déterminée avec cette méthode que si la structure est très mince et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes, cela veut dire que les couches sont composées de matériaux assez peu différents, et possèdent des modules de cisaillement transverse du même ordre de grandeur que les autres modules. Une autre condition pour que cette approche donne de bons résultats est que le chargement et les conditions aux limites n'occasionnent que peu de flexion dans le stratifié. Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{II.52}$$

Où (u, v, w) représente le vecteur des déplacements, d'un point matériel de coordonnées nominales (x, y, z) , de même (u_0, v_0, w_0) ce sont les déplacements du feuillet moyen. Le plan principal de la plaque est le plan x - y et l'épaisseur h de cette dernière est orientée selon l'axe z (avec $z \in [-h/2, h/2]$).

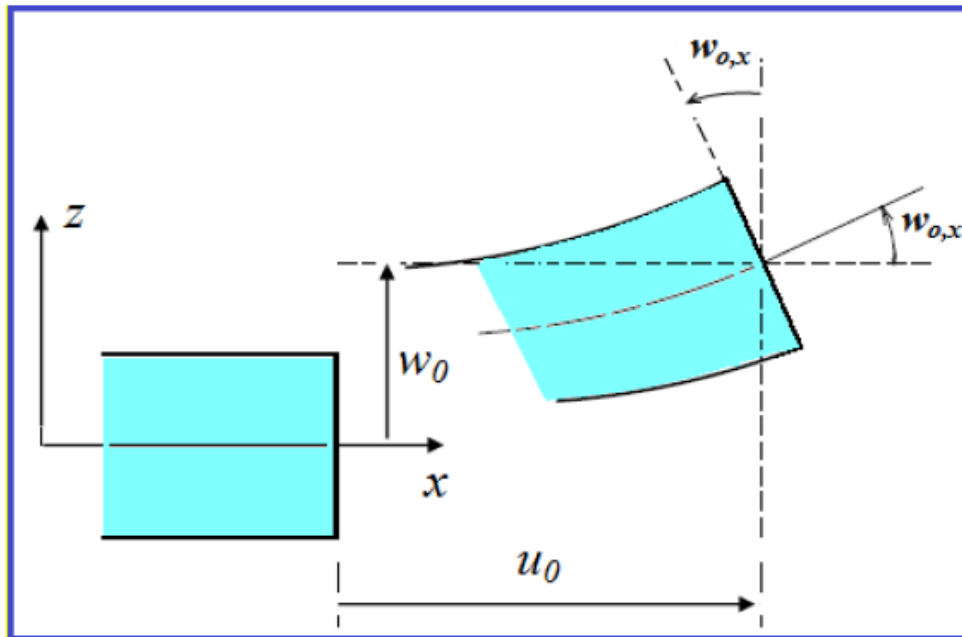


Figure II.7 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

II.12 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la section précédente, nous avons montré que la théorie élémentaire permettait uniquement d'analyser la dispersion des ondes à basses fréquences. Nous devons donc employer une autre théorie si l'on veut pouvoir caractériser les ondes principales et secondaires à des fréquences plus élevées. On peut donc utiliser la théorie FSDT proposée par Whitney et al. (1970) qui est une extension de la théorie du premier ordre proposée dans Mindlin (1951) pour étudier les ondes transversales et qui revoit l'hypothèse (La section droite de la plaque reste perpendiculaire au feuillet moyen) de la théorie élémentaire de Kirchhoff-Love en tenant compte des déformations liées au cisaillement transverse, ainsi que des inerties de rotation de section. Pour chacune de ces théories approchées, le matériau composite stratifié est homogénéisé complètement ; c'est pourquoi elles sont souvent désignées par le terme de couche unique équivalente. Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.53}$$

Avec: ϕ_x, ϕ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (figure II.8), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + w_{0,x}, \quad \phi_y = \gamma_{yz}^0 + w_{0,y} \tag{II.54}$$

Où $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$ les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

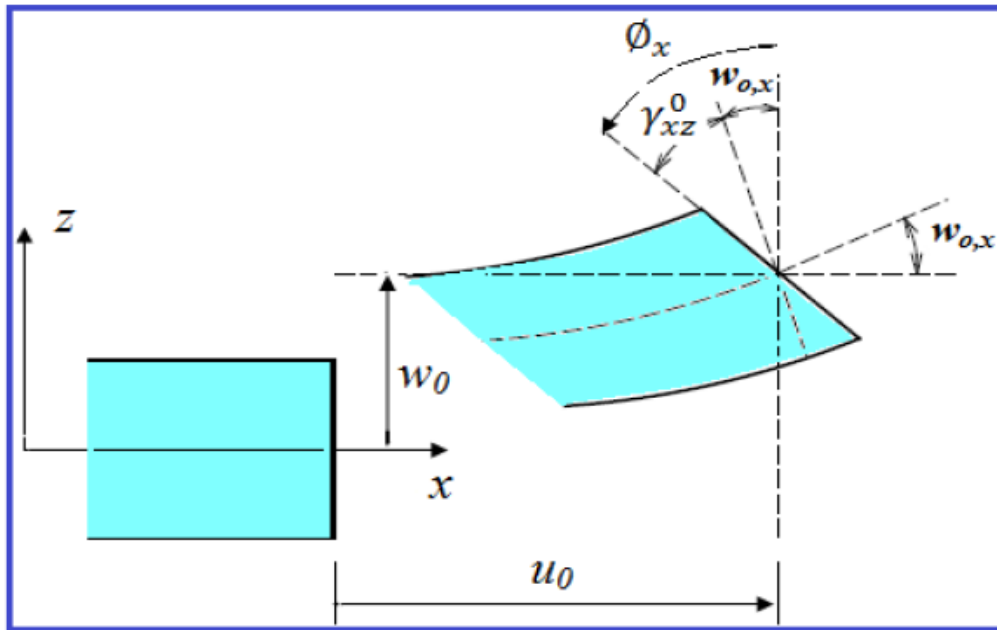


Figure II.8 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

II.13 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur. Le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{II.55}$$

