



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité: Génie Mécanique

Option: Sciences des Matériaux

Présentée par Monsieur

KHELIL Foudil

Analyse numérique de la propagation de la fissure par le critère T-stress

Soutenue le :

Devant le Jury composé de:

Président	Mr. Kacem KADDOURI	Pr	UDL Sidi Bel ABBES
Examineur	Mr. Benali BOUTABOUT	Pr	UDL Sidi Bel ABBES
Examineur	Mr. Abderrahmane BELARBI	Pr	Univ. Mohamed Boudiaf Oran
Examineur	Mr. Abdelkarim AID	Pr	Université de Mascara
Examineur	Mr. Laïd AMINALLAH	MCA	Université de Mascara
Directeur de thèse :	Mr. Mohamed BELHOUARI	Pr	UDL Sidi Bel ABBES

2015-2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont, en premier lieu, à mes encadreurs BELHOUARI Mohamed, Professeur au laboratoire de Mécanique et Physique du Matériau de l'Université de Sidi Bel Abbes, et BENSEDDIQ Noureddine, Professeur au Laboratoire de Mécanique de Lille de l'Université de LILE1, d'avoir accepté de diriger ce travail de thèse. Leur disponibilité, leur compétence et leur optimisme ont permis le bon déroulement de cette recherche et son achèvement dans les meilleures conditions. Sans leur aide, ce document n'aurait pas vu le jour.

Je voudrais également adresser mes sincères remerciements à Monsieur TALHA Abderrahim, chargé de recherche au laboratoire LML de l'Université de LILE1 et conseiller d'étude dans le cadre de ma thèse. Il m'a aidé à me perfectionner à la modélisation numérique. Il a également corrigé régulièrement mes rapports d'essais ainsi que mon manuscrit de thèse. Son aide précieuse et désintéressée s'est révélée indispensable à l'élaboration de cette thèse.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur ABDELOUAHEB Amrouche, chargé de recherche au laboratoire LML, qui m'a transmis son savoir et m'a aidé à réaliser les essais, de la préparation des ferrailages jusqu'au traitement des résultats expérimentaux. Son aide m'a également été précieuse dans la correction de mes rapports d'essai.

Je tiens à remercier très sincèrement Monsieur AOUR Benaoumeur pour sa participation à mes travaux et également sa contribution dans la correction de ma thèse et publication. Sa gentillesse et son aide désintéressée m'ont permises de mieux appréhender la vie en recherche scientifique.

Mes remerciements vont à Gerard Mesmeque pour sa gentillesse et les aides qu'il a apporté à mon travail.

Mes remerciements sincères s'adressent également à Hadj Meliani Mohamed pour sa collaboration à résoudre les problèmes que j'ai rencontrés au cours de mes recherches et à sa patience pour m'expliquer quelques règles techniques.

Je remercie également Monsieur KHALDI Abdelkader, Le recteur de l'Université Mustapha Stambouli de Mascara, ainsi que Monsieur Bouchekara Mohamed, le doyen de la faculté de sciences et de technologie de l'Université de Mascara pour leur aide désintéressée.

J'ai également beaucoup apprécié les relations que j'ai pu avoir avec les autres doctorants du laboratoire LML, Bianca Vérok, Rodreguez Tuan Chu, Meguenni Mohamed.

Je remercie sincèrement toutes les personnes de l'université HEI qui m'ont aidé à faire mon apprentissage de la recherche en particulier Messieurs MERHABI et JAEN Michelle, pour leurs aides.

Je remercie sincèrement tout le personnel de l'Université Djilali Liabès de Sidi Belabes, pour leurs aides.

Je remercie Monsieur Kacem KADDOURI de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Mes remerciements vont également à Messieurs les membres de jury: Benali BOUTABOUT, Abderrahmane BELARBI, Abdelkarim AID, et AMINALLAH Laïd d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement toutes les membres du laboratoire LABAB qui m'ont aidé à faire mon apprentissage à la recherche et pour leur aide et soutien morale.

Je remercie aussi tous les membres du laboratoire LPQ3M, pour le bonheur qu'ils m'ont apporté en travaillant avec eux.

Je tiens à remercier très sincèrement Messieurs ACHOURI ET BENOUS Mohamed pour leur participations à mes travaux et également leur contribution dans la correction de ma thèse.

Je remercie mes parents Tayeb Khelil et Zohra Elhachemi, et également mes frères et sœurs qui m'ont soutenu dans mes choix et m'ont encouragé à les réaliser.

Je remercie ma petite famille ma femme Fatima qui a partagé ma vie ces onze dernières années, je la remercie de son soutien et de sa patience.

Enfin, mes gratitudes vont également à ma fille (Wissal) et mon fils (Hichame) qui, en dormant sagement la nuit, ont été merveilleux avec moi.

RESUME

L'analyse du comportement de rupture des structures fissurées est dominée principalement par le champ de contrainte près de la pointe de la fissure. L'intérêt en mécanique de la rupture linéaire élastique réside principalement dans les facteurs d'intensité de contraintes qui décrivent le champ de contrainte singulière devant la pointe de la fissure et régissent la rupture d'une éprouvette quand son facteur d'intensité de contrainte critique est atteint. L'utilité des paramètres de la pointe de fissure représentant le champ de contrainte singulière a été montré très tôt par de nombreuses recherches. Néanmoins, il existe des preuves expérimentales qui montrent que les contributions de contraintes agissant sur une longue distance à partir de la pointe de la fissure peuvent affecter les paramètres de la mécanique de la rupture. La contribution du terme de contrainte (premier terme d'ordre supérieur de l'expansion des champs de Williams, désigné par le terme T-stress) est les prochains paramètres important. Des informations suffisantes sur l'état de contrainte sont disponible, si le FIC et le T-stress sont connus. Dans des cas particuliers, il peut être avantageux de connaître également des coefficients plus élevés de l'expansion de la série de contraintes. Ceci par une méthode qui permet de déterminer les facteurs d'intensité de contraintes et le T-stress pour des cas de chargement compliqué, ces méthodes de calculs sont expliquée en détail.

A cet effet une méthode, dite la méthode des jauges virtuelles de déformation, est proposée pour une évaluation numérique précise du facteur d'intensité de contrainte (SIF), le T-stress et le paramètre de biaxialité β . Cette méthode est basée sur les positions optimales des jauges virtuelles de déformations situées à proximité de la pointe de fissure de telle sorte que l'effet des souches singulières dominantes est annulées. L'applicabilité de la méthode proposée est examinée pour des conditions d'incidence de chargement quasi-statique et à faible vitesse sur une éprouvette (TPB) en flexion à trois points et éprouvette à simple fissure au bord (SENT). Les effets des conditions de chargement, de la configuration de la géométrie et de la longueur de la fissure ont été présentés et discutés. Un bon accord a été trouvé entre les résultats de la méthode proposée et ceux des données numériques et expérimentales publiées précédemment. En outre, on remarque que la méthode proposée est alternative et plus avantageuse que la méthode d'extrapolation à cause de sa simplicité et l'exactitude des résultats.

ABSTRACT

Analysis of breakdown of the behavior of cracked structures is dominated mainly by the stress field near the crack tip. The interest in mechanics of linear elastic fracture mainly focuses on the stress intensity factors that describe the singular stress field at the crack tip and govern the breakdown of a test when his stress intensity factor criticism is reached. The usefulness of the crack tip parameters representing the singular stress field was shown early on by many research. However, there is experimental evidence that also the stress contributions acting on a long distance from the crack tip can affect the fracture mechanics properties. The stress contribution term (first term higher order expansion of Williams field, appointed by the T-term stress) is the next important parameter. Sufficient information on the stress state is available, if the FIC and the T-stress are known. In special cases it may be advantageous to also know the higher coefficients of expansion of the series of constraints. This is a method that allows to know the stress intensity factors and T-stress for cases of complicated loading was determined. These calculation methods are explained in detail.

For this purpose a method, called the method of virtual strain gauge is proposed for accurate numerical evaluation of the stress intensity factor (SIF), the T-stress and biaxial parameter β . This method is based on the optimal positions of the virtual strain gauges located close to the crack tip such that the effect of dominant singular strains is canceled. The applicability of the proposed method is examined for incidence terms of quasi-static loading and low speed on a (TPB in three-point bending) and test single crack on the edge (SENT). The effects of loading conditions, configuring the geometry and length of the crack were presented and discussed. A good agreement was found between the results of the proposed method and those of numerical and experimental data published previously. Furthermore, we note that the proposed method is an alternative and more advantageous than the extrapolation method because of its simplicity and its accuracy of results.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	i
Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Notation	xi
Introduction générale	01
CHAPITRE I: Quelques aspects de la mécanique de la rupture	11
I.1. Introduction	11
I.1. Déplacement des lèvres de la fissure et modes élémentaires de rupture	11
I.2. Rappels d'élasticité plane, fonction d'Airy	13
I.3. Approche locale : champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une fissure	15
I.3.1. Les solutions analytiques 2D de Westergaard, Sih et Eftis	15
I.3.2. Généralisation du problème à des milieux de dimension finie	18
a) Développement en série de Williams	19
b) Facteur d'intensité de contraintes et contrainte transverse	22
c) Zone plastique en pointe de fissure	23
I.4. Approche du problème par les éléments finis	28
I.5. Conclusion du chapitre	31
I.6. Bibliographie du chapitre	32
CHAPITRE II : Identification des paramètres de la rupture	
II.1. Introduction	38
II.2. Transformation de phase dans la zone plastique en présence de T-stress	39
II.2.1. Effet de T-stress sur les micro-zones de la zone fissurée	39
II.2.1.1. Micro-fissuration devant une fissure	40
II.2. Etude des Singularités des contraintes	45
II.2.1. Approche de Cotterell	46
II.2.2. Approche de Cotterell Rice	47
II.2.3. Approche Selvarathinam et Goree	49
II.2.4. Autres Approches	49
II.2.5. statistiques sur les approches proposées	50
II. 3. Méthodes déterminant la contrainte T	51
II.3. 1. Introduction	51
II.3. 2. Méthode de Différence des Contraintes (SDM).	53
II.3. 3. Méthode d'extrapolation	53
II.3. 4. Autres méthodes de calcul ...	57
II.4. Méthode pour la détermination de K et de T	57
II.4.1 Méthode des éléments de frontière	57
II.4.2 Méthode analytique de Wigglesworth	57

II.4 3 Procédures de collocation	58
II.4.3.1 Conditions aux limites	58
II.4.3.2 Principe de superposition	58
II.5. Transformation de Phase en présence de T-stress	60
II.5.1 Effet de T-stress sur les micro-zones de zone craquage	60
II.5.2 Micro-fissures	61
II.5.3. Microfissuration devant une fissure	62
II.5.4. Critères de pose	64
II.6 .Evolution de la contrainte T	64
II.6.1 Influence de T sur la taille de la zone plastifiée	49
II.7. Effet d'échelle et de géométrie	68
II.7.1 Effet de la taille de la fissure	69
II.7.2 Influence de T sur le type de chargement	69
II.7.4 Influence de la température	71
II. 8 Application de t en 3 dimensions	71
Bibliographie	73

CHAPITRE III: Modélisation de la propagation de fissure par fatigue dans des alliages d'Aluminium utilisant une approche énergétique

III.1. Introduction	80
III.2 Bases théoriques	82
III.2.1 Description énergétique de la propagation de la fissure par fatigue	81
Domaine I	82
Domaine II	83
Domaine III	84
III.2.2 L'énergie de déformation plastique cyclique- Modèle proposé	84
III. 3. Détails expérimentaux	89
III. 3.1 Matériau et géométrie de l'échantillon	89
III.3.2 Identification des paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique	91
III.3.3 Identification de la loi de Paris...	91
III.4. L'implémentation de l'approche proposée	92
III.5. Resultats et discussion	93
III.5.1 Evolution de la zone plastique	94
III.5.2.Distribution des déplacements	96
III.5.2 L'évolution de l'énergie totale dissipée dans l'éprouvette	96
III.5.3 Relation entre Q et da/dN	97
III.6. Conclusion	99
Références bibliographiques	

CHAPITRE IV: Evaluation des paramètres de rupture par MDJV

	103
IV .1. Introduction	103
IV.2 Formulation Mathématique...	106
IV.2.1Détermination de KI	108

IV.2.2 Evaluation de T-stress et le paramètre de biaxialité β	110
IV.3 Résultats et discussions	111
IV.3.1 Eprouvette en flexion a trois points tpb	113
IV.3.2 Eprouvette SENT sous contrainte de traction uniforme	116
IV.4 conclusion	121
Bibliographie	122
Conclusion générale	124

Liste des tableaux

CHAPITRE I

Tableau I.1 : Exemple de calcul des premiers coefficients de la série de William...	28
Tableau I.2: Valeurs calculées de Y et B pour différentes tailles d'éprouvettes	28
Tableau I.3: Répartition des contraintes élastiques en fond d'entaille	36

Chapitre II 48

Tableau. II.1: Classement de la stabilité de la trajectoire de la fissure pour différentes éprouvettes avec des longueurs de fissures typiques	48
Tableau. II.2: Valeurs de T-stress normalisé, rapport de biaxialité et le FIC normalisé pour différentes éprouvettes	50

Chapitre III 89

Tableau. III.2: Composition nominale (en %) des alliages étudiés	90
Tableau. III.4: Paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique	91
Tableau. III.3: Propriétés mécaniques nominales des alliages étudiés	91

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure I.1: Représentation d'une fissure dans une plaque chargée d'épaisseur t	13
Figure I.2: Modes élémentaires de fissuration	14
Figure I.3: Plaque fissurée, milieu bidimensionnel infini en mode I	21
Figure I.4: Eprouvettes fissurées de type CN, DEN et SEN sous chargement uniaxial	22
Figure I.5 : Distribution des points de collocation dans le cas d'une éprouvette SENT..	28
Figure I.6 : Maillages rayonnants réalisés pour l'éprouvette SENT	32
Figure I.7: Comparaison des expressions globales et asymptotiques du champ de contraintes le long de la fissure	33

CHAPITRE II

Figure. II.1: a) zone de transformation de phase en avant de la pointe de fissure, b) la zone après l'extension de fissure	40
Figure II.2: Joints de grains cassés dans une région avant d'une pointe de fissure définissant la zone de micro-fissure	41
Figure II.3: Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du paramètre T	42
Figure II.4: Rapport de biaxialité en fonction d' a/W pour différentes configurations d'éprouvettes fissurées	44
Figure II.5: Représentation schématique de la direction de propagation de la fissure : (a) chemin d'une fissure stable, (b) chemin d'une fissure instable	46
Figure II.6: a) Données géométriques d'une propagation de fissure en mode I et en mode II respectivement; b) Influence de T -stress après branchement de la fissure	47
Figure II.7 Branchement de la fissure, pour différentes situations de la contrainte T	49
Figure II.9: (a) Exemples d'évolution des contraintes le long du ligament, pour un rapport d'épaisseur de 20% ($a/t = 0.2$, $P = 150$ N)	53
Figure II.10: Régression linéaire par éléments finis pour déterminer : (a) le Facteur d'Intensité de Contraintes K_I , (b) la contrainte T avec la méthode de différence de contraintes modifiée	54
Figure II.11 : Les éprouvettes SEN et DENT	55
Figure II.12 : Evolution de la contrainte T normalisée à la contrainte nominale pour une éprouvette : (a) SEN avec un rapport de $a/w = 0.4$, (b) DEN avec $a/t=0.2$	56
Figure. II.13: méthode de superposition pour le calcul de T -stress : (a) –(c)	56
Figure II.14 Illustration du principe de superposition pour calculer les contraintes-pour les forces individuelles	59
Figure II.15: zones pour les deux critères de craquage Micro-fissures.	63
Figure II.16: rapport de biaxialité β pour cas de flexion 4 points d'une barre	64
Figure II.17 : Les tendances générales de la taille et de la forme de la zone plastique pour différents T -stress sous petite échelle a)cas de contrainte plane	65

(conditions) cas de déformation plane (conditions).

Figure II.18: Effet de la géométrie sur la courbe K-T	
Figure II.19: Evolution de la contrainte T en fonction de la longueur de la fissure, pour quelques éprouvettes normalisées	69
Figure II.20: Fissures de Griffith de différentes longueurs	69
Figure II.21: Développement de confinement représenté par le paramètre A_3 pour différentes vitesses de chargements	72

CHAPITRE III

Figure III. 1: Représentation schématique d'une boucle d'hystérésis.	82
Figure III.2: La courbe typique du taux de propagation de fissure par (kinetic fatigue failure diagram: KFFD)..	83
Figure III.3: Elément en pointe de fissure: (a) rectangulaire, (b) circulaire	86
Figure III.4: Configuration de l'essai cyclique sur une éprouvette CT	90
Figure III.5: Ajustement des données expérimentales par la loi de Paris	93
Figure III.6: Organigramme de la procédure numérique	94
Figure III.7: Evolution de la zone plastique normalisée dans le cas de: (a) Modèle de Tracey (b) Modèle proposé pour les deux alliages d'Aluminium	95
Figure III.8: Comparaison de l'énergie dissipée par cycle, mesurée avec celle estimée pour: (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351	96
Figure III.9: Evolution de da/dN en fonction de Q pour (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351.	98

CHAPITRE IV

Figure IV.1 : Schémas d'illustration des trois régions associées à la pointe de la fissure et l'emplacement avec l'orientation des points de mesure de déformation	107
Figure IV.2 : Emplacement des jauges virtuelles de déformation au voisinage d'une pointe de fissure	111
Figure IV. 3: Schéma illustratif de: (a) TPB et (b) SENT éprouvette	112
Figure IV.4 : schéma illustratif de: (a) les conditions aux limites et le maillage typique utilisé pour la moitié de l'éprouvette (b) Détail du maillage raffiné utilisé à proximité de la pointe de la fissure	113
Figure IV.5: Comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux de l'évolution de (a) SIF (b) Biaxialité paramètre en fonction de la charge appliquée	114
Figure IV.6 : Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux avec $a/W = 0.5$ pour l'évaluation de (a) SIF et (b) T-stress en fonction de r/B	115
Figure IV.7: Schéma illustratif de: (a) les conditions aux limites, (b) maillage typique utilisé pour la moitié de l'éprouvette SENT, (c) Détail du maillage raffiné utilisé à proximité de la pointe de la fissure	116
Figure IV.8: Comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux avec $a/W = 0.5$ pour l'évaluation des valeurs normalisées de FIC dans le cas de: $a/W = 0.3$ avec différents rapports (a) $h/W = 0.3$ (b) $h/W = 0.5$; (c) $h/W = 0.7$ et (d) $h/W = 1$	117
Figure IV.9: Comparaisons entre les résultats numérique et expérimentaux avec $a/W =$	118

0.5 pour l'évaluation des valeurs normalisées du FIC dans le cas de: $a/W = 0.5$ avec différents rapports (a) $h/W = 0.3$ (b) $h/W = 0.5$; (c) $h/W = 0.7$ et (d) $h/W = 1$

Figure IV.10: L'évolution historique du paramètre T-stress en fonction du chargement appliqué pour une éprouvette SENT 119

Figure IV. 11: L'évolution du paramètre de biaxialité avec le rapport a/W dans le cas de $h/W=0.3, 0.5$ and 1.0 120

Notation

a	Longueur de fissure
A	Constante universelle adimensionnelle
a_0	Longueur de fissure initiale
a_{cr}	Longueur de fissure critique
B	Epaisseur de l'éprouvette
C	Constante de la loi de Paris
da/dN	Taux de propagation de fissure par fatigue
E	Module de Young
$f(z)$	Fonction de complaisance
$f_N(\theta)$	Fonction des coordonnées polaires en pointe de la fissure
G	Module de cisaillement
K	Coefficient de résistance
K_C	Facteur d'intensité des contraintes critique
K_I	Facteur d'intensité des contraintes en mode I
m	Exposant de la loi de Paris
n	Exposant de la loi de Ludwik
N'	Exposant d'écrouissage
N''	Exposant reliant les amplitudes des contraintes et des déformations
P	Force appliquée
Q	Energie totale dissipée
r	Rayon (coordonnées polaires)
R	Rapport de charge ou de contrainte P_{min}/P_{max}
R_1	Rayon de l'élément circulaire en pointe de fissure
$R_N(\theta)$	Fonction amplitude
$r_p(PD), r_p(PS)$	Limite de la zone plastique en déformations planes ou en contraintes planes.
S	Surface de l'élément en pointe de fissure

S_M	Surface de la zone plastique déterminée par le modèle proposé.
S_{pz}	Surface de la zone plastique calculée par le modèle de Tracey.
U	Travail spécifique.
w	Largeur de l'éprouvette
α_M	Constante dépendant du matériau et du critère utilisé
σ_a	Amplitude de contraintes.
σ_c	Contrainte d'écoulement cyclique
σ_y	La limite élastique
ε_a	Amplitude des déformations
ν	Coefficient de Poisson
θ	Angle (Coordonnées polaires)
ΔK_I	Amplitude du facteur d'intensité des contraintes en mode I
ΔK_{th}	Amplitude du facteur d'intensité des contraintes seuil.
ΔP	Amplitude de force ($P_{\max} - P_{\min}$)
ΔW_p	Energie cyclique plastique par surface d'élément
$\Delta W(PZ)$	Energie dissipée sur la zone plastique par unité d'épaisseur
$\overline{\Delta\sigma}$	Amplitude des contraintes équivalente
$\Delta\sigma_0$	Limite élastique cyclique du matériau
$\overline{\Delta\varepsilon}$	Amplitude des déformations équivalentes
$\langle \overline{\Delta\varepsilon} \rangle$	La moyenne de l'amplitude des déformations équivalentes
$\Delta\varepsilon_0$	Déformations totales équivalentes.
$\Delta\varepsilon_p$	Déformation plastique.
$\overline{\gamma}$	Contrainte de cisaillement au voisinage de la pointe de fissure
τ_0	Limite élastique sous cisaillement pur.
A_n, B_m	Coefficients du champ asymptotique de pointe de la fissure
h	Mi-hauteur de la plaque
K_{IC}	Le facteur d'intensité critique de contrainte du premier mode
L	Demi-longueur de l'échantillon
P	Charge appliquée sur l'échantillon
$P_i(r,\theta)$	Emplacements des jauges de contrainte virtuelles
r	distance radiale de la pointe de la fissure

r, θ	Coordonnées polaires (composantes)
W	largeur des échantillons
x, y, z	Coordonnées cartésiennes (composants)
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	déformation normales en direction x et y
$\varepsilon_{x'x'}, \varepsilon_{y'y'}$	déformation normales par rapport aux coordonnées (x', y')
γ_{xy}	contrainte de cisaillement dans plan x - y
ν	le coefficient de Poisson
ρ	masse volumique
μ	le module de cisaillement
σ_{xx}, σ_{yy}	contraintes normales dans x et y
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement dans plan x - y
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
FEM	Méthode Elements Finis
HRR	Champ: Hutchinson-Rice-Rosengren
LEFM	Mécanique linéaire élastique de la rupture
PMMA	Poly (méthacrylate de méthyle) (Plexiglas)
QPE	Element Point Quadratique
TPB	Three-point bending Specimen
SENT	Eprouvette de traction avec Simple fissure au bord
SIF	Facteur d'intensité des contraintes
T	T-stress
β	Biaxialité

INTRODUCTION

GENERALE

Les fissures sont présentes dans toute structure, elles peuvent exister sous forme de défaut de base dans le matériau ou peuvent être induites durant la construction ou durant le service des structures. A cause de leurs conditions opérationnelles sévères, de nombreux composants industriels sont soumis à des combinaisons complexes de contraintes mécaniques cycliques et températures cycliques. Ces combinaisons sont à l'origine de l'amorçage et de la propagation de fissures de fatigue dans ces pièces, ce qui peut conduire jusqu'à la rupture. Ainsi, l'étude de la tenue en fatigue de ces pièces dans de telles conditions devient indispensable car il nous permet de prévoir la durée de vie et la sécurité des composants.

Dans ce domaine le sujet de recherche ayant reçu une attention considérable de par ses aspects attractifs comme l'application dans les analyses de rupture et particulièrement en mécanique de la rupture, es la propagation de fissure. Ce domaine qui est probablement le plus cité en littérature de la mécanique de la rupture, constitue l'assises de la majorité des applications en mécanique de la rupture et la caractérisation du champ de contraintes et de déformations en fond de fissure.

L'endommagement provient généralement soit du clivage, soit des cavités ductiles selon le mécanisme prédominant. Ceci amène à considérer deux critères différents. Pour les ruptures par clivages, les critères reposent sur la plus grande contrainte principale critique. Généralement, le clivage d'un seul grain suffit pour entraîner la rupture complète. Dans cette perspective, la distribution statistique des tailles et des orientations des grains entraîne un caractère aléatoire sur la valeur de la charge de rupture d'une pièce. La statistique de Weibull [1], qui prend en compte ces effets, permet d'établir un lien entre le comportement statistique d'un élément de volume et la ténacité [2]. Pour les ruptures ductiles, les critères font intervenir à la fois la déformation plastique et le taux de triaxialité des contraintes [3]. En général ces critères dérivent de la loi de croissance des cavités établies par Rice et Tracey [4]. La rupture intervient lorsque la taille des cavités atteint une valeur critique conduisant à une relation entre la déformation à la rupture et le taux de triaxialité des contraintes. Il est donc possible de prévoir comment se propage une fissure à condition de disposer d'un calcul suffisamment précis des contraintes et des déformations à son extrémité. Anderson [5] reprend des travaux antérieurs de William [6] et O'Dowd et Shih [7] et diminue les dépendances des différents paramètres géométriques en utilisant un second paramètre dans l'approche globale de la rupture. Pour "enrichir" le facteur d'intensité de contraintes K_I , le paramètre T est introduit pour modéliser le champ des contraintes élastiques en pointe de

fissure. De même, en élastoplasticité (loi puissance), la variable Q résume les effets de triaxialité des contraintes. Mais la conclusion d'Anderson c'est que cette modification de l'approche classique ne suffit pas, il faut donc inclure un critère local de rupture pour prédire correctement l'influence de la triaxialité sur la ténacité des composants.

Cependant, plus de détails sur les caractérisations à deux paramètres sont disponibles dans l'article de Parks [8]. Des exemples d'application sont trouvés pour trois types de géométrie, Wu et al [9] et Martin et al. [10]. Mais en dehors des éprouvettes classiques, telles les éprouvettes CT ("Compact Tension"), SENB et SENT ("Single Edge Notched Bend and Tension Specimens"). Nous avons relevé peu d'applications à des composants industriels de ces approches à deux paramètres. D'ailleurs, Parks [8] insiste bien sur le fait que les différentes approches globales, à deux paramètres, ont chacune leurs avantages et désavantages, mais aucune ne décrit complètement les champs de contraintes en pointe de fissure.

Le comportement de la rupture mécanique est généralement caractérisé par un seul paramètre, comme le facteur d'intensité de contrainte (SIF) qui dépend de l'intégrale J du contour [11]. Ces quantités fournissent une mesure du comportement dominant du champ de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure. Pour comprendre l'effet de la configuration géométrique et le chargement sur la «contrainte conditions» à la pointe de la fissure [12], un autre paramètre est nécessaire. Le deuxième paramètre de fracture souvent utilisé est le 'élastique T-stress'. En deux dimensions, le T-stress est défini comme une contrainte constante agissant parallèlement à la direction de la fissure et son amplitude est proportionnelle à la contrainte nominale au voisinage de la fissure. Diverses études ont montré que le T-stress a une influence importante sur la direction de la propagation de la fissure, et sur la stabilité de la propagation de la fissure, l'intensité et la ténacité à la rupture [13-18]. Pour calculer le T-stress, les chercheurs ont utilisé plusieurs techniques telles que la méthode de différences des contraintes (SDM) [19], la méthode variationnelle de Leaver [20], la méthode Eshelby d'intégrale J [21-22], la méthode de la fonction de poids [23], la méthode de spring-ligne[24], le réciproque théorème de Betti- Rayleigh [25,26], la méthode et de l'intégrale d'interaction [25,27].

Parmi ces méthodes, la méthode Eshelby d'intégrale J , le théorème de réciprocity Betti-Rayleigh et la méthode de l'intégrale d'interaction M sont basées sur des contours

d'intégrales indépendants. Dans ces procédés, les paramètres de rupture peuvent être calculés à partir de données à une certaine distance de la pointe de la fissure et, en conséquence, une plus grande précision par rapport aux méthodes locales peut être atteinte. Pour quelques cas idéals, des solutions analytiques pour T-stress et SIF sont disponibles. Cependant, pour des problèmes pratiques impliquant des géométries finies avec un chargement complexe, des méthodes numériques doivent être employées. La méthode des éléments de frontière (BEM) a émergé comme une méthode numérique puissante pour l'analyse d'évaluation des paramètres de la rupture. Dans l'analyse BEM, seul un domaine limité est discrétisé et des quantités inconnues sont déterminées uniquement sur ces limites. Par rapport aux méthodes des éléments finis (FEM) et les méthodes meshless [28]), cette méthode limite réduit de manière significative la taille et la configuration du problème. En outre, un raffinement de maillage localisé sur la zone de propagation de la fissure sera simple et facile. Le "Galerkin BEM méthode" a plusieurs avantages par rapport au BEM collocation-méthode. Le plus grand avantage est que le singulier hyper Intégrale peut être évaluée en utilisant des éléments standards sans aucun compromis ou d'ambiguïté [29].

En outre, la formule de calcul dans le Galerkin EBM fournit une solution fiable dans les discontinuités géométriques telles que les jonctions. L'approche Galerkin implique une plus grande intégration par rapport à la collocation. La méthode d'intégrale d'interaction est basée sur les lois de conservation de l'élasticité et les relations fondamentales en mécanique de la rupture [30]. Le FIC relatives aux problèmes de rupture en mode mixte peut être facilement obtenu à partir de cette intégrale. La base de l'approche réside dans la construction d'une intégrale de conservation pour deux états superposés (réels et auxiliaires) d'un solide élastique fissuré. L'analyse nécessite l'intégration le long d'un chemin convenablement choisi entourant la pointe de la fissure. La méthode a été initialement proposée par Chen et Shield [30], et plus tard mise en œuvre numériquement par Yau et al. [31] à l'aide de la FEM appliquée aux matériaux isotropes homogènes. Dès lors, cette méthode a été utilisée par de nombreux autres chercheurs.

Rao et Rahman [32] ont mis en œuvre cette méthode en utilisant l'élément de méthode libre Galerkin (EFG). Kim et Paulino [33,34] ont utilisé la méthode pour résoudre les problèmes en mode mixte de fissure dans isotropes et orthotropique FGM lié avec les modèles FEM et micromécanique. Ils ont également étendu l'approche intégrale à deux Etats pour évaluer T-stress isotropique [35,36] et orthotropique [37] FGM. Dans la littérature, BEM, la

technique de déplacement de corrélation (TCD) est largement utilisée pour évaluer le FIC en raison de la simplicité de sa mise en œuvre numérique [38]. Parmi les techniques d'intégrales du contour, Aliabadi [39] a appliqué le J-intégral aux problèmes de fissure en mode mixte. Sladek et Sladek [40] ont utilisé la méthode intégrale de conservation des problèmes de thermoélasticité pour calculer le T-stress, et l'intégrale J pour calculer les FIC. Wen et Aliabadi [41] a proposé une intégrale de contour différente basée sur la solution de Westergaard et le théorème réciproque de Betti pour calculer les FIC. L'interaction intégrale (appelé M-intégrale) méthode de calcul des paramètres de rupture est décrite dans ce travail.

Ce rapport s'articule autour de quatre chapitres comme suit:

Le *premier chapitre* est une synthèse bibliographique sur les paramètres de rupture tels que le FIC, l'intégrale J, le T-stress et le paramètre de biaxialité β . Cette étude sera de toute évidence indispensable afin de mieux cerner le cadre de nos recherches. L'étude bibliographique présentée dans le chapitre I de ce manuscrit, permettra de réviser les importantes sources des paramètres de la mécanique linéaire de la rupture et de la fatigue, largement utilisés pour décrire le phénomène de fissuration. Le phénomène de fatigue biaxiale sera exposé ensuite afin de dresser un bilan des résultats obtenus et des approches utilisées par différents auteurs. Cette première partie nous aidera à construire une démarche à suivre dans le reste de notre étude. On présente aussi dans ce premier chapitre les différents critères pour étudier l'effet de T-stress et la détermination de champ des contraintes principales en mode I et mode II.

Le *second chapitre* représente une étude bibliographique sur les différents paramètres de la mécanique de la rupture et leur évaluation. Ces paramètres sont les critères d'amorçage de fissure les plus utilisés en mécanique de la rupture, les différents concepts de la mécanique de la rupture qui sont la base des expressions quantitatives des paramètres de rupture sous leurs deux formes différentes mais équivalentes dans les cas simples, l'analyse locale qui fait appel à la détermination du champ de contrainte au front de fissure et l'analyse globale qui fait appel à l'approche énergétique. Ensuite, une étude des singularités des contraintes à la pointe de la fissure. Les méthodes déterminant le deuxième Terme des contraintes non singulières sont bien détaillées. L'évolution de ce dernier paramètre est discutée pour différentes variables : La taille de la zone plastique, le chemin, la vitesse de la fissuration, les paramètres géométriques ainsi que les propriétés mécaniques des matériaux.

Dans *le troisième chapitre*, une nouvelle approche, pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique à la pointe de la fissure en mode I, a été proposée. Cette approche est basée sur la détermination numérique de la zone plastique en introduisant une nouvelle forme du rayon plastique. La théorie de base liée à la création d'énergie de surface et de l'évolution des paramètres de l'énergie sera discutée dans la section 2. La section 3 est consacrée à la présentation des données expérimentales exploitées pour la validation. Ensuite, la section 4 est consacrée au développement de l'algorithme numérique utilisé pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique, en utilisant la loi de comportement des deux alliages d'aluminium, l'alliage 2024 à l'état T351 et l'alliage 7075 à l'état T7351 d'une éprouvette CT.

Dans *le quatrième chapitre*, nous évaluons le Facteur d'Intensité de Contraintes d'une fissure, pour différentes éprouvettes et sous différents chargements, en faisant appel aux paramètres de la géométrie et des chargements T. Ce dernier a été calculé en utilisant une nouvelle méthode basée sur la différence de la distribution des déformations. Une comparaison est réalisée par des expressions analytiques trouvées dans la littérature. Une série d'essais est menée pour mesurer le Facteur d'Intensité de Contraintes K_I et la contrainte T-stress, en utilisant des jauges de déformations collées autour de la pointe de la fissure et à un certain angle θ de l'axe de la direction principale. L'interprétation des signaux des jauges de déformations, respectivement, par les K-jauges et T-jauges, est exploitée pour déduire les valeurs de facteur d'intensité des contraintes K_I et de T-stress. Pour valider l'approche proposée nous avons simulé le comportement en rupture de plusieurs éprouvettes fissurées sous différentes sollicitations afin de calculer les paramètres T-stress, K_I et β par la méthode proposée et numérique. En effet, la particularité des tests est que l'évolution de la contrainte T est en fonction de la profondeur de fissure. En utilisant la loi de comportement de deux matériaux, nous avons simulé, en rupture, les différents tests en statique et en dynamiques sur les deux éprouvettes : TPB et SENT. La suite du travail consiste à construire des Courbes (K-T), à partir des valeurs mesurées par des jauges virtuelles de déformations et des valeurs numériques.

Bibliographies

- [1] Ainsworth R. A. & Budden P. J., design and assessment of components subjected to creep ». *journal of strain analysis*, 1994, vol. 29, n° 3, pp. 201-208.
- [2] Ainsworth r. a., failure assessment diagrams for use in r6 assessments for austenitic components », *int. j. pres. ves. & piping*, 1996, vol. 65, pp. 303-309.
- [3] Aktaa J., Horsten M .G. & Schmttt R., effect of hold-time and irradiation on the fatigue life of type 316 l(n) and their consideration in a damage model », *smirt 14*, lyon, france, 17-22/8/97 ; paper n° 105/5", 1997, pp. 157-164
- [4] Altus E., A cohesive micromechanic fatigue model part ii fatigue-creep interaction and goodman diagram », *mechanics of materials*, 1991, vol. 11, n° 4, pp. 281-293
- [5] Anderson T.I, two-parameter fracture mechanics: a comparison of continuum and micromechanics approaches », *joint fefg/icf international conference on fracture of engineering materials and structures; singapore; 6-8 august (1991)*.
- [6] Williams M.L., « on the stress distribution at the base of stationary crack », *j. of appl. mectr*, 1957, vol . 24, pp 109-114
- [7] O'Dowd N.P. & Shih C .., «family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-i.structure of fields », *j. mech. phys . solids*, 1991, vol. 39, n°8, pp. 989-1015
- [8] Parks D. M., « advances in characterisation of elastic-plastic crack-tip fields ».
- [9] Wu S. X., Mai Y. W. & Cottrell B. « q solution for compact tension and single-edge cracked tension specimens », *international journal of fracture*, 1995, vol. 68, pp. r97-r103
- [10] Martin J. T. & Lambert S. B., « analysis of constraint in single edge notch tension specimens using the t-stress », *int . j. pres. ves . & piping*, 1996, vol . 65, pp. 13-19.
- [11] Rice JR. Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech Trans ASME* 1968;35(2):379–86.
- [12] Anderson TL. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press LLC; 1995.
- [13] Williams JG, Ewing PD. Fracture under complex stress—the angled crack problem. *Int J Fract* 1972;8(4):416–41.
- [14] Ueda Y, Ikeda K, Yao T, Aoki M. Characteristics of brittle failure under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Eng Fract Mech* 1983;18(6):1131–58.

- [15] Smith DJ, Ayatollahi MR, Pavier MJ. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2001;24(2):137–50.
- [16] Cotterell B, Rice JR. Slightly curved or kinked cracks. *Int J Fract* 1980;16(2):155–69.
- [17] Du Z-Z, Hancock JW. The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint. *J Mech Phys Solids* 1991;39(3):555–67.
- [18] O’Dowd NP, Shih CF, Dodds JrRH. The role of geometry and crack growth on constraint and implications for ductile/brittle fracture. In: *Constraint effects in fracture theory and applications*. volume 2 of ASTM STP 1244, American Society for Testing and Materials; 1995. p. 134–59.
- [19] Larsson SG, Carlson AJ. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic–lastic materials. *J Mech Phys Solids* 1973;21(4):263–77.
- [20] Leevers PS, Radon JCD. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen. *Int J Fract* 1982;19(4):311–25.
- [21] Cardew GE, Goldthorpe MR, Howard IC, Kfoury AP. On the elastic T-term. *Fundamentals of deformation and fracture: Eshelby memorial symposium*. 1985.
- [22] Kfoury AP. Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method. *Int J Fract* 1986;30(4):301–15.
- [23] Sham TL. The determination of the elastic T-term using higher-order weight functions. *Int J Fract* 1991;48(2):81–102.
- [24] Wang Y-Y, Parks DM. Evaluation of the elastic T-stress in surfacecracked plates using the line-spring method. *Int J Fract* 1992;56(1): 25–40.
- [25] Chen CS, Krause R, Pettit RG, Banks-Sills L, Ingraffea AR. Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method. *Int J Fract* 2001;107(2):177–99.
- [26] Sladek J, Sladek V, Fedelinski P. Contour integrals for mixed-mode crack analysis: effect of nonsingular terms. *Theor Appl Fract Mech* 1997;27(2):115–27.
- [27] Nakamura T, Parks DM. Determination of T-stress along threedimensional crack fronts using an interaction integral method. *Int J Solids Struct* 1992;29(13):1597–611. *Mech* 2003;70(2):269–83.
- [28] Gosz M, Moran B. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Eng Fract Mech* 2002;69(3):299–319

- [29] Wang SS, Corten HT, Yau JF. Mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. *Int J Fract* 1980;16(3):247–59.
- [30] Chen FHK, Shield RT. Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *J Appl Math Phys (ZAMP)* 1977;28:1–22.
- [31] Yau JF, Wang SS, Corten HT. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J Appl Mech Trans ASME* 1980;47(2):335–41.
- [32] Rao BN, Rahman S. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Eng Fract Mech* 2003;70(1):1–27.
- [33] Kim J-H, Paulino GH. An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *Int J Numer Meth Eng* 2003;58(10): 1457–97.
- [34] Kim J-H, Paulino GH. The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. *Int J Solids Struct* 2003;40(15):3967–4001.
- [35] Kim J-H, Paulino GH. T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method. *Comput Meth Appl Mech Eng* 2003;192(11):1463–94.
- [36] Paulino GH, Kim J-H. A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method. *Eng Fract Mech* 2004;71(13–14):1907–50.
- [37] Kim J-H, Paulino GH. T-stress in orthotropic functionally graded materials: Lekhnitskii and Stroh formalisms. *Int J Fract* 2004; [inpress].
- [38] Sladek J, Sladek V. Evaluation of T-stresses and stress intensity factors in stationary thermoelasticity by the conservation integral method. *Int J Fract* 1997;86 (3):199–219.
- [39] Aliabadi MH. Evaluation of mixed mode stress intensity factors using the path independent integral. In: *Proceedings of 12th International Conference on Boundary Element Methods*, Southampton. Computational Mechanics Publications; 1990. p. 281–92.
- [40] Aliabadi MH. Boundary element formulations in fracture mechanics. *Appl Mech Rev* 1997;50(2):83–96.
- [41] Wen PH, Aliabadi MH. A contour integral for the evaluation of stress intensity factors. *Appl Math Model* 1995;19(8):450–5.