Où ϕ_x, ϕ_y les variables représentent les rotations des sections déformées autour des axes x et y respectivement (termes du premier ordre), tandis que θ_x, θ_y symbolisent les termes du second ordre (courbure) et ψ_x, ψ_y les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées (Whitney J.M. et Sun C.T.(1973)), Reddy J.N.(1993)). Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié (Reddy J. N, (1997)) (figure III.9). La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle FSDT (seulement cinq inconnues $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$). La précision des rigidités de stratifié ainsi obtenues avec les méthodes, HSDT est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire. Par contre, comme toutes les théories ESLM basées sur une approximation du déplacement uniquement, les contraintes inter-laminaires ne sont toujours pas continues à l'interface entre les stratifiés, même si ces dernières se rapprochent des contraintes réelles. Si d'un point de vue de la précision en fonction de l'effort de calcul, les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles HSDT d'ordre plus élevé restent bien plus précis dans le cas de coques épaisses fortement orthotropes. Le développement de l'équation (III.42) est utilisé avec l'annulation des termes du second ordre (θ_x, θ_y), l'expression du champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) + f(z)\gamma_{yz}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{(II.56)}$$

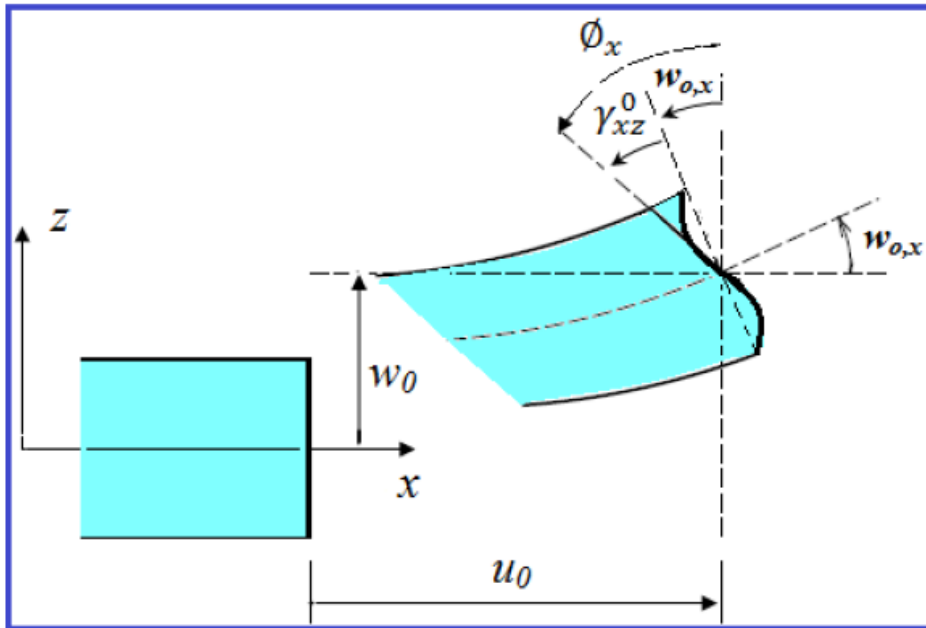


Figure II.9 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature. A savoir que $f(z) = 0$ pour le cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre $f(z) = z$ au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse. Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur:

- L'approche d'Ambartsumyan S.A., (1969) donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.57})$$

- L'approche de Reissner, (1945) exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{2} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.58})$$

- L'approche de Reddy, (1984), La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.59})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier, (1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.60})$$

Touratier, (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

- Un modèle exponentiel de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.61})$$

- L'approche de Aydogdu, (2005) avec :

$$f(z) = ze^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.62})$$

II.14 Approche par couche

Contrairement aux théories ESLM, les théories par-couche supposent des champs de déplacement développés séparément d'une couche matérielle à l'autre (figure III.10). Elles consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

En dépit du succès des modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse (Robbins DH, Reddy JN., (1993)), ces modèles ne sont pas capables de déterminer correctement les contraintes inter-laminaires tout près de discontinuités tels que les trous, bords libres en traction ...etc.

Dans la modélisation de ces effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons: premièrement, la contrainte normale transverse est une

contrainte généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, comme rapporté par Robbins et Reddy, (1993), les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite stratifié. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références ((Srinivas S. (1973))- Barbero E, et al (1990)) (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

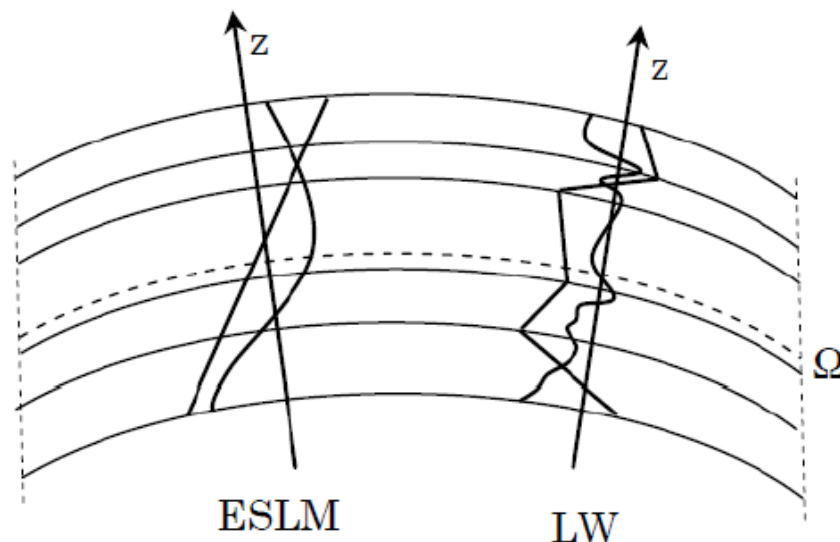


Figure II.10 : Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche (Carrera E., (2002)).

II.15 Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit (Fredrichs K.O. Dressler R.F., (1961); Goldenveizer A.L., (1962); Widera O.E., (1970)). Le travail le plus complet et intéressant semble celui de Ladeveze et Allix (Ladeveze P., (1988); Allix O., (1989)). Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte (Nguyen V. T., (2004)).

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux (Nguyen V. T., (2004)).

II.16 Conclusion

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse tout particulièrement aux pièces structurales réalisées en composites stratifiés. Ces matériaux résultent de la mise en place de couches successives de plis composites à base d'une matrice et de fibres longues. Typiquement, le recours à ce type de conception se fait dans le domaine de l'aéronautique pour des éléments de fuselage des aérostructures. A cet effet nous avons exposé dans ce chapitre les relations qui existent entre les composantes de déformation et celles de déplacement qui nous ont permis l'obtention de l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés. Cette théorie qui a pour but

de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'un stratifié en trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y) . La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur du stratifié. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments. Par suite un rapide survol des théories des stratifiés composites existantes, on peut constater que les modèles analytiques des plaques stratifiées à savoir la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

III.1 Introduction

Les plaques stratifiées font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. Cette utilisation de plus en plus importante montre la nécessité impérieuse de l'étude de leur comportement et aide également l'ingénieur à concevoir les meilleures structures. Dans ce chapitre, on a essayé de développer le comportement mécanique et thermique d'une plaque stratifiée soumise à une seule charge thermique sinusoïdale. De nouvelles théories hyperboliques inverses ont été développées sur des plaques simples sinusoïdales de quatre variables par Sahoo et Singh (2013) et Grover et al. (2013). Une théorie à une seule couche équivalente (ESLT) est présentée par Ghugal et Kulkarni (2013).

Le calcul de la flexion thermomécanique des plaques composites croisées antisymétrique est étudié en utilisant une théorie sinusoïdale des plaques à quatre variables. Cette théorie explique la répartition sinusoïdale de la contrainte de cisaillement transversal et satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces libres supérieures et inférieures de la plaque sans l'introduction du facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues et d'équations d'équilibres de la présente théorie est réduit, ce qui facilite considérablement l'analyse numérique.

III.2. Formulation théorique

Considérons une plaque stratifiée de longueur a et e largeur b et l'épaisseur uniforme h représentées dans la figure III-1. La plaque est composée de n couches orthotropes orientées à angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Le matériau de chaque couche est supposé posséder un plan de symétrie élastique parallèle au plan xy .

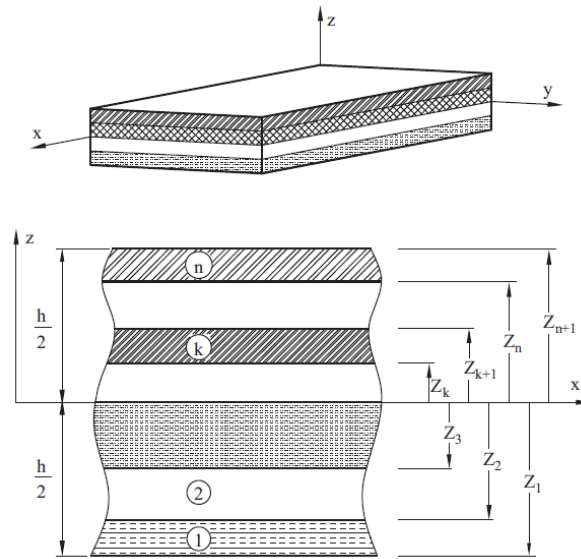


Figure III-1: système de coordonnées et épaisseurs des couches d'un stratifié

Une liaison parfaite entre les couches orthotropes et les propriétés mécaniques et thermiques indépendant de la température sont supposées. Soit la plaque est soumise à une de charge transversale $q(x, y)$, et un champ de température $T(x, y, z)$.

III.2.1 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y .

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \tag{III.1}$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \tag{III.2}$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les même déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être données comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s , se dérivent les composantes de déformations γ_{xz}, γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être données Comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

Où

$$f(z) = \left(z - \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{III.5})$$

III.2.2 Cinématique

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (III.1) – (III.5) comme

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III. 6b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.6c})$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'Eq. (III.6) soit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8a})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.8b})$$

III.2.3 Équations constitutives

Les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x T \\ \varepsilon_y - \alpha_y T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} T \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.9})$$

Où, $T = T(x, y, z)$ est la distribution de température, et $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy})$ sont les coefficients de dilatation thermique dans les coordonnées de la plaque, et ils sont liés aux coefficients $(\alpha_L, \alpha_T, 0)$ dans les directions principales des matériaux.

\bar{Q}_{ij} Sont les coefficients élastiques transformés donnés par (Bogdanovich et Pastore, 1996)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^2 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^2 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où :

Chapitre III Étude analytique du comportement thermomécanique à la flexion des plaques stratifiées

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. les coefficients de rigidité, Q_{ij} , sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, Q_{12} = \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, Q_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, Q_{66} = G_{xy}, Q_{44} = G_{yz}, Q_{55} = G_{xz} \quad (\text{III.11})$$

Où

E_x et E_y sont les modules de Young dans les directions x et y respectivement, ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson, et G_{xy}, G_{yz} et G_{xz} sont des modules de cisaillement dans le plan x-y, y-z et x-z, respectivement.

Les contraintes résultantes et de moments d'une plaque composite stratifiée composée de n couches de lamelles orthotropes peuvent être obtenus par intégration de l'équation (III.9) sur l'épaisseur, et sont écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (\text{III.12})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III.13a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III.13b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.13c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.13d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.13e})$$

Les composantes de la rigidité et inertie sont données comme:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{III.14a})$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [g(z)]^2 dz, \quad (i, j) = (4, 5) \quad (\text{III.14b})$$

Noter que, z_k la distance entre le plan moyen de la surface inférieure de la couche k-ième.