Chapitre I

QUELQUES ASPECTS DE LA

MECANIQUE DE LA RUPTURE

1.1 Introduction

Ce chapitre représente une étude bibliographique sur les différents paramètres de la mécanique de la rupture et leur évaluation. Ces paramètres sont les critères d'amorçage de fissure les plus utilisés en mécanique de la rupture, les différents concepts de la mécanique de la rupture qui sont la base des expressions quantitatives des paramètres de rupture sous leurs deux formes différentes mais équivalentes dans les cas simples, l'analyse locale qui fait appel à la détermination du champ de contrainte au front de fissure et l'analyse globale qui fait appel à l'approche énergétique. Ensuite une étude des singularités des contraintes à la pointe de la fissure. Le chapitre II présente une étude des singularités des contraintes à la pointe de la fissure. Les méthodes déterminant le deuxième terme non singulière sont bien détaillées. L'évolution de ce dernier paramètre est discutée pour différentes variables : La taille de la zone plastique, le chemin, la vitesse de la fissuration, les paramètres géométriques ainsi que les propriétés mécaniques des matériaux.

1.2 Déplacement des lèvres de la fissure et modes élémentaires de rupture

Au lieu d'aborder le problème de rupture en considérant par l'énergie du système, on peut étudier directement les champs de contraintes et de déplacements existants au voisinage de la pointe de fissure. La fissure est représentée à l'aide de deux surfaces planes (i.e. les lèvres de la fissure) qui se coupent selon une courbe simple appelée front de fissure. L'étude proposée concerne les plaques élastiques dont l'un des côtés comporte une fissure traversante. Plus précisément, les lèvres supérieure et inférieure de la fissure seront toujours des plans transverses perpendiculaires à la surface extérieure (i.e. la surface libre ∂S_L) de la plaque. De plus, dans ce chapitre le front de fissure est pris rectiligne et également perpendiculaire à la surface libre comme le montre la figure 1-1. L'influence sur les champs de contraintes et de déplacements d'un front de fissure courbe sera étudiée au chapitre suivant, dans le cadre de l'analyse 3D.

On définit un repère orthonormé direct $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ centré en pointe de fissure, d'axe \bar{z} tangent au front de fissure (figure 1-1). L'axe \bar{x} se situe dans le prolongement de la fissure. Un point de la plaque est alors repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où r est la distance au front de fissure et θ la coordonnée angulaire prise à partir de l'axe \bar{x} .

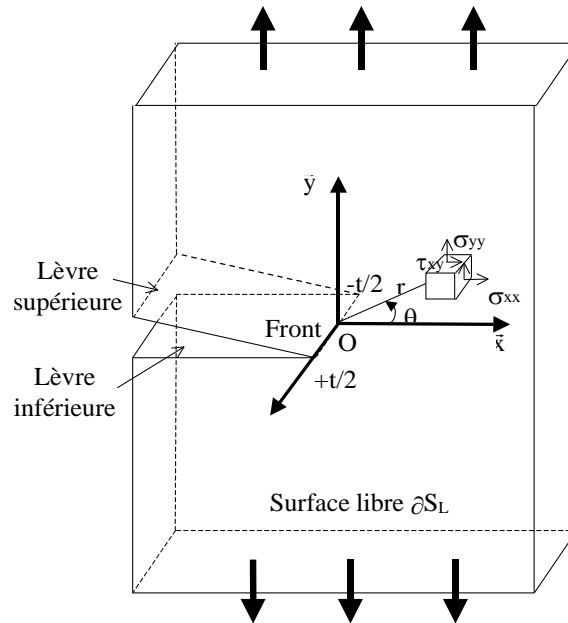


Figure 1. 1 : Représentation d'une fissure dans une plaque chargée d'épaisseur t .

Les mouvements cinématiques possibles des lèvres inférieure et supérieure de la fissure, l'une par rapport à l'autre, se décomposent en trois mouvements élémentaires indépendants schématisés figure I-2 auxquels sont associés trois modes de fissuration. Irwin [5,6] a montré que tout processus de fissuration pouvait se ramener à l'un de ces trois modes ou à leur superposition. Pour un chargement plan, symétrique par rapport au plan de la fissure (figure I-1), seul le mode d'ouverture de la fissure (ou mode I) est activé. Les modes II et III correspondent respectivement au mode de glissement dans le plan et hors du plan de la fissure.

A chacun des trois modes correspondent des champs de contraintes et de déplacements pour lesquels il existe, du moins dans le cadre de la théorie 2D, des expressions analytiques asymptotiques valables au voisinage de la pointe de fissure. Les solutions proposées sont en général données dans le repère d'étude précédent $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. La démarche scientifique qui a permis d'établir ces solutions pour le mode I de fissuration fait l'objet des paragraphes suivants.

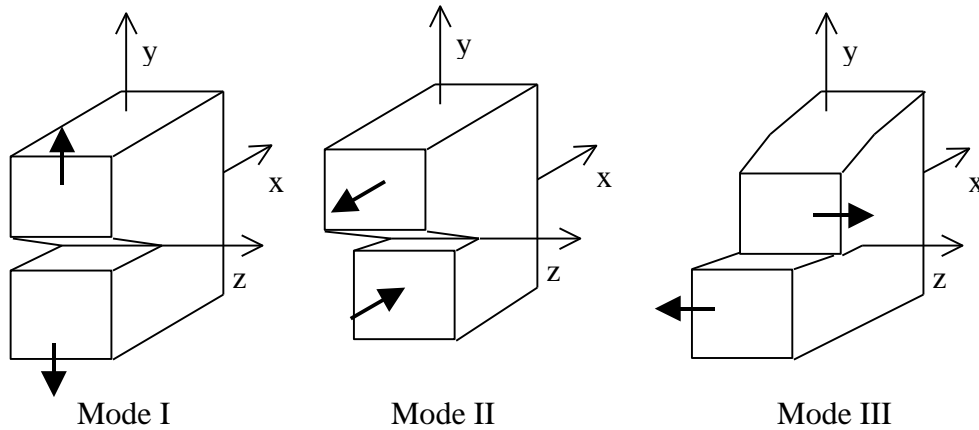


Figure I. 2 : Modes élémentaires de fissuration

On pourra dans la suite, sans nécessairement le préciser, adopter la notation suivante : $(O, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ pour représenter le repère $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. L'écriture des coordonnées d'un point, des composantes d'un vecteur ou d'un tenseur suit logiquement : (x_1, x_2, x_3) pour (x, y, z) , u_3 pour u_z , σ_{11} et σ_{12} pour σ_{xx} et σ_{xy} , etc...

1.3 Rappels d'élasticité plane, fonction d'Airy

Considérons la plaque élastique fissurée représentée sur la figure I-1 et rapportée à son repère d'étude $(O, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Si l'on introduit les coordonnées cartésiennes associées (x_1, x_2, x_3) , le domaine matériel occupé par la plaque est défini par : $D = \{ (x_1, x_2, x_3) / (x_1, x_2) \in \partial S_L \text{ et } |x_3| \leq t/2 \}$.

La détermination de l'état mécanique $[\bar{u}, \bar{\sigma}]$ de la plaque sous sollicitation extérieure imposée (généralement impossible dans le cas général) s'inscrit dans le cadre d'un problème plan (P) si l'on suppose les charges extérieures appliquées indépendantes de x_3 . On simplifie encore le problème (on parle alors d'élasticité plane) en suivant deux approches classiques qui proposent des hypothèses supplémentaires sur la forme du déplacement \bar{u} ou sur celle du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$.

La première, connue sous le nom de déformation plane (DP), impose les conditions suivantes sur le déplacement :

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, x_2) \quad i = 1, 2 \\ u_3 &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

La seconde est appelée état de contrainte plane (CP) et suppose que le tenseur des contraintes ne dépend que de x_1 et x_2 avec les conditions supplémentaires suivantes :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (\text{I.2})$$

Pour les plaques fissurées de faible épaisseur, les solutions analytiques 2D développées s'appuient en général sur le concept de contrainte plane. On notera que u_3 dépend alors linéairement de x_3 . En négligeant les forces de volume, en tenant compte de la loi de Hooke et de la définition du tenseur des déformations (avec l'hypothèse des petites perturbations) [8], les approches (DP) et (CP) conduisent alors aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{33} = \begin{cases} \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & (\text{Déf Plane}) \\ 0 & (\text{Cont Plane}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

où ν représente le coefficient de Poisson et la convention de l'indice muet a été adoptée. Il convient de préciser que les approches précédentes ne permettent pas de vérifier toutes les conditions et relations mathématiques requises par le problème plan (P) posé sous sa forme générale [7]. Les solutions qui en résultent ne pourront être qu'une approximation de la solution du problème plan (P). Néanmoins, nous verrons qu'elles sont tout à fait acceptables dans le chapitre suivant sous certaines conditions et dans certaines régions d'une plaque fissurée qui seront alors précisées.

On montre alors que l'on peut vérifier automatiquement les équations d'équilibre (I.20) par l'intermédiaire d'un tenseur de fonction de contraintes $\overline{\overline{\Phi}}$ en posant :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma}} &= \text{Rot} \left({}^t \text{Rot} \overline{\overline{\Phi}} \right) \\ \text{avec } \overline{\overline{\Phi}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(x_1, x_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

La fonction A est appelée fonction d'Airy permet d'exprimer les contraintes sous une forme plus connue :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (I.5)$$

La première équation de compatibilité impose une relation supplémentaire entre les composantes du tenseur de déformations $\bar{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (I.6)$$

En contrainte plane, les trois autres équations de compatibilité concernent la déformation ε_{33} et ne peuvent pas être vérifiées en général : elles imposent en effet que $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ soit une fonction linéaire de x_1 et x_2 ce qui est en général trop restrictif...

La relation (I.23) conduit alors en contrainte plane ou en déformation plane à une équation différentielle vérifiée par la fonction d'Airy. Cette équation est appelée équation biharmonique qui a été donnée par Goursat en [19] :

$$\nabla^4 A = \frac{\partial^4 A}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial x_2^4} = 0 \quad (I.7)$$

La mise en équation d'un problème de rupture, dans le cadre de l'élasticité plane, pourra ainsi se faire en recherchant une fonction biharmonique appropriée qui dépend des coordonnées x_1 et x_2 . Il suffit simplement de trouver une fonction scalaire $A(x_1, x_2)$ qui satisfaisait (I.24) et les conditions aux limites du problème par le biais de (I.22) !

La théorie des fonctions complexes simplifie en fait considérablement la tâche en offrant une méthode générale de résolution des problèmes d'élasticité plane depuis les travaux importants de Goursat [9]. On ramène en effet la solution de l'équation biharmonique à la détermination de deux fonctions analytiques φ et χ dans une région du plan $(O, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ avec des conditions aux limites imposées. A toute fonction analytique f (ici $f=\varphi$ ou $f=\chi$), on associe la fonction \bar{f} définie par $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$, où $z = x_1 + i x_2$. Soit alors :

$$A(x_1, x_2) = [\bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})] / 2 = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)] \quad (\text{I.8})$$

avec $\bar{z} = x_1 - i x_2$

Cette solution a été développée et appliquée à certains problèmes d'élasticité plane par Kolossov [19] au début du siècle et par Muskhelishvili ensuite [11,12].

En utilisant (1.22), les contraintes σ_{ij} et les déplacements u_i sont déterminés à l'aide des dérivées des fonctions φ , χ , $\bar{\varphi}$ et $\bar{\chi}$ par les relations :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} &= 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)] \\ E(u_1 + i u_2) / (1 + \nu) &= \kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

avec $\psi(z) = \chi'(z)$ et où z est un point du domaine matériel appartenant au plan $(O, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. E représente le module de Young et ν le coefficient de Poisson. On a également $\kappa = 3 - 4\nu$ et $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ respectivement pour un état de déformations planes et un état de contraintes planes. Les fonctions φ et ψ , quant à elles, dépendent non seulement du chargement extérieur mais également de la nature et de la forme du domaine considéré. Sans utiliser les équations précédentes, Westergaard [3] a mené l'une des premières études en milieu élastique fissuré, à partir des propriétés des fonctions complexes.

1.4 Approche locale : champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une fissure

1.4.1 Les solutions analytiques 2D de Westergaard [3], Sih [13] et Eftis [14]

Westergaard [3] a résolu ainsi le problème symétrique d'une plaque infinie fissurée, chargée hydrostatiquement en développant la fonction d'Airy A à l'aide d'une fonction complexe $Z(z)$:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Re} \bar{Z} + x_2 \operatorname{Im} \bar{Z} \\ \text{où } \frac{d\bar{Z}}{dz} &= \bar{Z}, \quad \frac{d\bar{Z}}{dz} = Z, \quad \frac{dZ}{dz} = Z' \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Comme la fonction est analytique sur le domaine d'étude considéré, il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition des dérivées. En utilisant les relations classiques de Cauchy-

Riemann, on montre facilement que la fonction ainsi définie vérifie l'équation biharmonique. Elle conduit alors à l'expression suivante des contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \operatorname{Re} Z - x_2 \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{22} &= \operatorname{Re} Z + x_2 \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{12} &= -x_2 \operatorname{Re} Z'\end{aligned}\quad (\text{I.11})$$

La relation précédente est valable pour toute fonction analytique. Il faut donc trouver la fonction $Z(z)$ qui permet de vérifier également les conditions aux limites du problème considéré. Ainsi pour le mode d'ouverture d'une fissure de longueur $2a$ contenue dans une plaque infinie sous chargement biaxial σ (figure I-6), Westergaard a proposé la fonction solution suivante :

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad z = x_1 + i x_2 \quad (\text{I.12})$$

où les coordonnées x_1, x_2 sont liées au repère d'étude représenté sur la figure I-3. La fonction (I.29) est holomorphe partout sauf sur la fissure. A l'aide de (I.28), on retrouve aisément les contraintes imposées aux limites. Ainsi lorsque $|z| \rightarrow \infty$, on a $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$ et $\sigma_{12} = 0$ et sur la surface fissurée $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$. La fonction proposée est donc une solution du problème.

Afin d'explicitier le champ de contraintes en pointe de fissure, il est commode cependant de remplacer dans (I.29) z par $(a + u)$ avec $u = r e^{i\theta}$, (r, θ) sont les coordonnées polaires prises en fond de fissure (figure I-3). Avec la nouvelle variable u , on a alors au voisinage de la pointe de fissure (i.e. lorsque $|u| \rightarrow 0$) :

$$Z_{|u| \rightarrow 0} = \frac{\sigma a}{\sqrt{2ua}} = \frac{\sigma \sqrt{a\pi}}{\sqrt{2\pi u}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi u}} \quad (\text{I.13})$$

où le facteur multiplicatif $\sqrt{\pi}$ est traditionnellement rajouté. La quantité K_I au numérateur est fonction uniquement du chargement extérieur et de la demi-longueur de la fissure. Elle est connue sous le nom de facteur d'intensité de contraintes. Compte tenu de l'expression de u en coordonnées polaires, les contraintes en pointe de fissure peuvent être calculées à partir de (I.30) et (I.28) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{I.14}$$

Notons, ici, que la démarche précédente est similaire en mode II et conduit à un champ de contraintes associé présentant la même singularité en $r^{-1/2}$ que (I.31). Cependant il faut choisir une autre fonction de contrainte Z pour résoudre le problème [16].

A partir de la représentation complexe de l'état de contraintes (I.26), il est possible de traiter le même type de problème sous le chargement plus général de la figure I-3 (k quelconque).

La condition de symétrie par rapport à Ox_1 s'exprime de la façon suivante :

$$\sigma_{12} = \text{Im}[\bar{z} \phi'(z) + \psi'(z)] = 0 \tag{I.15}$$

Sih [13] a montré que cette condition est vérifiée si :

$$\psi'(z) + z \phi''(z) + B = 0 \tag{I.16}$$

où B est une constante réelle qui dépend du chargement. La relation (I.33) permet d'exprimer $\chi(z)$ à l'aide de B et $\phi(z)$. Tout calcul fait [16], on aboutit à l'expression suivante de la fonction d'Airy :

$$A(x_1, x_2) = \text{Re} \left[2 \int \phi(z) dz \right] + x_2 \text{Im} [2\phi(z)] - \frac{B}{2} (x_1^2 - x_2^2) \tag{I.17}$$

Soit en identifiant $Z(z) \equiv 2\phi'(z)$ et en conservant les notations de Westergaard définies en (I.27) :

$$A(x_1, x_2) = \text{Re} \bar{\bar{Z}} + x_2 \text{Im} \bar{Z} - \frac{B}{2} (x_1^2 - x_2^2) \tag{I.18}$$

Le champ de contraintes est donné alors par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \operatorname{Re} Z - x_2 \operatorname{Im} Z' + B \\
\sigma_{22} &= \operatorname{Re} Z + x_2 \operatorname{Im} Z' - B \\
\sigma_{12} &= -x_2 \operatorname{Re} Z'
\end{aligned}
\tag{I.19}$$

Les équations précédentes ont été établies par Sih [13]. En apportant la modification suivante à la fonction $Z(z)$ proposée par Westergaard :

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + B \tag{I.20}$$

t en utilisant les équations (I.36), Eftis et Liebowitz [14] ont résolu le problème plus général présenté figure I-3. Pour que les contraintes vérifient correctement les conditions aux limites, la constante B vaut selon leur analyse :

$$B = -\frac{(1-k)\sigma}{2} \tag{I.21}$$

Compte tenu de (1.36-38), on a la représentation suivante du champ de contraintes en pointe de fissure :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - (1-k)\sigma \\
\sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned}
\tag{I.22}$$

On remarque que l'on retrouve facilement les solutions de Westergaard à partir des systèmes (I.39) et (I.37) en prenant $k=1$. Le cas particulier important d'un milieu infini sollicité uniaxialement suivant le mode d'ouverture de la fissure est décrit lorsque $k=0$.

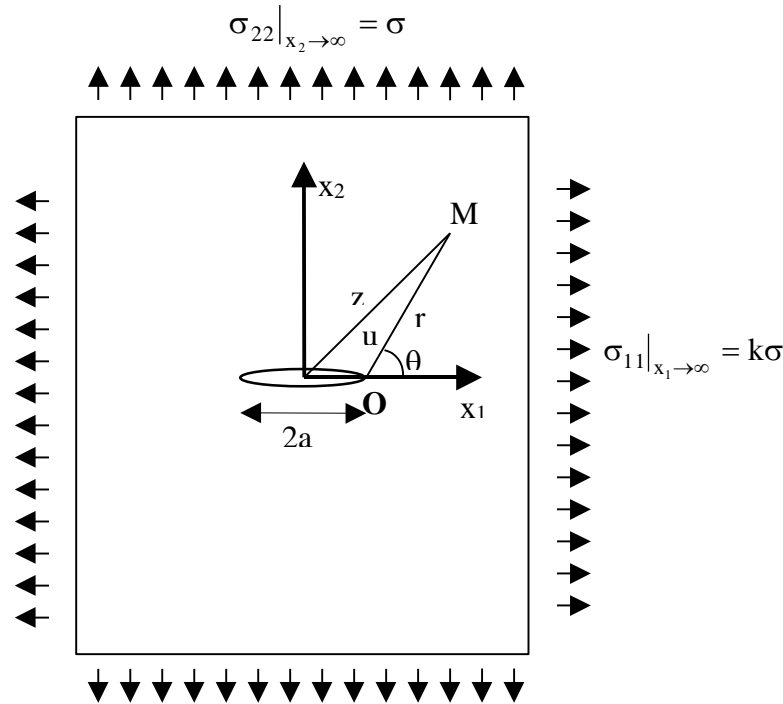


Figure I. 3: Plaque fissurée, milieu bidimensionnel infini en mode I

En contraintes planes, le déplacement hors plan u_3 de la surface libre d'une plaque d'épaisseur t identique à celle considérée figure I-3 lorsque $k=0$, est donné par :

$$u_3(r, \theta, x_3 = t/2) = \int_0^{t/2} \varepsilon_{33}(r, \theta) dx_3 = -\frac{\nu K_I t}{E} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} + \text{cte} \quad (\text{I.23})$$

$$\text{avec } \text{cte} = \frac{\nu}{E} \left(\sigma \frac{t}{2} \right)$$

où la coordonnée x_3 est définie à partir du repère d'étude centré en fond de fissure (i.e. au point O) de la figure I-1. Vu la symétrie du problème, on obtient une expression de u_3 identique, au signe près, pour l'autre surface libre.

1.4.2 Généralisation du problème à des milieux de dimension finie

Il est clair que les solutions précédentes ne s'appliquent qu'au cas idéal du massif élastique fissuré infini, figure I-3. En pratique, les plaques étudiées ont des dimensions finies, les fissures ne sont pas forcément localisées au centre. On trouve, en général, dans la littérature [16, 17] quelques éprouvettes standards contenant des fissures traversantes, de

géométrie, simple, sous différents types de chargement. On montre, figure I-4, les éprouvettes CN (Central Notch), DEN (Double Edge Notch) et SEN (Single Edge Notch). Cette dernière constitue la géométrie de référence dans notre étude.

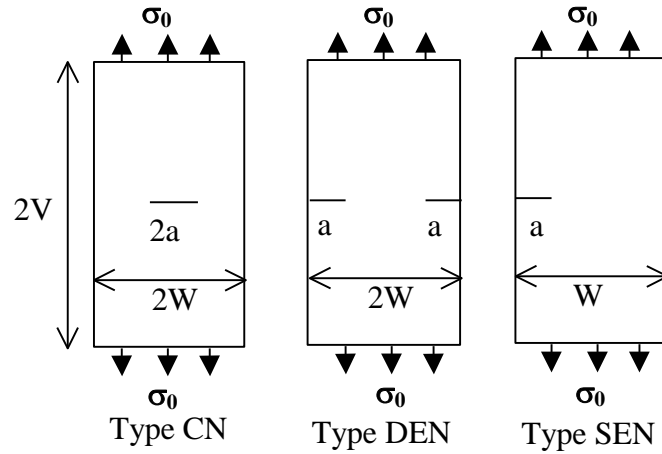


Figure 1. 4: Eprouvettes fissurées de type CN, DEN et SEN sous chargement uniaxial (σ_0 est la contrainte nominale associée)

a) Développement en série de Williams [18]

L'approche de Williams [18] propose une résolution générale alternative de l'équation de comptabilité (I.24) en milieu plan, sans utiliser les fonctions complexes. On suppose pour cela que la fonction d'Airy A s'écrit sous la forme :

$$A(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta) \quad (\text{I.24})$$

où λ est un scalaire et $F(\theta)$ une fonction continue et dérivable de θ à déterminer. Le repère d'étude est toujours celui de la figure I-3 : les grandeurs mécaniques qui suivent sont toutes exprimées par les coordonnées polaires associées.

En reportant l'expression précédente de A dans l'équation (I.24) réécrite en coordonnées polaires, on obtient l'équation différentielle du 4^{ème} ordre suivante pour F :

$$\frac{d^4 F(\theta)}{d\theta^4} + [(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2] \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + [(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2] F(\theta) = 0 \quad (\text{I.25})$$

dont la solution générale est :

$$F(\theta) = c^1 \cos(\lambda - 1)\theta + c^2 \cos(\lambda + 1)\theta + c^3 \sin(\lambda - 1)\theta + c^4 \sin(\lambda + 1)\theta = 0 \quad (\text{I.26})$$

où les constantes c^i sont à déterminer à partir des conditions aux limites. En injectant alors la forme (I.41) dans les équations (I.22) les contraintes deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta^2} = r^{(\lambda-1)} \left[\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + (\lambda + 1)F(\theta) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = r^{(\lambda-1)} [(\lambda + 1)\lambda F(\theta)] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta \partial r} = r^{(\lambda-1)} \left[-\lambda \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Les lèvres de la fissure sont libres de contraintes (i.e. $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, $\theta = \pm\pi$), ce qui conduit au système algébrique suivant pour les c^i :

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda - 1)\pi & \cos(\lambda + 1)\pi & 0 & 0 \\ \Gamma \sin(\lambda - 1)\pi & \sin(\lambda + 1)\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\lambda - 1)\pi & \sin(\lambda + 1)\pi \\ 0 & 0 & \Gamma \cos(\lambda - 1)\pi & \cos(\lambda + 1)\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ c^4 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.28})$$

avec $\Gamma = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$. On peut voir à partir de (I.45) que les constantes c^1 et c^2 sont totalement indépendantes de c^3 et c^4 : les deux premières correspondent en fait au chargement symétrique (mode II) alors que pour les deux autres chargement antisymétrique (mode I). Une solution non triviale existe si le déterminant de la matrice s'annule. Après simplification, la relation caractéristique que vérifie λ se réduit à :

$$\sin(2\pi\lambda) = 0 \quad (\text{I.29})$$

On obtient alors les valeurs propres λ_n de λ solutions de (I.29) :

$$\lambda_n = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^{*+} \quad (\text{I.30})$$

Notons que n est un entier positif afin de borner l'énergie de déformation. Aux valeurs propres λ_n sont associés les coefficients c^1_n , c^2_n et c^3_n , c^4_n . En reportant dans (I.45) et pour le mode I qui nous intéresse, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} n = 2m & (-1)^m (c_{2m}^1 + c_{2m}^2) = 0 \\ n = 2\left(m - \frac{1}{2}\right) & (-1)^{m-1} \left(\frac{2m-3}{2m+1} c_{2m-1}^1 + c_{2m-1}^2\right) = 0, m \in \mathbb{N}^{*+} \\ \forall n & c_n^3 = c_n^4 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

soit avec des notations évidentes, pour la fonction de contraintes A :

$$A^{\text{sym}}(r, \theta) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{m-1} c_{2m-1} r^{m+1/2} \left[-\cos\left(m - \frac{3}{2}\right)\theta + \frac{2m-3}{2m+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta \right] \\ & + (-1)^m c_{2m} r^{m+1} [-\cos(m-1)\theta + \cos(m+1)\theta] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.32})$$

En ne conservant que les deux premiers termes ci dessus, pour un mode I de chargement, on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{c_1}{4r^{1/2}} \begin{Bmatrix} -5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ -3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + 4c_2 \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ -(\sin 2\theta)/2 \end{Bmatrix} + O(r^{1/2}) \quad (\text{I.33})$$

Si on réécrit (I.50) dans le système $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$ en utilisant la transformation classique des composantes d'un tenseur il vient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + O(r^{1/2})$$

en posant $c_1 = \frac{-K_I}{\sqrt{2\pi}}$ et $T = 4c_2$ (I.34)

On retrouve alors la solution asymptotique proposée par Eftis [I4] (cf. équations (I.39)) qui devient un cas particulier du problème général traité par Williams. En effet dans l'analyse 2D de Williams on ne pose aucune hypothèse sur la géométrie du corps fissuré et le mode de chargement. A partir de (I.49), les contraintes se décomposent sous la forme générale suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{li} \delta_{lj} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2} r^{n/2} f_{nij}(\theta) \quad i, j = 1, 2 \quad (I.35)$$

où le premier terme du développement représente la solution asymptotique qui est dominante en pointe de fissure. Les fonctions universelles $f_{ij}(\theta)$ sont écrites explicitement dans l'expression (I.5I). La connaissance de la géométrie et du chargement doit permettre d'identifier tous les coefficients c_i . En pratique lorsque les géométries se compliquent, il n'existe pas de solution simple à ce problème : on a recours dans certains cas (éprouvettes de référence, figure I-4) aux méthodes numériques. Pour une configuration stable donnée, les deux constantes K_I et T sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes et la contrainte transverse (voir [19] par exemple). Elles s'expriment respectivement en $[MPa\sqrt{m}]$ et $[MPa]$.

b) Facteur d'intensité de contraintes et contrainte transverse

Le facteur d'intensité de contraintes K_I donne physiquement une mesure de l'intensité de la singularité. Il dépend en général des paramètres de chargement et de géométrie du problème étudié. Pour des systèmes géométriques simples que l'on rencontre en pratique (cf. figure I-4), on a l'habitude de poser :

$$K_I = Y \left(\frac{a}{W}, \frac{V}{W} \right) \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (I.36)$$

où Y est une fonction de forme qui dépend de la géométrie de la pièce, de la longueur de la fissure, de sa localisation.

Ainsi pour une éprouvette de type CN chargée uniaxialement et comportant une fissure très petite devant les dimensions planes de la pièce, cette fonction tend rapidement vers 1. On retrouve bien sûr la solution théorique de Westergaard. Dans les mêmes conditions pour l'éprouvette de type SEN, des études théoriques ont montré que la valeur limite était alors 1,112. On trouve dans la littérature des représentations empiriques de Y en fonction des paramètres géométriques caractérisant les éprouvettes précédentes, et cela pour différents types de chargements [17].

D'après ce qui précède, le facteur d'intensité de contraintes apparaît donc comme un paramètre intrinsèque de la rupture fragile. Il va donc pouvoir intervenir dans l'établissement

des critères de rupture. On montre, à partir de l'expression de l'intégrale J (I.17), qu'il est relié au taux de restitution de l'énergie G de la façon suivante :

$$G = \begin{cases} \frac{K_I^2}{E} & \text{(CP)} \\ (1-\nu^2) \frac{K_I^2}{E} & \text{(DP)} \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

Il est raisonnable de considérer la contrainte T comme une fonction de la contrainte nominale uniaxiale appliquée σ_0 (figure I-4). On définit alors le taux de biaxialité B ainsi [19]

:

$$B = \frac{T}{\sigma_0} \quad (\text{I.38})$$

c) Zone plastique en pointe de fissure

L'expression du champ de contraintes (I.52) fait clairement apparaître une singularité en pointe de fissure. Si elle s'explique par la prédominance du premier terme de la série au voisinage de fissure, elle n'en demeure pas moins irréaliste lorsque l'on s'approche de la pointe (i.e. r tend vers 0). En pratique, lorsque la contrainte est supérieure à la limite élastique σ_e du matériau, ce dernier se déforme plastiquement. Il existe donc une zone (i.e. la zone plastique) au voisinage du front de fissure où les équations (I.52) ne sont plus valables. La taille de ce domaine est donc fonction de la nature du matériau utilisé. Pour les matériaux fragiles, la zone plastique est toujours de faible dimension par rapport à la zone d'étude expérimentale (chapitre IV) et reste confinée en pointe de fissure.

Afin de donner une idée de l'étendue et de la forme de la zone plastique on adopte ici le critère de Von Mises qui s'écrit, avec les contraintes principales σ_i :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (\text{I.39})$$

Il vient alors, dans un repère principal centré en pointe de fissure, l'expression asymptotique suivante pour le champ de contraintes (en déformation plane ou contrainte plane) :

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 + \sin \frac{\theta}{2} \\ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{avec } \sigma_3 = \begin{cases} 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} & (\text{Déf Plane}) \\ 0 & (\text{Cont Plane}) \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

A partir de (I.56) et (I.57), on montre que la zone plastique est délimitée par une courbe r_p d'équation :

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_e^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta & (\text{Cont Plane}) \\ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) & (\text{Déf Plane}) \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

En première approche, il est habituel d'assimiler la courbe r_p à un cercle limite de rayon :

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_e^2} \quad (\text{I.42})$$

Pour les matériaux fragiles, on est assuré d'avoir une zone plastique de petite taille et donc un problème 'purement élastique' en respectant la norme ASTM E 399 qui recommande de prendre la longueur de fissure a , l'épaisseur t et la largeur W de plaque telles que :

$$a, a - W, t \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{I.43})$$

où K_{IC} est la ténacité du matériau [16, 17].

1.4.3 Détermination des coefficients de la série de Williams pour des éprouvettes SEN

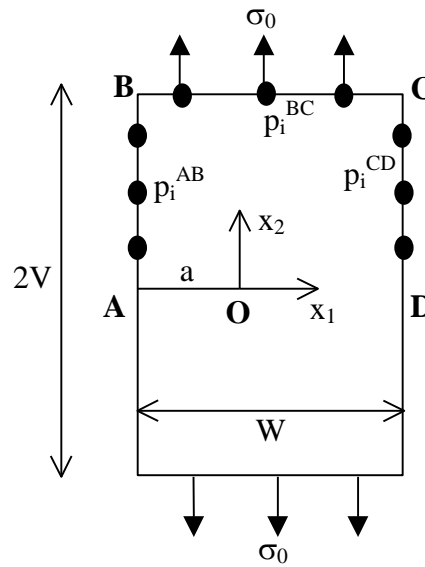


Figure I. 5: Distribution des points de collocation dans le cas d'une éprouvette SENT.

Lors des études numériques 3D et expérimentales, nous utilisons toujours des éprouvettes de type SEN. On verra qu'il est important de pouvoir estimer la limite supérieure de la zone de prédominance de la solution asymptotique 2D. Autrement dit, si on ramène la coordonnée radiale r à la quantité adimensionnée r/a (a est la longueur de fissure). Pour quelles valeurs de r/a peut-on négliger les termes supérieurs à l'ordre 3 dans la série de Williams ? Pour ce faire, on détermine ici, pour différentes tailles d'éprouvettes, les coefficients c_i à l'aide d'une méthode numérique connue sous le nom de collocation. On accède ainsi, en particulier, aux valeurs de K_I et T correspondantes. Par comparaison avec la solution globale du problème obtenue au paragraphe suivant avec les éléments finis, on pourra alors estimer la taille de la zone où l'approximation précédente est valide.

On considère la figure I-5 une éprouvette de largeur et de demi-longueur notées respectivement W et V . La fissure AO , de longueur a , est sollicitée en mode I en appliquant une traction uniforme σ_0 sur BC . Les coefficients c_i de la fonction de contrainte A^{sym} de Williams (I.49) sont calculés en suivant la démarche proposée par Gross [20]. La fonction (I.49) a été construite afin de vérifier (bien sûr) automatiquement les conditions aux limites sur les lèvres de la fissure (i.e. $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \theta = \pm\pi$). On vérifie que les conditions aux limites restantes pour les contraintes sont également respectées si (voir (I.22)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur (AB)} \\ \text{sur (BC)} \\ \text{sur (CD)} \end{array} \right. \begin{array}{l} A^{\text{sym}} = 0, \quad \frac{\partial A^{\text{sym}}}{\partial x_1} = 0 \\ A^{\text{sym}} = \sigma_0 \left(\frac{x_1^2}{2} + ax_1 + \frac{a^2}{2} \right), \quad \frac{\partial A^{\text{sym}}}{\partial x_2} = 0 \\ A^{\text{sym}} = \frac{\sigma_0 W^2}{2}, \quad \frac{\partial A^{\text{sym}}}{\partial x_1} = \sigma_0 W \end{array} \quad (\text{I.44})$$

où pour des raisons de symétrie, on ne considère que la partie supérieure de la plaque.

La méthode par collocation consiste à satisfaire simultanément les 6 équations (I.61) en un certain nombre de points (disons n) régulièrement distribués sur chacun des côtés (AB), (BC) et (CD) de la plaque. Les points choisis doivent être différents de B et C. On a donc au total 3n points de collocation $p_i^a(x_{1i}^a, x_{2i}^a)$, avec $a = \text{AB, BC, CD}$ et $i=1..n$, représentés sur la figure I-5. Si on réécrit pour simplifier la fonction d'Airy tronquée à l'ordre m sous la forme développée :

$$A^{\text{sym}}(r, \theta) \cong \sum_{i=1}^m A_i^{\text{sym}}(r, \theta) c_i \equiv \sum_{i=1}^m \tilde{A}_i^{\text{sym}}(x_1, x_2) c_i \quad (\text{I.45})$$

on est amené à résoudre le système matriciel linéaire surdéterminé $(6n) \times m$ suivant :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \text{-----} \\ \dots \\ \text{-----} \\ A_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ - \\ \dots \\ - \\ B_n \end{pmatrix} \quad (\text{I.46})$$

composé des n sous matrices bloc A_i obtenues à partir de (I.61) :

$$A_i = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^{\text{sym}}(-a, x_{2i}^{\text{AB}}) & \dots & \tilde{A}_m^{\text{sym}}(-a, x_{2i}^{\text{AB}}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{A}_1^{\text{sym}}(-a, x_{2i}^{\text{AB}}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{A}_m^{\text{sym}}(-a, x_{2i}^{\text{AB}}) \\ \tilde{A}_1^{\text{sym}}(x_{li}^{\text{BC}}, V) & \dots & \tilde{A}_m^{\text{sym}}(x_{li}^{\text{BC}}, V) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{A}_1^{\text{sym}}(x_{li}^{\text{BC}}, V) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{A}_m^{\text{sym}}(x_{li}^{\text{BC}}, V) \\ \tilde{A}_1^{\text{sym}}(W-a, x_{2i}^{\text{CD}}) & \dots & \tilde{A}_m^{\text{sym}}(W-a, x_{2i}^{\text{CD}}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{A}_1^{\text{sym}}(W-a, x_{2i}^{\text{CD}}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{A}_m^{\text{sym}}(W-a, x_{2i}^{\text{CD}}) \end{pmatrix}, \quad i = 1..n$$

et des n sous vecteurs B_i associés :

$${}^T B_i = \left(0 \quad 0 \quad \sigma_0 \left(\frac{x_1^2}{2} + ax_1 + \frac{a^2}{2} \right) \quad 0 \quad \frac{\sigma_0 W^2}{2} \quad \sigma_0 W \right), \quad \forall i$$

Le système matriciel (I.63) a été programmé à l'aide du logiciel de calcul formel Maple V . Il s'est avéré que les 10 premiers termes de la série de Williams (i.e. $m=10$) et que 240 points de collocation (i.e. $n=80$) suffisaient largement à assurer la convergence du système. Les calculs ont été effectués en normalisant les grandeurs σ_0 et V à 1 pour diverses valeurs des rapports a/W et V/W . On montre par exemple table I-1 les coefficients c_i calculés lorsque $a/W=0,3$ et $V/W=1$. K_I et T et par conséquent Y et B sont obtenus à partir de c_1 et c_2 en utilisant (I.51). Pour d'autres tailles d'éprouvettes, les expressions de Y et B sont regroupées table I-2. On peut constater l'influence de la géométrie sur ces paramètres en les comparant avec les valeurs données pour le cas limite traité par Eftis [14](i.e. $Y=1$ et $B=-1$). Les résultats obtenus pour Y sont en accord avec ceux que l'on trouve dans la littérature [20]. Les valeurs numériques de B ne sont cependant pas disponibles pour les tailles d'éprouvettes qui nous intéressent. On peut citer néanmoins l'étude réalisée par Leever [21] où B est donné pour des éprouvettes SEN de grandes dimensions ($V/W = 2 ; 5$).

Paramètres de calcul : $a/W=0,3$ $v/W=1$ $\sigma_0=1$										
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	...
-0,642	-0,171	0,082	0,065	0,112	0,101	-0,091	0,0076	0,0018	0,016	...

Table I-1 : Exemple de calcul des premiers coefficients de la série de Williams

a/W	0,3	0,3	0,3	0,4	0,2	0,45	0,3
V/W	0,5	0,8	1	1	1	0,8	0,9
$Y = K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$	1,848	1,672	1,660	2,111	1,363	2,43	1,663
$B = T / \sigma_0$	-0,321	-0,643	-0,687	-0,609	-0,712	-0,46	-0,67

Table 1-2 : Valeurs calculées de Y et B pour différentes tailles d'éprouvette.

1.5 Approche du problème par les éléments finis

Le problème précédent est abordé ici en utilisant la méthode des éléments finis. Nous reviendrons sur cette méthode au chapitre suivant lors de l'étude 3D. Tous les calculs sont réalisés à partir du code d'éléments finis Abaqus 6.9 disponible au laboratoire.

La partie supérieure de l'éprouvette SEN (figure 1-5) a été maillée en utilisant des éléments plans à 8 nœuds `qua8` et `tri8`. Le maillage prend en compte différentes tailles d'éprouvettes en imposant les rapports a/W et V/W . De plus il a été réalisé de façon à être rayonnant et se densifier en pointe de fissure. En conservant les notations de la figure I-5, on montre, figure I-6, deux exemples de maillages obtenus pour $a/W=0,3$ et $a/W=0,45$ et $V/W=0,8$ dans les deux cas.