Les contraintes et les moments résultants, N_x^T, N_y^T, \dots etc due à la charge thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_1^T, M_1^{bT}, M_1^{sT} \\ N_2^T, M_2^{bT}, M_2^{sT} \\ N_6^T, M_6^{bT}, M_6^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} (1, z, f(z)) T dz \quad (\text{III.15})$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur de la plaque est supposée sous la forme suivante :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) T_3(x, y), \quad (\text{III.16})$$

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Les équations (III.17) peuvent être exprimées en termes des déplacements en remplaçant les forces résultantes de l'équation (III.15). Pour la plaque, les équations d'équilibre (III.17) prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \\
 & - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\
 & - 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = p_1
 \end{aligned} \tag{III.18a}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
 & - B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = p_2
 \end{aligned} \tag{III.18b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = p_3
 \end{aligned} \tag{III.18c}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
 & + B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4H_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} = p_4
 \end{aligned} \tag{III.18d}$$

Où $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}^t$ est un vecteur de force généralisée d_{ij} , d_{ij} et d_{ijm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.19})$$

Les composantes du vecteur force généralisées sont données par :

$$p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial y}, \quad p_2 = \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, \quad p_3 = q - \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{bT}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2},$$

$$p_4 = q - \frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2} \quad (\text{III.20})$$

III.2.4 Solutions analytiques pour les plaques antisymétriques

Pour une solution analytique des équations (III.18), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque rectangulaire avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée - appuyée).

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0$$

$$B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$B_{22} = -B_{11}; \quad B_{22}^s = -B_{11}^s$$

Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de la plaque.

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (21a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (21b)$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermomécanique de la flexion des plaques. Elle peut alors être recherchée en écrivant les chargements mécanique q ainsi que les chargements thermique T_1, T_2 et T_3 sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement thermique et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.22})$$

Où

$\lambda = \pi / a, \mu = \pi / b, t_1, t_2$ et t_3 sont des constantes.

les déplacements u_0, v_0, w_b, w_s , satisfaisant les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.23})$$

Où

U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} , and W_{smn} sont des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation (III.30) doit vérifier l'équation (III.22). On obtient l'opération suivant:

$$[C]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (\text{III.24})$$

Ou

$\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}'$ et $[C]$ c'est une matrice symétrique donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.25})$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda^3 B_{11} \\ a_{14} &= \lambda^3 C_{11} + 2\lambda \mu^2 C_{33} + \lambda \mu^2 C_{12} \\ a_{22} &= -\lambda^2 A_{33} - \mu^2 A_{22} \\ a_{23} &= \mu^3 B_{22} + 2\mu \lambda^2 B_{33} + \mu \lambda^2 B_{12} \\ a_{24} &= \mu^3 C_{22} + 2\mu \lambda^2 C_{33} + \mu \lambda^2 C_{12} \\ a_{33} &= -(D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$a_{44} = -(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + \lambda^2 A_{22}^s + \mu^2 A_{11}^s)$$

Les composantes du vecteur force généralisée $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}'$ sont donnés par:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\lambda \left(A_1^T t_1 mn + \frac{B_1^T}{h} t_2 mn + \frac{B_1^{Ts}}{h} t_3 mn \right) \\ P_2 &= -\mu \left(A_2^T t_1 mn + \frac{B_2^T}{h} t_2 mn + \frac{B_2^{Ts}}{h} t_3 mn \right) \\ P_3 &= (\lambda^2 B_1^T + \mu^2 B_2^T) t_1 mn + \frac{1}{h} (\lambda^2 D_1^T + \mu^2 D_2^T) t_2 mn + \frac{1}{h} (\lambda^2 D_1^{Ts} + \mu^2 D_2^{Ts}) t_3 mn - q_0 \\ P_4 &= -(\lambda^2 B_1^{Ts} + \mu^2 B_2^{Ts}) t_1 mn - \frac{1}{h} (\lambda^2 D_1^{Ts} + \mu^2 D_2^{Ts}) t_2 mn - \frac{1}{h} (\lambda^2 H_1^{Ts} + \mu^2 H_2^{Ts}) t_3 mn - q_0 \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$(A_i^T, B_i^T, D_i^T, B_i^{Ts}, D_i^{Ts}, H_i^{Ts}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\alpha_x \bar{Q}_{1i}^{(k)} + \alpha_y \bar{Q}_{2i}^{(k)}) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (i, j) = (1, 2) \quad (\text{III.28})$$

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique générale du comportement thermomécanique de la flexion avec la prise en compte de la contribution du phénomène de gauchissement sur le comportement des plaques stratifiées, en utilisant la théorie sinusoidale de déformation de cisaillement. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

IV. I. Introduction

Dans ce paragraphe, divers exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie. Le comportement en flexion thermomécanique des plaques composites, simplement appuyées à structure diagonale antisymétrique, est étudié. Les calculs ont été effectués pour le mode fondamental (c'est-à-dire $m = n = 1$). Toutes les couches sont supposées être de la même épaisseur et constituées du même matériau orthotrope. Dans tous les problèmes, les propriétés des couches sont supposées être: $E_x = 25 \times 10^6$ psi , $E_y = 10^6$ psi , $G_{xy} = G_{xz} = 0.5 \times 10^6$ psi , $G_{yz} = 0.2 \times 10^6$ psi , $\nu_{xy} = 0.25$.

Notons que les valeurs de $\alpha_x (\equiv \alpha_1)$ et $\alpha_y (\equiv \alpha_2)$ sont données au cours de la discussion des résultats. Nous supposerons dans tous les cas analysés (sauf indication contraire) que $a/h = 10$, $a/b = 1$, $t_1 = 1$, et $\alpha_2/\alpha_1 = 3$.

L'analyse de la flexion thermomécanique du présent exemple a été étudiée par plusieurs auteurs, et leurs résultats ont été utilisés ici à fins de comparaison. Zenkour (2004) a présenté une HSDT généralisée et a présenté la solution d'une plaque soumise à des charges thermiques et mécaniques, fournissant ainsi des résultats de référence. Reddy et Hsu(1980) ont mis au point, pour la flexion thermique de plaques stratifiées, un modèle d'éléments finis qui possède une précision exemplaire.

Le tableau IV-1 présente les résultats adimensionnels de la déflexion $\bar{w} = 10 wh / (\alpha_1 \bar{T}_2 a^2)$ au centre d'une plaque de deux couche s'à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge thermique.