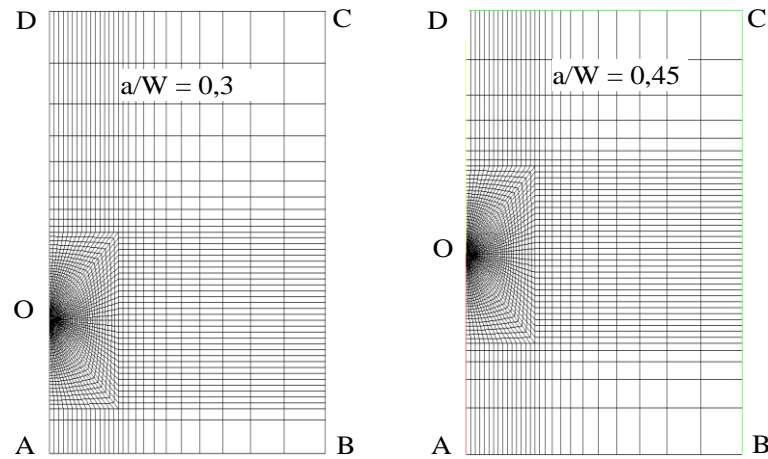
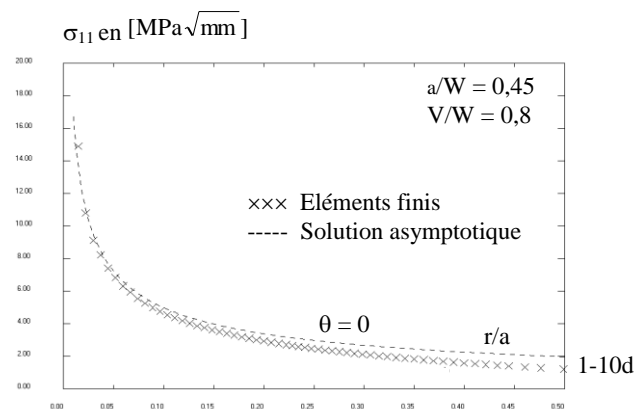
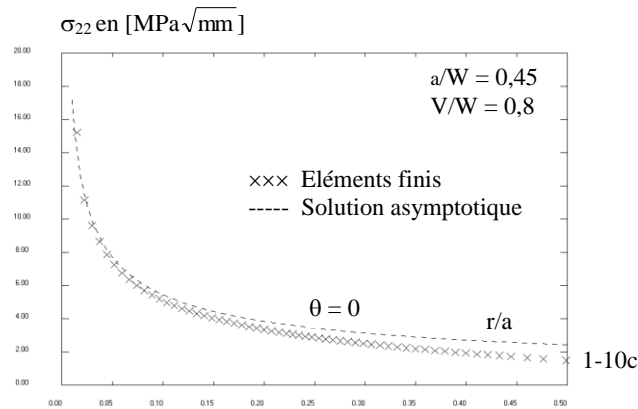
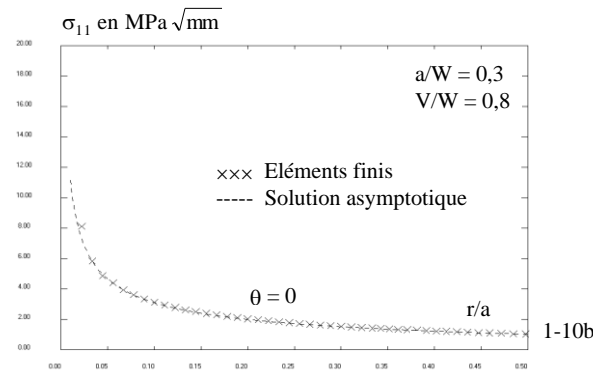
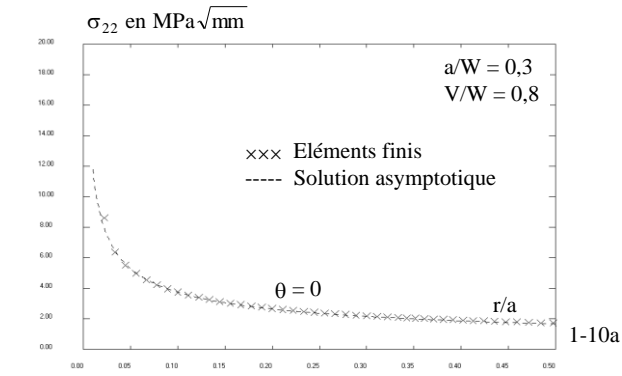


Figure I. 6: Maillages rayonnants réalisés pour l'éprouvette SENT.

Le modèle mécanique utilisé est celui du solide élastique isotrope. Les conditions aux limites imposées sont les suivantes : sur le côté BC on applique une traction uniforme unitaire. Le calcul des forces nodales équivalentes à ce chargement est réalisé ensuite par le logiciel. Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe de la fissure on doit bloquer le déplacement des nœuds appartenant au côté OD (i.e. le ligament).

En vue d'une comparaison avec la solution asymptotique, on s'intéresse ici à l'évolution de ces contraintes dans le prolongement de la fissure (i.e. lorsque $x_1 \equiv r \leq W - a$ et $x_2 = \theta = 0$) : sur les figures I-10a-b et I-10c-d, les croix représentent les contraintes σ_{22} et σ_{11} données en fonction du paramètre adimensionné r/a pour les deux éprouvettes considérées auparavant. En pointillé, on a tracé dans les deux cas les solutions asymptotiques correspondantes à l'aide des valeurs numériques de la table I-2. L'intensité du champ de contraintes en pointe de fissure dépend fortement de la longueur relative de la fissure comme on a pu le montrer avec la fonction Y au paragraphe précédent. Le domaine de validité de la solution asymptotique est fortement réduit lorsque le rapport a/W passe de 0,3 à 0,45. Néanmoins les éprouvettes d'étude utilisées ultérieurement sont telles que $0,3 < a/W < 0,45$ et $V/W \cong 0,8$. On montre de plus qu'une variation de V/W entre 0,8 et 1 influence très peu les courbes précédentes. Pour notre étude, la solution asymptotique sera donc une bonne approximation du champ de contraintes 2D si :

$$r \leq \frac{a}{10} \quad (\text{I.47})$$



Figures I. 1: Comparaison des expressions globales et asymptotiques du champ de contraintes le long de la fissure.

1.6 Conclusion

L'approche bidimensionnelle avec un état de contraintes ou de déformations planes a contribué à définir des grandeurs mécaniques particulièrement utiles pour l'étude du comportement des plaques élastiques fissurées sous chargement extérieur. Pour un mode I de chargement, la contrainte T et surtout le facteur d'intensité K_I contrôlent à eux seuls l'intensité du champ de contraintes en pointe de fissure. Le caractère très général du formalisme de Williams-Irwin, intégrant les études antérieures de Westergaard, a permis son utilisation dans la plupart des problèmes de rupture plane. Il doit, certainement, son succès au fait qu'il donne une représentation correcte du champ de contraintes en pointe de fissure sans pour autant connaître tous les termes de la série. Ces derniers semblent en effet bien difficiles à évaluer pour des géométries compliquées. L'influence du chargement extérieur au loin et de la géométrie est ressentie localement en pointe de fissure par le biais du facteur d'intensité de contraintes. La zone de prédominance de la solution asymptotique a été clairement établie dans le cas des éprouvettes de type SEN et dépend fortement des paramètres géométriques considérés. Les approches énergétiques développées en parallèle ont défini d'autres paramètres mécaniques importants caractérisant la rupture : le taux de restitution de l'énergie G , l'intégrale J . Dans le cadre de l'élasticité linéaire (rupture fragile) on aboutit à des relations simples entre ces grandeurs et le facteur d'intensité de contraintes.

Les solutions précédentes sont toujours limitées en fond de fissure par l'existence d'une zone plastique de faible dimension qui permet d'éviter des contraintes infinies en bout de singularité. En effet, même pour un matériau relativement fragile, on doit tenir compte physiquement d'une limite élastique au-dessus de laquelle le matériau se déforme plastiquement. On conçoit intuitivement que le domaine plastique est d'autant plus réduit que la limite élastique du matériau est élevée.

Nous verrons aux chapitres suivants, dans le cadre d'une étude 3D des plaques élastiques fissurées, que la principale limite à la théorie de Williams est l'hypothèse 2D elle-même. L'épaisseur de la plaque deviendra un paramètre d'étude important et nous conduira alors à définir une zone 3D confinée en pointe de fissure, beaucoup plus grande que la zone plastique. A cet endroit, l'approche de Williams et les solutions analytiques qui en résultent ne seront plus valables.

Bibliographie

- [1] Dugdale, D. S. (1960), "Yielding of steel sheets containing slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (2): 100–104.
- [2] Dugdale, D. S. (1960), "Yielding of steel sheets containing slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (2): 100–104.
- [3] Westergaard, H.M., 1939, Bearing pressures and cracks: *Journal of Applied mechanics*, v. 6, p. A49-A53.
- [4] Anderson T. L. "Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications" (1995) CRC Press.
- [5] Irwin G (1957), Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361–364.
- [6] Rice, J. R. (1968), "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics*.
- [7] Griffith, A. A. (1921), "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A* 221: 163–198.
- [8] G.R. Irwin and P. C. Paris, "Fundamental aspects of crack growth and fracture," in: H. Liebowitz (editor), *Fracture: an Advanced Treatise, V ol. 3: Engineering Fundamentals and Environmental Effects*, Academic Press, New York--London (1971), pp. 1-46.
- [9] Goursat : "Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, rédigées par C. Boursat." Paris, A.Hermann, 1898. 8vo, 354 pp.
- [10] kolossov g. v. (1989) Thèse de g. v. kolossov et appréciation par v. a. steklov auteur(s) / author(s) ermolaeva n. s. soutenue à le 21 nov. 1910. a propos de la theorie des fonctions a variable complexe l'univ. de st. petersbourg 1989, vol. 31, pp. 52-75
- [11] N.I. Muskhelishvili Some basic problems of the mathematical theory of elasticity , numero 1 springer, 30 avr. 1977 - 768 pages.
- [12] N.I. Muskhelishvili "Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie", Leipzig, 1971 (German).
- [13] Sih G. C. Paperback: 385 pages Publisher: Springer; Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2008 edition (December 14, 2010) Language: English ISBN-10: 9048178991 ISBN-13: 978-9048178995 Multiscale Fatigue Crack Initiation and Propagation of Engineering Materials free download Incoming search terms:multiscale fatiguesih fatigue pdf.

- [14] Eftis, J. H. Liebowitz, Correcting for nonlinear effects in fracture toughness testing school of engineering and applied science, the george washington university, washington, d.c., usa nuclear engineering and design volume 18, issue 3, february 1972, pages 457–467.
- [15] ASTM E399 - 12e1 Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials.
- [16] E. Erdogan (2000) Fracture Mechanics, International Journal of Solids and Structures, 37, pp. 171–183.
- [17] Orowan, E., 1948. Fracture and strength of solids. Reports on Progress in Physics XII, 185–232.
- [18] Williams, M.L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. Journal of Applied Mechanics 24, 109-114.
- [19] Willis, J. R. (1967), "A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt", Journal of the Mechanics and Physics of Solids 15 (3): 151–162.
- [20] Gross, B. Mendelson, A. (1972) Surface stress singularity from various boundary conditions in angular corner plates in extension. J. of Applied Mechanics 74.526-528.
- [21] Xu, X.P. and Needleman, A. (1994), "Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids", Journal of the Mechanics and Physics of Solids 42 (9): 1397–1434.
- [22] LEEVERS P.S. and RADON J.C. Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, London SW7, U.K.

Chapitre II

Identification des paramètres

de la rupture

II.1 Introduction

La caractérisation des champs de contraintes et de déformation dans la région près de la pointe d'une fissure est essentielle pour le développement de critères de mécanique de la rupture. Hutchinson [1] et Rice et Rosengren [2] ont développé la solution asymptotique pour les contraintes dans un matériau homogène élastoplastique (appelée la solution de HRR) et ils ont montré que l'amplitude du terme dominant dans l'expansion de la solution de Williams [3] est déterminée par l'intégrale J . Si la région de dominance du premier terme d'ordre dans l'expansion de la solution est suffisamment plus grande que la région sur laquelle les micro-mécanismes de rupture ont lieu, alors l'intégrale J peut être utilisée comme paramètre de fracture. Si la région de J -dominance, est plus petite que la zone de traitement de la fissure, deux ou plusieurs paramètres peuvent entrer sur le critère de rupture. Betegon et Hancock [4] ont utilisé une formulation de couche limite modifiée de la petite échelle de déformation, dans laquelle les conditions aux limites sont définies en termes de mode I facteur d'intensité K_I et le constante terme (T-stress) qui pénètre dans l'expansion de la solution élastique à proximité de la pointe de la fissure.[5]. Schery [6] a suggéré K_I et T comme un autre ensemble de paramètres qui peuvent être utilisés dans le critère de fissuration.

Li et al [7] ont également présenté une expression à deux termes de la solution en états de déformation plastique près de la pointe de la fissure dans un matériau homogène. Ils ont formulé le problème en termes d'une fonction de contraintes et ont présenté des résultats numériques pour les valeurs ayant un exposant de durcissement $n = 3$ et 10 . Dans le document de Sharma et Aravast[48] ils développent une méthodologie pour le calcul des termes d'ordre supérieur dans les solutions asymptotiques élastoplastiques à la pointe de la fissure en deux dimensions.

Ce qu'on appelle le T-stress, ou second terme de l'expansion de la série de Williams pour un champs de fissure élastiques linéaire, a trouvé de nombreuses applications dans la mécanique de la rupture. Larsson et Carlsson [5] et Rice [8] ont montré que le signe et l'amplitude du T-stress (lié à (K/J)) modifie sensiblement la taille et la forme de la zone plastique.

Bilby et al. [10] ont montré que le T-stress peut affecter fortement l'amplitude de l'effort hydrostatique triaxial au près de l'extrémité de la fissure dans un champ élasto-plastique d'un matériau non-durcissable.

Plus récemment, Hancock et ses collègues [4,11,12] ont montré que le T-stress, en plus de l'intégrale J, fournit une approche pratique des deux paramètres caractérisant des champs élastique plastique au point de la fissure en états de déformation plane des différentes configurations de fissures et des chargements.

Cependant, une base importante pour une telle méthodologie de la mécanique de la rupture à deux paramètres repose sur la capacité de calculer T-stress dans des configurations de fissures essentiellement arbitraires avec relativement de faibles niveaux d'effort. Une étude à deux dimensions a montré que le T-stress dépend fortement du type de chargement, ainsi que sur la longueur de fissure relative et la géométrie globale.[5,13,14,15]

II.2 Transformation de phase dans la zone plastique en présence de T-stress

La première étude théorique de l'effet de T-stress sur les zones de transformation de phase a été publiée par Giannakopoulos et Olsson [16]. Cette étude est la base des considérations suivantes: En présence d'une contribution T-stress, la contrainte hydrostatique près de la pointe de la fissure dans des conditions de déformation plane est donnée par:

$$\sigma_{hyd} = \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2r}} \cos(\varphi/2) + T \right) \quad (\text{II.1})$$

De l'équation 1 l'angle (φ) de la zone de transformation de phase pour le cas de déformation

$$r = \frac{8}{3\sqrt{3}} \omega \cos^2(\theta/2) \quad (\text{II.2})$$

avec ω la hauteur de la zone (Pour r , φ et ω voir Fig. II.1). La figure II.1.a illustre la zone de transformation pour une fissure étendant, La figure II.1.b la forme après une extension de fissure du Δa .

$$\omega = \frac{(1+\nu)^2}{4\sqrt{3}\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{hyd,c} - (1+\nu)T/3} \right) \quad (\text{II.3})$$

En raison de la transformation martensitique, une déformation d'expansion volumétrique d'environ 4,5% se produit[17]. Ces déformations provoquent des contraintes de traction à une certaine distance avant la pointe de la fissure et des contraintes de compression sur la longueur Δa à la ligne de fissure. Les contraintes de compression aboutissent à un facteur d'intensité de contrainte de blindage qui doit être surmonté lors de la propagation de la fissure, à savoir le facteur d'intensité de contrainte appliquée doit être augmentée pour

maintenir la croissance de la fissure stable. Dans la suite, des études numériques plus complexes l'influence des contraintes de cisaillement sur le critère de la transformation et sur le calcul de la zone a également été pris en considération [17].

Les contraintes à venir d'une fissure en mode I de chargement

$$\sigma_{\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos^3(\varphi/2) + T \sin^2 \varphi + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.4})$$

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos(\varphi/2)(1 + \sin^2(\varphi/2)) + T \cos^2 \varphi + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.5})$$

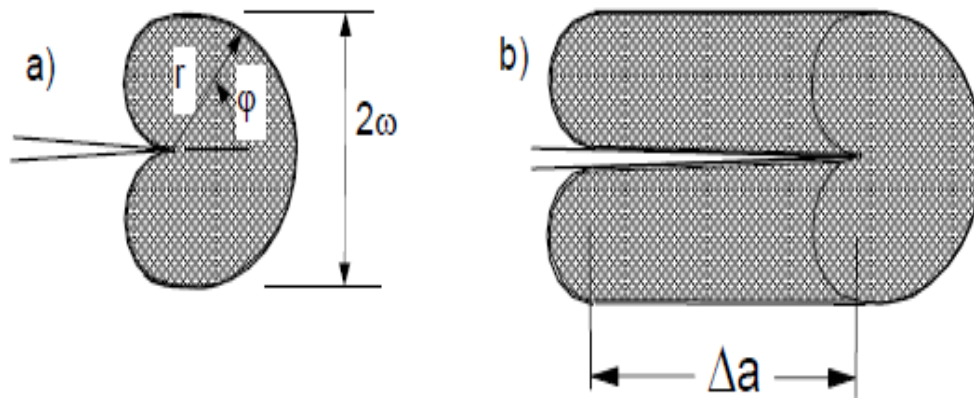


Figure II.1: a) zone de transformation de phase en avant de la pointe de fissure, b) la zone après l'extension de fissure.

II.2.1 Comportement de T-stress dans les micro-zones dans un matériau fissurée

II.2.1.1 Micro-fissuration devant une fissure

Dans un matériau poly-cristalline (la céramique), les fortes contraintes s'avance sur un résultat de fissure dans la rupture des joints de grains orientés favorablement (Figure. II.2). Ce micro-fissuration aux joints de grains est causée par des contraintes internes et superposées appliquées de l'extérieur. Les contraintes internes sont une conséquence de l'inadéquation de la dilatation thermique des grains orientés différemment. Différents critères de T-stress pour les micro-fissures ont été utilisés dans la littérature.

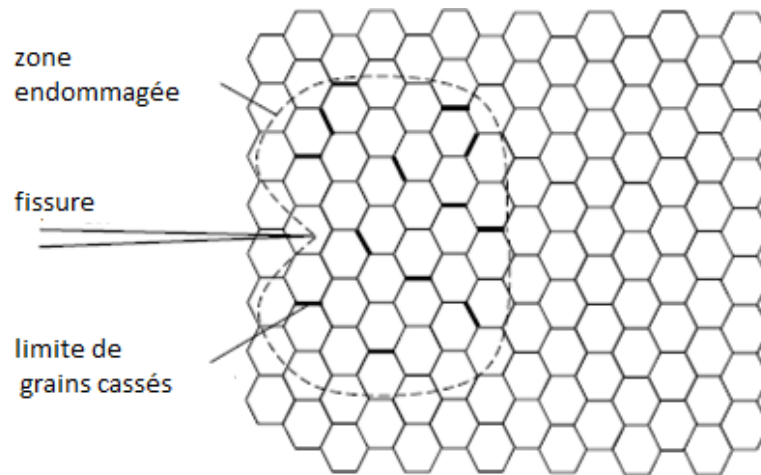


Figure II.2: joints de grains cassés dans une région avant d'une pointe de fissure définissant la zone de micro-fissures.

Dans l'étude de Ueda et al.[18] la forme et la taille de la zone micro-fissure est supposée être régie par la condition d'une valeur critique de la contrainte hydrostatique étant responsable de la fissuration, à savoir dans l'équation 6, σ_r et σ_ϕ sont les composantes de la contrainte en coordonnées polaires et σ_z est la contrainte dans le sens de l'épaisseur. Il détient pour σ_z

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{pour contrainte plane} \\ \nu (\sigma_r + \sigma_\phi) & \text{pour déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

où ν est le coefficient de Poisson.

Dans l'étude [19] la condition de fissuration est exprimée par une contrainte effective

$$\sigma_{eff} = \sigma_{eff.c} \quad (\text{II.7})$$

avec σ_{eff} est définie par les contrantes principales σ_1 , σ_2 et σ_3

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (\text{II.8})$$

Généralement, Le comportement à la rupture est caractérisé par un seul paramètre tel le Facteur d'Intensité de Contraintes (K_I , K_{II} , K_{III}). Traditionnellement, ce facteur a été utilisé pour déterminer l'amorçage et la propagation des fissures dans les matériaux fragiles. Ce pendant, un deuxième paramètre de rupture dans la fonction de Williams[3], la contrainte T-stress, a été utilisé dans le but de connaître l'effet du confinement de la structure et du chargement à la pointe de la fissure, bien que la signification physique de ce paramètre est illisible [20].

Ces contraintes T ont aussi un effet très significatif sur la distribution des contraintes dans la zone plastifiée elle-même. Dès qu'elles sont suffisamment élevées, il n'est plus possible de décrire le champ des contraintes dans cette zone avec un paramètre unique comme $K_{I, II, III}$ ou J [21].

La corrélation de l'effet du terme supérieur de l'équation de Williams [3] avec un paramètre physique est réalisée. Quelques travaux simplifient le terme supérieur pour définir un autre terme, la contrainte T (T-stress). La contrainte T est définie comme étant une contrainte constante activant parallèlement dans le sens de propagation de la fissure. Son amplification est proportionnelle à la contrainte nominale à la pointe de la fissure, (Figure.II.1) et Moustabchir et Azari [22] ont assimilé la contrainte T à une contrainte de cisaillement, dans le cas de défauts ; parfois, elle a plus d'importance que la traction en fond d'entaille. La figure 1 schématise la contrainte d'ouverture le long du ligament, avec et sans la présence de la contrainte T .

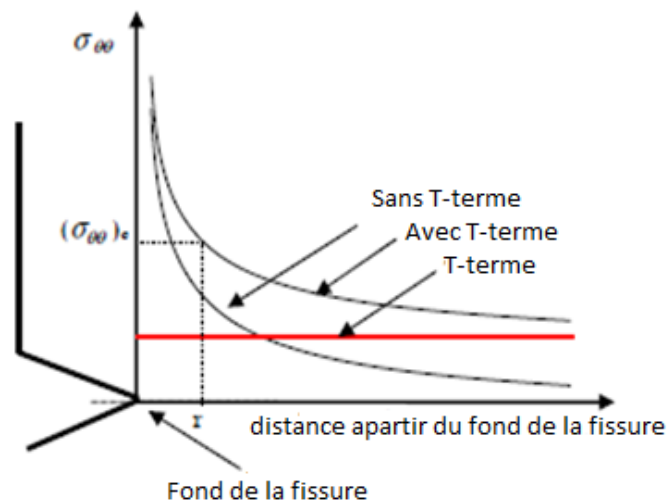


Figure II.3: Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du paramètre T [23].

Les valeurs positives de T renforcent le niveau de la contrainte de triaxialité à la pointe de la fissure, et mènent à des confinements très élevés. Les valeurs négatives réduisent considérablement le niveau de la contrainte de triaxialité à la pointe et mènent à des états de désert de confinement. Il est noté que la contrainte T représente la contrainte non singulière caractérisant le champ local de la contrainte à la pointe d'une fissure, pour un matériau élastique linéaire et pour un matériau élastique dans les conditions d'échelle (Small Scale-Yielding, SSY). Elle peut être utilisée pour le cas de la plasticité étendue (LSY) [24].

Williams [3] a montré que le champ de contraintes à l'extrémité d'une fissure, dans un matériau isotrope et élastique, peut être exprimé à l'aide de séries infinies en puissance de r , dont le premier terme prépondérant correspond à la singularité en $1/r$; le deuxième terme est constant, le 3^{ème} terme est proportionnel à r ...etc. Une analyse détaillée des contraintes a été effectuée en proximité de la pointe de fissure, afin de souligner les caractéristiques du champ bidimensionnel de contraintes.

Dans le cas du mode I, la propagation de fissure est déterminée par la contrainte perpendiculaire, à savoir σ_{yy} . La figure II.3 montre la variation de la contrainte d'ouverture avec la distance, le long du ligament. La contrainte considérée est non dimensionnelle, sous la forme spéciale de la série de développement de Williams. Dans cette représentation, la contrainte d'ouverture, en mode I, à la pointe de la fissure, peut être exprimée par :

$$\sigma_{yy} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} + A_3\sqrt{r} + A_5\sqrt{r^3} + \dots \quad (\text{II.9})$$

La théorie classique de la mécanique de la rupture néglige habituellement tous les termes à l'exception du terme singulier. Cependant, si les termes au delà du second terme, en $r^{1/2}, r^{3/2} \dots$ s'annulent à l'extrémité de la fissure, le second terme est constant pour les fissures et garde sa valeur. Ce terme peut avoir une influence importante sur la forme de la zone plastifiée et sur les contraintes en profondeur à l'intérieur de cette zone. Pour une fissure dans un matériau élastique et isotrope, sollicitée en mode d'ouverture sous contraintes planes, les deux premiers termes intervenant dans l'expression des contraintes sont:

$$\sigma_{ij} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{ij} \delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

avec σ_{ij} ; $f_{ij}(\theta)$: Fonction de forme θ l'angle d'orientation, K_I : Facteur d'Intensité de Contraintes, δ_{ij} : Symbole de Kronecker et T une contrainte uniforme, correspondant aux contraintes de compression/traction transverses évoquées lors de l'étude de la fissure stationnaire. On peut écrire dans le plan (x, y):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) & \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) & 1 + \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + o(r^{3/2}) \quad (\text{II.11})$$

On définit un rapport de biaxialité du fait de la présence de la contrainte T. Dans une structure fissurée, soumise à un chargement en mode I, ce rapport de biaxialité noté β est défini par :

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{k_I} \tag{II.12}$$

Dans des éprouvettes d'essais (CCT, DENT, SENT, BENT), les solutions du FIC peuvent se mettre sous une forme polynomiale. La contrainte T est donnée par :

$$T = \beta \cdot \frac{F}{t\sqrt{\pi a w}} f\left(\frac{a}{W}\right) \tag{II.13}$$

Où $f(a/w)$ est un facteur de forme, dont l'expression dépend du type d'éprouvette. F, et t sont respectivement la force appliquée, l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette [25].

Les variations du rapport de biaxialité β , pour différents chargements d'éprouvettes d'essais standard, sont représentées sur la figure. Il faut rappeler les résultats de la figure. II.4, qui montrent que, dans l'éprouvette CCT, la relaxation des contraintes est la plus importante. Le rapport de biaxialité dans cette éprouvette vaut -1 , c'est-à-dire, la distribution des contraintes dévie fortement de la solution HHR.

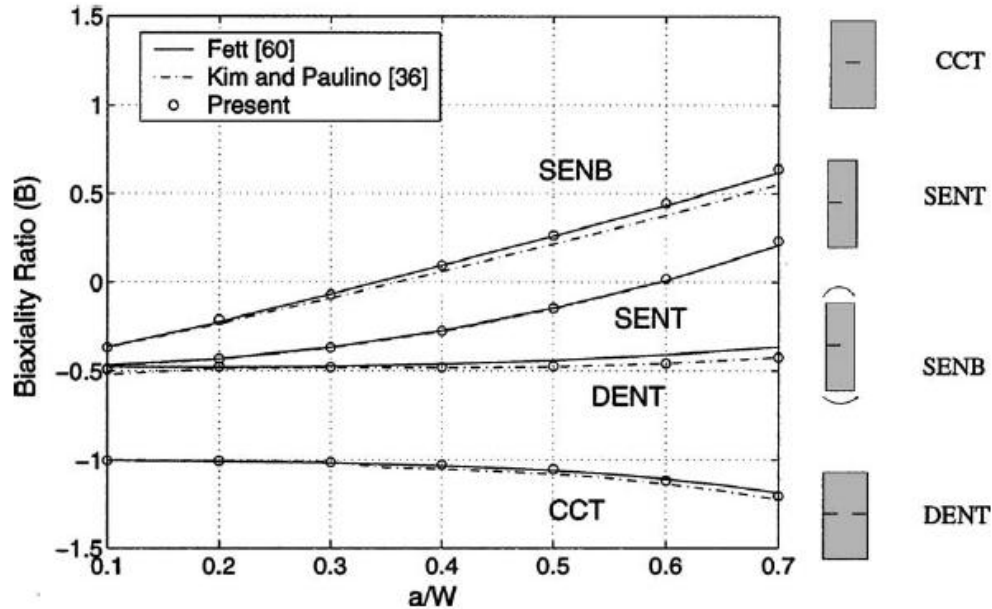


Figure II.4: Rapport de biaxialité en fonction d'a/W pour différentes configurations d'éprouvettes fissurées [26].

Le rapport de biaxialité devient positif lorsque la fissure est suffisamment profonde dans les éprouvettes SENT et SENB, où le ligament non fissuré est soumis essentiellement à la flexion. Dans ces éprouvettes, la triaxialité des contraintes demeure forte en régime de

plasticité étendue. Des valeurs positives de la contrainte transverse T contribuent à maintenir cette triaxialité élevée, alors que celle-ci diminue fortement avec la déformation pour des valeurs négatives de T . Le rapport de biaxialité apparaît donc comme une indication qualitative de triaxialité des contraintes, pour différentes configurations de chargement. La contrainte T peut aussi être utilisée comme second paramètre caractéristique des champs à l'extrémité d'une fissure.

II.2 Etude des Singularités des contraintes

Le Facteur d'Intensité de Contraintes K et l'intégrale J sont deux grandeurs couramment utilisées en mécanique de la rupture. Elles permettent, dans un état de plasticité confinée en pointe de fissure et donc de forte triaxialité, de représenter les champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure. Un certain nombre de résultats, accumulés au cours de ces dernières années, montrent néanmoins que lorsque la plasticité se développe et que le Facteur d'Intensité de Contrainte K_I n'est plus utilisable, l'intégrale J reste encore un paramètre intéressant, à condition de l'associer à un second paramètre représentatif du degré de confinement de la plasticité en pointe de fissure. Ce deuxième paramètre est généralement issu des termes du second ordre des champs analytiques des contraintes en pointe de fissure [10]. Le concept a fait apparaître un nombre relativement important d'approches. Nous citons en particulier les approches K - T et J - Q , actuellement les plus récentes dans la littérature.

II.2. 1 Approches à deux paramètres : Approche K - T

Pour enrichir le Facteur d'Intensité de Contraintes K , le paramètre T -stress est introduit pour modéliser le champ des contraintes élastiques en pointe d'une fissure. Cependant, plus de détails sur les caractérisations à deux paramètres sont disponibles dans l'article de Parks [23]. Des exemples d'application sont trouvés, pour trois types de géométrie, chez Wu et al. [27].

Nous venons de citer quelques exemples d'auteurs essayant de faire progresser l'approche globale, en introduisant le second paramètre T . Le but est de diminuer les effets liés à la géométrie du chargement. Cependant, l'estimation de la ténacité d'un matériau, par une utilisation unique de critères locaux, reste aujourd'hui très délicate si l'on considère que cette estimation fait encore appel à des modèles souvent trop simplistes des calculs. Différentes études montrent que la contrainte T a une influence sur la direction de l'avancement de la fissure, la stabilité de la propagation, la distribution des contraintes à la pointe de la fissure et la ténacité à la rupture [28].

II.2.1. Approche de Cotterell

Le champ des contraintes de traction, à l'extrémité d'une fissure peut être développé en séries. Selon Cotterell [29], Le premier terme, appelé ordinairement Facteur d'Intensité de Contraintes, détermine l'amorçage de la fissure dans un matériau fragile. Les autres termes ont les effets suivants:

- le second terme contrôle la stabilité de la direction de la fissure.
- le troisième terme contrôle la stabilité de la propagation de la fissure.
- et le quatrième terme détermine si la valeur maximale de la contrainte de cisaillement de la fissure augmente ou diminue.

Deux études ont été présentées par Cotterell [30-31], pour une éprouvette en traction (CT). Dans la première étude, Cotterell[30] démontre analytiquement que le signe de la contrainte T détermine la stabilité du chemin de la fissure. Pour les valeurs positives de T, la fissure dérive de son chemin original; tandis que si les valeurs sont négatives, la fissure continue le long de la direction de la fissure principale. Dans la seconde étude, il observe que le premier critère ne prédit pas correctement la stabilité du chemin de la fissure. Pour T positive, les résultats expérimentaux donnent une stabilisation du chemin de la fissure. La distribution des contraintes, en fond de la fissure, peut être exprimée par une série :

$$\sigma_{\theta\theta} = a_1 \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + a_2 \sin^2 \theta + a_3 \left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \left(5 \cos \theta - \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right) + O\left(\frac{r}{a}\right) \quad (\text{II.14})$$

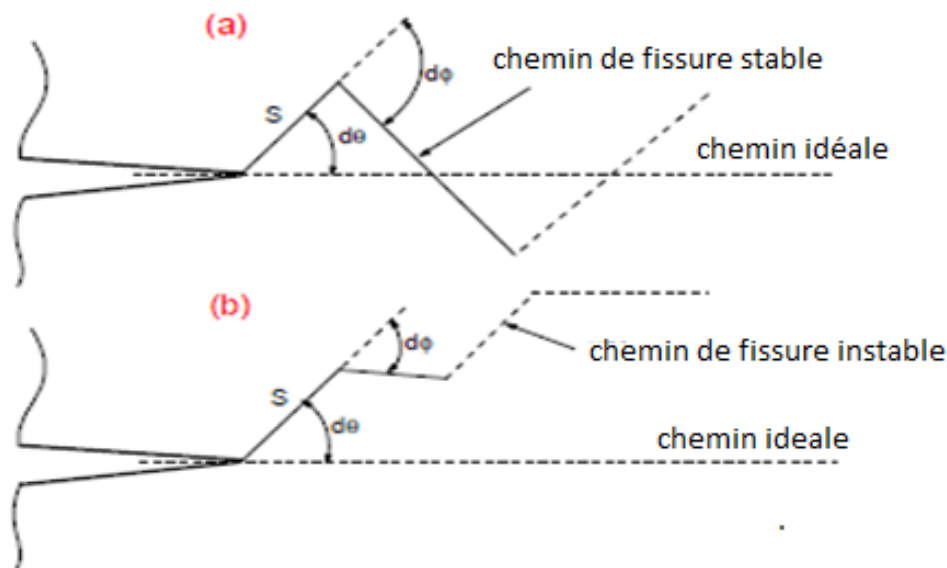


Figure II.5: Représentation schématique de la direction de propagation de la fissure : (a) chemin d'une fissure stable, (b) chemin d'une fissure instable.

Cotterell [31] a montré, pour une petite portion (S) dans la direction $d\theta$, que le chemin de fissuration sera stable si la prochaine ou la deuxième ou la probable portion est orientée vers le chemin idéal de la propagation de la fissure en mode I pur, c.-à-d. $d\phi > d\theta$, figure. II.5.a. $d\phi < d\theta$ indique une instabilité de la croissance de la fissure, (Figure. II.5.b). La relation entre $d\phi$ et $d\theta$ est obtenue en considérant les modes I et II locaux comportant un branchement à la pointe de la fissure. L'auteur suppose que la direction, pour une croissance prochaine de la fissure $d\theta$, est détectée par le critère des contraintes tangentielles maximales.

$$\frac{d\phi}{d\theta} = 1 - \left(\frac{s}{a}\right)^{1/2} \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_3}{a_1}\right) \left(\frac{s}{a}\right)^{1/2} \right] \text{ pour } S \ll a \quad (\text{II.15})$$

Pour une éprouvette CT, les coefficients de la série a_i pour $i = 1, 3$, sont donnés et $d\phi / d\theta$ est examinée en fonction du branchement S , pour des profondeurs $a/w = 0,2-0.7$.

II.2.2 Approche de CotterellRice :

Cotterell et Rice [29] ont étudié le comportement du chemin d'une fissure initialement droite dans un corps infini en mode I de chargement. Ils ont appliqué une méthode de perturbation pour obtenir les facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure légèrement incurvée ou plié et utilisé la solution pour examiner la stabilité directionnelle d'une fissure droite après une perturbation.

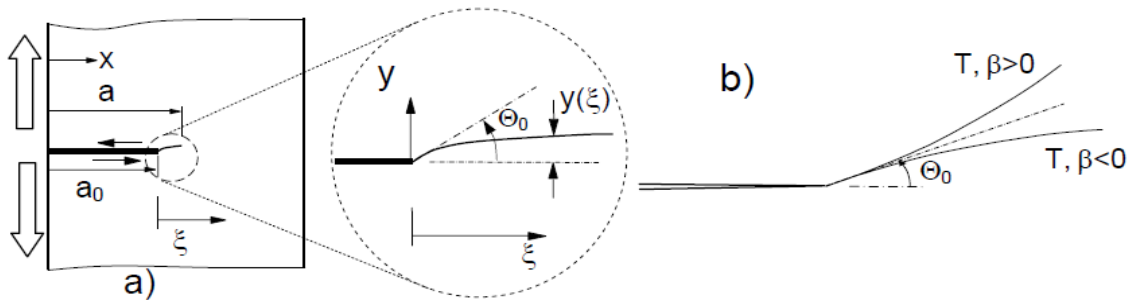


Figure II.6: a) Données géométriques d'une propagation de fissure en mode I et en mode II respectivement; b) Influence de T-stress après branchements de la fissure.

Par application d'un facteur d'intensité de contrainte de K_{II} inquiétante, les replis de fissure se développent sur le plan rectiligne initial d'un angle de θ_0 (Figure. II.6.a). Le mode II (chargement) peut être causé, par exemple par un petit défaut d'alignement inévitable du dispositif de chargement. Pour les petits K_{II} valeurs, $K_{II} \ll K_I$, l'angle de pliage est

$$\Theta = -\frac{2k_{II}(a_0)}{k_I(a_0)} \quad (\text{II.16})$$

$K_I(a_0)$ et $K_{II}(a_0)$ des facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure initiale de longueur a_0 , à savoir la situation de la fissure avant la bifurcation.

Cotterell et Rice [30] ont analysé le développement de la fissure pour un matériau isotrope après un chargement sur la base de la condition de symétrie locale, à savoir l'exigence d'un facteur d'intensité de contrainte mode II disparaît à la pointe de la réelle (cultivée) fissure, $K_{II} = 0$. Le facteur d'intensité de contrainte K_{II} mode II a été donné par l'équation intégrale [47].

$$k_{II}(a) = k_{II}(a_0) + \frac{1}{2} y'(a) k_I(a_0) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} T \int_0^{a-a_0} \frac{y'(\xi)}{\sqrt{a-a_0-\xi}} d\xi \quad (II.17)$$

valable pour petite fissure extensions $a-a_0 \ll a$, petit écart par rapport au plan initial de la fissure y , et petite déviation $y' \ll 1$ de la trajectoire de la fissure. Pour condition $K_{II}(a)=0$, la solution de l'éq (II.25) a été calculée comme

$$y = \frac{\Theta_0 a_0 \pi}{\beta^2 8} \left[\exp\left(\frac{8\chi}{\pi} \beta^2\right) \operatorname{erfc}\left(-\beta \sqrt{\frac{8\chi}{\pi}}\right) - 1 - \frac{4}{\pi} \beta \sqrt{2\chi}\right], \chi = \frac{a-a_0}{a_0} \quad (II.18)$$

Tableau.1: Classement de la stabilité de la trajectoire de la fissure pour différents éprouvettes avec des longueurs de fissures typiques [35]

éprouvettes	Longueur de fissure a_0	Rapport de Biaxiality β	paramètre d'instabilité du chemin $\beta / \sqrt{a_0}$ ($mm^{-1/2}$)
DCDC(R=0.5mm)	2 mm	-12	-8.5
	4mm	-24	-12
CT(W=30 mm)	15 mm	0.6	0.155
Flexion(W=4mm)	1 mm	-0.14	-0.14
	2 mm	0.26	0.18
	3.5 mm	1.05	0.56
DCB(H=12.5mm)	30 mm	2.85	0.52
cylindre Opposé Chargement	1 mm	0.67	0.67
	(W=4mm)	2.5 mm	1.7

$$\beta = \frac{T \sqrt{\pi a_0}}{K_I(a_0)} \quad (II.19)$$

Bien que l'éq. (II.26) soit une solution pour de courtes extensions de fissure seulement, cette relation permet de discuter l'effet de la stabilité du chemin d'accès local. Les discussions dans la littérature [35] traitent également de la stabilité générale du chemin après une extension de fissure, à savoir la validité générale du critère T-stress, son application aux fissures finies, et le chargement par des réactions non-homogènes.