Tableau IV-1: Déflexions adimensionnelles au centre: $\bar{w} = 10 wh / (\alpha_1 \bar{T}_2 a^2)$ de la plaque stratifiée carrée ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge thermique ($\bar{T}_3 = 0$).

a/h	Exact Reddy and Hsu (1980)	Present	HSDT Zenkour (2004)	SSDT Zenkour (2004)
100	1.6765	1.6766	1.6766	1.6766
50	1.6765	1.6767	1.6767	1.6767
25	1.6765	1.6771	1.6770	1.6771
20	1.6765	1.6774	1.6773	1.6774
12.5	1.6765	1.6789	1.6786	1.6789
10	1.6765	1.6802	1.6798	1.6802
6.25	1.6765	1.6858	1.6848	1.6858
5	1.6765	1.6910	1.6894	1.6910

Après une analyse de comparaison détaillée, on peut conclure que la présente théorie de plaque sinusoïdale à quatre variables donne des résultats très proches aux valeurs obtenues par la théorie de la plaque sinusoïdale classique (SSDT) développée par Zenkour (2004).

Dans le tableau IV-2, la déflexion adimensionnelle \tilde{w} des plaques à deux-couches à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge combinée est utilisée (voir Reddy et Hsu(1980)):

$$\tilde{w} = w \left[\frac{q_0 a^4}{h^3 \zeta} + \frac{\alpha_1 \bar{T}_2 a^2}{10 h} \right]^{-1} \text{ avec } \zeta = \frac{1}{12} \pi^4 \left[4G_{xy} + \frac{E_x + (1 + \nu_{xy}) E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \right]^{-1}.$$

Tableau IV-2: Déflexion adimensionnelles au centre \bar{w} de la plaque stratifiée carrée ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge combinée ($q_0 = 100$, $\bar{T}_2 = 100$, $\bar{T}_3 = 0$, $\alpha_1 = 10^{-6}$).

a/h	Exact Reddy and Hsu (1980)	Present	HSDT Zenkour (2004)	SSDT Zenkour (2004)
100	2.4451	2.4481	2.4481	2.4481
50	2.4597	2.4585	2.4586	2.4584
25	2.5083	2.4999	2.5006	2.4996
20	2.5443	2.5309	2.5321	2.5304
12.5	2.7001	2.6650	2.6679	2.6636
10	2.8438	2.7885	2.7927	2.7859
6.25	3.4666	3.3186	3.3273	3.3090
5	4.0415	3.8013	3.8120	3.7821

Les résultats obtenus présentés dans le Tableau IV-2 sont comparés à ceux prédits en utilisant diverses théories (Zenkour, 2004), Reddy et Hsu(1980). On peut constater que les résultats de la présente théorie, avec seulement quatre inconnues, sont en bon accord avec ceux obtenus dans la théorie de (Zenkour, 2004).

IV.2. Effet de l'épaisseur sur la déflexion

La variation adimensionnelle du déplacement vertical \bar{w} en fonction du rapport a/h pour des plaques carrées à deux et à quatre couches à structure diagonale antisymétrique est représentée sur les figures IV-2et IV-3, respectivement.

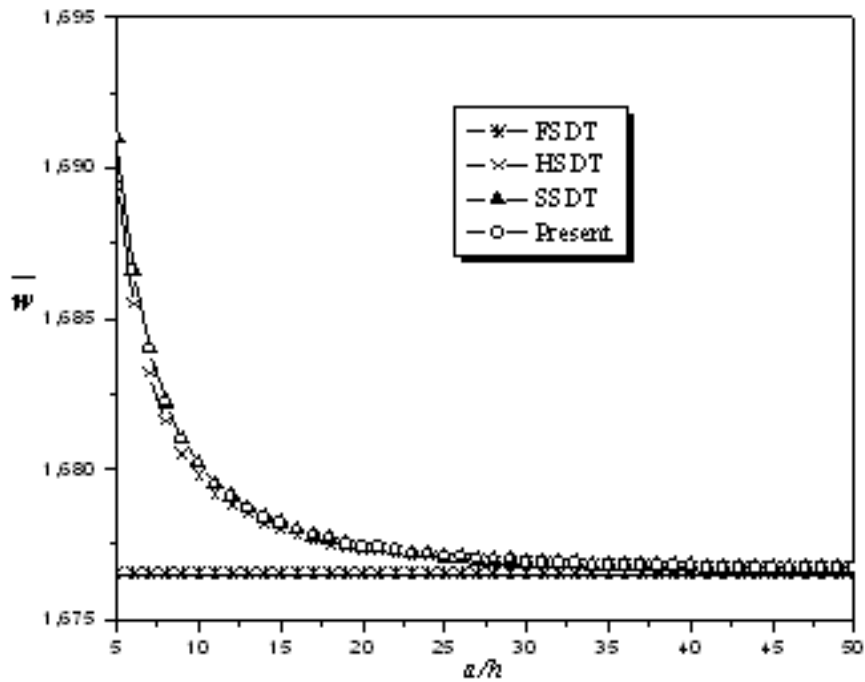


Figure IV-2: Effet de l'épaisseur sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à deux couches $(0/90)$, $(t_3 = 0)$.