II.2.3 Approche Selvarathinam et Goree

Une extension du modèle de Cotterell et Rice a été développée par Selvarathinam et Goree [36], pour de petits branchements de fissures à différentes orientations. Ils ont défini une valeur critique de la contrainte T, T_{crit} : représentant un paramètre intrinsèque du matériau, obtenu par des essais de rupture. Si $T < T_{crit}$, le chemin de la propagation de la fissure est stable. Si $T > T_{crit}$ le chemin est instable.

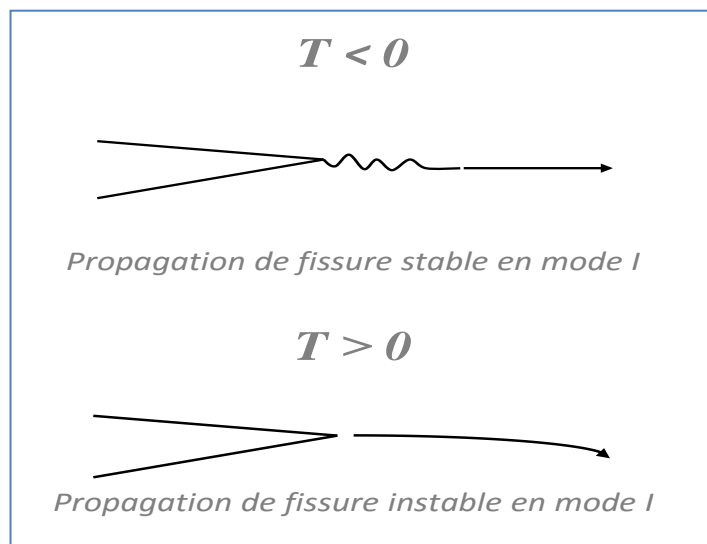


Figure II.7: Branchement de la fissure, pour différentes situations de la contrainte T [36].

II.2.4 Autres Approches

Marder [37] a montré que la transition du chemin de fissure droit à un autre oscillant se produit lorsque la contrainte $T=0$. Ceci est confirmé par les résultats expérimentaux de Yues et de Leever et Radon [38]. Il a constaté que l'énergie de rupture est une fonction de la vitesse de fissuration. Cependant, ceci ne peut pas être justifié physiquement sur la gamme de propagations de fissure observées expérimentalement.

Les études analytiques et expérimentales [39-40] ont montré que la contrainte T peut être utilisée comme une contrainte pour mesurer le chemin de fissuration. Les expériences de Ramulu et Kobayashi [41] et de Ravi-Chandar et Knauss [42] ont montré que le critère de Cotterell n'est pas valable pour décrire le chemin de propagation d'une fissure. Ils montrent que le signe et l'amplitude de la contrainte T change substantiellement la taille et la forme de la zone plastifiée en déformation plane, au niveau de la charge limite. Ils ont fait une investigation sur l'effet de la contrainte T , sur la contrainte de fissuration d'interface en élastique et elasto-plastique. Ayatollah et al. [43] ont étudié l'effet de la contrainte T sur la distribution du champ de contraintes d'une fissure, sous un chargement en mode mixte. Jayadeva et al. [44-45] a étudié le rôle de la contrainte T , en processus de rupture sous un chargement dynamique. Très récemment, il ont discuté le branchement de fissure, en présence de la contrainte T . Les résultats analytiques de branchement de la contrainte T et le changement de contraintes, à travers une fissure en statique ou en dynamique, ne sont toujours pas disponibles. Quelques auteurs montrent également que le signe de la contrainte T ne reflète pas la stabilité de la fissure, et que d'autres paramètres devraient être présents. Kfoury [46] a montré une explication contraire, lorsque T est positif, le chemin de la fissure est toujours stable. Il a observé que dans des éprouvettes, de différentes géométries de PMMA, la fissure ne se stabilise pas immédiatement si la contrainte T est positive.

II.2.5 statistiques sur les approches proposées

Les résultats obtenus par l'intermédiaire de ces méthodes sont à discuter en fonction de la géométrie, la taille de fissure et la loi de comportement utilisée. Toutes les méthodes ne permettent pas de faire les calculs précis de T . Les calculs par éléments finis restent un moyen très efficace pour évaluer ces paramètres. Ils permettent de s'affranchir des problèmes bidimensionnels et de calculer les deux paramètres de la rupture (K, T) pour une structure réelle contenant des défauts plus compliqués qu'une fissure, entailles par exemple. Pour ces derniers défauts, les travaux qui en discutent sont très rares.

Tableau 2: Valeurs de T-stress normalisées, paramètre de biaxialité et le FIC normalisée pour différentes éprouvettes [47].

Eprouvette fissurée	Sources	T / σ	$B = T / \sqrt{\pi a} K_I$	$K_I / (\sigma / \sqrt{\pi a})$
CCT or MT ($\alpha/W = 0.3, H/W = 1.0$)	SGBEM [47]	-1.1554	-1.0286	1.1232
	Chen et al.[66]	-1.1554	-1.0286	1.1232
	Fett[60]	-1.1557	-1.0279	-
	Leevers and Radon[38]	-	-1.0255	-
	Cardew et al.[67]	-	-1.026	-
SENT ($\alpha/W = 0.3, H/W = 12$)	SGBEM [47]	-0.6105	-0.3679	1.6597
	Kim and Paulino.[68]	-0.6139	-0.7300	1.6594
	Chen et al.[66]	-0.6103	-0.3677	1.6598
	Fett[57]	-0.6141	-0.3664	-
	Sham.[15]	-0.6142	-0.3707	1.6570
SENT ($\alpha/W = 0.5, H/W = 12$)	SGBEM [47]	-0.4184	-0.1481	2.8241
	Kim and Paulino.[68]	-0.4309	-0.1481	2.8237
	Chen et al.[66]	-0.4217	-0.1493	2.8246
	Fett[57]	-0.4182	-0.1481	-
	Sham.[15]	-0.4314	-0.1529	2.8210
SENB ($\alpha/W = 0.3, H/W = 12$)	SGBEM [47]	-0.0800	-0.0712	1.1235
	Chen et al.[66]	-0.0792	-0.0704	1.1241
	Fett[57]	-0.0771	-0.0671	-
	Sham.[15]	-0.0824	-0.0734	1.1220
SENB ($\alpha/W = 0.5, H/W = 12$)	SGBEM [47]	0.3986	0.2662	1.4973
	Chen et al.[15]	0.3975	0.2655	1.4972
	Fett[57]	0.3921	0.2620	-
	Sham.[15]	0.3911	0.2616	1.4951
DENT ($\alpha/W = 0.3, H/W = 12$)	SGBEM [47]	-0.5326	-0.4780	1.1143
	Kim and Paulino.[36]	-0.5384	-0.4444	1.2115
	Fett[57]	-0.5319	-0.4720	-
DENT ($\alpha/W = 0.5, H/W = 12$)	SGBEM [47]	-0.5521	-0.4725	1.1685
	Kim and Paulino.[68]	-0.5597	-0.4454	1.2567
	Fett[57]	-0.5216	-0.4396	-

II.3 Méthodes déterminant la contrainte T

II.3.1 Introduction

Différentes méthodes, appliquées dans les années précédentes, déterminent la contrainte T, pour différentes éprouvettes, dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture. Pour des fissures unidimensionnelles, Levers et Radom [35,38] ont construit une analyse numérique basée sur la méthode variationnelle. Kfoury [46] a appliqué la technique d’Erhelby.

Sharma [48], par la méthode des éléments finis, a développé le deuxième ordre de la fonction, en se basant sur l'intégrale du travail associé, pour des éprouvettes SENT. la méthode de Green est utilisée pour déterminer l'évolution de la contrainte T, dans une fissure de surface en 2D en présence de la méthode de line-sprint. Malgré la signification de la contrainte T, pour la description des contraintes en pointe d'une fissure, peu de méthodes sont valables pour déterminer la contrainte T.

II.3.2 Méthode de Différence des Contraintes (SDM)

La méthode dite de Différence de Contraintes,(SDM), est proposée en premier par Wang et al. [49-50,25]. Cette méthode emploie directement une analyse simple par Eléments Finis. Elle a pour but de calculer efficacement et exactement la contrainte T par l'évaluation de la différence de $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$ à un point en avant de la pointe de la fissure. L'idée fondamentale est de décrire l'évolution des erreurs, en valeurs numériques, obtenues à la pointe de la fissure sur la distance x, c.-à-d. la distance de la pointe de la fissure. De la même manière cette différence doit éliminer les erreurs effectives. Pour un matériau homogène, la contrainte T est calculée en utilisant la différence des contraintes dans les directions principales, le long du ligament et pour $\theta = 0$. La figure. II.9 représente un exemple d'évolution de la différence des contraintes le long du ligament, pour une pièce fissurée soumise à une traction. A la pointe de la fissure, la contrainte T peut être exprimée sous la forme :

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{r=0, \theta=0} \quad (\text{II.20})$$

Cette méthode peut donner des significations aux erreurs numériques dues au rétablissement des contraintes très proches de la pointe de la fissure. La contrainte T est le premier terme non singulier du développement asymptotique des contraintes en mécanique élastique de la rupture. Ce terme intervient dans l'écriture de la contrainte $\sigma_{xx}(r, \theta)$. Dans le cas particulier de la fissure de Griffith, T est définie par $K_I = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$. Le Facteur d'Intensité de Contraintes est défini par $K_I = \sigma_{yy} \sqrt{\pi a}$.

Nous pouvons également employer la contrainte T pour caractériser la biaxialité du chargement. Dans le cas d'une fissure plane traversante de longueur 2a, dans une plaque infinie soumise à un chargement biaxial à l'infini $(\sigma_{yy}, \sigma_{xx})$, la biaxialité b du chargement est définie comme le rapport $\beta = \sigma_{xx} / \sigma_{yy}$ de la contrainte à l'infini σ_{xx} agissant parallèlement au

plan de la fissure et normale à son front, et de la contrainte à l'infini σ_{yy} agissant dans la direction normale au plan de la fissure. La contrainte T peut être déterminée, dans n'importe quelle direction le long du ligament lorsque le premier terme singulier de σ_{xx} tend vers zéro, ou peut être placé au zéro, par superposition avec σ_{yy} . Elle correspond à la position de différents angles dans le contour de la pointe de la fissure.

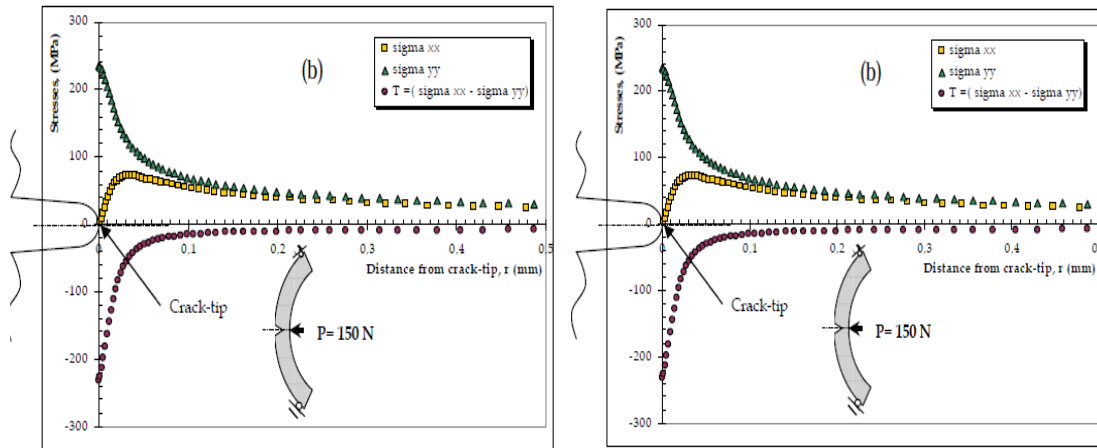


Figure II.9: (a) Exemples d'évolution des contraintes le long du ligament, pour un rapport d'épaisseur de 20% ($a/t = 0.2$, $P = 150$ N). (b) Détail de (a) [25].

Exemple :

Le long de $\theta = 0$:
$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \tag{II.21}$$

$\theta = -\pi$ ou $\theta = +\pi$:
$$T = \sigma_{xx} \tag{II.22}$$

$\theta = -\pi/3$ ou $\theta = +\pi/3$:
$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - (\sigma_{yy})/3 \tag{II.23}$$

$\theta = -\pi/2$ ou $\theta = +\pi/2$:
$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} / 3 \tag{II.24}$$

$\theta = -2\pi/3$ ou $\theta = +2\pi/3$:
$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \tag{II.25}$$

Pour les fissures, la contrainte T est considérée comme étant une valeur constante, active parallèlement au sens de la propagation. Cette valeur est prise lorsque la différence des contraintes se stabilise le long du ligament. Nous remarquons que cette méthode donne le Facteur d'Intensité de Contraintes à la pointe de la fissure. Une correction de ce facteur, par la contrainte T à une certaine distance de la pointe de la fissure.

II.3.3 Méthode d'extrapolation

Cette méthode de mesure, proposée par Maleski et al. et Tvergaard et al.[51-52], utilise le même principe de différence de contraintes en mode I, pour déterminer la contrainte T. Cette dernière est supposée, par définition, comme étant une contrainte constante agissant parallèlement au chemin idéal de propagation de la fissure. Ils utilisent une simulation, par Eléments Finis, pour calculer la valeur de la contrainte T et du Facteur d'Intensité de Contraintes, FIC. Le terme de la contrainte T est déterminé dans direction xx :

$$T = \left[\sigma_{xx} \right] = T_0 + \lambda \cdot \left(\frac{x}{a} \right) \quad (\text{II.26})$$

Cette représentation c'est une relation linéaire entre T et la distance x à la pointe de la fissure, dépend de λ . Par extrapolation de T, en fonction de x, nous pouvons obtenir une valeur de T à $x = 0$ (à la pointe de la fissure), notée T_0 . La figure. II.10 représente le détail de cette méthode, pour une éprouvette SENT en flexion trois points. La portion linéaire de la courbe a été extrapolée en arrière pour obtenir T_0 . Ce processus se répète pour tous les rapports (a/t) pour obtenir la contrainte T, dans n'importe quel point le long du ligament,

Pour un premier examen des deux termes asymptotiques de l'équation de Williams, utilisant l'approche de K-dominant, dans la direction $\theta=0^\circ$, K_I prend l'expression suivante :

$$(k_I)_{\theta=0} = k_0 + n \cdot \left(\frac{x}{a} \right) \quad (\text{II.27})$$

L'équation (II.27) présente une relation linéaire entre K_I et (x/a) de pente η , (figure 10.b). Par l'implantation de K_I , comme fonction de la distance x, nous obtenons la valeur K_I , pour $x = 0$ (à la pointe de la fissure), notée K_0 .

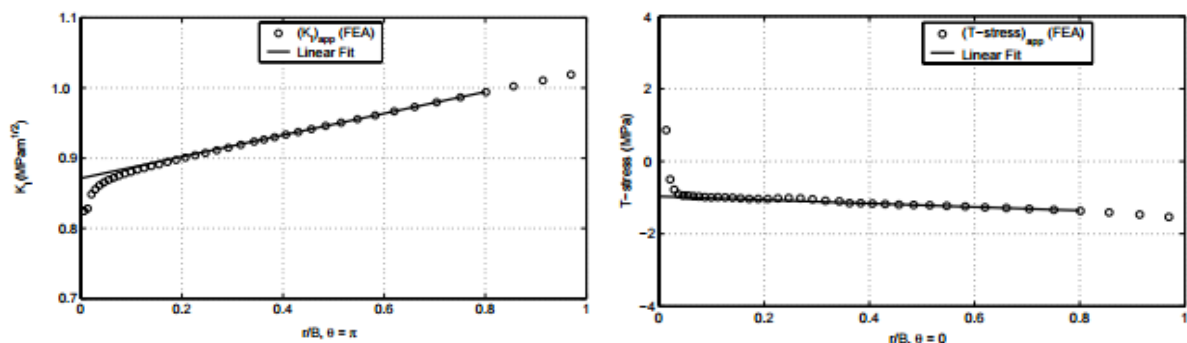


Figure II.10: Régression linéaire par éléments finis pour déterminer : (a) le Facteur d'Intensité de Contraintes K_I , (b) la contrainte T avec la méthode de différence de contraintes modifiée [51-52].

II.3.4 Autres méthodes de calcul

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la contrainte T en élasticité linéaire. Fett [57] propose une synthèse des différentes méthodes de calcul existantes.

Chao et al. [53] ont opté pour une méthode simple déterminant la contrainte T en mode I.

Ayatollahi et al. [43] a critiqué la généralisation de la méthode de la différence de contraintes par Yang et al. [49]. Ils ont calculé la contrainte T, par éléments finis, en utilisant le code de calcul ABAQUS. Deux méthodes ont été utilisées : la méthode des contraintes et la méthode des déplacements, sur deux types d'éprouvettes (SENT) et (DENT) sollicitées en mode I, (Figure.II.14). Ils remarquent que, pour les valeurs négatives lointaines de x , les termes d'ordre supérieur deviennent apparents. Par contre, pour les valeurs négatives proches, la singularité à la pointe de la face de fissure affecte les résultats. Traditionnellement, L'amplitude de la contrainte T est déterminée à partir de la partie constante des résultats, ce qui n'est pas le cas, dans cette étude. Les constatations pour les deux éprouvettes étudiées, confirment que la méthode de contraintes ne produit pas une valeur constante de T. Par contre, ils remarquent que la deuxième méthode, dite des déplacements, est en bon accord avec les résultats de Kfoufi [46], pour les mêmes éprouvettes. Ces résultats sont confirmés par des résultats similaires trouvés sur d'autres profondeurs de fissures et d'autres types d'éprouvettes. La figure. II.11.a, b illustre les remarques citées sur éprouvette (SENT) avec $a/w = 0.4$ et (DENT) avec $a/w = 0.2$

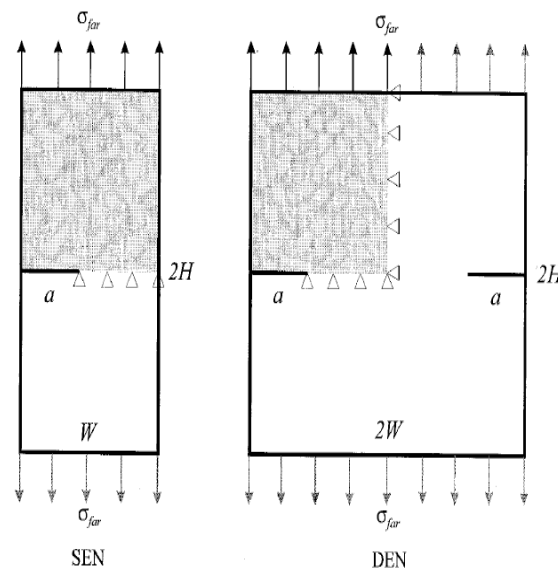


Figure II.11: Géométries des éprouvettes SENT et DENT [53].

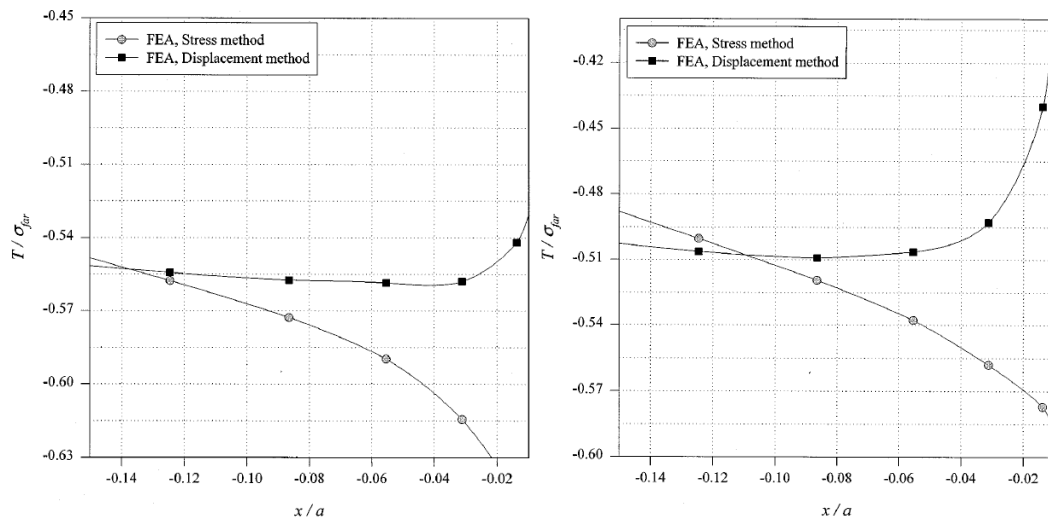


Figure II. 12 : Evolution de la contrainte T normalisée à la contrainte nominale pour une éprouvette :(a) SEN avec un rapport de $a/w = 0.4$, (b) DEN avec $a/t=0.2$ [53].

Wang et al. [49-50] calcule la contrainte T par la méthode de superposition. Il a démontré que, pour une éprouvette contenant une fissure chargée d’une contrainte nominale en mode I, T est une superposition de la contrainte T pour deux cas. Le premier cas est une contrainte T pour une fissure chargée d’une pression $\sigma(x)$ sur ses lèvres, et le deuxième cas est une contrainte T, dans une éprouvette non fissurée sous une charge nominale. Pour cela, la contrainte T peut se calculer avec la sommation de deux sous problèmes :

$$T = T_{\text{pression sur les lèvres}} + T_{\text{non-fissuré}} \tag{II.28}$$

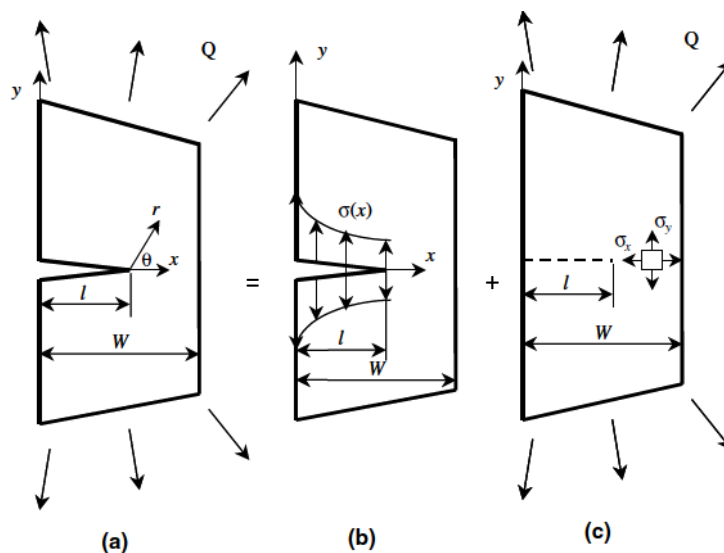


Figure II.13: méthode de superposition pour le calcul de Tstress : (a)–(c) [54].

Notons que la distribution de la charge nominale, (Figure II.13), n’a pas de singularité à la pointe de la fissure, et le Facteur d’Intensité de Contraintes correspondant est égal à zéro.

Cependant, la contrainte T a une valeur finie. Wang [51,52] montre que la contrainte T correspondante, pour une charge nominale, est donnée par l'équation (II.29) :

$$T = T_{\text{non-fissurée}} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / \dots \text{ (à la pointe de la fissure)} \quad (\text{II.29})$$

En se basant sur l'équation (II.28) et l'équation (II.29), la contrainte T , pour une éprouvette de la figure II.13 chargée avec une contrainte nominale, est présentée sous la forme :

$$T = T_{\text{pression sur les lèvres}} + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \dots \text{ (à la pointe de fissure)} \quad (\text{II.30})$$

II.4 Méthode pour la détermination de K et de T

Des nombreuses méthodes pour la détermination des facteurs d'intensité de contrainte et T -stress sont décrits dans la littérature. Les approches analytique et les semi-analytiques sont applicables principalement dans le cas des géométries spéciales et cas de chargements simples comme par exemple fissure interne des éprouvettes semi-infinies et éprouvette infinie avec fissure latérale sous traction simple. A titre d'exemple, l'approche analytique rapportée par Wigglesworth [55] peut être brièvement abordée.

Pour des fissures par des éléments finis, des procédures numériques doivent être utilisées principalement. A cet effet, quelques-unes des méthodes disponibles peut être citées, à savoir: les méthodes d'éléments finis avec une évaluation de K_I et T des contraintes ou par l'évaluation des intégrales de l'énergie,

II.4.1 Méthode des éléments frontières

Dans le K - T -compendium de T. Fett [57] certains résultats sont donnés qui ont été obtenus avec ABAQUS [58] Versions 6.2 et 6.3 qui fournissent l'intensité des facteurs de stress K_I , K_{II} et T directement. Pour l'analyse de T , Abaqus emploie une interaction intégrale selon Shih et Asaro [65]. La plupart des résultats numériques ont été obtenu par application de la colocation Boundary procédure. Puisque cette méthode fournit également les termes d'ordre supérieur des contraintes.

II.4.2 Methode Analytique de Wigglesworth

Très tôt, Wigglesworth [55] a dérivé une solution analytique pour la moitié de l'éprouvette de bord fissuré sous une pression P constante ou, de manière équivalente, par un σ_∞ de traction. La procédure permet de déterminer les coefficients d'une série d'expansion de la distribution de contrainte (ici notée A_n et B_n). Comme résultat principal Wigglesworth [55] a montré que les coefficients A_n et B_n peuvent être obtenus à partir de l'expansion asymptotique d'une fonction $q(m)$ pour de grands nombres entiers m , avec $q(m)$ est définie par:

$$q(m) = -2h(1) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} h(m) \quad (\text{II.31})$$

II.4.3 Procédure des éléments frontiers

II.4.3.1 Conditions des éléments frontiers

Une simple possibilité pour déterminer les coefficients A_n et B_n représente l'application du procédé de la méthode de colocation [57]. Pour l'application pratique de l'équation de Williams qui est utilisé pour déterminer A_n et B_n , la série infinie pour la fonction d'Airy de contrainte Φ doit être tronqué après le terme N_{th} , pour lesquels une valeur adéquate doit être choisie. Les coefficients encore inconnus sont déterminés en ajustant les contraintes et les déplacements vers les conditions aux limites spécifiées. Les contraintes résultent de la relation. les contraintes tout d'abord tirées par Williams [3] sont données dans les équations. (29-30).

II.4.3.2 Principe de superposition

La procédure nécessaire pour les calculs abordés dans cette section est illustrée ci-dessous. la géométrie d'un disque peut être choisie. La figure II.14 illustre le principe de superposition pour le cas de T-stress. La partie a) montre une fissure dans un corps infini, chargée par un couple de forces P .

Le T-stress dans ce cas est noté T_0 . Tout d'abord, on calcule les contraintes normales et de cisaillement le long d'un contour (cercle en pointillés), qui correspond au disque fini. Ils ont coupé le disque le long de ce contour et appliqué une traction normale et de cisaillement à la frontière libre, qui sont identiques aux contraintes :

$$\frac{u}{\sigma^*W} = \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{W}\right)^{n+1/2} \frac{2n+3}{2n-1} \left[\left(n+4\nu - \frac{5}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi - \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi \right] + \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{W}\right)^{n+1} \left[(n+4\nu - 2) \cos n\varphi - (n+2) \cos(n+2)\varphi \right] \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{v}{\sigma^*W} = \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{W}\right)^{n+1/2} \frac{2n+3}{2n-1} \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi - \left(n - 4\nu + \frac{7}{2}\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi \right] + \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{W}\right)^{n+1} \left[(n+2) \sin(n+2)\varphi - (n - 4\nu + 24) \sin n\varphi \right] \quad (\text{II.33})$$

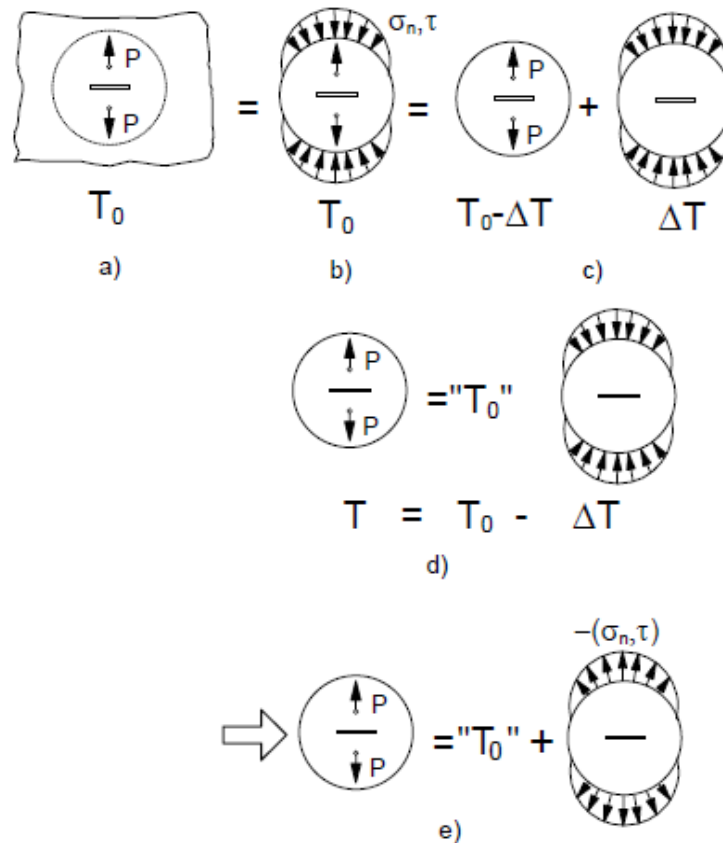


Figure II.14: Illustration du principe de superposition pour calculer les contraintes-pour les forces individuelles.

Le disque chargé par la combinaison des forces de traction individuelles et présente la même limite T- terme T_0 . Ensuite, nous considérons la situation b) être la superposition des deux cas de charge indiquées dans la partie c), à savoir, le disque chargé par le couple de forces (avec T-stress $T-\Delta T$) et un disque fissuré chargés par la traction limite, ayant le T-term ΔT -terme. Comme représenté par une partie d), le T-terme du disque craqué est la différence $T = T_0 - \Delta T$. Si le signe de la traction limite est modifiée, la relation équivalente est donnée par la partie e).

II.4.4 Technique de la fonction de poids

II.4.4.1 La fonction de poids

Plusieurs méthodes numériques font différents calculs pour l'évaluation du FIC pour chaque type de chargement et de longueur de fissure. La méthode de la fonction de poids (weight function) développée par Bückner [58] simplifie la détermination du FIC. Si la fonction de poids est définie pour une fissure simple au bord, le FIC peut être multiplié par cette fonction par la distribution des contraintes et intégré suivant la longueur de la fissure. La fonction de poids ne dépend pas de la distribution des contraintes, mais de celle de la géométrie de l'éprouvette.

Cette méthode est expliquée dans la section suivante dans le cas d'une éprouvette SENT. Si la distribution de la contrainte normale dans la partie non fissurée de l'éprouvette le long du chemin de la fissure pour l'éprouvette fissurée, le FIC est donné par Fett et al [59].

II.4.4.2 Détermination de la fonction de poids

La procédure générale pour la détermination de la fonction de poids est décrite dans le prochain paragraphe pour la composante de la fonction de poids $h_I (= h_{I1}) \cdot v_r(x, a)$.

$$h_I(x, a) = \frac{E' \cdot \frac{\partial v_r(x, a)}{\partial a}}{k_{II}(a)} \quad (\text{II.34})$$

La relation de Rince [65] permet de déterminer la fonction de Poids à partir du déplacement de l'ouverture de la fissure $h_I (= h_{I1}) \cdot v_r(x, a)$. Sans n'importe quelle charge arbitrairement choisie et le facteur d'intensité de contrainte correspondant $K_{Ir}(a)$

(a): Avec ($E' = E$ pour des conditions de contraintes plane et $E' = E/(1-\nu^2)$ déformation plane), il est convenu d'utiliser $\sigma_r(x) = \sigma_0 = \text{constant}$ pour la distribution de la charge.

La possibilité de dériver la fonction de poids à partir de l'équation II. 34 est l'évaluation numérique pour le FIC obtenu par l'application de la méthode BCM pour un couple de forces avec deux longueurs de fissure différentes a et $a+da$ un large nombre de coefficients A_n et B_n sont obtenus. Après l'équation II.32 montre le couple de déplacement de fissures $v(a)$ et $v(a+da)$ de sorte que la dérivation de l'équation II.33 peut être obtenue dans le but de minimiser les calculs numériques.

II.5 Transformation de phase en présence de T-stress

Selon l'auteur, la première étude théorique de l'effet de T-stress sur les zones de transformation de phase a été publié par Giannakopoulos et Olsson [61]. Cette enquête est la base des considérations suivantes.

En présence d'une contribution T-stress, la contrainte hydrostatique près de la pointe de la fissure dans des conditions de déformation plane par l'équation (II.35) :

$$\sigma_{hyd} = \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) + T \right) \quad (\text{II.35})$$

(le (φ) de la zone de transformation de phase pour les résultats de déformation plane comme :

$$r = \frac{8}{3\sqrt{3}} \omega \cos^2(\theta/2) \quad (\text{II.36})$$

$$\omega = \frac{(1+\nu)^2}{4\sqrt{3\pi}} \left(\frac{K_I}{\sigma_{hyd,c} - (1+\nu)T/3} \right) \quad (\text{II.37})$$

En raison de la transformation martensitique, une déformation d'expansion volumétrique d'environ 4,5% se produit. Ces souches provoquent des contraintes de traction à une certaine distance (avant) de la pointe de la fissure et de contraintes de compression sur la longueur Aa à la ligne de fissure. Les contraintes de compression aboutissent à un facteur d'intensité de contrainte de blindage qui doit être surmontée lors de la propagation de la fissure, à savoir le facteur d'intensité de contrainte appliquée doit être augmenté pour maintenir la croissance de la fissure stable.

Dans la suite, des études numériques plus complexes (par exemple [67]) l'influence des contraintes de cisaillement et de la déformation sur le critère de la transformation et sur le calcul de la zone a également été pris en considération.

II.5.1 Effet de T-stress sur les micro-zones et les zones fissurée

II.5.2 Micro-fissures dans un matériau poly-cristallin

Dans cette section, nous allons utiliser une valeur critique du premier invariant du tenseur de stress (stress hydrostatique), tel que proposé par Evans et Faber [24] et, dans une moindre mesure, une contrainte efficace utilisée dans l'étude de Charalambides et McMeeking [25].

Dans un matériau poly-cristallin; (la céramique), les fortes contraintes d'avance sur un résultat de fissure dans la fracture des joints de grains orientés favorablement. Cette microfissuration aux joints de grains est causée par des contraintes internes et superposées appliquées de l'extérieur. Les contraintes internes sont une conséquence de l'inadéquation de la dilatation thermique des grains orientés différemment. Différents critères de stress pour les micro-fissures ont été utilisés dans la littérature.

La forme et la taille de la zone micro-fissure est supposée être régie par la condition d'une valeur critique de la contrainte hydrostatique étant responsable de la fissuration, à savoir :

Dans les equations II.43 σ_r et σ_φ sont les composantes de la contrainte en coordonnées polaires et σ_z est la contrainte dans le sens de l'épaisseur. Il détient pour σ_z :

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{pour contraintes plane} \\ \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) & \text{pour déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

où ν est le coefficient de Poisson.

la condition de fisuration est exprimée par une contrainte effective :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{eff_c} \quad (\text{II.39})$$

avec σ_{eff} définie par les contraintes principales

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (\text{II.40})$$

II.5.3 Microfissuration devant une fissure

Les contraintes à venir d'une fissure de mode I :

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos^3(\varphi/2) + T \sin^2 \varphi + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.41})$$

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos(\varphi/2)(1 + \sin^2(\varphi/2)) + T \cos^2 \varphi + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.42})$$

II.5.4 Taille et la forme de la zone de micro-fissuration

B3.1.3 Taille et forme de la zone de micro-fissures

La contrainte hydrostatique près de la pointe de la fissure dans des conditions de déformation plane :

$$\sigma_{hyd} = \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos(\varphi/2) + T \right) \quad (II.43)$$

Ce cas permet une analyse identique à celle des zones de transformation de phase en oxyde de zirconium (voir la section précédente). Le contour de la zone résultant est donné par :

$$r_c = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{I0} \cos(\varphi/2)}{\frac{3}{1+\nu} \sigma_{hyd,c} - T} \right)^2 \quad (II.44)$$

La forme de cette zone est représentée sur la figure II.15 pour plusieurs valeurs de T. Les résultats pour les deux critères sont très similaires. Par conséquent, le critère de contrainte hydrostatique est appliqué exclusivement dans la poursuite de l'analyse numérique. L'influence de T-stress sera discutée ci-dessous, dans le cas d'une barre de flexion bord fissuré. Le ratio de biaxialité β [25] pour une telle fissure de longueur a est donné par [26] et tracé sur la figure. II.16 par rapport à la longueur relative de la fissure a / W.

$$\beta = \frac{-0.469 + 1.2825a + 0.6543a^2 - 1.2415a^3 + 0.07568a^4}{\sqrt{1-a}}, \quad a = a/W \quad (II.45)$$

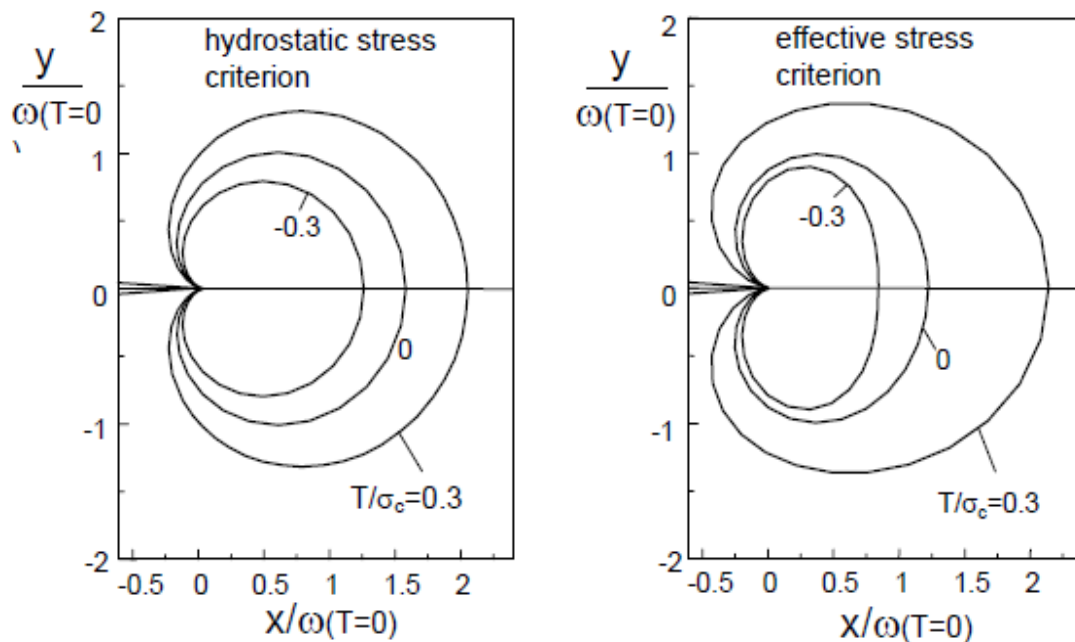


Figure II.15: zones pour les deux critères de Micro-fissures [25].

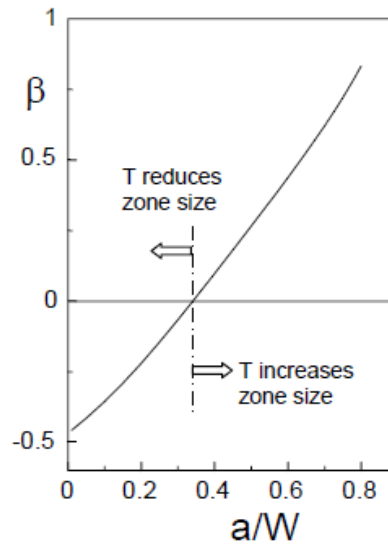


Figure II.16: rapport de biaxialité β pour cas de flexion 4 points d'une barre.

II.6 Evolution de la contrainte T

Comme nous travaillons dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, nous définissons la biaxialité du chargement par la contrainte T plutôt que par le rapport β . Bien que la contrainte T soit en général faible devant σ_{xx} en pointe de la fissure, nous montrerons le rôle, non négligeable, qu'elle joue sur son comportement, en particulier sur le développement de la zone plastique. Les paragraphes suivants donneront la forme et la taille de la zone plastifiée, les paramètres géométriques du défaut, les conditions de chargement, le chemin de propagation ainsi que la vitesse de propagation qui dépend de ce terme non singulier.

La contrainte non singulière T peut également affecter la zone plastique et la forme.

Cependant, la taille et la forme basée sur les champs élastiques linéaires fissures pointe asymptotique ne sont pas, en général en accord avec les résultats de calcul pour les matières plastiques élastiques [par exemple, Ben-Aoun et Pan [71]]. Les figures II.15 et II.16 montrent les tendances générales de la taille de la zone plastique et forme pour différents T soulignés pour les matériaux parfaitement plastiques élastiques sous petite échelle donnant les conditions de déformation plane et de contrainte plane.

II.6.1 Influence de T sur la taille de la zone plastifiée :

La figure II.17 montre, d'une manière schématique, le rôle de T sur la forme et la taille de la zone plastique en déformations planes ainsi qu'en contraintes planes. Nous nous intéressons ici au cas des déformations planes. Dans ce cas, la zone plastique présente une forme d'ailes de papillon plus marquée quand la contrainte T est négative. Une contrainte T positive provoque un renversement de ces ailes vers l'arrière de la fissure.

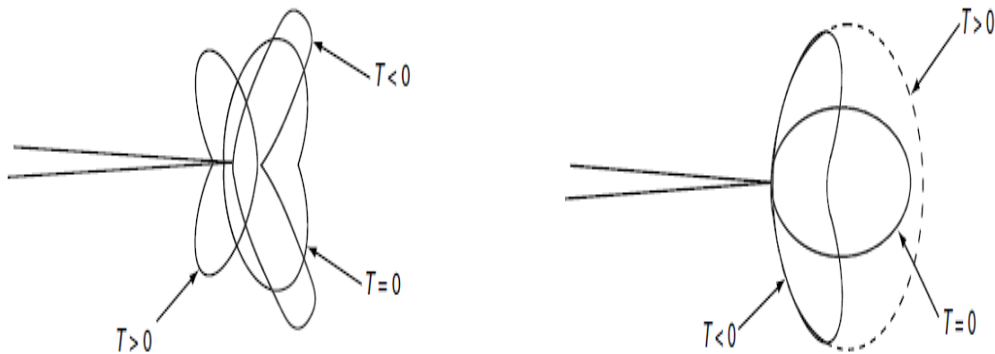


Figure II.17 : Les tendances générales de la taille et de la forme de la zone plastique pour différents T-stress sous petite échelle a) cas de conditions contrainte plane [56].

Ce paramètre modifie la triaxialité des contraintes en pointe de fissure en intervenant directement sur la composante hydrostatique σ_m :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (\text{II.46})$$

De plus, la zone plastique est affectée par cette contrainte. Lorsque T est négative (cas d'éprouvettes en traction), la contrainte hydrostatique est diminuée et l'étendue de la zone plastique augmente par rapport au cas de référence T=0. A l'opposé, une valeur positive (éprouvettes CT ou SENB) est caractérisée par une diminution de la taille de la zone plastique, mais de manière beaucoup moins significative [56], figure II.24. Dans cette figure, les axes sont normalisés par la grandeur $(\frac{K}{\sigma_0})^2$ où K est le Facteur d'Intensité de Contraintes correspondant au chargement, pour lequel les zones plastiques sont représentées (le repère (x,y) correspond à la figure. II.17 et l'origine est située à la pointe de fissure [32].

Le rôle de la contrainte T, sur la plasticité, peut se comprendre aisément en calculant la contrainte équivalente de Von Mises à l'aide du développement asymptotique des contraintes incluant la contrainte T. Pour $\theta = \pi$, l'expression analytique de la contrainte

équivalente de Von Mises est très simple et permet de tirer quelques tendances. Cette expression montre que la dimension de la zone plastique dépend du rapport T / K_I . En outre, plus r est grand, c'est-à-dire plus la zone plastique est grande et plus l'effet de ce rapport T/K_I est grand [68].

$$\sigma_{eq}(r, \theta = 0, \nu = 1/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sqrt{\frac{27}{28}} + \frac{1}{28} \cdot \left(1 + \frac{14T \sqrt{2\pi r}^2}{k_I} \right) \quad (\text{II.47})$$

$$\sigma_{eq}(r, \theta = 0, \nu = 1/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{2T \sqrt{2\pi r}^2}{k_I} \right) \quad (\text{II.48})$$

Enfin, compte tenu de la forme de l'expression, la valeur de la contrainte équivalente passe par un minimum en fonction du rapport T/K_I . En contraintes planes, ce minimum est en dehors des plages de variations usuelles du rapport T/K_I . L'évolution de la dimension de la zone plastique avec le rapport T/K_I est monotone. Mais ce n'est pas le cas en déformations planes. Des évolutions non monotones de la dimension de la zone plastique avec T/K_I pourront être observées [57].

II.6.2 Influence de T sur le chemin de propagation

Il a été démontré, par plusieurs auteurs [46-48] que la contrainte T a une influence sur le trajet de fissuration, (figure II.7). Si l'on se place dans le cas particulier d'une fissure de Griffith, une contrainte T positive correspond à une contrainte supérieure à σ_{yy} . Dans une telle configuration la fissure devrait bifurquer. Plus généralement, il a été montré qu'une contrainte T négative stabilise le trajet de fissuration, c'est-à-dire qu'une petite perturbation du trajet de la fissure sera vite atténuée. Par contre, une contrainte T positive accentue les déviations dues aux obstacles microstructuraux et permet à la fissure de bifurquer (Cotterell et Rice. [9]).

Ce changement de direction de fissuration, pour une contrainte T positive, a été également mis en évidence expérimentalement par plusieurs auteurs. Levers et Radon [45] ont remarqué que le trajet de fissuration est plus plan pour une contrainte T négative que pour une contrainte T nulle.

Le chemin de la fissure est plus sinueux si le chargement devient équi-biaxial ($T = 0$). Truchon et al. [81] ont mis en évidence le même phénomène pour une fissure dans une

éprouvette cruciforme. Les auteurs ont remarqué que, pour une contrainte T positive, le plan de fissuration évolue de manière à ce que la fissure soit sollicitée en Mode I local.

II.6.3 Influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation

L'étude bibliographique [28, 36, 39-40] ont permis de montrer l'importance de la contrainte T sur la vitesse de fissuration. Il a donc été décidé d'étudier l'effet de la contrainte T par éléments finis, puis de modéliser et d'intégrer le rôle de T au modèle proposé.

Les études, concernant l'influence de la contrainte T sur la cinétique de la fissure, sont contradictoires. Cela laisse à penser que l'effet de T, sur la propagation, dépend peut-être d'une compétition entre divers effets liés à la plasticité, au comportement du matériau, à l'épaisseur de l'éprouvette, à la rugosité... Les tendances de la littérature montrent, cependant, que dans le cas général, la vitesse de propagation diminue quand la contrainte T augmente. ont trouvé que l'effet de T sur la propagation inverse.

II.6.4 Influence des paramètres géométriques de la fissure sur T

De nombreuses études évaluent qualitativement l'influence de la taille et de l'épaisseur de l'éprouvette, de la présence d'entailles latérales et de la taille du défaut et du type d'éprouvette sur la contrainte T.

Sachant que l'objectif premier est de déterminer un critère pour l'étude de l'intégrité des structures, il semble logique de s'intéresser à la transférabilité entre éprouvettes. De nombreuses études ont donc été menées sur ce sujet [21, 25-32, 71-74]. Les auteurs ont montré clairement l'influence de la géométrie de l'éprouvette sur le Facteur d'Intensité de Contraintes et la ténacité à l'amorçage. Il est aujourd'hui établi que ce phénomène est lié à la distribution des contraintes dans le ligament et au degré de confinement de la plasticité en pointe de fissure ('constraint effect'). Ainsi, nous observons que les éprouvettes, dont le ligament est sollicité majoritairement en traction (DENT, SENT et CCP), présentent un taux de triaxialité plus faible que les éprouvettes dites de flexion (CT et SENB).

II.7 Effet d'échelle et de géométrie :

Les résultats de la littérature montrent que si l'effet d'échelle est moins sensible, mais tout de même discuté pour la ténacité à l'amorçage, la contrainte T présente une sensibilité importante à ce phénomène. Cependant, il est difficile de conclure sur les tendances observées, variées voire contradictoires, dépendantes de la nature du matériau et de la géométrie

considérée. C'est sans doute, pour cette raison, que cette démarche n'a pas abouti à la définition de grandeurs intrinsèques au matériau [55].

La ruine d'un matériau fragile et/ou ductile est d'autant plus rapide que le taux de triaxialité est important [61]. Ceci explique pourquoi les courbes de résistance à la déchirure, obtenues pour une éprouvette de 'traction', donnent des valeurs de K plus importantes que celles obtenues avec une éprouvette de 'flexion', pour une même longueur de fissure. Il est donc nécessaire d'appliquer un chargement plus important pour atteindre le même endommagement [56].

Plusieurs auteurs [57, 62, 63] montrent que la contrainte T , pour différentes géométries, en fonction de $r / (J / \sigma_0)$ change de signe. Un exemple d'éprouvettes CT, CCRB, CCP et DENT contenant des fissures en état de contraintes planes est donné par [81]. L'auteur a montré que le deuxième paramètre T , des éprouvettes CCP et DENT, est quasi-nul ; il est négatif pour l'éprouvette CT et positif pour la CCRB. En état de déformations planes, le paramètre de confinement des éprouvettes CT, CCP et DENT est négatif, tandis que celui de l'éprouvette CCRB reste positif. Les valeurs de T , indiquées dans la figure II.19, sont données pour une géométrie donnée, $a/b = 0.5$, et pour des chargements différents selon les éprouvettes. De cette figure, l'auteur a retenu une stabilisation de la valeur de T , pour ces cas particuliers, dans le domaine $2 < r / (J / \sigma_0) < 5$.

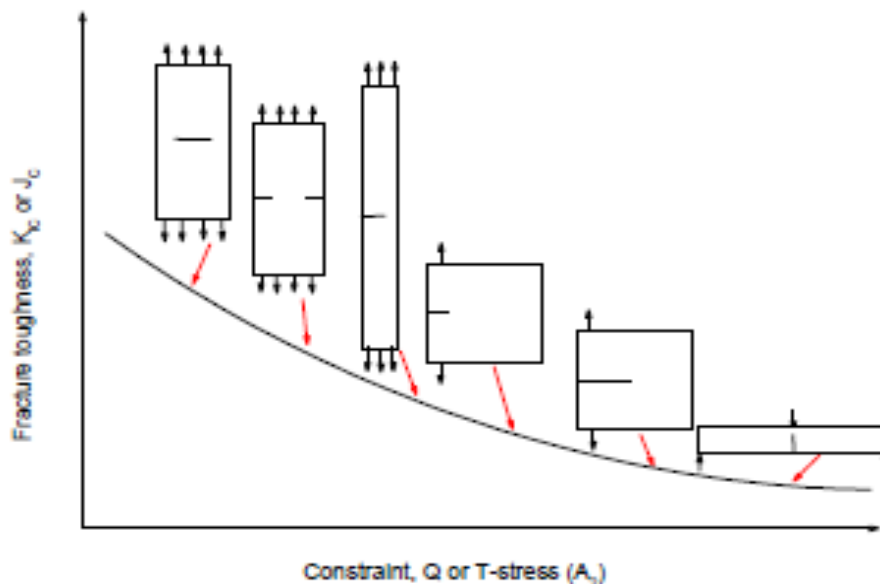


Figure II.19 : Effets de la géométrie sur la courbe bi-paramétrique K-T [55].

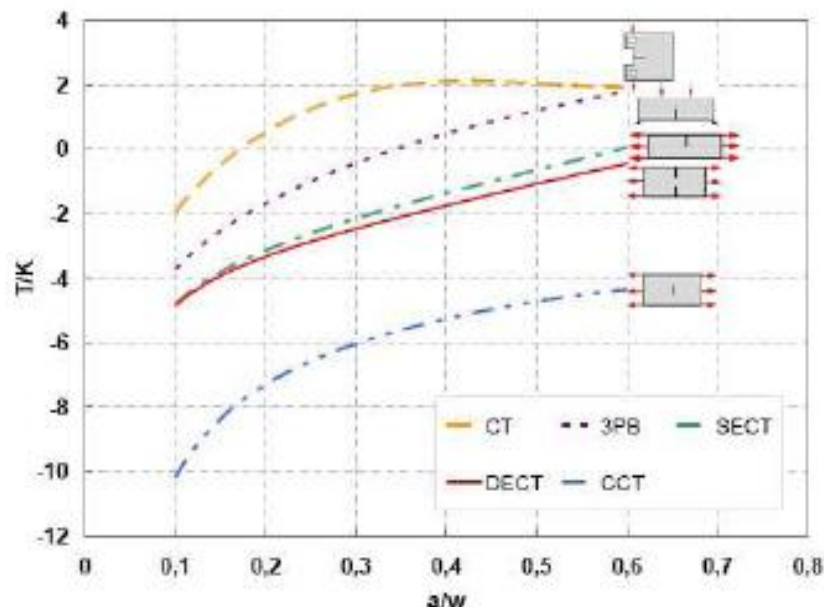


Figure II. 20: Evolution de la contrainte T en fonction de la longueur de la fissure, pour quelques éprouvettes normalisées [63].

La figure II-20 montre quelques évolutions de la contrainte T, normalisée par le chargement appliqué, en fonction de la longueur de la fissure adimensionnée par la largeur de l'éprouvette. L'aplage de variation de T est assez large selon la géométrie de l'éprouvette. Elle est négative au-delà d'une certaine longueur de fissure, dans le cas d'éprouvettes sollicitées en flexion (CT, TPB) [57, 63].

II.7.1 Effet de la taille de la fissure :

Il est admis que deux fissures émanant d'entailles de longueurs différentes se propagent à la même vitesse si elles sont soumises au même Facteur d'Intensité de Contraintes. K. Hammam [65] a donné, pour exemple, deux éprouvettes de Griffith, avec deux entailles de tailles différentes. Une entaille longue de longueur a_1 et une entaille plus courte de longueur a_2 , (Figure.II.20). Pour avoir le même Facteur d'Intensité de Contraintes dans les deux cas, la contrainte appliquée à la fissure courte se calcule par :

$$k_{a_2} = k_{a_1} \quad \text{si} \quad \sigma_2 = \sigma_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad (\text{II.49})$$

L'auteur a montré par éléments finis, pour un chargement uni-axial de deux éprouvettes entaillées soumises au même Facteur d'Intensité de Contraintes, que l'émoussement plastique est plus élevé pour la fissure courte que pour la fissure longue. Ce résultat montre que la seule intensité K_I des termes au premier ordre des développements asymptotiques, en pointe de l'entaille, ne suffit pas à prévoir le comportement de l'entaille. Il faut observer comment évoluent les termes d'ordre supérieur, et le premier d'entre eux la contrainte T . La différence entre les courbes d'émoussements s'explique par le fait que si K_I est bien le même dans les deux cas, en revanche la contrainte T est différente. Ainsi, cette étude a permis de montrer qu'une approche, à un seul paramètre K , ne caractérise pas complètement le comportement de la fissure émanant d'entaille. Il a également montré que deux paramètres T et K sont suffisants pour modéliser le comportement d'une fissure émanant d'entaille et appliquer le principe de similitude : deux fissures s'émoussent de la même manière si elles sont soumises au même Facteur d'Intensité des Contraintes K et à la même contrainte T .

La particularité d'un rapport de taille d'entaille, a/w très court (entaille courtes) a été discutée par plusieurs auteurs, ces dernières années. Bauvineau [70] montre que la plasticité peut s'écouler en arrière de la fissure. Par conséquent, le paramètre de chargement K n'est plus pertinent pour décrire les champs de contraintes au voisinage de l'entaille, et en particulier dans le ligament restant. Ce cas est fréquemment rencontré pour des aciers ferritiques, qui ne s'écrouissent pas pendant la mise en charge. Les résultats de Kabiri [68] et les constatations d'O'Dowd et Shih [13,14] montrent que pour les éprouvettes de flexion (CT, SENB), en état de déformations planes, le paramètre T varie linéairement avec la distance r , dans l'intervalle de $r / (J / \sigma_0)$, pour des cas où le rapport de taille de l'entaille est supérieur ou égal à 0.6.

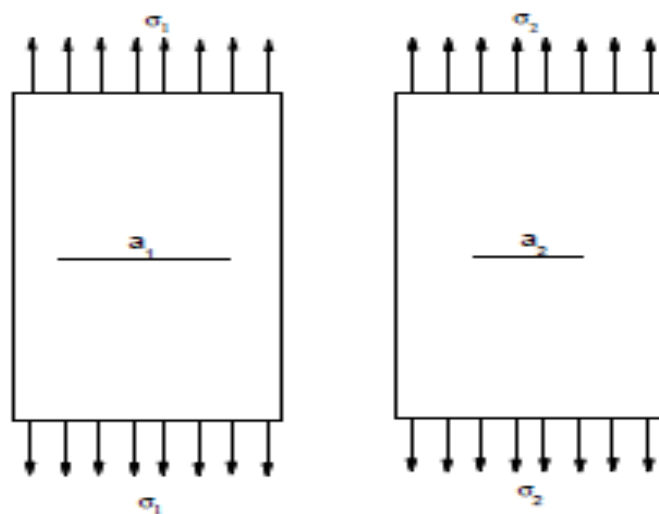


Figure II.21 : Fissures de Griffith de différentes longueurs [57].

Pour des éprouvettes CCRB. Ravi chandar [62] a montré que la fonction T ne se stabilise pas pour la valeur de $r / (J / \sigma_0) = 2$, mais par contre ces valeurs ne se stabilisent qu'à partir de $r / (J / \sigma_0)$ qui dépasse 4.

II.7.2 Influence de T sur le type de chargement :

Lorsqu'une éprouvette est soumise à une charge dynamique, le « temps » est un autre facteur additionnel, par exemple, la vitesse de chargement et le temps d'amorçage. D'une façon générale, la mécanique dynamique de rupture nécessite de tenir compte de trois paramètres dans la mécanique statique de la rupture : l'effet d'inertie, la dépendance de vitesse du comportement du matériau et les ondes de contraintes réfléchies par les frontières de l'éprouvette [24]. L'effet d'inertie est important quand la charge est appliquée rapidement à l'endroit où l'entaille se développe rapidement. Bien que la ténacité sous la charge dynamique puisse dépendre de la vitesse de chargement et de l'intensité des contraintes à la pointe de l'entaille, elle peut ne pas être régulière à l'amorçage.

Des nombreuses études sur l'effet de confinement pour la rupture des fissures stationnaires sous une charge quasi-statique, et d'autres travaux sous chargement dynamique ont été réalisés [44 - 45].

Un exemple d'effet de vitesse de chargement, sur la contrainte T et le Facteur d'Intensité de Contraintes, est donné par la figure II.21 où l'effet du confinement (paramètre T) sur l'amorçage d'une fissure stationnaire, sous un chargement dynamique a été étudié.

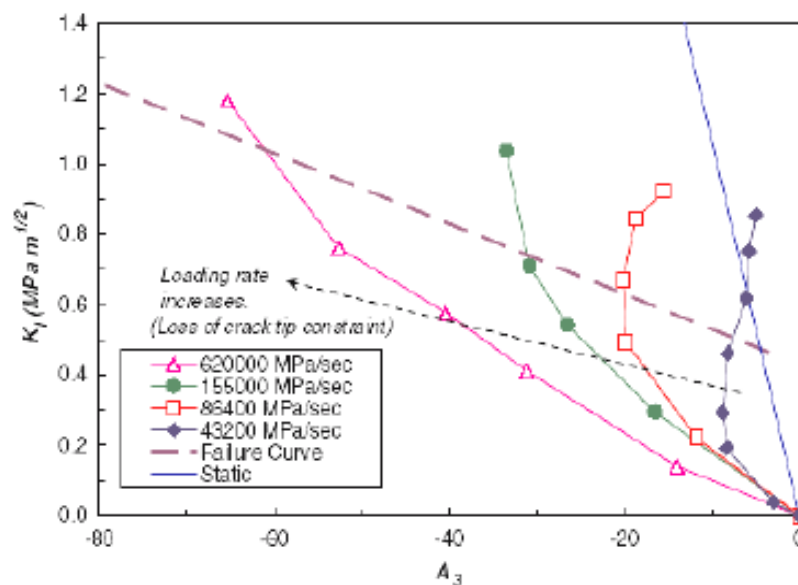


Figure II.21: Développement de confinement représenté par le paramètre A_3 pour différentes vitesses de chargements [25].

II.7.4 Influence de la température

Dans le cas d'une rupture fragile, plus la température augmente et plus la zone plastique se développe avant la rupture fragile. L'effet de la géométrie, sur le confinement de plasticité, est donc de plus en plus important avec la croissance de la température et des valeurs de ténacité. Afin de prendre en compte la perte de confinement, Wallin [62] a relié la température T_0 à la contrainte T , en supposant que le confinement est décrit par la contrainte T et que la forme de la courbe de transition n'est pas affectée par la différence de confinement, Pour cela, il recueille un large panel d'essais décrits dans cette littérature [62] pour lesquels les valeurs de T_0 et la contrainte T sont ou peuvent être calculées par simple relations empiriques.

II. 8 Application de T en 3 dimensions

Parks [23] a utilisé les distributions de T-stress pour prédire quantitativement le variant triaxial au front de la fissure avec une fissure élasto-plastique de surface géométries soumises à la fois a des chargements de traction et de flexion.

Dans le cadre de problèmes bidimensionnel de traction dans des matériaux élastique et isotropique, le T-stress est indépendant des propriétés élastiques des matériaux, tout en étant indépendant de l'épaisseur de l'éprouvette (soit en états de déformation plane ou de contrainte plane les valeurs de T- stress coïncident). Ces caractéristiques ne devraient pas nécessairement être attendues dans un contexte en trois dimensions, mais les études en trois dimensions existantes de la T-stress sont beaucoup moins étendues. Wang et Parcs [50] ont évalué les distributions de T-stress le long d'une surface semi-elliptique au fond de la fissure en soustrayant les termes singuliers dominants à partir de solutions très détaillées d'éléments finis en trois dimensions, ainsi que par le développement des évaluations simplifiées des distributions T-stress basé sur la méthode des lignes de glissements (line-spring modèle).

Le champ des contraintes, autour d'une entaille semi-elliptique soumise à un chargement suivant la direction 2, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{xx}}{2} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta \left[\frac{1 - \frac{\sin \theta}{2} \sin 3\theta}{2} \right] + T \\
\frac{\sigma_{yy}}{2} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta \left[\frac{1 - \frac{\sin \theta}{2} \sin 3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot 2\nu \cdot \frac{\cos \theta}{2} + E \varepsilon_{zz} + \nu T
\end{aligned} \tag{II.50}$$

E étant le module de Young et ν le coefficient de Poisson du matériau. On voit donc apparaître en troisième dimension (3D) une seconde contrainte non singulière suivant la direction tangente au front de la fissure (direction ZZ). Cette contrainte, non singulière, est nommée dans la littérature T_{zz} . Nous savons que T_{zz} peut avoir un rôle sur le comportement de la fissure. Par contre, les études traitant du rôle de ce paramètre, sont assez rares (Quand le chargement externe appliqué est uniaxial), T_{zz} dépend seulement des propriétés élastiques de la fissure). Dans un problème où la fissure est chargée en flexion biaxiale, une autre composante externe s'ajoute dans la direction parallèle au plan de la fissure. Cette contrainte tend à augmenter le niveau de z , notamment T , au point le plus profond du front. Le modèle de propagation utilisé tient compte de deux paramètres seulement, le Facteur d'Intensité de Contraintes K et le rapport K/T . Il est clair qu'il faudra, à l'avenir, se préoccuper de l'effet de ce terme supplémentaire ([63-64]).

Bibliographies

- [1] Hutchinson, J.W. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack tip hardening material. *Journal of Mechanics and Physics of solids*. Vol. 16, 13-31.
- [2] Rice, J.R. and Rosengren, G.F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of solids* Vol. 16, 1-12.
- [3] Williams, J.G., Ewing, P.D. (1972). Fracture under complex stress—the angled crack problem. *International Journal of Fracture* 8(4), 416–41.
- [4] Betegon, C. and Hancock, J.W. (1991). Two-parameter characterization of elastic-plastic and specimen geometry on smallscale yielding at crack tips in elastic-plastic material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21, 263-278.
- [5] Larsson, S.G and Carlsson, A.J.(1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21, 263-278.
- [6] Sherry, A.H., France, C.C. and Goldthorpe, M.R.(1995). Compendium of T-stress solutions for two and three dimensional cracked geometries. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* Volume 18, Issue 1, 141–155
- [7] Li, J, Tan, C.L. and Wang, X. (2005) Weight Functions for T-stress for Edge Cracks in Thick-Walled Cylinder”, *ASME. Journal of Pressure Vessels Technology*, Vol. 127, 457-463.
- [8] Sharma, S.M. and N. Aravast.(1991). Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions. *J. Mech. Phys. Solids* vol. 39, no. 8, 1043 1072, 1991.
- [9] Rice, J.R. (1974). Limitations to the-scale yielding approximation for crack-tip plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 22, 17-26.
- [10] Bilby, B.A0, Cardew, G.E., Goldthorpe, M.R. and Howard, I.C.A. (1986). Finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tips of stationary cracks. In: *Size effects in fracture*. London: Mechanical Engineering Publications Limited. p.37 .46.
- [11] Al-Ani, A.M. and Hancock, J.W. (1991). J-dominance of short cracks in tension and bending. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39,23-33.
- [12] Du, Z.Z. and Hancock, J.W. (1991). The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 555-567.
- [13] Leever, P.S. and Radon, J.C. (1983). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture* 19, 311-325.

- [14] Kfourri, A.P. (1986). Some evaluations of the elastic T-stress using Eshelby's method. *International Journal of Fracture* 30,301-15.
- [15] Sham, T.L. (1991). The determination of the elastic T-term using higher order weight functions. *International Journal of Fracture* 48, 81-102.
- [16] Giannakopoulos, A.E. and Olsson, M. (1992). Influence of the non-singular stress terms on small-scale supercritical transformation toughness, *Journal of the American Ceramic Society*. **75**, 2761-2764.
- [17] Hancock, J.W. and Reuter, W.G. and Parks, D.M. (1993). Constraint and toughness parameterized by T.constraint effects in Fracture, ASTM STP 1171 (Edited by E.M. Hackett, K.-H. Schwalbe and R.H.Dodds), American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 21-40.
- [18] Ueda, Y., Ikeda, K., Yao., T, Aoki, M. (1983). Characteristics of brittle failure under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Engineering Fracture Mechanics*; 18(6), 1131–58.
- [19] Smith, D.J., Ayatollahi, M.R. and Pavier, M.J. (2001). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 24(2),137–50
- [20] Joyce, and Link, R.E. (1997). Application of two parameter elastic-plastic fracture mechanics to analysis of structures', *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 57, N°4, 431-446
- [21] Ben-Aoun, Z.E. and Pan, A.J. (1993). Effects of elasticity and pressure-sensitive yielding on plane-stress crack-tip fields. *Engineering Fracture Mechanics* Volume 44, Issue 5, March, 649-661.
- [22] Moustabchir et Azari. (2006). Rapport interne de DEA, Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz.
- [23] Parks, D.M (1974). Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem, in: *Fracture Analysis (ASTM STP 560)*, Philadelphia, 187–210.
- [24] Anderson, T.L. (1995). *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- [25] Hadj Meliani, M. (2009). Approche globale a deux parametres (K_P - T_P) estimation des contraintes de confinements dans des tructuresportant des entailles; these de doctorat; l'université paulverlaine de metz, france
- [26] Nakamura, T. and Parks, D.M. (1992). Determination of elastic T -stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral. *International Journal of Solids and Structure*. 29, 597-611.

- [27] Wu, X. (2002). Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions. *Engineering Fracture Mechanics* 69(13), 39–52.
- [28] O'Dowd, N.P. and Shih, C.F. (1994). Two-parameter fracture mechanics : theory and applications, in *Fracture Mechanics: Twenty-Fourth Volume*, ASTM STP 1207, ed. J.D. Landes, D.E. McCabe, J.A.M. Boulet, 21-47.
- [29] Cotterell, B. (1966). Notes on the paths and stability of cracks. *International Journal of Fracture Mechanics* 2, 526–533.
- [30] Cotterell, B. and Rice, J. R. (1980). Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*. 16,1555-169.
- [31] Cotterell, B. (1970). On fracture path stability in the compact tension test. *International Journal of Fracture Mechanics* 6, 189–192
- [32] Leevers, P.S. and Radon, J. C. (1983). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture* 19, 311-325.
- [33] Parks, D.M.(1974). Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem, in: *Fracture Analysis (ASTM STP 560)*, Philadelphia, 187–210.
- [34] Fett, T., Rizzi, G., Munz, D., Hoffmann, M. R., Wagner, S. (2006). Bridging interactions in ceramics and consequences on crack path stability, *Journal of the Ceramic Society of Japan* 114, 1038-1043.
- [35] Leevers, P.S. and Radon, J.C. (1982). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries, *International Journal of Fracture* 19, 311-325.
- [36] Selvarathinam, A.S. and Goree, J.G. (1998). T-stress based fracture model for cracks in isotropic materials. *Engineering Fracture Mechanics* 60, 543–561.
- [37] Marder, M. Instability of crack in a heated strip. *Physical Review E*. Vol 49, N1, 49-53.
- [38] Leevers, P.S. and Radon, J.C. (1982). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture* 19, 311-25.
- [39] Hancock, J.W., Reuter, W.G. and Parks, D.M. (1993). Constraint and toughness parameterized by T.constraint effects in Fracture, ASTM STP 1171 (Edited by E.M. Hackett,
- [40] Sumpter, J.D.S (1993). An experimental investigation of the T stress approach. Constraint effects in Fracture, ASTM STP 1171 (Edited by E. M. Hackett, K.-H. Schwalbe K.-H. Schwalbe and R.H. Dodds), American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 21-40.
- [41] Ramulu and Kobayashi, A.S. (1983). Dynamic Crack Curving: A Photoelastic Evaluation. *Experimental Mechanics* Vol. 23, 1-9

- [42] Ravi-Chandar, K. and Knauss, W.G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest. *International Journal of Fracture* 25, 247–262.
- [43] Ayatollah, M.R., Pavier, M.J. and Smith, D.J. (1998). Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *International Journal of Fracture* 91, 283-298.
- [44] Jayadevan, K.R., Narasimhan, R., Ramamurthy, T.S. and, Dattaguru, B. (2001). A numerical study of T-stress in dynamically loaded fracture specimens. *International Journal of Solids and Structures* 38(28-29), 4987-5005.
- [45] Jayadevan, K.R., Thaulow, C., Østby, E., Berg, B., Skallerud, B., Holthe, K. and Nyhus, B. (2005). Structural integrity of pipelines: T-stress by line-spring. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 28, 467-488.
- [46] Kfoury, A.P. (1986). Some evaluations of the elastic T-stress using Eshelby's method. *International Journal of Fracture* 30, 301-15.
- [47] Alok Sutradhar., Glaucio, H. and Paulino. (2004). Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28, 1335 –1350
- [48] Sharma, S. M. and Aravast, N. (1991). Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* vol. 39, no.8, 1043-1072.
- [49] Wang, Y.Y. (1991). On the two-parameter characterization of elastic-plastic crack front fields of surface-cracked plates. MIT Report, accepted for publication in ASTM Symposium on Crack Tip Constraint, Indianapolis, May, 1991.
- [50] Wang, Y.Y. and Parks, D.M. (1990). Evaluation of the elastic T-stress in surface-cracked plates using the line-spring *International Journal of Fracture* Volume 56, Issue 1, pp 25-40.
- [51] Maleski, J., Kirugulige, M.S. and Tippur, H.V. (2004). A Method for Measuring Mode I Crack Tip Constraint Under Static and Dynamic Loading Conditions, Vol. 44, No. 5, *Society for Experimental Mechanics* pp: 522, 532.
- [52] Tvergaard V. (1994). Effect of t-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid *International Journal of Solids and Structures* vol.31, N6, 823-833.
- [53] Chao, Y. J., Liu, S. and Broviak, B.J. (2001). Brittle Fracture: Variation of Fracture Toughness with Constraint and Crack Curving Under Mode I Conditions, *Experimental Mechanics* 41 (3), 232-241.

- [54] Ayatollahi, M.R., Pavier, M.J. and Smith, D.J. (1998). Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading *International Journal of Fracture* 91, 283–298.
- [55] Wigglesworth, L.A. (1957). Stress distribution in a notched plate, *Mathematica* 4, 76-96.
- [56] Anderson, T.L. (1995). *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- [57] Fett, T. (1998). Compendium of T-stress solution FZKA 6057.
- [58] Bückner, H. (1970). A novel principle for the computation of stress intensity factors, *ZAMM* 50, 529-546
- [59] Fett, T. and Munz, D., (1997). *Stress intensity factors and weight functions*, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- [60] Rice, J.R., (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields, *International Journal of Solids and Structures* 8, 751-758.
- [61] Giannakopoulos, A.E. and Olsson, M. (1992). Influence of the non-singular stress terms on small-scale supercritical transformation toughness, *Journal of the American Ceramic Society*. 75, 2761-2764.
- [62] Wallin, K. (2001). Quantifying T-stress controlled constraint by master curve transition temperature T_0 , *Engineering Fracture Mechanics* 68, 303-328.
- [63] Marchal, Y. (1997). *Mechanics and physics of the ductile fracture of thin plates*, Thèse de doctorat de l'université de Louvain-la-Neuve.
- [64] Baouch, D. (1998). *Validation numérique des paramètres de fissuration en élasto-plasticité*, Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal Clermont II, 1998. crack tip fields. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 58, 104-110.
- [65] Hamam, R., Pommier, S. and Bumbieler, F. (2005). Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International Journal of Fatigue* 27, 1342-1346.
- [66] Chen, C.S., Krause, R., Pettit, R.G., Banks-Sills, L. and Ingraffea, A.R. (2001). Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method, *International Journal of Fracture* 107 (2), 177–99.
- [67] Cardew, G.E., Goldthorpe, M.R., Howard, I.C. and Kfoury, A.P. (1985). On the elastic T-term. *Fundamentals of deformation and fracture: Eshelby memorial symposium*.
- [68] Paulino, G.H. and Kim, J.H. (2004) A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method, *Engineering Fracture Mechanics* 71 (13–14), 1907–50.

Chapitre III

Modélisation de la propagation de fissure par fatigue

dans des alliages d'Aluminium

en utilisant une approche énergétique

1. Introduction

Durant ces dernières années, le concept de la mécanique de la rupture a permis une meilleure définition des champs de contraintes et des déformations au voisinage de la pointe de la fissure sous un chargement statique ou dynamique. Les lois de fissuration de nature empiriques ou formelles, ont permis d'explorer avec une approximation acceptable, la croissance des fissures par fatigue. En effet, la propagation d'une fissure est liée à une zone plastique (ZP) en sa pointe, par leur formation et leur intensification sont accompagnées par une dissipation d'énergie. Ainsi, la quantité d'énergie de déformation plastique cyclique peut représenter, avec précision, le taux d'endommagement à la pointe de la fissure.

L'utilisation du critère de dissipation plastique cyclique pour la propagation de fissure par fatigue a été proposée par Rice [1]. Depuis cette date, l'approche d'énergie plastique pour la prédiction de la propagation de fissure par fatigue était devenue le sujet de plusieurs investigations expérimentales, numériques et analytiques [2-10]. Weertman [11] a considéré que la fissure avance lorsque l'énergie plastique cumulée en pointe atteint une valeur critique. Puis, Ikeda et al. [2] mesurèrent le travail cyclique produisant une unité de surface de fissuration par fatigue pour un Acier avec faible teneur en carbone et pour un alliage d'aluminium à haute résistance, utilisant des micro-jauges de déformations collées dans la zone plastique associée à une fissure par fatigue. Par la suite, différentes techniques ont été développées pour l'évaluation de l'énergie plastique, comme la mesure de la taille des sous-grains par la Law et Kwun [12], la thermographie infrarouge par Saix et Jouanna [4], la micro-calorimétrie par Joseph et Gross [6] (1985) et par mesure directe de l'énergie d'hystérésis en dessous du seuil de chargement sur un échantillon de traction compacte (CT) par Ranganathan [15] et Ranganathan et al. [16].

Suivant les travaux de Bodner et al. [5], Klingbeil [7] avait proposé une loi de propagation de fissure, dans laquelle, le taux de propagation par fatigue était lié à l'énergie plastique totale dissipée en avant de la pointe de la fissure sous un chargement cyclique. Ce modèle a été ensuite étendu à la délamination par fatigue en mode mixte des matériaux stratifiés le long de l'interface par Daily and Klingbeil [10,18]. Récemment, Mazari et al. [19] ont proposé un facteur de correction empirique qui prend en compte les évaluations obtenues par les boucles d'hystérésis et montrent les différents effets de la plasticité ; la fermeture de fissure et le mode d'ouverture.

Dans ce manuscrit, une nouvelle approche, pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique en pointe de la fissure en mode I est proposée. Cette approche est basée sur la détermination numérique de la zone plastique en introduisant une nouvelle forme du rayon plastique. Les bases théoriques reliées à l'énergie de création de surface et l'évolution des paramètres énergétiques seront discutées dans la section 2. La section 3 est consacrée à la présentation des résultats expérimentaux exploités pour la validation. Puis, la section 4 est dédiée pour le développement de l'algorithme numérique utilisé pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique. Les résultats obtenus sont présentés et discutés dans la dernière section.

III.2 Bases théoriques

III.2.1 Description énergétique de la propagation de la fissure par fatigue

La description de la cinétique de rupture par fatigue est très importante pour l'estimation de la durée de vie d'un composant. La connaissance de la direction de propagation de la fissure ainsi que son taux de croissance rend possible la prédiction de la durée de vie au moyen du diagramme de rupture par fatigue (KFFD). Cependant, pour l'estimation de l'énergie de déformation plastique cyclique ΔW_p , l'aire de la boucle d'hystérésis (Figure III.1), qui caractérise l'énergie correspondante à un cycle de chargement, peut être utilisée.

Pour cette fin, Une loi puissance, reliant l'énergie avec les contraintes et les déformations, a été proposée par Morrow [29] comme suit:

$$\Delta W_p = \frac{1 - N''}{1 + N''} \Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon \quad (\text{III.1})$$

où N'' est un exposant qui relie l'amplitude des contraintes $\Delta \sigma$ et l'amplitude des déformations plastiques $\Delta \varepsilon_p$.

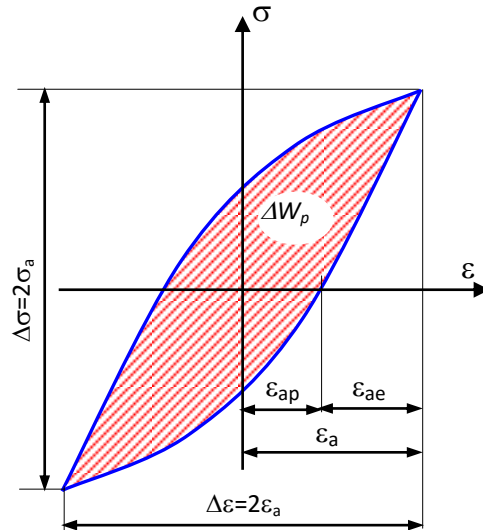


Figure III. 1: Représentation schématique d'une boucle d'hystérésis.

De l'autre côté, l'énergie spécifique, U est définie par,

$$U = \frac{\Delta W_p}{2B \times da / dN} \quad (\text{III.2})$$

où B est l'épaisseur de l'échantillon et da / dN est le taux de propagation de la fissure par fatigue.

L'évolution de U en fonction de da / dN peut être divisée selon trois domaines sur le KFFD. Notons que ce diagramme peut être facilement obtenu expérimentalement en mesurant l'avancement de la fissure en fonction du facteur d'intensité des contraintes (Fig. III.2). La courbe obtenue est caractérisée par trois domaines, communément appelés domaine I, II et III respectivement.

Domaine I: représente le développement précoce d'une fissure par fatigue et son taux de propagation. Cette étape est extrêmement sensible et elle est largement influencée par les caractéristiques microstructurales du matériau comme la taille du grain, le rapport des contraintes, la température de fonctionnement et les conditions environnantes. Elle est également caractérisée par l'existence d'une plage de facteur d'intensité des contraintes seuil ΔK_{th} (première asymptote) en dessous de laquelle la fissure ne se propage pas. Dans cette

étape, le nombre limité de mesures et leur dispersion ne permet pas d'établir une relation entre U et da/dN [15].