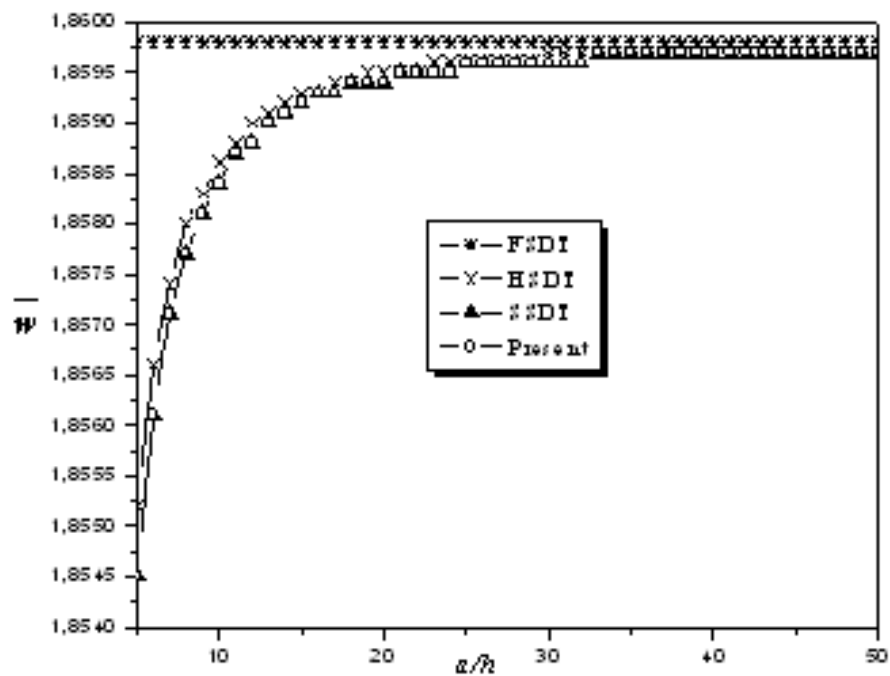


Figure IV-3: Effet de l'épaisseur sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à quatre couches $(0/90)_2$, $(t_3 = 0)$.

D'après les figures IV-2 et IV-3, on constate que le déplacement vertical \bar{w} est indépendant du rapport de l'épaisseur sur le côté pour le cas de la CPT. D'autre part, en prenant compte l'effet de la déformation de cisaillement, toutes les réponses de la présente théorie, de la HSDT, de la SSDT et de la FSDT deviennent dépendantes du rapport du côté sur l'épaisseur. Il est connu que la dépendance des réponses du rapport du côté sur l'épaisseur de la présente théorie, de la HSDT, de la SSDT et de la FSDT sont dues uniquement en raison de l'effet de la déformation de cisaillement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux déterminés par HSDT, SSDT, et FSDT comme cela est représenté sur les figures IV-2 et IV-3.

En outre, on constate que le déplacement vertical \bar{w} diminue avec l'augmentation du rapport du côté à l'épaisseur de la plaque à deux couches. Cependant, pour une plaque à quatre couches, le déplacement vertical \bar{w} augmente.

IV.3. Effet du rapport des coefficients de dilatation thermique sur la déflexion

L'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique (α_2 / α_1) sur la réponse à la flexion de la plaque carrée à quatre couches à plis croisés antisymétrique est représenté dans la figure IV-4.

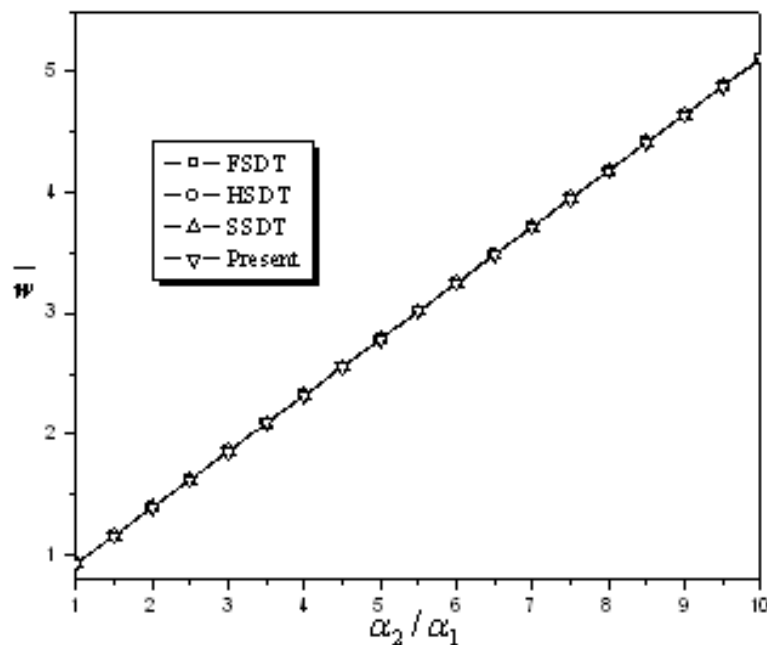


Figure IV-4: Effet du rapport du coefficient de dilatation α_2 / α_1 sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique à quatre couches $(0/90)_2$, ($t_3 = 0$).

On peut observer que le déplacement vertical \bar{w} est linéairement proportionnel au rapport α_2 / α_1 .

IV.4. Effet du rapport (a/b) sur la déflexion

La figure IV-5 montre les effets de l'aspect du rapport (a/b) sur le déplacement vertical adimensionnel \bar{w} d'une plaque carrée à quatre couches à plis croisés antisymétriques soumise à la distribution de température linéaire et /ou au chargement mécanique.

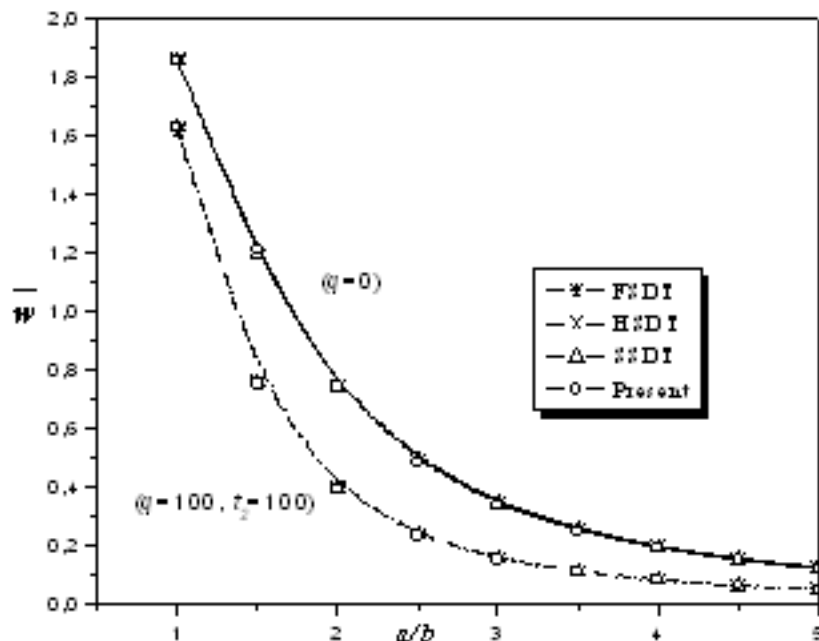


Figure IV-5: Effet de l'aspect du rapport (a/b) sur la déflexion combinée adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique $(0/90)_2$, ($t_3 = 0$).