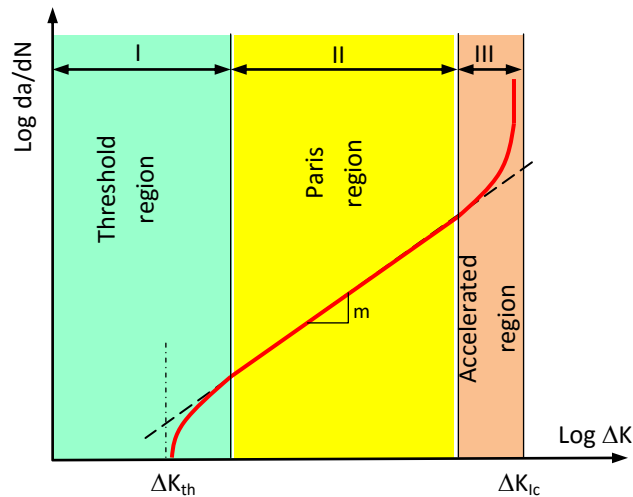


Figure III.2: La courbe typique du taux de propagation de fissure par (kinetic fatigue failure diagram: KFFD).

Domaine II : Représente la région de propagation de fissure intermédiaire, où la longueur de la zone plastique avant la pointe de la fissure est grande que la moyenne de la taille du grain, mais plus petite que la longueur de la fissure [20]. Cette région correspond à la propagation stable et l'influence de la contrainte moyenne est probablement la plus significative et résulte, généralement, en lignes parallèles étroitement espacées les unes aux autres. La microstructure, la ductilité, l'environnement et l'épaisseur en ont une légère influence [21].

La relation entre R et $\log \Delta K$ est linéaire, tandis qu'entre U et da/dN peut être écrite comme [11]:

$$\frac{da}{dN} = \frac{A \Delta K^4}{G \sigma_c^2 U} \quad (\text{III.3})$$

où ΔK est la fourchette du facteur d'intensité des contraintes ; G est le module de cisaillement du matériau ; σ_c est la contrainte cyclique d'écoulement appropriée et A est une constante universelle adimensionnelle.

Domaine III : Représente la propagation de la fissure par fatigue à un taux très élevé, $da/dN > 10^{-3}$ mm/cycle due à la croissance rapide et instable de la fissure. La courbe da/dN en fonction de ΔK devient ardue et s'approche asymptotiquement de la ténacité critique ΔK_{Ic} du matériau. Le niveau très élevé de contrainte correspondante cause une large zone plastique au voisinage de la pointe de la fissure. L'environnement a un léger effet, cependant, la microstructure du matériau, la contrainte moyenne et l'épaisseur ont une large influence [22,21]. A ce stade, Ranganathan et al. [16] ont trouvé que la valeur de U est constante es égale à U_{cr} .

III.2.2 L'énergie de déformation plastique cyclique- Modèle proposé

Assumant que l'énergie est principalement dissipée dans la zone plastique, une comparaison peut être faite entre les valeurs mesurées et celles prédites théoriquement en assumant le mode I de propagation. Sur la base des travaux de Rice [1], Tracey [23] donna une expression de la contrainte de cisaillement équivalente $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}\sqrt{3}$ au voisinage de la pointe de la fissure, définie en terme de la fonction amplitude $R_N(\theta)$ comme suit :

$$\bar{\gamma} = \tau_0 / G(R_N(\theta) / r)^{\frac{1}{1+N}} \quad (III.4)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires en pointe de la fissure, G est le module de cisaillement, $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ représente la contrainte d'écoulement plastique en cisaillement pur et $R_N(\theta)$ peut être considéré comme le terme singulier dominant, approximatif à la frontière élastique-plastique qui dépend de l'écrouissage N' et est donné comme une fonction de θ sous forme normalisée [23]:

$$f_N(\theta) = R_N(\theta) / (K / \sigma_0)^2 \quad (III.5)$$

où $f_N(\theta)$ est une fonction adimensionnelle qui définit le profil de l'iso-déformation en fonction des coordonnées polaires en pointe de la fissure.

Selon Rice [1], la singularité des déformations cycliques équivalentes peut être décrite par l'application de la forme en traction des équations (4-5) par un simple remplacement de K par ΔK et σ_0 par $\Delta\sigma_0$ liée à la loi de contraintes-déformations cycliques.

$$\bar{\Delta\varepsilon} = \Delta\varepsilon_p + \bar{\Delta\sigma} / 3G \quad (III.6)$$

où $\Delta\varepsilon_p$ et $\overline{\Delta\sigma}$ sont respectivement les amplitudes des déformations plastiques et des contraintes. Par conséquent, la courbe contraintes-déformations cycliques donne la loi d'écrouissage du matériau à la pointe de la fissure [24] :

$$\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta\sigma_0} = \left(\frac{\overline{\Delta\varepsilon}}{\Delta\varepsilon_0} \right)^{N'} \quad (\text{III.7})$$

où $\overline{\Delta\varepsilon}$ et $\overline{\Delta\sigma}$ sont respectivement les amplitudes des déformations et des contraintes équivalentes, $\Delta\sigma_0$ et $\Delta\varepsilon_0 = \Delta\sigma_0 / 3G$ représentent les limites d'élasticité cycliques du matériaux.

Utilisant les expressions $\overline{\Delta\gamma} = \overline{\Delta\varepsilon}\sqrt{3}$ and $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$, l'équation (III.4) peut être écrite comme suit :

$$\overline{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta\sigma_0}{3G} \left(\frac{R_N(\theta)}{r} \right)^{1/1+N'} \quad (\text{III.8})$$

$$\overline{\Delta\varepsilon} = \Delta\varepsilon_0 \left[\frac{f_N(\theta)}{r} \cdot \left(\frac{\Delta K}{\Delta\sigma_0} \right)^2 \right]^{1/1+N'} \quad (\text{III.9})$$

où ΔK est l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes qui peut être donné en fonction du max et du min des contraintes et la longueur de la fissure, a , comme suit :

$$\Delta K = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \sqrt{\pi a}$$

Afin d'évaluer la moyenne de l'amplitude de déformation équivalente $\langle \overline{\Delta\varepsilon} \rangle$, Chalang [25] considéra un élément de forme rectangulaire ou circulaire localisé en pointe de la fissure de sorte que :

$$\langle \overline{\Delta\varepsilon} \rangle = \frac{1}{S} \int_0^S \Delta\varepsilon dS \quad (\text{III.10})$$

où S est la surface de l'élément en pointe de fissure.

Dans le cas d'un élément rectangulaire à une et deux dimensions (Figure III.3a), nous avons [15,26]

$$\langle \overline{\Delta\varepsilon} \rangle = \frac{1+N'}{1+2N'} \Delta\varepsilon_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta\sigma_0} \right)^{\frac{2}{1+N'}} \left(D_1^{\frac{-1}{1+N'}} I_1 + D_2^{\frac{-1}{1+N'}} I_2 \right) \quad (\text{III.11})$$

Les termes I_1 et I_2 sont donnés par:

$$I_1 = \int_0^{\theta_0} \left[\frac{f_N(\theta)}{(\cos \theta)^{1+2N'}} \right]^{\frac{1}{1+N'}} d\theta \quad (III.12)$$

$$I_2 = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left[\frac{f_N(\theta)}{(2 \sin \theta)^{1+2N'}} \right]^{\frac{1}{1+N'}} d\theta$$

avec

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{D_2}{2D_1} \quad (III.13)$$

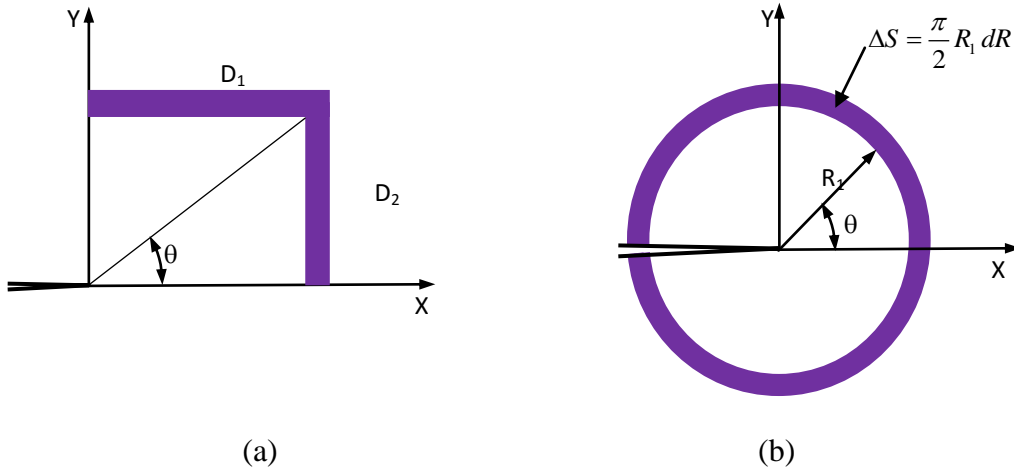


Figure III.3: Élément en pointe de fissure: (a) rectangulaire, (b) circulaire [26].

Dans le cas d'un élément circulaire avec un rayon R_1 (Figure III.3b), l'expression de la déformation équivalente moyenne est donnée par [26]:

$$\langle \overline{\Delta \varepsilon} \rangle = \Delta \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta \sigma_0} \right)^{\frac{2}{1+N'}} \left(R_1^{\frac{-1}{1+N'}} - \frac{2}{\pi} I_\theta \right) \quad (III.14)$$

avec

$$I_\theta = \int_0^{\pi/2} [f_N(\theta)]^{\frac{1}{1+N'}} d\theta \quad (III.15)$$

L'énergie plastique sur toute la surface de la zone plastique est obtenue par l'intégration de l'énergie plastique par élément de surface par l'Eq. (III.16),

$$\Delta W(PZ) = 4 \frac{1-N''}{1+N''} \int_0^{S_p} \overline{\Delta\sigma} \cdot \overline{\Delta\varepsilon_p} \cdot dS \quad (III.16)$$

où S_p est la surface du quart de zone plastique.

D'où,

$$\Delta W(PZ) = 4 \frac{1-N''}{1+N''} \int_0^{\pi/2} \int_0^{r_p} \overline{\Delta\sigma} \cdot \overline{\Delta\varepsilon_p} \cdot r \, dr \, d\theta \quad (III.17)$$

avec r_p indiquant la limite cyclique de la zone plastique.

Si r_p est défini comme la distance à laquelle la déformation équivalente totale est égale à $\overline{\Delta\varepsilon_0}$, nous avons de l'Eq. (III.9) :

$$r_p = \left| \frac{\Delta K}{\Delta\sigma_0} \right|^2 f_N(\theta) \quad (III.18)$$

L'intégrale (17) peut être évaluée en substituant les expressions (III.5- III.8)

pour $\overline{\Delta\sigma}$ et $\overline{\Delta\varepsilon_p}$, , qui donne après simplification[26]:

$$\Delta W(PZ) = 2(1-N') \frac{1-N''}{1+N''} \Delta\sigma_0 \cdot \Delta\varepsilon_0 \left(\frac{\Delta K_I}{\Delta\sigma_0} \right)^4 \int_0^{\pi/2} f_N(\theta)^2 d\theta \quad (III.19)$$

Cette expression peut être écrite comme suit :

$$\Delta W(PZ) = (1-N') \frac{1-N''}{1+N''} \Delta\sigma_0 \cdot \Delta\varepsilon_0 \cdot S_{pz} \quad (III.20)$$

avec

$$S_{pz} = \left[2 \left(\frac{\Delta K_I}{\Delta\sigma_0} \right)^4 \int_0^{\pi/2} f_N(\theta)^2 d\theta \right] \quad (III.21)$$

Indiquant simplement la surface de la zone plastique.

De l'autre coté, la limite de la zone plastique peut être calculée en utilisant le critère de VON Mises.

La taille et la forme de cette zone dépendent de l'état considéré : (i) déformations planes (DP) ou (ii) contraintes planes (CP) comme montré dans le tableau III.1 [28].

Tableau III.1. Expressions de la zone plastique donnée par le critère de Von Mises et Tresca.

Etats	Von Mises	Tresca
Déformation Plane	$\frac{r}{r_y} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$	$\frac{r}{r_y} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu) + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2$
Contraintes palane	$\frac{r}{r_y} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$	$\frac{r}{r_y} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$
$r_p(PD) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{\sigma_0} \right)^2$		

Il est intéressant de noter que l'expression (III.19) nous permet d'exprimer l'énergie dissipée sur toute la zone plastique par unité d'épaisseur en fonction de ΔK^4 , qui est conforme au modèle théorique donné par Klingbeil [7], Mazari et al. [19] et Ranganathan et al.[8]. Par conséquent, afin d'obtenir une variation similaire comme fonction de ΔK^4 , nous avons proposé de calculer la surface de la zone plastique, en utilisant l'expression suivante pour le rayon plastique :

$$r_p(PD) = \frac{1}{2\pi B} \left(\frac{\Delta K}{\Delta \sigma_0} \right)^4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (III.22)$$

En déformations planes et

$$r_p(PS) = \frac{1}{2\pi B} \left(\frac{\Delta K}{\Delta \sigma_0} \right)^4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (III.23)$$

En contraintes planes.

En utilisant les équations (III.22) et (III.23), le nouveau modèle pour le calcul de l'énergie plastique par unité d'épaisseur peut être écrit comme suit :

$$\Delta W(PZ)_M = \alpha_M \cdot \Delta \sigma_0 \cdot \Delta \varepsilon_0 \cdot S_{pzM} \quad (III.24)$$

où α_M est une constante qui dépend du matériau et le critère utilisé, et S_M indique la surface de la zone plastique déterminée par les expressions (III.22) et (III.23).

Par conséquent, l'énergie totale dissipée Q dans l'échantillon est donnée par :

$$Q = \Delta W(PZ) \times B \quad (\text{III.25})$$

III.3. Détails expérimentaux

III.3.1 Matériau et géométrie de l'échantillon

Les essais ont été conduits sur deux alliages d'Aluminium : l'alliage 2024 en condition T351 et l'alliage 7075 en condition T7351. La composition nominale et les propriétés mécaniques de ces alliages sont respectivement données par les tableaux III.2 et III.3.

Tableau III.2. Composition nominale (en %) des alliages étudiés.

Alliage	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Al
2024	0.10	0.22	4.46	0.66	1.50	0.01	0.04	0.02	Reste
7075	0.07	0.16	1.52	0.04	2.55	0.20	6.00	0.04	Reste

Dans le tableau III.3, les paramètres K et n sont calculés de la relation de Ludwik [14]:

$$\sigma = K.(\varepsilon_p)^n \quad (\text{III.26})$$

Les essais ont été achevés sur des éprouvettes de traction compactes (CT) d'une épaisseur de 10 mm pour l'alliage 2024 et 6 mm pour l'alliage 7075 (Figure.III.4). La direction de fissuration a été prise dans le sens du laminage.

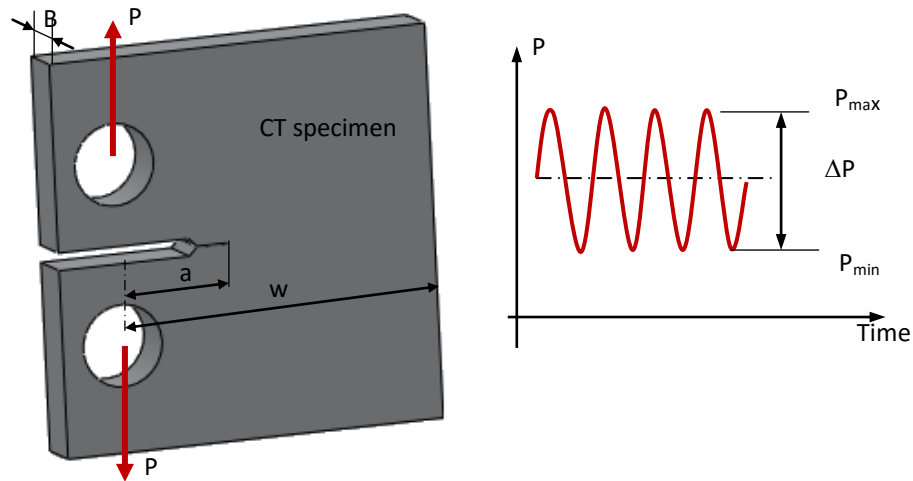


Figure III.4: Configuration de l'essai cyclique sur une éprouvette de traction compacte.

Tous les essais mécaniques ont été conduits sur une machine Instron servo-hydraulique à une fréquence typique d'essai de 20 Hz à température ambiante avec un rapport de chargement $R=0.5$.

$$R = P_{\min} / P_{\max} \quad (\text{III.27})$$

où P_{\min} and P_{\max} sont respectivement le minimum et le maximum des forces sur un cycle.

Tableau III.3. Propriétés mécaniques nominales des alliages étudiés.

Material	2024-T351	7075-T7351
Limite élastique conventionnelle à 0.2% de déformation plastique $\sigma_{0.2}$ (MPa)	318	470
Contrainte à la rupture σ_R (MPa)	524	539
Elongation A%	12.8	11.7
Coefficient de résistance K (MPa)	652	960.5
Coefficient d'écrouissage n	0.104	0.051

Le taux de propagation de fissure a été mesuré par une technique optique sur la face lisse de l'échantillon, à l'aide d'un microscope à déplacement avec une précision de 0.01 mm. L'énergie totale dissipée a été mesurée en amplifiant la courbe force en fonction des déplacements mesurés sous l'axe des forces.

La magnitude du facteur d'intensité des contraintes pour cette géométrie est donnée par Newman [30]

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B\sqrt{w}} f(z) \quad \text{with} \quad z = \frac{a}{w} \quad (\text{III.28})$$

où w et B sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette, a , est la longueur de la fissure et $\Delta P = P_{\max} - P_{\min}$ est l'amplitude de la force appliquée.

Afin d'obtenir plus de précision, deux fonctions de complaisance $f(z)$ ont été utilisées :

➤ pour $0.2 < z < 0.3$ [30]:

$$f(z) = 4.55 - 40.32z + 414.7z^2 - 1698z^3 + 3781z^4 - 4287z^5 + 2017z^6 \quad (\text{III.29})$$

➤ Pour $0.3 < z < 0.7$ [13]:

$$f(z) = 29.6z^{0.5} - 185.5z^{1.5} + 655.7z^{2.5} - 1017z^{3.5} + 638.9z^{4.5} \quad (\text{III.30})$$

III.3.2 Identification des paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique.

Les résultats obtenus après identification des paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique sont résumés dans le tableau III.4.

Table III.4. Paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique [26].

Al 2024-T351						
$\Delta\sigma_0$	$\Delta\varepsilon_0$	α_M	N'	N''	Integral	$\Delta W/\Delta K^4$
914	0.0111	6.677E-4	0.148	0.078	0.0138	2.92E-13
Al 7075-T7351						
$\Delta\sigma_0$	$\Delta\varepsilon_0$	α_M	N'	N''	Integral	$\Delta W/\Delta K^4$
705	0.00849	1.26E-5	0.166	0.0765	0.0140	4.85E-13

Finalement, pour les matériaux de l'étude, nous obtenons :

$$\text{➤ Pour 2024-T351: } \Delta W = 2,92 \cdot 10^{-13} \Delta K^4 \text{MPa} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{➤ Pour 7075-T7351 } \Delta W = 4,85 \cdot 10^{-13} \Delta K^4 \text{MPa} \quad (\text{III.32})$$

III.3.3 Identification de la loi de Paris

La propagation de la fissure par fatigue dans l'éprouvette CT a été modélisée selon la loi de Paris, où le taux de propagation FCG da/dN est décrit en terme d'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK suivant la relation [32]:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (\text{III.33})$$

où C et m sont respectivement le coefficient et l'exposant de la loi de Paris.

La figure III.5 montre les résultats typiques des essais utilisés pour la construction des diagrammes $\log(da/dN)$ en fonction de $\log(\Delta K)$ pour chaque alliage d'aluminium étudié.

Un modèle de loi puissance est adapté à la région de l'état stable (phase II) de la propagation de fissure par fatigue. Le coefficient (C) et l'exposant (m) ont été déterminés pour chaque éprouvette subissant une croissance stable de fissure par fatigue. Une échelle logarithmique a été utilisée pour une représentation linéaire de la courbe. Ainsi, une régression linéaire donne les paramètres (C) et (m). En identifiant les paramètres de la loi de Paris en accord avec les résultats expérimentaux pour les deux alliages, nous avons trouvé que $C = 6.0E-9$ et $m = 4.5849$ avec une pente de 4.58 pour l'Al 2024-T351. Cependant, pour l'Al 7075-T7351; $C = 3.0E-8$ et $m = 3.1987$ avec une pente de 3.20. Il est à noter que l'Al 2024 reste un matériau de structure d'avion important par sa bonne tolérance à l'endommagement et sa résistance à la propagation de fissure par fatigue élevée [33], tandis que, le 7075-T7351 offre une bonne résistance à la fissuration par corrosion sous contraintes [31].

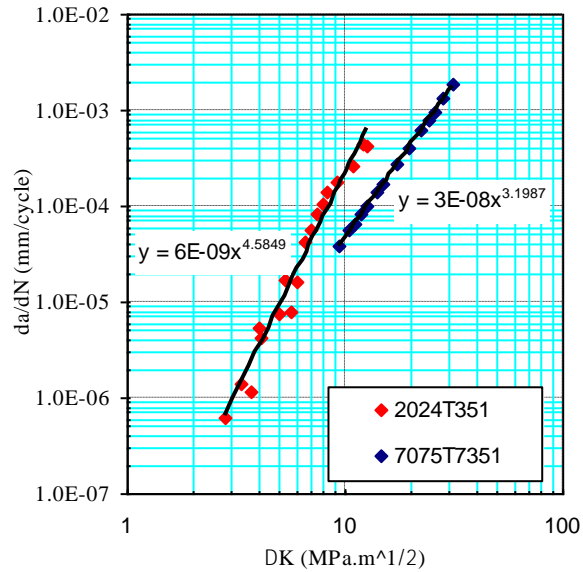


Figure III.5: Ajustement des données expérimentales par la loi de Paris.

III.4. L'implémentation de l'approche proposée

Un programme a été écrit avec le langage Matlab. Le programme a été développé pour calculer le facteur d'intensité des contraintes, la taille de la zone plastique, le taux de propagation de fissure, le nombre des cycles et l'énergie de déformation plastique. Des conditions de déformations planes et un critère de Von Mises ont été considérés. D'abord premièrement, on spécifie les dimensions de l'éprouvette (B : l'épaisseur, w : la largeur, a_0 : longueur initiale de fissure a_C : longueur critique de fissure), les propriétés mécaniques du matériau (E : module de Young, ν : coefficient de Poisson, σ_y : limite élastique, C et m : constants matériau de la loi de Paris) et l'amplitude de la force appliquée. Puis, le programme calcule l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK , le rayon plastique r_p , le taux de propagation de fissure par fatigue da/dN et les paramètres énergétiques comme indiqué par l'organigramme de la figure III.6.

III.5. Résultats et discussion

Il est intéressant de noter que l'évolution de l'énergie de déformation plastique cyclique est directement liée à la variation de la taille de la zone plastique à la pointe de la fissure comme décrit dans la section III.2.2. Dans ce qui suit, nous allons d'abord faire face à

l'évolution de la zone plastique. Ensuite, nous allons analysé en détail l'évolution de l'énergie de déformation plastique cyclique et la vitesse de propagation de la fissure.

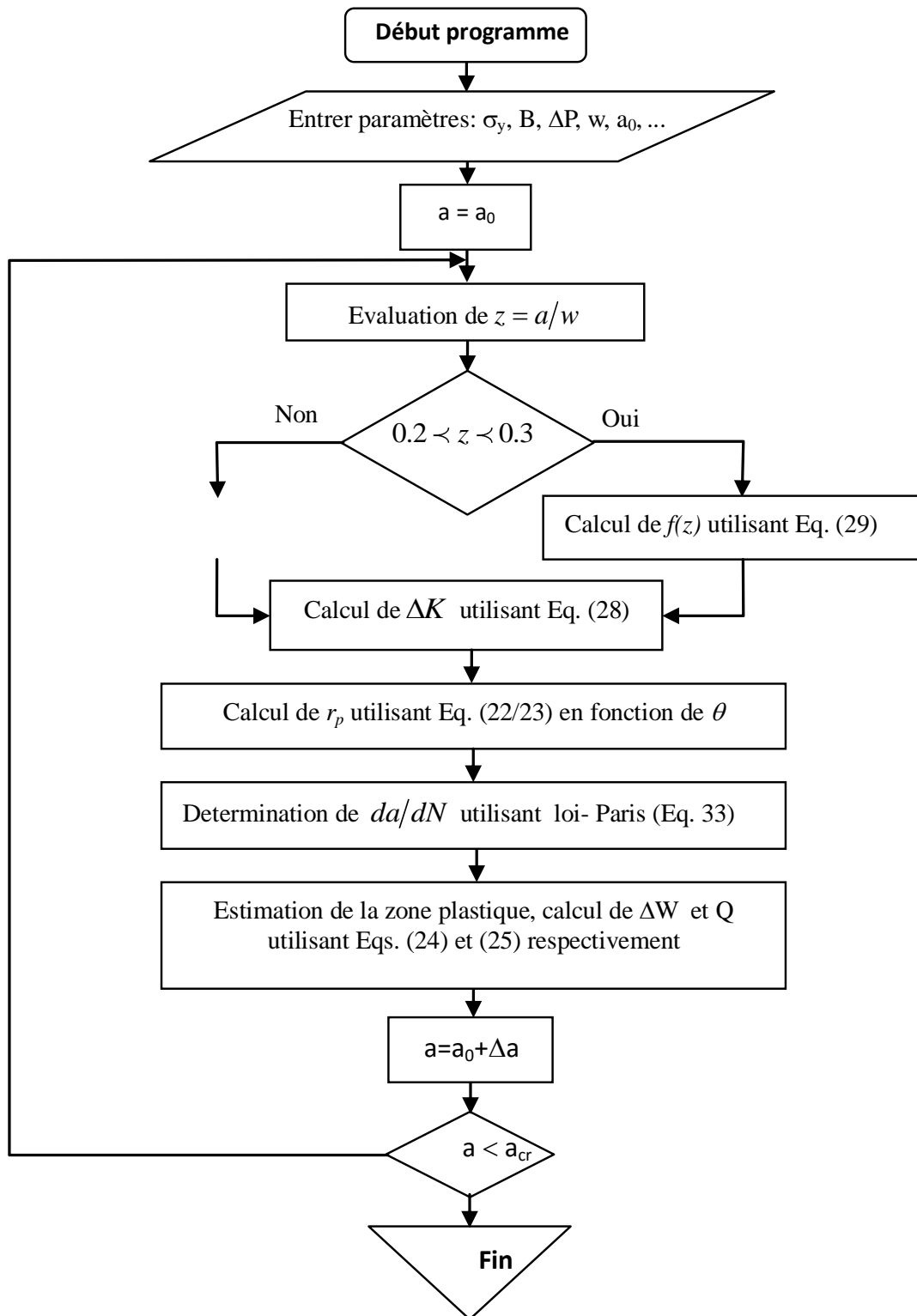


Figure III. 6: Organigramme de la procédure numérique.

III.5.1 Evolution de la zone plastique.

Le but de cette section est d'étudier en détail l'évolution de la zone plastique à la pointe de la fissure au cours de la croissance des fissures sur les deux alliages d'aluminium. Il convient de noter que, à la pointe de la fissure d'un matériau ductile, les champs de déformation sont importants et conduisent dans une large mesure, à la zone plastique. Dans ce cas, l'énergie mécanique à la pointe de la fissure est absorbée par le matériau sous la forme de défauts linéaires (dislocations) [16,27]. D'autre part, la taille de la zone plastique ne dépend pas seulement de la nature des matériaux, mais aussi de l'intensité de l'énergie mécanique à la pointe de la fissure, la géométrie et la taille de la fissure. Notons que le durcissement (de consolidation maximum de matière), caractérisée par son taux, peut ralentir considérablement l'extension de la zone plastique.

La figure III.7 montre l'évolution de la zone plastique pour les deux matériaux de l'étude (2024 et 7075) utilisant le modèle de Tracey (Figure III.7a) et le modèle proposé (Figure III.7b). Il a été constaté que la taille de la zone plastique calculée par le modèle proposé est d'environ 16 fois (pour le 2024) et de 18 fois (pour le 7075) plus grande que celle calculée par le modèle de Tracey.

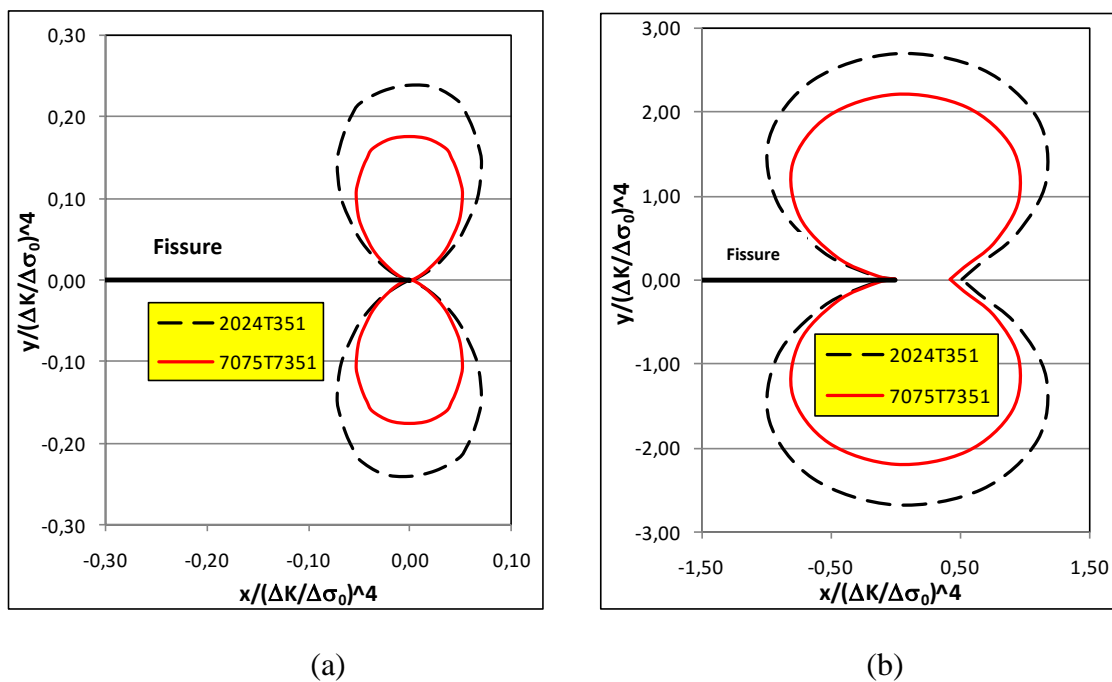


Figure. III. 7: Evolution de de la zone plastique normalisée dans le cas de: (a) Modèle de Tracey (b) Modèle proposé pour les deux alliages d'Aluminium.

Par ailleurs, on observe que l'alliage 2024, duquel les propriétés mécaniques de ductilité sont plus élevées que celles de l'alliage 7075, présente une taille de zone plastique plus large. Nous avons obtenu pour :

- Modèle de Tracey: $S(PZ)$ de 2024 = $2,37 \times S(PZ)$ pour 7075.
- Modèle proposé: $S(PZ)$ de 2024 = $2,12 \times S(PZ)$ pour 7075.

III.5.2 L'évolution de l'énergie totale dissipée dans l'éprouvette

Il doit être mentionné que l'extension de la fissure qui mène à la rupture provient quand l'énergie procurée est suffisante pour vaincre la résistance du matériau. Assumant que cette énergie est principalement dissipée dans la zone plastique, une comparaison peut être faite entre les valeurs mesurées et celles théoriquement prédites comme illustré dans la figure III.8 en assumant le mode I de propagation.

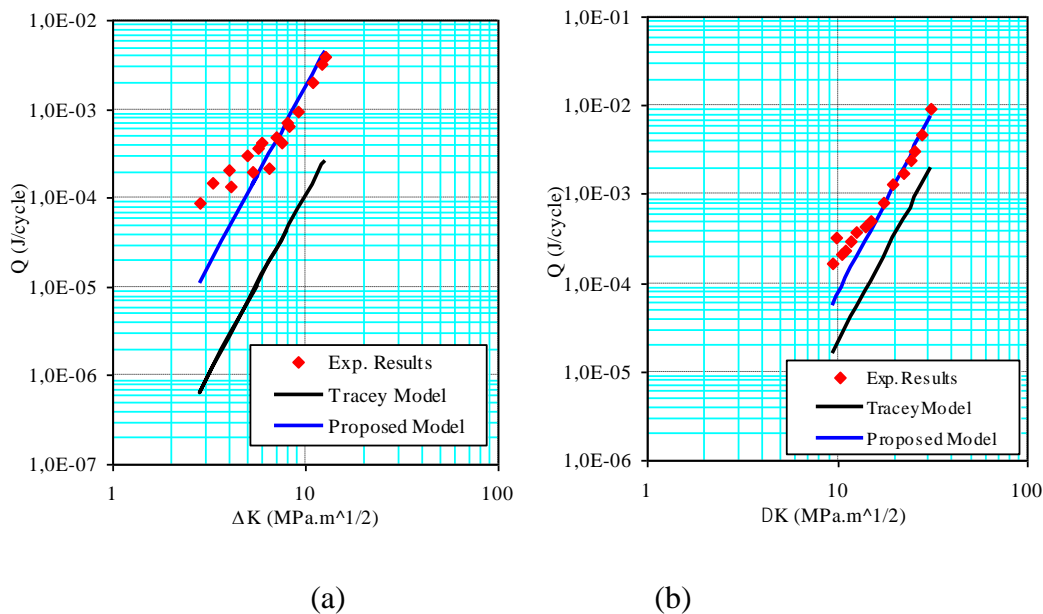


Figure III.8: Comparaison de l'énergie dissipée par cycle mesurée à celle estimée pour: (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351.

Cette figure illustre l'évolution de l'énergie totale dissipée en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK pour les deux types d'alliage d'Aluminium pour le cas d'un rapport de contraintes constant $R=0.5$. Il peut être remarqué que les estimations théoriques données par le modèle de Tracey sont inférieures aux mesures expérimentales.

Cependant, de bonnes prédictions sont obtenues par le modèle proposé. Notons que pour l'Al 2024 (Figure III.8a), Q calculée par le modèle de Tracey est d'environ 11 à 76 fois plus faible que celle expérimentalement mesurée ; la différence est moins prononcée pour des valeurs de ΔK élevées. La même tendance est observée pour l'Al 7075 (Figure III.8b). L'écart entre les estimations théoriques par le modèle de Tracey et les valeurs expérimentales varie de 3 pour des valeurs élevées de ΔK , et à 10 pour des valeurs plus faibles de ΔK ; cette différence peut généralement être attribuée à la taille de la zone plastique estimée qui est inférieure que celle mesurée, particulièrement pour les matériaux qui exhibent une ductilité élevée comme pour l'Al 2024-T351 en comparaison avec l'Al 7075-T7531. De l'autre côté, selon la figure III.8, les résultats obtenus par le modèle proposé sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour les deux types d'aluminium. Il est aussi observé que pour la même valeur de ΔK , l'énergie dissipée totale dans l'Al 2024-T351 est plus importante que celle dissipée dans l'Al 7075-T7531.

III.5.3 Relation entre Q et da/dN

L'évolution de la propagation de la fissure est étudiée en fonction du paramètre énergétique afin d'expliquer le comportement de la fissure pour les différents régimes. La figure III.9 montre l'évolution de da/dN en terme de l'énergie totale dissipée Q pour $R=0.5$. Pour les deux nuances d'alliage, les résultats expérimentaux peuvent être divisés en deux domaines différents comme montré dans la figure III.9.

Dans le cas de l'Al 2024, le domaine I est défini par $da/dN \leq 2.10^{-5}$ mm/cycle. Dans cette région, on constate une forte diminution de la vitesse de propagation de la fissure en fonction de l'énergie totale dissipée. Une approximation logarithmique peut être utilisée à ce stade. La relation obtenue est donnée par :

$$\frac{da}{dN} = 0.00002 \ln(Q) + 0.0001 \quad (\text{III.34})$$

Le domaine II est défini par $da/dN \geq 2.10^{-5}$ mm/cycle. Cette région montre une évolution stable de la propagation de la fissure et une loi puissance peut être utilisée comme une approximation à ce stade :

$$\frac{da}{dN} = 0.7346 Q^{1.272} \quad (\text{III.35})$$

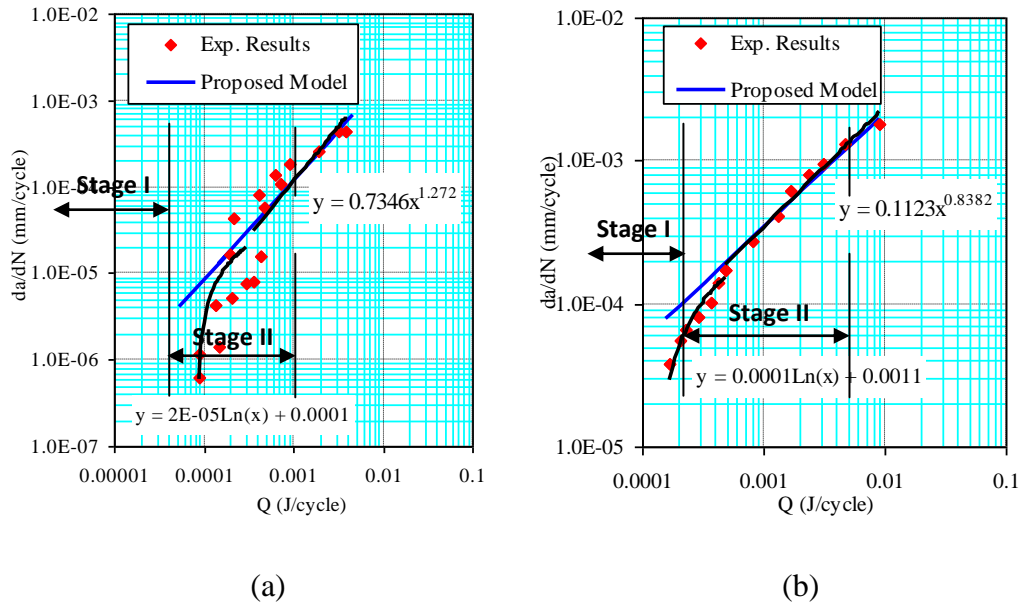


Figure III.9: Evolution de da / dN par rapport à Q pour (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351. Les lignes noires représentent les courbes de régression des résultats expérimentaux utilisant l'énergie et des fonctions logarithmiques.

Dans le cas de l'Al 7075, le domaine I est défini par $da / dN \leq 2.10^{-4} mm / cycle$. L'évolution de la propagation de la fissure à ce stade est non stable. Si on utilise une fonction logarithmique, on peut déterminer une relation de la forme :

$$\frac{da}{dN} = 0.0001Ln(Q) + 0.0011 \quad (III.36)$$

Le domaine II est défini par $da/dN \geq 2.10^{-4} mm/cycle$. La loi obtenue a la forme suivante :

$$\frac{da}{dN} = 0.1123Q^{0.8382} \quad (III.37)$$

On peut constater qu'il y a un bon accord dans le stade II entre les données expérimentales et les résultats calculés par le modèle proposé pour les deux types d'alliage d'aluminium. En outre, les lignes droites de pente 0.316 pour l'Al 2024 et de 0.086 pour l'Al 7075 peuvent être déduites du modèle proposé. En effet, nous obtenons les expressions suivantes.

$$\frac{da}{dN} = 0.316Q^{1.1462} \text{ pour 2024-T351} \quad (III.38)$$

$$\frac{da}{dN} = 0.086 Q^{0.7997} \text{ pour } 7075T7531 \quad (\text{III.39})$$

Cependant, une différence significative a été trouvée dans le stade I entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par le modèle proposé. Cela limite donc l'application du modèle proposé dans le stade où la propagation de la fissure est stable.

III.6. Conclusion

Dans cette étude, une approche de la propagation de la fissure a été proposée. Cette approche procure un lien direct entre l'énergie cyclique de déformation plastique et la zone plastique en pointe de la fissure. Dans le but de valider le modèle, des données expérimentales conduites sur des éprouvettes CT en alliage d'Al (2024-T351 et 7075-T7351) à amplitude de contraintes constantes avec un rapport de charge $R=0.5$ en mode I de chargement ont été exploitées. Les conclusions suivantes ont été tirées:

- Les valeurs mesurées de l'énergie cyclique de déformations plastiques pour les deux types d'aluminium sont sensiblement supérieures à celles calculées par le modèle de Tracey. Cependant, un accord relativement bon entre les résultats expérimentaux et ceux calculés par le modèle proposé a été trouvé.