On constate que l'effet du rapport d'aspect est plus prononcé pour le moment de flexion du au chargement thermique \bar{w} ($q = 0$) d'une plaque sous une distribution de température non uniforme.

IV.5. Effet de l'anisotropie matérielle (E_1 / E_2) sur la déflexion

L'effet du rapport des modules (E_1 / E_2) sur la réponse à la flexion pour une plaque de carré à quatre couches à plis croisés antisymétrique est représenté sur la figure IV-6. On peut en déduire que la réponse en flexion de la plaque composite dépend fortement de l'anisotropie du matériau de la couche.

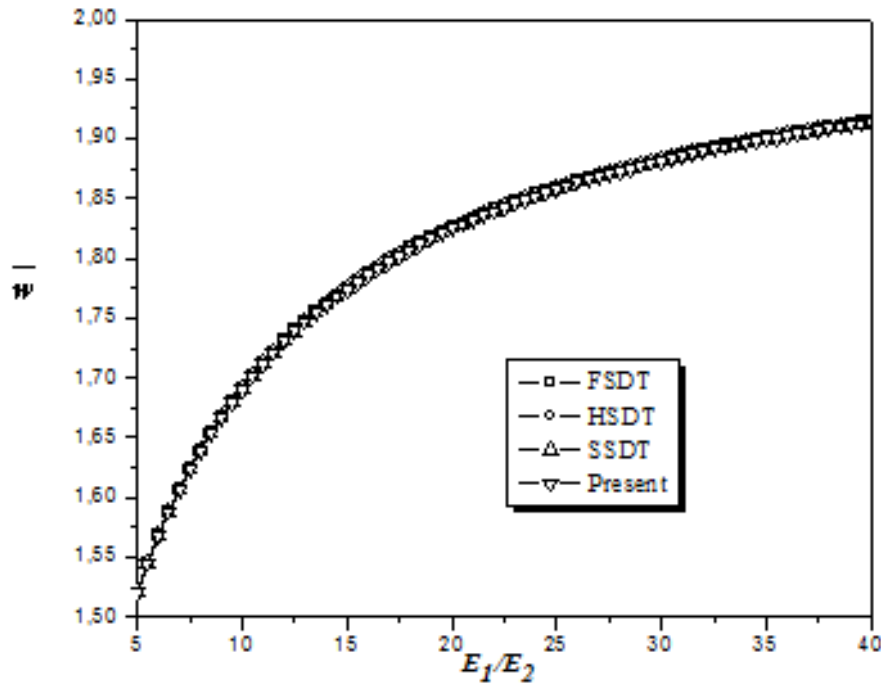


Figure IV-6: Effet de l'anisotropie matérielle E_1/E_2 sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} de la plaque carrée antisymétrique $(0/90)_2, (t_3 = 0)$.

IV.6. Conclusion

Une théorie simple des plaques à quatre variables sinusoïdale a été développée pour le chargement thermomécanique des plaques stratifiées simplement appuyées. La présente théorie prend en compte les effets de déformation de cisaillement sans la nécessité d'utiliser un facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en déplacement dû à l'effet de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues dans les équations qui régissent la présente théorie est réduit à quatre, le calcul est donc moins contraignant en comparaison à d'autres théories rencontrées dans la littérature. La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour le comportement en flexion thermomécanique de stratifiés antisymétriques à structure diagonale.

Conclusion générale et perspectives

Les plaques stratifiées utilisées comme élément de résistance au chargement thermique et mécanique est courante dans toutes les filières de l'ingénieur en structure : aéronautique, aérospatiale, civile, naval, mécanique, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important domaine d'application, il est donc évident de comprendre l'intérêt considérable et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse du comportement des plaques composites stratifiées sous l'effet d'un chargement mécanique et thermique.

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et d'hydrologie portant sur la contribution à l'étude du comportement thermomécanique des plaques composites stratifiées et afin de répondre à certains problèmes, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine une théorie simple des plaques à quatre variables sinusoïdale pour le chargement thermomécanique des plaques stratifiées simplement appuyées. La présente théorie prend en compte les effets de déformation de cisaillement sans la nécessité d'utiliser un facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en déplacement dû à l'effet de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues dans les équations qui régissent la présente théorie est réduit à quatre, le calcul est donc moins contraignant en comparaison à d'autres théories rencontrées dans la littérature. La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour le comportement en flexion thermomécanique des stratifiés antisymétriques à structure diagonale.

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique qui utilise les champs de déplacement et de déformation des plaques en matériaux composites stratifiés, en tenant compte les effets de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre élevé qui permettent de modéliser des structures composites stratifiées sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement. Les théories classiques des plaques stratifiées basées sur les hypothèses de Kirchhoff qui négligent les cisaillements transverses ne sont adéquats que pour l'analyse des plaques composites minces. Ces théories prévoient mal des solutions à des structures multicouches modernes et épaisses avec un degré d'anisotropie élevé ; par contre la théorie linéaire du premier ordre associée à Reissner-Mindlin pour le cas des plaques épaisses, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement.

L'objectif de cette recherche est l'étude du comportement thermomécanique, analytique et numérique des plaques composites stratifiées antisymétriques, simplement appuyées sous l'effet d'un cisaillement transverse.

Pour terminer, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des plaques composites stratifiées, tout en espérant qu'il servira à une meilleure compréhension des phénomènes de déformation sous l'effet mécanique et thermique de ces plaques stratifiées pour développer et approfondir les connaissances dans le domaine d'utilisation des matériaux composites en génie civil.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293 – 318.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010) "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int J Mech Mater Des*, 6(2), 113-121.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, (Accepted).

Ali, J.S.M., Bhaskar, K., Varadan, T.K. (1999), "A new theory for accurate thermal/mechanical flexural analysis of symmetric laminated plates", *Compos. Struct*, 45, 227–232. Ambartsumian, S.A. (1958), "On the theory of bending plates" *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, 5, 69–77.