- Une modélisation correcte de la zone plastique est nécessaire pour déterminer avec précision l'énergie cyclique totale dissipée à la pointe de fissure. La taille de la zone plastique calculée par le modèle proposé est supérieure à celle calculée par le modèle de Tracey.

- Finalement, il peut être noté que la simplicité de l'approche proposée limite sa capacité à prendre en compte la fermeture de la fissure, l'effet de l'environnement et de l'amplitude de chargement variable, qui sont des sujets de recherche en cours.

References

- [1] Rice, J.R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *Fatigue Crack Propagation*, ASTM STP 415, 247-311.
- [2] Ikeda, S., Izumi, Y. & Morris, E.F. (1977). Plastic work during fatigue crack propagation in a high strength low alloy steel and in 7075AL-Alloy. *Engineering Fracture Mechanics*, 9, 123-136.
- [3] Liaw, P.K. & Kwun, S.I. (1980). Fine ME. Plastic work of fatigue crack propagation in steels and aluminum alloys. *Metallurgical Transactions*, A12, 49-55.
- [4] Saix, C. & Jouanna, P. (1981). Analyse de la dissipation plastique dans des pièces métalliques minces. *Journal de Mécanique Appliquée*, 15(1), 65-93
- [5] Bodner, S. R., Davidson, D. L. & Lankford, J. (1983). A description of fatigue crack growth in terms of plastic work. *Engineering Fracture Mechanics*, 17(2), 189-191.
- [6] Joseph, A.D. & Gross, J.S. (1985). Comparison of techniques for the measurement of plastic work of fatigue crack growth in low carbon steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(1), 63-74.
- [7] Klingbeil, N.W. (2003). A total dissipated energy theory of fatigue crack growth in ductile solids. *International Journal of Fatigue*, 25, 117-128.
- [8] Ranganathan, N., Chalon, F. & Meo, S. (2008). Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation. *International Journal of Fatigue*, 30, 1921-1929.
- [9] Jones, R., Krishnapillai, M., Cairns, K. & Matthews, N. (2010). Application of infrared thermography to study crack growth and fatigue life extension procedures. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 33(12), 871-884.
- [10] Daily, J.S, Klingbeil, N.W. (2010). Plastic dissipation energy at a bimaterial crack tip under cyclic loading. *International Journal of Fatigue*, 32, 1710-1723.
- [11] Weertman, J. (1973). Theory of fatigue crack growth based on a BCS crack theory with work hardening. *International Journal of Fracture*, 9(2), 125-131.
- [13] Srawley, J.E. & Gross, B. (1972). Stress intensity factors for bend and compact specimens. - *Engineering Fracture Mechanics*, 4(3), 587-589.
- [14] Ludwik, P. (1909). *Elemente der Technologischen Mechanik*. - Springer-Verlag OHG, Berlin.
- [15] Ranganathan, N. (1985). Contribution au développement d'une approche énergétique à la propagation d'une fissure de fatigue. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, [France].
- [16] Ranganathan, N.J, Jendoubi, K., Benguediab, M. & Petit, J. (1987). Effect of R ratio and

ΔK level on the hysteretic energy dissipated during fatigue crack propagation. *Scripta Metallurgica*, 21(8), 1045-1049.

[18] Daily, J.S. & Klingbeil, N.W. (2004). Plastic dissipation in fatigue crack growth under mixed mode loading. *International Journal of Fatigue*, 26, 727-738.

[19] Mazari, M., Bouchouicha, B., Zemri, M., Benguediab, M. & Ranganathan, N. (2008). Fatigue crack propagation analysis based on plastic energy approach. *Computational Materials Science*, 41: 344-349.

[20] Wang, W., Cheng, T. (1994). Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(4), 776-795.

[21] Beden, S. M., Abdullah, S., & Ariffin, A. K. (2009). Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components. *European Journal of Scientific Research*, 28(3), 64-397.

[22] Ritchie, R.O. (1999). Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solid. *International Journal of Fracture*, 100, 55-83.

[23] Tracey, D.C. (1976). Finite element solution for crack-tip behaviour in small-scale yielding. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98, 148-151.

[24] Chalant, G. & Rémy, L. (1982). Plastic strain distribution at the tip of a fatigue crack. Application to fatigue crack closure in the threshold regime. *Engineering Fracture Mechanics*, 16, 707-720.

[25] Chalant, G. (1981). Fissuration par fatigue d'alliages cobalt-Nickel : Discussion d'un modèle mécanique de propagation.- Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris.

[26] Mazari, M. (2003): Contribution à l'étude d'une approche énergétique de la propagation des fissures de fatigue. Thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie

[27] Kysar, J.W. (2003). Energy dissipation mechanisms in ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51, 795-824.

[28] Engerand, J.L. (1990). Mécanique de la rupture. *Techniques de l'Ingénieur, Traité Génie mécanique*. - B 5 060: 1-11.

[29] Morrow, J. (1965). in: Internal friction, damping, and cyclic plasticity, ASTM STP 378, American Society for Testing and Material, p.45.

[30] Newman, J.C. (1974). Stress analysis of the compact specimen including the effects of pin loading fracture analysis. ASTM STP 560, 105-121.

[31] Pao, P.S., Gill, S.J & Feng, C.R. (2000). On fatigue crack initiation from corrosion pits in 7075-T7351 aluminum alloy. *Scripta materialia*, 43, 391-396.

[32] Paris, P.C. & Erdogan, F.A (1963). Critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85, 528-534.

[33] Zehnder, J. (1996). In *Aluminium Technology, application, and environment, a profile of a modern metal* (Ed) Dietrich G Altenpohl (Pennsylvania: TMS Warrendale), p. 319.

Chapitre IV

Evaluation numérique des paramètres de rupture en utilisant la méthode des jauges

Chapitre IV
*Evaluation numérique des paramètres de
rupture en utilisant la méthode des jauges*
de déformations virtuelles

IV.1 INTRODUCTION

L'analyse de la propagation de la fissure peut être effectuée en employant plusieurs méthodes pour calculer le facteur d'intensité de contraintes et le T-stress à la pointe de la fissure, comme la théorie du champ de contraintes, les techniques expérimentales et la méthode de l'intégrale J. Le T-stress est une contrainte de traction constante agissant parallèlement au plan de la fissure. Elle est liée au deuxième terme dans l'expression de William du champ de contraintes et il est mesuré selon la solution de William [1].

Riz [2] a étudié l'effet de T-stress sur les paramètres de la rupture. Il a découvert que le T-stress n'a pas d'effet sur l'intégrale J, mais un T-stress positif ou (négatif) diminue ou (augmente) la taille de la zone plastique et le CTOD par rapport aux modèles précédents ne comprenant pas l'effet de T-stress. Il a également suggéré l'utilisation d'un nouveau paramètre de contrainte non singulière pour des analyses en trois dimensions.

Bilby et al. [3] ont étudié l'effet du terme de second ordre dans un grand champ de déformation avec différentes géométries sur le CTOD. Les valeurs de T-stress négatives ont été montrées pour réduire le niveau de contraintes hydrostatiques maximales près de la fissure. Ils ont constaté que le taux de croissance de fissure a diminué et la ductilité s'améliore en raison de la perte de triaxialité à la pointe de la fissure.

Betegòn et Hancock [4] ont montré la corrélation entre la perte de J-dominance avec le second terme dans le développement asymptotique du champ des contraintes élastique. Ils ont caractérisé l'effet de T-stress sur la région des petites déformations entourant la zone d'émoussement. Dans ce contexte, la perte de J-dominance a été associée au T-stress négative dans le cas de compression qui introduit un terme correspondant de second ordre dans le développement asymptotique non linéaire, dont le champ Hutchinson-Rice-Rosenberg (HRR) est tout simplement le premier terme [5]. Ce dernier est un simple paramètre de caractérisation, par conséquent, il est considéré comme une caractéristique de géométries qui montre le paramètre de biaxialité β positive. Les éprouvettes qui ont des biaxialité négatives ont été prédites à perdre J-dominance à un niveau de déformation qui dépend de T-stress. Le paramètre de biaxialités β est un paramètre dépendant de la configuration de l'éprouvette. Les différentes valeurs de β pour différentes géométries d'éprouvettes sont présentées par Leever-Radon [6] et Al-Ani Hancock [7].

Du et Hancock [8] ont présenté des résultats numériques qui concerne les formulations en éléments de frontières et les formulations de couche limite en tant que champs de glissement

des lignes (boundary layer formulations as slip-line fields). Le champ de Prandtl complet (Full Prandtl Field) a été réalisé avec le T-stress en traction qui a causé une plasticité apparente au niveau des frontières de la fissure. Les contraintes sont indépendantes de T-stress et ne pouvait pas changer le champ d'écoulement ou le niveau de contraintes à la pointe de la fissure. L'écart étant en fonction des paramètres du matériau, tels que le coefficient de Poisson. Cet effet a été associé à l'apparition d'une zone élastique au niveau du fond de la fissure, de sorte que la plasticité n'a pas enveloppé complètement la pointe de la fissure et le champ de contrainte comporte deux paramètres de caractérisation. Sham [9] a présenté comment le T-stress peut être déterminé par les fonctions de poids et par la méthode de l'intégrale conjuguée (work conjugate integral). Il a présenté sous forme de tableau les valeurs de T-stress pour différentes configurations géométriques d'éprouvettes.

Tvergaard et Hutchinson [10] ont appliqué un modèle de croissance de la propagation de la fissure élasto-plastique, avec la loi de traction séparative spécifiée (traction-separation law specified) indiquée sur le plan de la fissure pour caractériser le processus de fissuration, et étudier l'effet de T-stress sur la résistance à la rupture. Ils ont découvert que, avec un T-stress compressive, la plasticité contribue d'une manière significative à la résistance de la croissance de la fissuration, même à de faibles valeurs de contraintes. Une augmentation de T-stress de compression de la valeur de zéro à la limite élastique entraîne une augmentation radicales des effets de la plasticité, par contre dans le cas de traction l'augmentation de la résistance à la fissuration entraîne une augmentation de la valeur de T-stress de zéro à la moitié de la limite d'élasticité, cette augmentation ne produit qu'une diminution négligeable de la résistance à la propagation de la fissure. Ces résultats sont en bon accord avec les résultats de Du Hancock et [8].

Hancock et al. [11] ont testé une série d'éprouvettes fissurées de différentes configurations pour corrélérer la dépendance de la géométrie sur la contrainte en pointe de la fissure en pleine plasticité. Ils ont constaté que lors d'une petite extension de la fissure, la ténacité dépend de la contrainte déterminée par T-stress. La croissance de la fissure entraîne une diminution considérable de T-stress pour le cas des éprouvettes CCT. Pour le cas des éprouvettes en flexion à trois points TPB le T-stress diminue légèrement. En outre, différentes approches utilisant les jauges de déformation ont été introduites [12-15] pour mesurer la variation du facteur d'intensité de contrainte.

Paulino et Kim [16] ont utilisé l'approche de l'intégrale d'interaction pour étudier le comportement en rupture des matériaux en mettant l'accent sur le T-stress. Il a été conclu,

pour le cas d'un matériau homogène, que le T-stress négatif diminue l'angle d'initiation de la fissure, alors que le T-stress positif augmente l'angle d'initiation de la fissure. Dans cette méthode, une région valide a été spécifiée pour la localisation des mesures pour se débarrasser (éloigner) de l'état élasto-plastique au fond de la fissure provoquée par les contraintes locales dans la région la plus interne à proximité de la pointe de la fissure. L'erreur causée par le gradient de contrainte a été minimisée en plaçant des jauges virtuelles de déformations suffisamment loin de la pointe de la fissure. Une approche plus déterministe et étendue a été proposée par Berger [12] pour améliorer de manière significative la précision des mesures.

En utilisant la méthode de distribution de la dislocation et l'équation singulière d'intégrale, plusieurs problèmes de T-stress ont été résolus par Broberg [17]. L'étude analytique et expérimentale menées par Sumpter [18] a démontré que le T-stress peut être utilisé comme un indicateur de mesure de la déformation plastique au fond de la pointe de la fissure. Smith et al. [19] ont indiqué que le T-stress pourrait influencer la ténacité. Dans le même contexte, un examen approfondi de ce sujet permet de trouver sur la méthode de jauge de déformation trouvée dans les références [20, 21] pour la détermination des première et deuxième paramètres de rupture (FIC et T-stress).

D'autre part, la contrainte autour de la pointe de la fissure et certains paramètres tels que l'emplacement des jauges de déformation ne sont pas entièrement compris et représentent un domaine de recherche très actif. Ces effets conduisent les auteurs à développer une méthode qui peut être facilement effectuée en utilisant les codes de calculs d'éléments finis existants. La méthode proposée est similaire à la méthode de jauge de déformation, mais il est plus utile et flexible pour le positionnement des points virtuels de l'évaluation de la déformation. Le choix des positions des points P_i pour le calcul de K_I et le T-stress est étudié à l'aide des jauges virtuelles avec un seul angle d'orientation θ et d'un segment de ligne dans un champ de déformation près de la pointe de la fissure. Il est noter que cette méthode a été déjà appliquée par les auteurs sur une éprouvette à simple fissure au bord soumis au chargement de traction (SENT) en PMMA pour la détermination de K_I [22], mais la nouveauté de cet article est de mettre en évidence son efficacité pour la détermination de T-stress et le paramètre de biaxialité β , ainsi que son applicabilité en résolvant d'autres types de problèmes, tels que une éprouvette d'époxy en flexion à trois points (TPB) dans le cas de conditions de chargement quasi-statique et à faible vitesse d'impact. Afin de valider la méthode proposée, nous comparons les résultats expérimentaux publiés antérieurement [13, 14] avec nos valeurs calculées du FIC, le T-stress et le paramètre de biaxialité β pour les deux types d'éprouvettes.

Les effets du mode de chargement, la taille de la fissure et de la sensibilité de certains paramètres géométriques sont également soulignés.

IV.2 FORMULATION MATHÉMATIQUE

Il a été montré que les équations de Westervald [23] doivent être généralisées pour résoudre les problèmes de mécanique de la rupture, où le champ de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure est influencé par les conditions aux limites et les points d'applications du chargement [21]. Ces contraintes exprimées sous la forme généralisée sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \operatorname{Re}Z - y \operatorname{Im}Z' - y \operatorname{Im}Y' + 2\operatorname{Re}Y \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re}Z + y \operatorname{Im}Z' + y \operatorname{Im}Y' \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re}Z' - y \operatorname{Re}Y' - \operatorname{Im}Y\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Où, pour une fissure à une seule extrémité (simple), les fonctions analytiques complexes Z et Y peuvent être représentées par des séries de fonctions (en termes de variable complexe $z = re^{i\theta}$) contenant un nombre infini de coefficients A_n et B_m .

$$\begin{aligned}Z(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n-1/2} \\ Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m\end{aligned}\tag{IV.2}$$

Pour le cas d'un état de contrainte plane, la relation contrainte-déformation est donnée par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{IV.3}$$

Où E , μ et ν désignent respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

En substituant l'équation (IV.1) dans (IV.3), on obtient le champ de déformation comme suit:

$$\begin{aligned}E\varepsilon_{xx} &= (1-\nu)\operatorname{Re}Z - (1+\nu)y \operatorname{Im}Z' - (1+\nu)y \operatorname{Im}Y' + 2\operatorname{Re}Y \\ E\varepsilon_{yy} &= (1-\nu)\operatorname{Re}Z + (1+\nu)y \operatorname{Im}Z' + (1+\nu)y \operatorname{Im}Y' - 2\nu \operatorname{Re}Y \\ \mu\gamma_{xy} &= -y \operatorname{Re}Z' - y \operatorname{Re}Y' - \operatorname{Im}Y\end{aligned}\tag{IV.4}$$

La zone, autour de la pointe de la fissure peut être divisée en trois régions comme le montre la figure IV.1; dans l'ordre d'identifier les emplacements adéquats pour les mesures de déformations précises.

Région I: est la plus proche de la pointe de la fissure où le terme singulier de la série de Williams est suffisant pour représenter les déformations dans cette zone. Notons que ce n'est pas la région valable pour des mesures précises de déformation en raison des non-linéarités provoquées par la grande déformation et l'effet de trois dimensions sur la nature de l'état de contrainte [14].

Région II: c'est la zone au-delà de la région I où le champ de déformation peut être représenté au sein d'une précision spécifiée par une théorie multi-paramètres contenant K_I et des coefficients de termes d'ordres supérieurs inconnus.

Région III: c'est la zone de champ lointain, où un très grand nombre d'inconnue est nécessaire dans la série de Williams pour obtenir un résultat précis, de sorte que la collection des données de la déformation ne convient pas là. Par conséquent, la région II est la zone la plus favorable pour des mesures précises de la déformation [14, 21, 24].

Dans ce travail, une représentation de quatre termes est décrite dans les équations de champ de déformations dont les deux premiers termes de chacune des séries $Z(z)$ et $Y(z)$ ont été retenus.

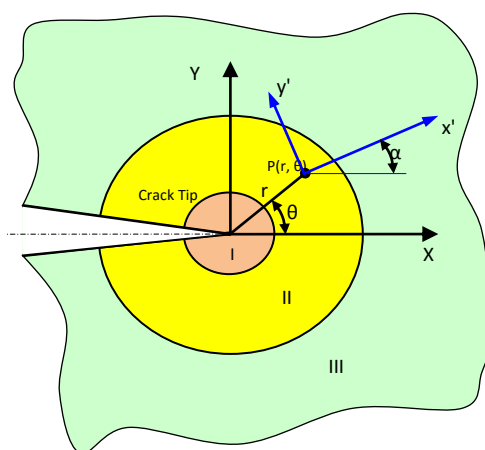


Figure IV. 1 : Schémas d'illustration des trois régions associées à la pointe de la fissure et l'emplacement avec l'orientation des points de mesure de déformation.

posons $n = 0, 1$ et $m = 0, 1$, l'expression (2) devient:

$$Z(z) = A_0 z^{-1/2} + A_1 z^{1/2} \quad (IV.5)$$

$$Y(z) = B_0 z^0 + B_1 z^1$$

Utilisons $z = re^{i\theta}$, les équations (IV.5) peuvent être réécrites comme:

$$Z = A_0 r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_1 r^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (IV.6)$$

$$Y = B_0 + B_1 r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Où (r, θ) sont les coordonnées polaires, et A_0, A_1, B_0 et B_1 sont des coefficients inconnus qui peuvent être déterminés en utilisant la géométrie de l'éprouvette et les conditions de chargement.

Substitution les équations (IV.6) dans les équations (IV.4) on obtient:

$$E\varepsilon_{xx} = A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) - (1+\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + 2B_0 + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + 2B_1 r \cos \theta$$

$$E\varepsilon_{yy} = A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - 2\nu B_0 + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) - (1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] - 2\nu B_1 r \cos \theta \quad (IV.7)$$

$$\mu\gamma_{xy} = \frac{A_0}{2} r^{-1/2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{A_1}{2} r^{1/2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - 2B_1 r \sin \theta$$

IV.2.1. Détermination de K_I

Utilisons la définition du facteur d'intensité de contrainte en mode I, on peut noter que [14]:

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_0 \quad (IV.8)$$

Une simple jauge de déformation est suffisante pour mesurer la constante A_0 donc en plaçant et en orientant la jauge indiqué sur la figure ci-dessus (Fig. IV.1). Les déformations par rapport à un système de coordonnées rotationnel (x', y') avec son origine au point P (r, θ) tel que défini dans la figure IV.1 sont évalués à partir du premier invariant de la déformation [20].

$$\varepsilon_{x'x'} + \varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (IV.9)$$

sachant que la forme complexe de l'équation de transformation de la déformation est:

$$\varepsilon_{y'y'} - \varepsilon_{x'x'} + i\gamma_{x'y'} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} + i\gamma_{xy}) e^{2i\alpha} \quad (IV.10)$$

Substituant les équations (IV.7) dans les équations (IV.10) de la déformation on obtient:

$$\begin{aligned}
2\mu\varepsilon_{x'x'} = & A_0 r^{-1/2} \left[\kappa \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] + B_0 (\kappa + \cos 2\alpha) \\
& + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \\
& + B_1 r [(\kappa + \cos 2\alpha) \cos \theta - 2 \sin \theta \sin 2\alpha]
\end{aligned} \tag{IV.11a}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\varepsilon_{xx'} - \varepsilon_{yy'}) = & \frac{A_0}{2} r^{-1/2} \sin \theta \left[\sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha - \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \\
& - B_0 \cos 2\alpha + \frac{A_1}{2} r^{1/2} \sin \theta \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin 2\alpha - \sin \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha \right] \\
& + B_1 r [2 \sin \theta \sin 2\alpha - \cos \theta \cos 2\alpha]
\end{aligned} \tag{IV.11b}$$

where $\kappa = (1-\nu)/(1+\nu)$

Les équations (IV.11) donnent les relations entre K_I et la déformation mesurée avec un simple élément de jauge de déformation orientée à un angle α par rapport au système de coordonnées (x', y') .

Considérons les équations (IV.11), le terme B_0 peut être éliminé en sélectionnant l'angle α de telle sorte que:

$$\cos 2\alpha = -\kappa = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \tag{IV.2}$$

De la même façon le terme A_1 peut être également éliminé en fixant

$$\kappa + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\alpha = 0 \tag{IV.13}$$

qui peut être vérifié si

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\cot 2\alpha \tag{IV.14}$$

Ainsi, en plaçant une seule jauge de déformation, les angles α et θ sont choisis pour vérifier les équations (IV.12) et (IV.14), nous pouvons mesurer la déformation $\varepsilon_{x'x'}$ qui est lie avec K_I par:

$$2\mu\varepsilon_{x'x'} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\kappa \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \tag{IV.15}$$

Selon Dally et Sanford [21], ont montré que les angles α et θ dépendent seulement du coefficient de Poisson du matériau de l'éprouvette.

IV.2.2 Evaluation de T-stress et le paramètre de biaxialité β

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour déterminer le T-stress pour des éprouvettes fissurées. La méthode de différence de contrainte (SDM) proposée par Yang et Ravi-Chandar [25] a été largement utilisée. D'une manière générale, le T-stress peut être évalué en fonction des expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{pour } \theta = 0^\circ \text{ ou } \pm 120^\circ, & \quad T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ \text{pour } \theta = \pm 60^\circ \text{ ou } \pm 90^\circ, & \quad T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/3 \\ \text{pour } \theta = 0^\circ, & \quad T = \sigma_{xx} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Utilisons les équations (IV.7), la différence de déformation normale peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) = & -2A_0 r^{-1/2} (1+\nu) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + 2B_0 (1+\nu) \\ & + 2A_1 r^{1/2} (1+\nu) \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(1+\nu) B_1 r^1 \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Il est évident de noter que les trois valeurs de θ , (0° , $\pm 120^\circ$ et $\pm 180^\circ$) dans l'expression de déformation le coefficient dominant A_0 peut être éliminé en prenant en compte la différence normale de déformation ($\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$). Dans le même temps, l'angle $\theta = \pm 180^\circ$ n'est pas un choix possible en raison de la difficulté pratique. Substituer $\theta = \pm 120^\circ$ dans l'équation (IV.17) tel que recommandé par Malesky et al. [14], on obtient la relation suivante pour la différence de déformation normale.

$$\frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 + \frac{3A_1 r^{1/2}}{4} - A_2 r \quad (\text{IV.18})$$

Ici, pour évaluer le T-stress, nous pouvons tronquer la série soit à $r^{1/2}$ terme ou à r^0 terme. Ensuite, on obtient respectivement les relations suivantes:

$$T = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 + \frac{3A_1 r^{1/2}}{4} \quad (\text{IV.19})$$

$$T = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 \quad (\text{IV.20})$$

Il convient de souligner à ce stade que les valeurs de la différence de déformation normale dans des éprouvettes de dimension finie doivent être mesurées à une distance au-delà de $r = 0.5 B$, où B est l'épaisseur de l'éprouvette afin d'éviter les effets tridimensionnelles (3D) en pointe de la fissure [14].

Leavers et Radon [6] ont introduit un paramètre de biaxialité β qui est lié à T-stress par l'équation suivante:

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \quad (\text{IV.21})$$

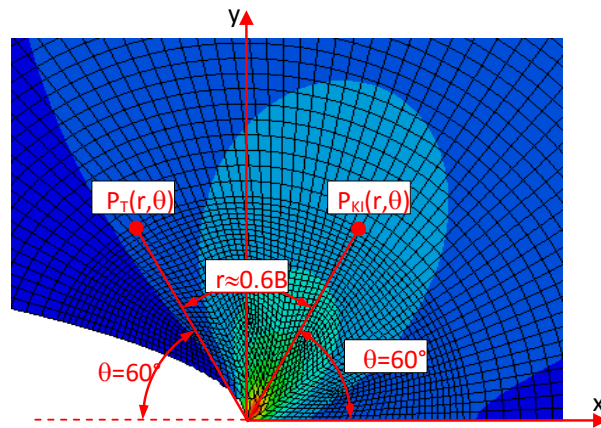


Figure IV. 2: Emplacement des jauges virtuelles de déformation au voisinage d'une pointe de fissure.

Il est intéressant de noter que l'aspect essentiel de ce travail par rapport aux autres approches existantes est basé sur l'utilisation de jauges de déformations virtuelles pour le calcul des paramètres de rupture (Fig. IV.2). En outre, la raison qui rend cette approche innovante est son application sur des configurations complexes sous chargements statiques et dynamiques et pour divers matériaux fissurés. D'autre part, cette méthode semble être assez simple et donne une mesure efficace et précise des différents paramètres de la mécanique de la rupture.

IV.3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans cette section deux éprouvettes normalisées ont été examinées, une éprouvette en flexion à trois points (TPB) (Fig IV.3.a) et une éprouvette à simple fissure au bord soumise à la traction (SENT) pour diverses conditions de chargement (Fig. IV.3.b.). Une analyse par éléments finis en utilisant le logiciel ABAQUS [26] a été exploitée pour déterminer le K_I et le T-stress en premier mode de rupture en utilisant la méthode de jauge virtuelle de déformation. La mécanique linéaire (élastique) de la rupture (LEFM) a été assumée comme condition. Afin de prédire correctement le comportement mécanique à la pointe de la fissure, des éléments spéciaux avec un maillage extrêmement raffiné ont été utilisés.

Dans ce travail numérique nous avons adoptés les mêmes positions de jauge de déformations utilisées expérimentalement pour la détermination de K_I et le T-stress.

En effet, le calcul de K_I et le T-stress ont été effectués en positionnant un double élément de jauges virtuelles de déformation pour $\theta = 60^\circ$ et $\theta = 120^\circ$, respectivement, avec $r = 0.63 B$ tel que recommandé par Maleski et al. [13]. La première a été utilisée pour l'enregistrement de l'historique des déformations pour la détermination de K_I et le second a été utilisé pour l'enregistrement de l'historique des déformations pour le calcul de T-stress. Ensuite, ces valeurs ont été converties en K_I et T-stress en utilisant les équations (IV.15) et (IV.20), respectivement. Le paramètre de biaxialité β dans ce cas a été calculé en utilisant l'équation (IV.21). Les résultats numériques obtenus ont été comparés aux résultats expérimentaux donnés par Maleski et al. [13] et Swamy et al. [14], dans lequel une description des techniques expérimentales utilisées pour mesurer les paramètres peut être également trouvée en détail.

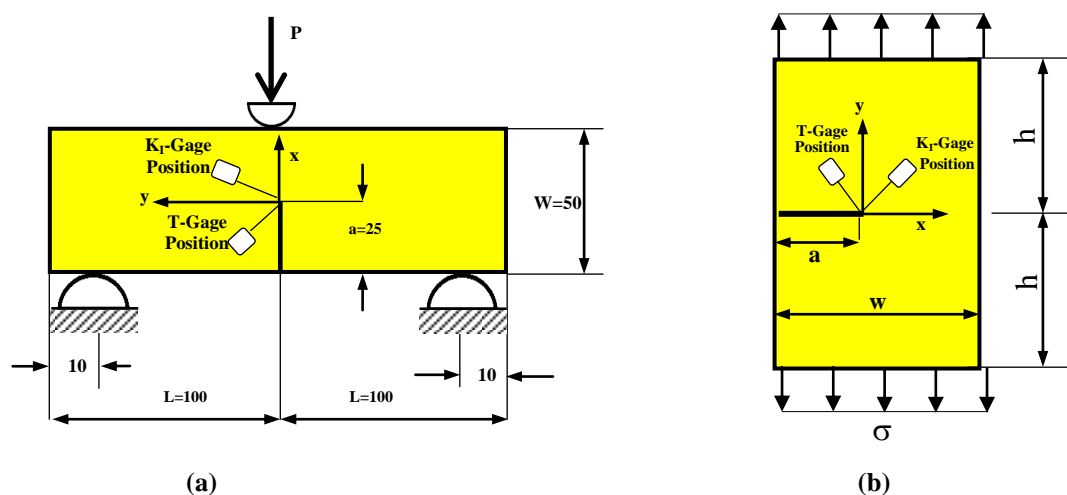


Figure IV. 3: Schémas illustratif de positionnement des jauges par rapport à la pointe de fissure: (a) pour une éprouvette TPB et (b) pour une éprouvette SENT.

IV.3.1. EPROUVETTE EN FLEXION A TROIS POINTS TPB

Afin de valider et développer l'approche proposée dans ce travail, le premier exemple a été pris similaire à celle traitée expérimentalement par Malesky et al. [13]. Il se compose d'une éprouvette en flexion à trois points (TPB) sous une charge d'impact de vitesse (Fig. IV.3.a). Les caractéristiques géométrique de cette éprouvette sont les suivantes: $2L = 200$ mm, $W = 50$ mm, $B = 6$ mm et $a / W = 0,2$ et $0,5$.

avec:

$2L$: est la longueur de l'éprouvette, W et B sont la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette respectivement.

L'éprouvette a été réalisée en époxy avec les caractéristiques mécaniques suivantes [13]:

$E = 4,37$ GPa (module de Young), $\nu = 0.353$ (coefficient de Poisson), $\rho = 1139\text{kg/m}^3$ (la densité). Pour des raisons de symétrie (géométrie et charge) nous avons modélisés que la moitié de l'éprouvette (Fig. IV.4. a), au voisinage proche de la fissure le maillage a été raffiné (Fig. IV.4.b). Le nombre des éléments utilisé dans cette analyse numérique est de 1475 éléments de type Q8R avec 1702 nœuds. Les positions des jauges virtuelles de déformations sont situées à un rayon $r = 5,5$ mm et un angle $\theta = 60^\circ$ pour la détermination de K_I et $\theta = 120^\circ$ pour la détermination de T (Fig. IV.2-3).

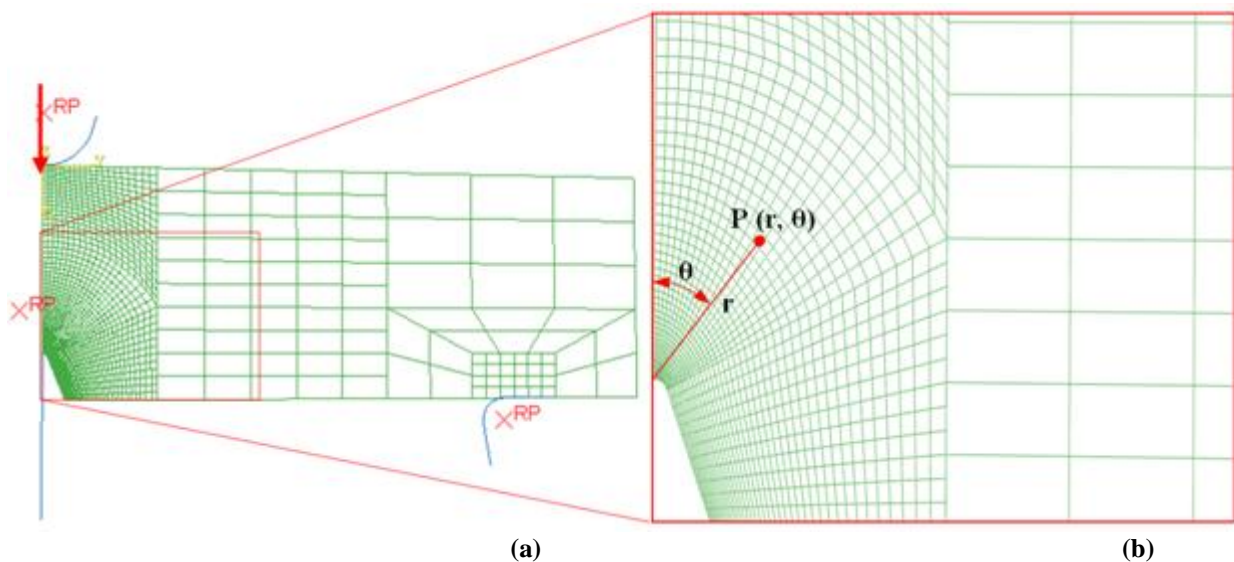
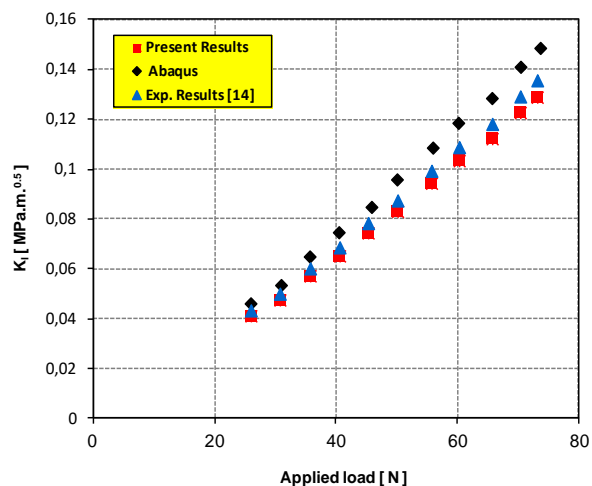
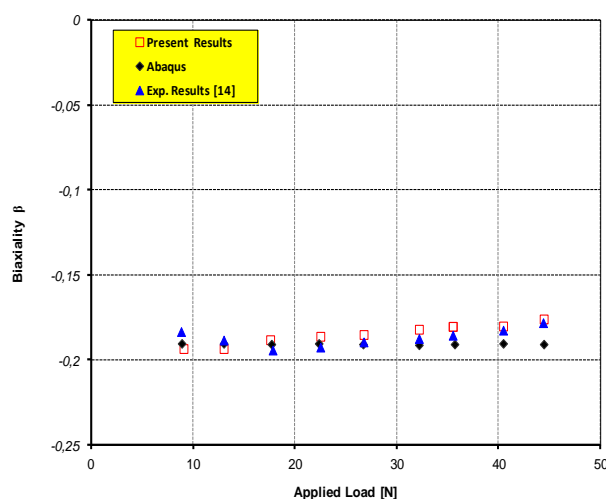


Figure IV. 4 : Modélisation de l'éprouvette: (a) Maillage et conditions aux limites de la moitié de l'éprouvette, (b) Détail du maillage raffiné à proximité de la pointe de la fissure.

Les paramètres de rupture (FIC, T-stress et le paramètre de biaxialité) ont été calculés pour différentes charges par la modélisation classique des éléments finis et en utilisant la méthode de jauge virtuelle de déformation. Les résultats obtenus pour K_I et le paramètre de biaxialité β sont illustrés sur la figure IV.5. On peut constater que les résultats obtenus par la méthode proposée sont en bon accord avec ceux des données expérimentales fournies par Malesky et al. [13]. En outre, on peut observer que le FIC augmente de manière linéaire avec l'augmentation de la charge appliquée (Fig. IV. 5. a). Cependant, le paramètre de biaxialité reste à peu près constant par rapport à l'augmentation de la charge appliquée (Fig. IV. 5. b).



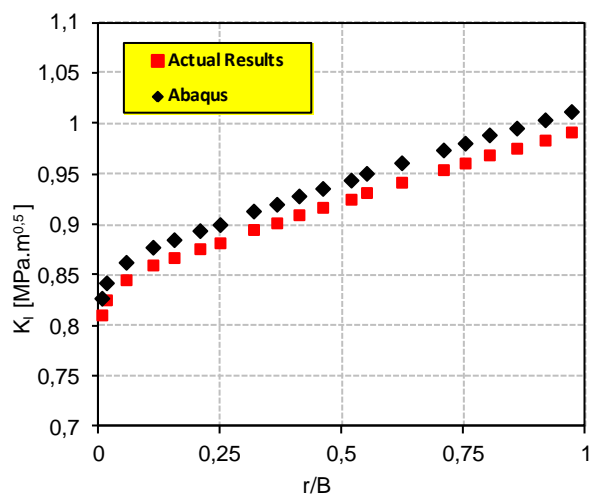
(a)



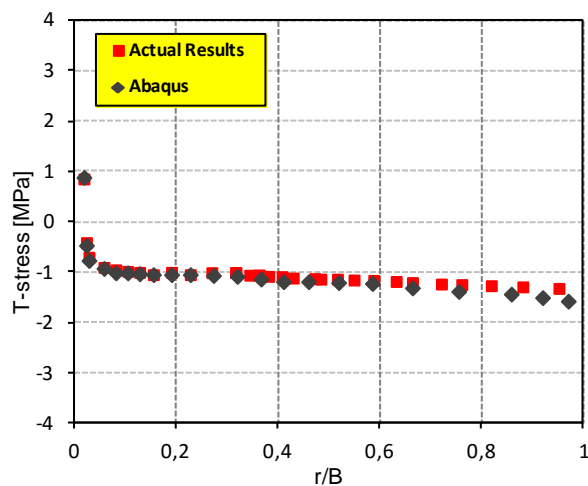
(b)

Figure IV. 5 : Comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux de l'évolution de (a) FIC; (b) Paramètre de biaxialité en fonction de la charge appliquée.

Des simulations par éléments finis ont également été menées sous un état de contrainte plane sous un chargement dynamique afin de vérifier la méthode proposée pour atteindre des valeurs temporaires de K_I et de T-stress. Le même modèle d'éléments finis représenté sur la figure IV.4 a été utilisé pour les simulations dynamiques. Le modèle a été chargé par la force donnée par Malesky et al. [13] pour une vitesse de 1,5 m/s. Le schéma d'intégration temporelle implicite de la méthode de Newmark a été adopté dans les simulations. Les résultats numériques, en utilisant la méthode des jauges virtuelles de déformation, ont été utilisés pour calculer les valeurs de K_I et le T-stress au cours de la durée d'exercices de la force. L'évolution de K_I et de T-stress en fonction de la distance radiale r/B sont représentés sur la figure IV.6.



(a)



(b)

Figure IV. 6: Comparaison entre les résultats numériques et d'extrapolations à $a/W = 0,5$ en fonction de r/B pour l'évaluation de: (a) FIC et (b) T-stress.

On peut conclure que les résultats obtenus par la méthode proposée sont de 1,8% de K_I et 4,5% pour le T-stress par rapport à ceux donnés par Malesky et al. [13]. En outre, on peut observer que le FIC augmente avec l'augmentation du rapport (r/B). Par contre une augmentation au niveau du rapport r/B entraîne une légère diminution de T-stress, une bonne linéarité a été observée pour $r/B > 0,1$.

IV.3.2 Eprouvette SENT sous contrainte de traction uniforme

Le deuxième exemple traité ici, est une éprouvette SENT en PMMA sous contrainte de traction uniforme (Fig. IV.3. b). Les dimensions de l'éprouvette sont les suivantes: la largeur $w = 150$ mm, l'épaisseur $b = 6$ mm, tandis que a est la longueur de la fissure et h représente la hauteur de l'éprouvette sont variable avec sa la largeur w comme suit: $h/w = 0,3$; $0,5$; $0,7$; et $1,0$; $a/W = 0,3$ et $0,5$. Un état plan de contrainte a été adopté. Les propriétés mécanique de cette éprouvette sont: $E = 2300\text{MPa}$; $\nu = 0,37$; $K_{IC} = 1,9 \text{MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$; $G_{IC} = 0,3\text{-}0,4 \text{KJ/m}^2$ [14].