Allix O., Modélisation du comportement des composites stratifié : application à analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.

Ambartsumian S.A., On the theory of bending plates. *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, 5: 69–77, 1958.

Ambartsumyan S.A., *Theory of Anisotropic Plate*. Economic Publishing Co, 1969.

Aydogdu M., Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, p. 1740–1755, 2005.

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 547 – 567.

Barbero E, Reddy J, Teply J., An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29: 1–14, 1990.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, 60, 274–283.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2014), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel and Composite Structures*, (In press).

Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, 42, 1386-1394.

Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams”, *Structural Engineering and Mechanics*, 48(3), 351 – 365.

Berthelot J.-M., *Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures*, Éditions TEC & DOC, 2ème édition, 1999.

Bogdanovich, A.E., Pastore, C.M. (1996), “Mechanics of textile and laminated composites with applications to structural analysis”, London: Chapman & Hall.

Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, 14(1), 85 – 104.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 15(5), 399-423.

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082.

Carrera E., *Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells*. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9: 87–140, 2002.

Castellazzi, G., Krysl, P., Bartoli, I. ((2013), “A displacement-based finite element formulation for the analysis of laminated composite plates”, *Composite Structures*, 95, 518-527.

Cui, X.Y, Liu, G.R, Li, G.Y. (2011), “Bending and vibration responses of laminated composite plates using an edge-based smoothing technique”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(6), 818-826.

Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69-81.

EL Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237 – 247.

Fredrichs K.O. Dressler R.F., A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. on Pure Applied Mathematics*, vol. 14, p. 1–33, 1961.

Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2013a), "Flexural analysis of cross-ply laminated plates subjected to nonlinear thermal and mechanical loadings", *Acta Mech*, 224, 675–690.

Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2013b), "Thermal response of symmetric cross-ply laminated plates subjected to linear and non-linear thermo-mechanical loads", *Journal of Thermal Stresses*, 36, 466–479.

Ghugal, Y.M., Kulkarni, S.K. (2011), "Thermal stress analysis of cross-ply laminated plates using refined shear deformation theory", *J. Exp. Appl. Mech.*, 2, 47–66.

Goldenveizer A.L., Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prik. Mat. Mech.*, vol. 26, no. 4, p. 668–686, 1962.

Grover, N., Maiti, D.K., Singh, B.N. (2013), "A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates", *Composite Structures*, 95, 667–675.

Grover, N., Maiti, D.K., Singh, B.N. (2014), "Flexural behavior of general laminated composite and sandwich plates using a secant function based shear deformation theory", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(7), 1275 – 1297.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2014), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, (In press).

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383.

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. (2013), "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 76, 102–111.

Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int J Solids Struct*, 40, 1525–1546.

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.

Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, 11(5), 135007.

Ladeveze P., *Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques*, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2014), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect" *Steel and Composite Structures*, (In press).

Mahi, A., Adda Bediab, E.A., Tounsi, A. (2014), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Modelling*, (In press)

Matsunaga, H. (1999), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos. Struct.*, 87, 344–357.

Meftah. S. A, Yeghnem. R, Tounsi.A and Adda Bedia.E. A, *Seismic behavior of RC coupled shear walls repaired with CFRP laminates having variable fibers spacing Construction and Building Materials 21(8), 1661-1671,2007, Algérie.*

Mindlin, R.D. (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), 31-38.

M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*, 29 (8): 901–916, 1991.

Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), "Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory", *Mechanics of Composite Materials*, 49(6), 629 – 640.

Nguyen V. T., *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.

Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421–433.

Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J App Mech*, 51, 745–752.

Reddy J.N., An evaluation of equivalent-single-layer and layer-wise theories of composite laminates. *Composite Structures*, vol. 25, p. 21–35, 1993.

Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, 1997.

Reddy, J.N., Hsu, Y.S. (1980), "Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates", *J Thermal Stresses*, 3, 475–493.

Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 12(2), 69-72.

Robbins DH, Reddy JN., Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. *Computers & Structures*, 41(2): 65–79, 1991.

Robbins DH, Reddy JN., Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, p. 655–77, 1993.

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Steel and Composite Structures*, (In press).

Said, A., Ameer, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2014), "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350098

Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, 15, 221-245.

Sahoo, R., Singh, B.N. (2013), "A new inverse hyperbolic zigzag theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates", *Composite Structures*, 105, 385–397.

Soldatos, K.P., Timarci, T. (1993), "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories", *Compos Struct*, 25, 165–71.

Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 30: 495–507, 1973.

Swaminathan, K., Naveenkumar, D.T. (2014), "Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates e Analytical solutions", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 47, 349-361.

Tounsi, A., Semmah, A., Bousahla, A.A. (2013a), "Thermal buckling behavior of nanobeam using an efficient higher-order nonlocal beam theory", *Journal of Nanomechanics and Micromechanics (ASCE)*, 3, 37 – 42.

Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A., Zidour. M. (2013b), "Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes", *Advances in Nano Research*, 1(1), 1 – 11.

Tounsi, A, Houari, M.S.A., Benyoucef, S, Adda Bedia, E.A. (2013c), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Science and Technology*, 24, 209–220.

Whitney et al., Whitney J.M., Pagano N.J., Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 37, p. 1031–1036, 1970.

Whitney J.M. et Sun C.T., A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound and Vibration*, vol. 30(1), p. 85–97, 1973.

Whitney, J.M., Leissa, A.W. (1969), “Analysis of heterogeneous anisotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, 36(2), 261-266.

Whitney J.M., The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *J.Compos. Mater*, vol. 3, p. 534–547, 1969.

Widera O.E., An asymptotic theory for the motion of elastic plates. *Acta. Mech.*, vol. 9, p. 54–66, 1970

Wu, Z., Cheng, Y.K., Lo, S.H., Chen, W. (2007), “Thermal stress analysis for laminated plates using actual temperature field”, *Int. J. Mech. Sci.*, 49, 1276–1288.

Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach”, *Meccanica*, 48(8), 2019 – 2035.

Zenkour, A.M. (2004), “Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading”, *Composite Structures*, 65(3-4), 367-379.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory” *Aerospace Science and Technology*, 34, 24–34.