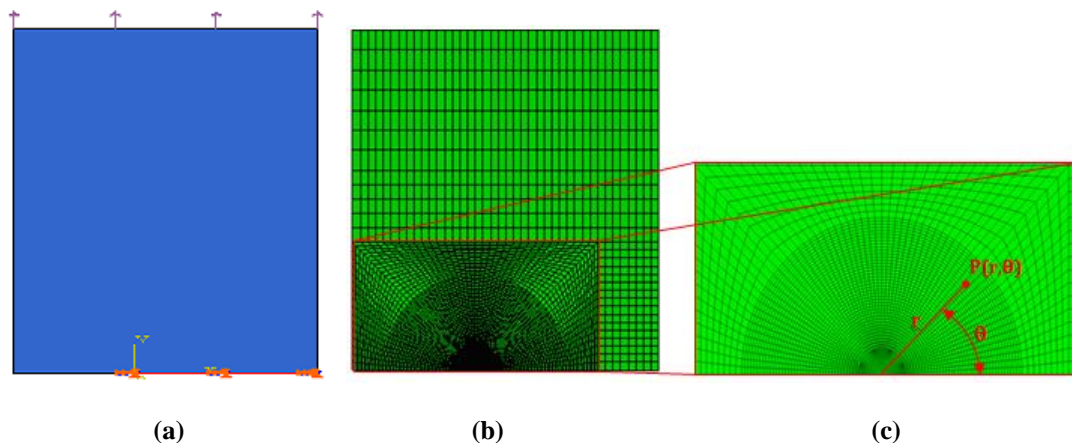


Figure IV. 7. Schéma illustratif de: (a) les conditions aux limites, (b) maillage typique utilisé pour la moitié de l'éprouvette SENT, (c) Détail du maillage raffiné utilisé à proximité de la pointe de la fissure.

Pour des raisons de symétrie seulement la moitié de l'éprouvette a été considérée pour cette analyse numérique (Fig. IV.7. a). Des améliorations significatives au niveau des valeurs de FIC ont été obtenues lorsque le maillage a été raffiné (Fig. IV.7. b) ces résultats convergent avec ceux obtenus par Dally et Sanford [20]. Le nombre des éléments utilisés dans cette section est de 1882 éléments de type Q8R avec 2341 nœuds. Au niveau de la pointe de la fissure le maillage a été raffiné (Fig. IV.7. c).

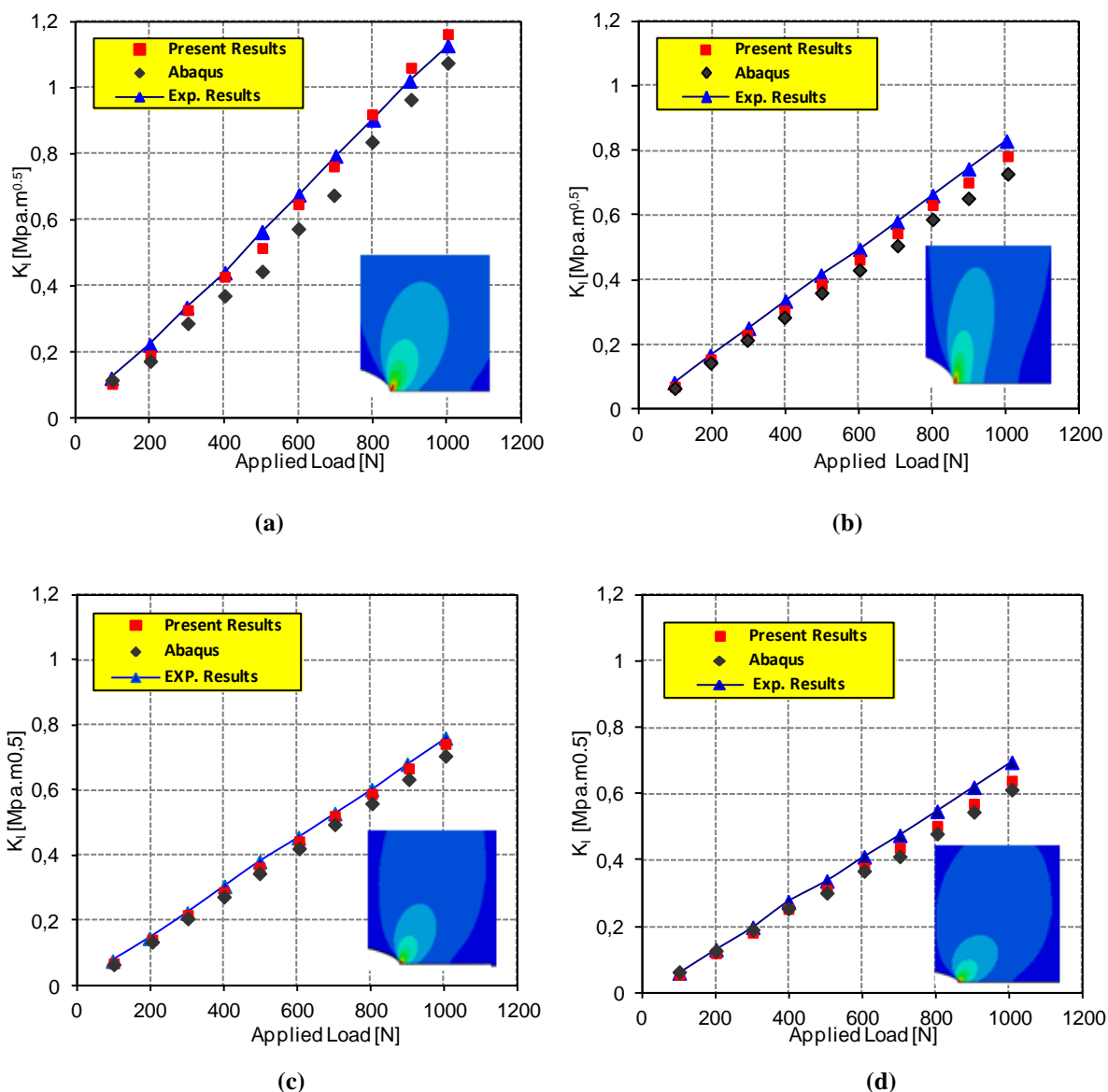


Figure IV. 8: Comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux avec $a/W = 0,5$ pour l'évaluation des valeurs normalisées de FIC dans le cas de: $a/W = 0,3$ avec différents rapports (a) $h/W = 0,3$ (b) $h/W = 0,5$; (c) $h/W = 0,7$ et (d) $h/W = 1$.

Afin d'établir une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode proposée et ceux obtenus expérimentalement par Swamy et al. [14], les évolutions des valeurs normalisées de FIC en fonction de la charge appliquée dans le cas de $a/W = 0,3$ et $0,5$ avec différents rapports $h/W = (0,3; 0,5; 0,7$ et $1)$ ont été tracés dans les figures IV.8 et IV.9, respectivement. Les résultats obtenus par la méthode d'extrapolation ont également été mis en évidence. On peut remarquer que tous les résultats obtenus par la méthode des jauges virtuelles de déformation sont conformes à ceux de l'extrapolation (MEF) et les résultats expérimentaux, et par conséquent en établissant la fiabilité des résultats obtenus pour le premier paramètre de rupture (FIC) de l'éprouvette SENT.

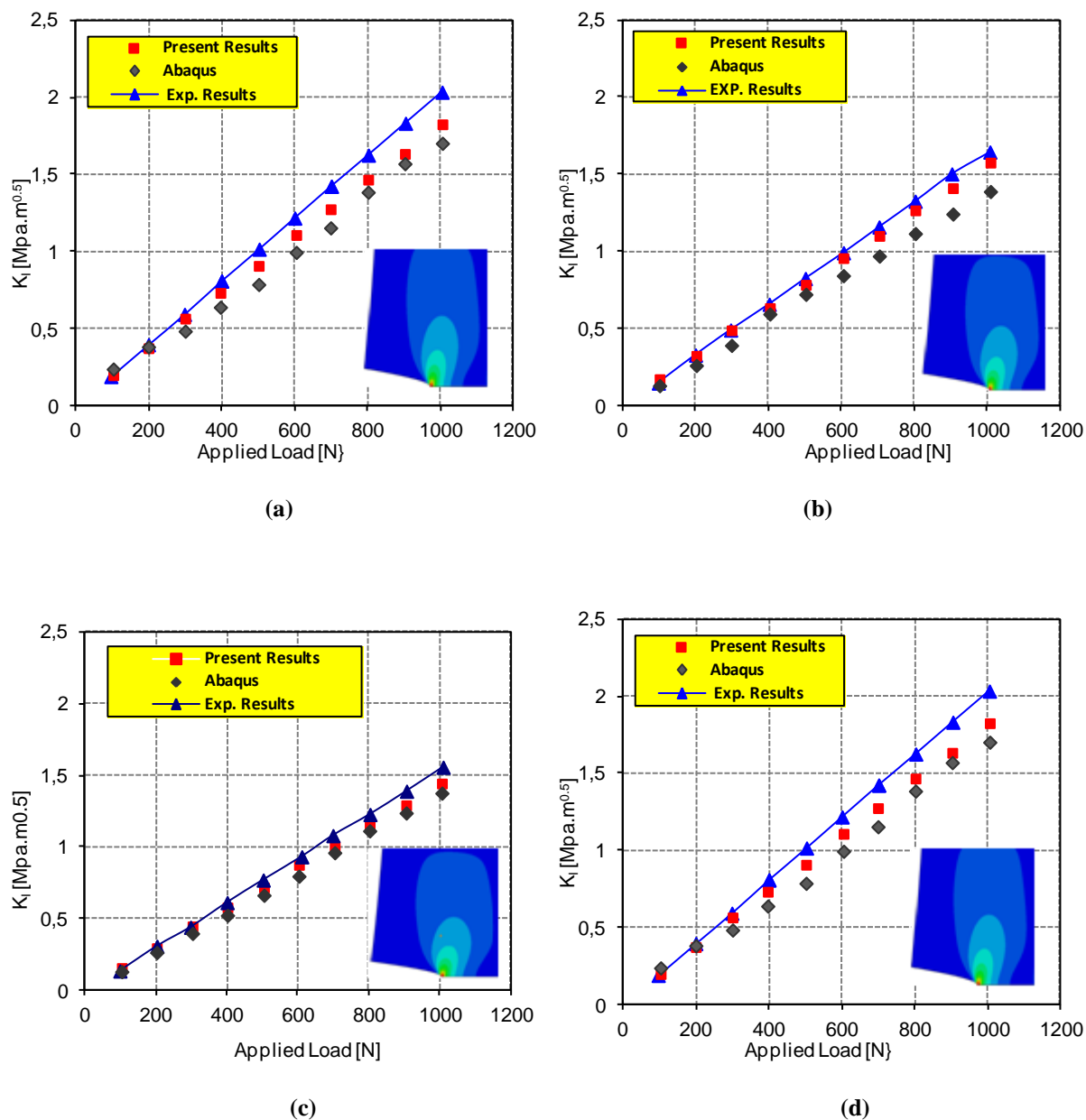


Figure IV. 9. Comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux avec $a/W = 0,5$ pour l'évaluation des valeurs normalisées de FIC dans le cas de: $a/W = 0,5$ avec différents rapports (a) $h/W = 0,3$ (b) $h/W = 0,5$; (c) $h/W = 0,7$ et (d) $h/W = 1$.

En effet, l'erreur entre la méthode des jauges virtuelles de déformation et les résultats déterminés expérimentalement est de 2,6% à 6%, montrons que la méthode proposée est sensiblement efficace par rapport à celle de la méthode d'extrapolation, puisque les erreurs de cette dernière sont comprises entre 4,8 % à 11% (par rapport aux résultats expérimentaux). En outre, on observe que plus la charge appliquée augmente, le FIC augmente. En outre, il a été constaté que le FIC augmente linéairement avec la charge appliquée et les valeurs de K_I déterminées pour un rapport $a/W = 0,3$ ont été constamment inférieures à celles d'un $a/W = 0,5$. Ce comportement a été jugé très similaire aux résultats obtenus par Rice [2] et Larsson et al. [27].

La figure IV.10, représente l'évolution de T-stress en fonction du chargement appliqué pour l'éprouvette SENT pour les rapports $a/W = 0,3$ et $0,5$ dans le cas de $h/W = 1,0$. On peut constater qu'une bonne concordance a été observée entre les résultats obtenus par la méthode proposée et ceux obtenus en utilisant le logiciel ABAQUS [26]. Par ailleurs, on peut remarquer que le T-stress augmente avec l'augmentation du rapport a/W .

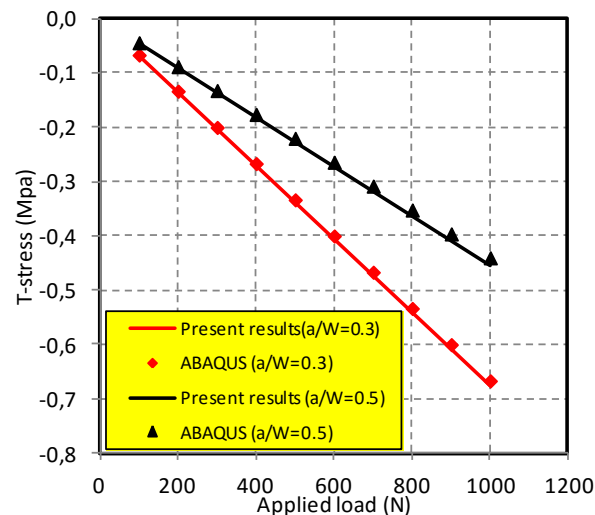


Figure IV. 10: Evolution du paramètre T-stress en fonction du chargement appliqué pour une éprouvette SENT.

L'évolution du paramètre de biaxialité en fonction du rapport a/W est représenté sur la figure IV.11. Selon cette figure, une bonne concordance a été observée entre les résultats obtenus par la méthode proposée et ceux obtenus par Fett [28], et obtenue numériquement par le logiciel ABAQUS [26]. Par ailleurs, on constate que le paramètre de biaxialité β augmente avec l'augmentation du rapport a/W .

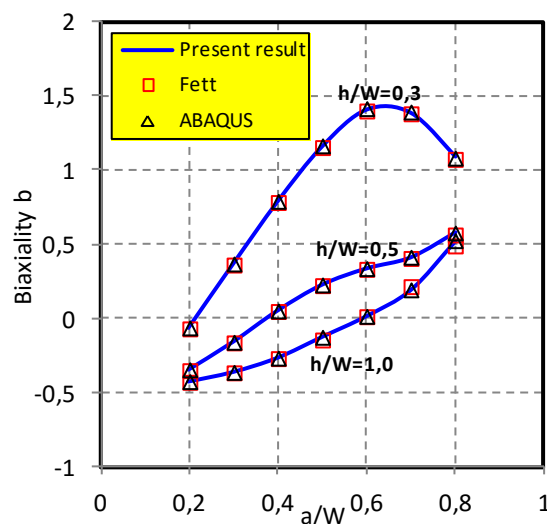


Figure IV. 11: Evolution du paramètre de biaxialité avec le rapport a/W dans le cas de $h/W=0,3; 0,5$ et $1,0$.

IV.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, une évaluation numérique des paramètres de rupture, tels que, le FIC, le T-stress et le paramètre de biaxialité par l'utilisation de la méthode des jauges virtuelles de déformation, a été proposée. Deux types d'éprouvettes (TPB et SENT) ont été examinés pour mettre en évidence l'efficacité et l'applicabilité de cette méthode numérique. Des simulations numériques ont été réalisées dans des conditions statiques pour les éprouvettes TPB et SENT, une faible vitesse d'impact a été imposée sur une éprouvette en flexion à trois points TPB. Afin d'accéder à l'efficacité de la méthode proposée, les résultats obtenus ont été comparés aux résultats expérimentaux publiés antérieurement et ceux obtenus en utilisant directement le logiciel ABAQUS.

Selon les résultats obtenus un bon accord a été trouvé entre la méthode proposée et la méthode expérimentale ou d'extrapolation utilisant le logiciel ABAQUS. En outre, il a été démontré que la méthode des jauges virtuelles de déformation peut être appliquée de manière efficace dans le cas de conditions statiques ou dynamiques pour les éprouvettes fissurés en

Époxy ou en PMMA soumise à la traction et à la flexion, respectivement. Les résultats ont montré que les angles de 60° et 120° (utilisés pour l'étude expérimentale) avec la distance radiale $r = 0.6 B$ sont également les positions optimales pour localiser les jauges virtuelles de déformation.

Enfin, il convient de noter que d'autres expériences et des simulations numériques doivent être effectuées afin de vulgariser la méthode proposée en mettant en évidence les effets d'autres paramètres, tels que la géométrie du composant, les propriétés du matériau, le profil de la fissure et les vitesses d'impact.

Référence bibliographique

- [1] Williams, M.L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech*, 24, 109-114.
- [2] Rice, J.R. (1974). Limitations to the Small-scale Yielding Approximations for Crack Tip Plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 22, 17-26.
- [3] Bilby, B.A., Cardew, G.E., Goldthorpe, M.R., Howard, I.C. (1986). A finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tips of stationary cracks. *Size Effects in Fracture*, Institution of Mechanical Engineers, London, England, 36-46.
- [4] Betegón, C., Hancock, J. (1991) Two- parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields, *J. Appl. Mech. Transactions of the ASME*, 113:104-110.
- [5] Nevalainen, M.J. (1997). The effect of specimen and flaw dimensions on fracture toughness, Dissertation for the degree of Doctor of Technology, University of Technology, Espoo, Finland.
- [6] Leevers, P.S., Radon, J.C. (1983). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries, *Int. J. Fract*, 19, 311-325.
- [7] Al-Ani, A.M., Hancock, J.W. (1991). J-Dominance of short cracks in tension and bending, *J. Mech. Phys. Solids*, 39 (1), 23-43.
- [8] Du, Z.Z., Hancock, J.W. (1991). The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint, *J. Mech. Phys. Solids*, 39 (4), 555-567.
- [9] Sham, T.L. (1991). The determination of the elastic T-term using higher order weight functions, *Int. J. Fract*, 48, 81-102.
- [10] Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. (1994). Effect of T-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid, *Int. J. Solids and Structures*, 31(6), 823-833.
- [11] Hancock, J.W., Reuter, W.G., Parks, D.M. (1993). Constraint and toughness parameterized by T. In: Hackett, E.-M. Schwalbe, K.-H. and Dodds, R.H. (Eds.) *Constraint Effects in Fracture*, ASTM STP 1171. Philadelphia, PA: American Society for Testing and Materials, 21-40.
- [12] Berger, J.R., Dally, J.W. (1988). An over deterministic approach for measuring K_{II} using strain gages. *Exp. Mech*, 28, 142-145.
- [13] Malesky, M.J., Kirugulige, M.S., Tippur, H.V. (2004). A Method for Measuring Mode I Crack Tip Constraint Under Static and Dynamic Loading Conditions, *Soc. Exp. Mech*, 44(5), 522-532.

- [14] Swamy, S., Srikanth, M.V., Murthy, K.S., Robi, P.S. (2008).determination of mode I stress intensity factors of complex configurations using strain gages, *J. Mech. Mat. Struct*, 3(7), 1239-1255.
- [15] Sanford, R.J. (2002). *Principles of Fracture Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [16] Paulino, G.H., Kim, J.H. (2004).A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method, *Engng. Fract. Mech*, 71, 1907-1950.
- [17] Broberg, K.B. (2005). A note on T-stress determination using dislocation arrays, *Int. J. Fract*, 131(1), 1–14.
- [18] Sumpter, J.D.G. (1993). *Constraint effects in fracture*, ASTM STP 1171. Philadelphia, USA.
- [19] Smith, D.J., Ayatollahi, M.R., Pavier, (2001). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 24(2), 137-150.
- [20] Dally, J.W., Sanford, R.J. (1990). Measuring the Stress Intensity Factor for Propagating Cracks with Strain Gages, *J. Test. Eval*, 18 (4), 240-249.
- [21] Dally, J.W., Sanford, R.J. (1987). Strain gage methods for measuring the opening mode stress intensity factor K_t , *Exp. Mech*, 27, 381-388.
- [22] Khelil, F., Belhouari, M., Benseddiq, N., Talha, A. (2014) A Numerical Approach for the Determination of Mode I Stress Intensity Factors in PMMA Materials, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res*, 4 (3), 644-648.
- [23] Westergaard, H.M. (1939). Bearing Pressure and Cracks, *J. Appl. Mech*, 6 A49-A53.
- [24] Sarangi, H., Murthy, K.S.R.K., Chakraborty, D. (2010). Radial location for strain gages for accurate measurement of mode I stress intensity factor, *Mater. Design*, 31, 2840-2850.
- [25] Yang, B., Ravi-Chandar, K. (1999). Evaluation of T-stress by stress difference method. *Engng. Fract. Mech*, 64, 589-605.
- [26] SIMULIA ABAQUS, 6.9.3 EF1. (2010). User's manual, Swanson Analysis Systems.
- [27] Larsson, S.G., Carlsson, A.J. (1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials, *J Mech. Phys. Solids*, 21, 263-78.
- [28] Fett, T. (1998). A compendium of T-stress solutions, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik and Umwelt, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6057, www.ubka.uni-karlsruhe.de, 1-72.

Conclusion générale

L'étude du comportement et de rupture en élasticité, de certains matériaux, a été abordée dans le cadre de l'approche globale de la mécanique de la rupture. Dans ce type d'approche, nous avons développé une méthodologie de calcul qui, à partir de l'utilisation des jauges virtuelles qui mesurent les déformations afin d'évaluer les paramètres de rupture tels que K , T-stress et la biaxialité permet de décrire l'amorçage et la propagation de fissure en différentes longueurs et de géométrie avec plusieurs type de chargement.

Nous avons expliqué ensuite la nécessité de détermination des paramètres de rupture dans des éprouvettes CT, TPB et SENT fissurées en introduisant un second paramètre caractéristique des champs à l'extrémité d'une fissure, pour des géométries données. Ce terme, appelée contrainte élastique T, est censé de représenter la stabilité et l'orientation du chemin de la fissure d'après l'extension du développement de l'équation de Williams où il apparaît le terme non singulière T.

La zone de la fissure est subdivisée en plusieurs zones dans les quelles on peut déterminer K et la contrainte T en deuxième zone. La rupture ne peut plus être caractérisée par un seul paramètre, et nous nous proposons une corrélation dans la zone de dominance de K -T.

Différentes approches relatives à la détermination des paramètres de rupture, au voisinage d'une fissure en mode I par différentes méthodes sont présentées.

L'analyse du champ de contraintes au fond de la fissure a été largement abordée pour le mode I en se basant sur les travaux de Williams.

La distribution des contraintes au fond de la fissure peut être approximativement formulée par des caractéristiques suivantes : la distance effective, l'exposant de singularité, la forme de la fissure et le Facteur d'Intensité de Contraintes.

Nous avons présenté les travaux récents basés sur les deux paramètres de la fissure d'entaille en mode I.

Nous avons montré les singularités que pouvait engendrer une telle fissure. La bonne maîtrise de la structure du maillage est indispensable, si nous désirons obtenir un calcul précis des champs mécaniques. Pour cela, nous avons montré l'intérêt des éléments singuliers à la pointe de la fissure.

Les grandeurs caractéristiques, décrivant l'amorçage et la propagation de la fissure, basées sur le concept d'un seul paramètre (K), sont apparues sensibles aux effets de taille et d'échelle de la fissure et aux effets de géométrie. Ces phénomènes posent le problème de transférabilité de ces grandeurs aux structures.

Ces observations expliquées par l'influence de la géométrie sur la zone plastique et sur le taux de biaxialité des contraintes devant la pointe de la fissure.

Rappelons que l'objectif du travail est de proposer une solution efficace, relativement simple (peu de paramètres) et peu coûteuse (surtout numériquement), pour modéliser le comportement et la rupture dans un contexte réelle.

Nous avons proposé deux méthodes essentielles pour calculer le paramètre K_I et T-stress. Nous avons aussi présenté des solutions théoriques approximatives de l'évolution de la contrainte T-stress pour une fissure, dans des éprouvettes soumis à des charges différentes. Bien que la contrainte T-stress varie linéairement avec σ_{xx} en pointe de la fissure, nous avons montré son rôle non négligeable sur le comportement de la fissure, en particulier sur le développement de la zone plastique.

Les jauges de déformations sont exploitées pour une confrontation avec l'étude numérique. Cette dernière confirme que les résultats expérimentaux donnés par les jauges sont en bonnes concordances à ceux calculés avec la méthode des jauges virtuelles de déformations.

Si la contrainte T est en sens contraire avec la direction de la fissure, une bifurcation de cette dernière peut avoir lieu. Nous retrouvons alors le caractère discontinu observé avec les différents essais traduisant un relief plus marqué du faciès de rupture.

Les résultats de simulation ont montré la dépendance des valeurs de T de la distance choisie le long du ligament. La méthode des jauges virtuelle (différence de déformations) n'est pas encore validée pour le cas du mode II de rupture.

*On the efficiency of the numerical
evaluation of fracture parameters using a
virtual strain gage method*

**F. Khelil, M. Belhouari, B. Aour &
N. Benseddiq**

**Journal of the Brazilian Society of
Mechanical Sciences and Engineering**

ISSN 1678-5878

J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.
DOI 10.1007/s40430-016-0520-z



Your article is protected by copyright and all rights are held exclusively by The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. This e-offprint is for personal use only and shall not be self-archived in electronic repositories. If you wish to self-archive your article, please use the accepted manuscript version for posting on your own website. You may further deposit the accepted manuscript version in any repository, provided it is only made publicly available 12 months after official publication or later and provided acknowledgement is given to the original source of publication and a link is inserted to the published article on Springer's website. The link must be accompanied by the following text: "The final publication is available at link.springer.com".

On the efficiency of the numerical evaluation of fracture parameters using a virtual strain gage method

F. Khelil¹ · M. Belhouari¹ · B. Aour² · N. Benseddiq³

Received: 28 April 2015 / Accepted: 1 March 2016
© The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2016

Abstract A simple method, called the virtual strain gage method, is proposed for an accurate numerical evaluation of the stress intensity factor, the T-stress and the biaxiality parameter β . This method is based on the optimal positions of virtual strain gages located near a crack tip so that the effect of dominant singular strains are canceled. The applicability of the proposed method is examined for quasi-static and low-velocity impact loading conditions on an epoxy three-point bending specimen and PMMA single edge notched specimen. The effects of the loading conditions, the geometry configuration and the length of the crack were presented and discussed. A good agreement has been found between the results of the proposed method and those of the numerical and experimental data previously published. In addition, it is noticed that the proposed method is an alternative and more advantageous than the extrapolation method because of its simplicity and accurate results.

Keywords Stress intensity factor · T-stress · Biaxiality parameter · FEM · PMMA

List of symbols

a	Crack length
B	Specimen thickness
A_n, B_m	Coefficients of the crack tip asymptotic field
E	Young's modulus
h	Half height of the plate
K_I	Stress intensity factors in Mode I
K_{IC}	Critical stress intensity factor of the first mode
L	Length of half specimen
P	Applied load on the specimen
$P_i(r, \theta)$	Locations of virtual strain gages
r	Radial distance from the crack tip
r, θ	Polar coordinate components
W	Specimen width
x, y, z	Cartesian coordinates components
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	Normal strains in x and y direction
$\varepsilon_{x'x'}, \varepsilon_{y'y'}$	Normal strains in relative to a rotated coordinate system (x', y')
γ_{xy}	Shear strain in x - y plane
ν	Poisson's ratio
ρ	Mass density
μ	Shear modulus
σ_{xx}, σ_{yy}	Normal stresses in x and y directions
τ_{xy}	Shear stress in x - y plane

Technical Editor: Eduardo Alberto Fancello.

✉ F. Khelil
khelilfoudil@yahoo.com

B. Aour
ben_aour@hotmail.com

- ¹ Department of Mechanical Engineering, University Djillali Liabes, BP 89, City Benmehdi, 22000 Sidi Bel Abbes, Algeria
- ² Laboratory of Applied Biomechanics and Biomaterials (LABAB), ENP Oran, El Mnaour, BP 1523, 31000 Oran, Algeria
- ³ Lille Mechanics Laboratory (LML), University of Lille 1, Scientific city, BP 90179, 59653 Villeneuve-d'Ascq, France

Abbreviations

CTOD	Crack tip opening displacement
FEM	Finite element method
HRR	Hutchinson-Rice-Rosengren field
LEFM	Linear elastic fracture mechanics
PMMA	Poly(methyl methacrylate) (Plexiglas)
QPE	Quarter point element

TPB	Three-point bending specimen
SENT	Single edge notched tensile specimen
SIF	Stress intensity factor

1 Introduction

The fracture analysis can be carried out by employing several methods to calculate the stress intensity factors and T-stress at the crack tip, such as stress-field theories, experimental techniques and J-integral method. The elastic T-stress represents a constant of tensile stress acting parallel to the crack flanks. It is related to the second term in the William's expansion of the stress field and it is measured according to the William's solution [1].

Rice [2] studied the effect of T-stress on fracture parameters. He discovered that the T-stress has no effect on the J-integral, but positive (negative) T-stress decreases (increases) plastic zone size and CTOD compared to the previous models not including the T-stress effect. He also suggested the use of a new non-singular stress parameter for three-dimensional analyses.

Bilby et al. [3] investigated the effect of the second-order term on a large geometry change deformation field within the CTOD. Negative T-stresses were shown to reduce the level of maximum hydrostatic stress ahead of the crack. They found that the void growth rate decreased and ductility enhanced due to the loss of triaxiality ahead of the crack tip.

Betegòn and Hancock [4] correlated the loss of J-dominance with the second term in the asymptotic expansion of the elastic field. They characterized the effect of T-stress on the small-strain region surrounding the blunting zone. In this context, the loss of J-dominance was associated with compressive (negative) T-stress which introduces a corresponding second-order term into the nonlinear asymptotic expansion, of which the Hutchinson-Rice-Rosenberg field (HRR) is simply the first term [5]. The second-order term causes the stresses ahead of the crack to fall for negative T-stresses while remaining close to HRR field for positive T-stresses and maintaining J-dominance. Single parameter characterization (J-dominance) was, thus, concluded to be a feature of geometries which show positive biaxiality parameters (β). Specimens which have negative biaxiality were predicted to lose J-dominance at a deformation level which depends on T-stress. The biaxiality parameter β is a specimen configuration dependent parameter. Values of β for various specimen geometries are presented by Leever-Radon [6] and Al Ani-Hancock [7].

Du and Hancock [8] presented numerical results of modified boundary layer formulations as slip-line fields. The full Prandtl field was achieved with tensile T-stress

which caused plasticity to appear on the crack flanks and envelop the crack tip. The stresses were independent of T-stress as further deformation could not change the flow field or the stress level at the crack tip. The deviation being dependent on material parameters, such as Poisson's ratio. This effect was associated with the appearance of an elastic wedge at the crack flanks, so that plasticity did not completely envelop the crack tip and the stress field required two-parameter characterization. Sham [9] presented how T-stress can be determined by the so-called second order weight functions through a work conjugate integral. He presented tabulated T-stress values for various specimen configurations.

Tvergaard and Hutchinson [10] applied an elastic-plastic crack growth model, with a traction-separation law specified on the crack plane to characterize the fracture process, to study the effect of T-stress on fracture resistance. They discovered that with compressive T-stresses, the plasticity contributes significantly to crack growth resistance even at low peak stress values. As compressive T-stress increases from zero to the yield strength, the plasticity effect increases radically and crack growth resistance increases. The increase of tensile T-stress from zero to half of the yield strength, produces only a negligible decrease in crack growth resistance. These results are in accordance with the results of Du and Hancock [8].

Hancock et al. [11] tested a series of cracked specimen configurations to correlate the geometry dependence of crack tip constraint in full plasticity. They found that at a small crack extension, the toughness is dependent on the crack tip constraint determined by T-stress. The loss of constraint in center-cracked panels increases radically as the crack grows, compared to constraint loss in TPB specimens, due to the effect of constraint on the slope of the resistance curves. Moreover, different strain gage approaches were introduced [12–15] to measure the variation of the stress intensity factor of a propagating crack.

Paulino and Kim [16] utilized the interaction integral approach to investigate the fracture behavior of material with emphasis on the T-stress. It is concluded, according to homogeneous material, that negative T-stress decreases the crack initiation angle, whereas positive T-stress increases the crack initiation angle. In this method, a valid region was specified for locating the gages to get rid of the elastic-plastic crack-tip state caused by local yielding in the innermost region close to the crack tip. The error caused by the strain gradient was minimized by placing the virtual strain gages sufficiently far from the crack tip. An extended over-deterministic approach was proposed by Berger [12] to significantly improve the accuracy.

Using the dislocation distribution method and the singular integral equation, several T-stress problems were solved

by Broberg [17]. Analytical and experimental studies carried out by Sumpter [18] demonstrated that T-stress can be used as a measure of constraint for plastic yielding ahead of the crack tip. Smith et al. [19] indicated that T-stress could influence the fracture toughness. In the same context, a thorough examination of this subject based on the strain gage method can be found in Refs. [20, 21] for the determination of the first and the second fracture parameters (SIF and T-stress).

On the other hand, the constraint around a crack tip and some parameters such as the locations of strain gages are not fully understood and represent a very active research field. These facts lead the authors to develop a method which can be easily carried out using the existing finite element codes. The proposed method is similar to the strain gage method, but it is more helpful and flexible for positioning the virtual points of the strains evaluation. The choice of the positions of points P_i for the calculation of K_I and T-stress is studied using virtual gages with only one orientation angle θ when considering a line segment in a strain field near the crack tip. It is worth noting that this method has been already applied by the authors on PMMA single edge notched tensile (SENT) specimens for the determination of K_I [22], however the novelty of this paper is to highlight its effectiveness for the determination of T-stress and biaxiality parameters, as well as its applicability by resolving other types of problems, such as the epoxy three-point bending (TPB) specimens in the case of quasi-static and low-velocity impact loading conditions. To validate the proposed method, we compare the previously published experimental results [13, 14] with our computer-calculated values of the SIF, the T-stress and the biaxiality parameter β for both types of specimens. The effects of the loading mode, crack size and sensitivity of some geometrical parameters are also highlighted.

2 Background formulation

It was shown that the Westergaard [23] equations should be generalized to solve fracture mechanics problems where the stress field in the local neighborhood of the crack tip is influenced by the proximity of boundaries and points of the applied loads [21]. The stresses expressed in the generalized form are given by

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' - y \text{Im } Y' + 2\text{Re } Y \\ \sigma_{yy} &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' + y \text{Im } Y' \\ \tau_{xy} &= -y \text{Re } Z' - y \text{Re } Y' - \text{Im } Y \end{aligned} \tag{1}$$

where, for a single-ended crack, the complex analytic functions Z and Y can be represented by series type functions

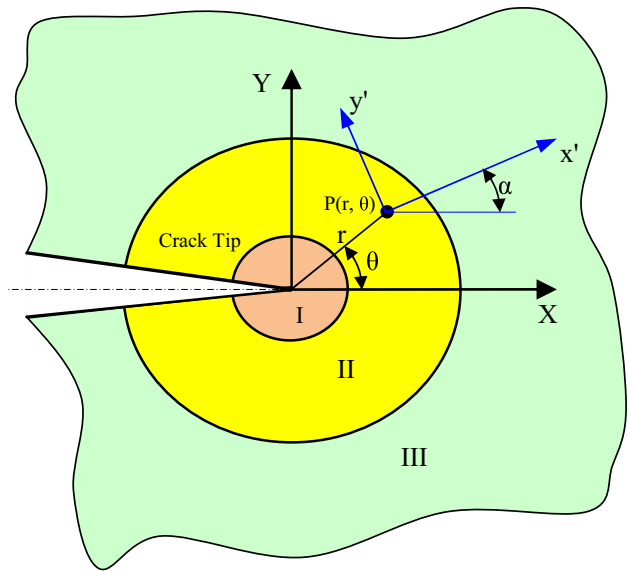


Fig. 1 Schematic illustration of the three regions associated with the strain points location and orientation at the crack tip

(in terms of complex variable $z = re^{i\theta}$) containing infinite number of coefficients A_n and B_m .

$$\begin{aligned} Z(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n-1/2} \\ Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m \end{aligned} \tag{2}$$

For plane stress, the stress-strain relationship is given by

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{3}$$

where E , μ and ν denote the Young and shear moduli and the Poisson ratio, respectively.

By substituting (1) into (3), we obtain the strain field as follows:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= (1 - \nu) \text{Re } Z - (1 + \nu)y \text{Im } Z' - (1 + \nu)y \text{Im } Y' + 2\text{Re } Y \\ E\varepsilon_{yy} &= (1 - \nu) \text{Re } Z + (1 + \nu)y \text{Im } Z' + (1 + \nu)y \text{Im } Y' - 2\nu \text{Re } Y \\ \mu\gamma_{xy} &= -y \text{Re } Z' - y \text{Re } Y' - \text{Im } Y \end{aligned} \tag{4}$$

The area around a crack tip can be divided into three regions as shown in Fig. 1 to identify the adequate locations for accurate strain measurements. Region I: is close to the crack tip where the singular term in the series is sufficient to represent the strains into the zone. Noting that this is not a valid region for accurate strain measurements

because of nonlinearities caused by the yielding of material and three dimensional nature of stress state [14]. Region II: is the area beyond region I where the strain field can be represented within a specified accuracy by a multi-parameter theory containing K_I and coefficients of higher order terms as unknowns. Region III: is the far-field zone, where a very large number of unknowns is required in the series to obtain an accurate results, so collection of strain data is not appropriate there. Hence, Region II is the most favorable zone for accurate strain measurements [14, 21, 24].

In this paper, a four-term representation is described where the first two terms of each of the series for Z and Y have been retained.

Setting $n = 0, 1$ and $m = 0, 1$, expression (2) becomes

$$\begin{aligned} Z(z) &= A_0 z^{-1/2} + A_1 z^{1/2} \\ Y(z) &= B_0 z^0 + B_1 z^1 \end{aligned} \tag{5}$$

Using $z = re^{i\theta}$, Eq. (5) can be rewritten as

$$\begin{aligned} Z &= A_0 r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad + A_1 r^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ Y &= B_0 + B_1 r (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \tag{6}$$

where (r, θ) are the polar coordinates, A_0, A_1, B_0 and B_1 are unknown coefficients that can be determined using the geometry of the specimen and the loading conditions.

Substituting Eq. (6) into Eq. (4) gives

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) - (1+\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ &\quad + 2B_0 + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &\quad + 2B_1 r \cos \theta \\ E\varepsilon_{yy} &= A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ &\quad - 2\nu B_0 + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) - (1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &\quad - 2\nu B_1 r \cos \theta \\ \mu\gamma_{xy} &= \frac{A_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{A_1}{2} r^{1/2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ &\quad - 2B_1 r \sin \theta \end{aligned} \tag{7}$$

3 Determination of K_I

Using the definition of the stress intensity factor in mode I, K_I , it can be shown that [14] :

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_0 \tag{8}$$

A single strain gage is sufficient to measure the constant A_0 (hence K_I) by placing and orienting the strain gage as given below. The strain relative to a rotated coordinate system (x', y') with its origin at point $P(r, \theta)$ as defined in Fig. 1 are evaluated from the first invariant of strain [20].

$$\varepsilon_{x'x'} + \varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \tag{9}$$

and the complex form of the strain transformation equations

$$\varepsilon_{y'y'} - \varepsilon_{x'x'} + i\gamma_{x'y'} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} + i\gamma_{xy})e^{2i\alpha} \tag{10}$$

Substituting Eq. (7) into Eq. (10) yields

$$\begin{aligned} 2\mu\varepsilon_{x'x'} &= A_0 r^{-1/2} \left[\kappa \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] + B_0 (\kappa + \cos 2\alpha) \\ &\quad + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \\ &\quad + B_1 r [(\kappa + \cos 2\alpha) \cos \theta - 2 \sin \theta \sin 2\alpha] \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon_{x'x'} - \varepsilon_{y'y'}) &= \frac{A_0}{2} r^{-1/2} \sin \theta \left[\sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha - \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \\ &\quad - B_0 \cos 2\alpha + \frac{A_1}{2} r^{-1/2} \sin \theta \\ &\quad \times \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin 2\alpha - \sin \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha \right] \\ &\quad + B_1 r [2 \sin \theta \sin 2\alpha - \cos \theta \cos 2\alpha] \end{aligned} \tag{11b}$$

where $\kappa = (1 - \nu)/(1 + \nu)$

Equations (11a, 11b) give the relations between K_I and the strain $\varepsilon_{x'x'}$ measured with a single-element strain gage oriented at angle α with respect to $x'y'$ coordinate system.

Considering Eqs. (11a, 11b), the B_0 term can be eliminated by selecting the angle α so that

$$\cos 2\alpha = -\kappa = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \tag{12}$$

Similarly, the A_1 term can be also eliminated, by setting

$$\kappa + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\alpha = 0 \tag{13}$$

which can be satisfied if

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\cot 2\alpha \tag{14}$$

Thus, by placing a single strain gage with α and θ are selected to satisfy Eqs. (12) and (14), we can measure the strain $\varepsilon_{x'x'}$, which in turn is related to K_I by

$$2\mu\varepsilon_{x'x'} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\kappa \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right] \quad (15)$$

According to Dally and Sanford [21], it was shown that the angles α and θ depend only on the Poisson's ratio of the specimen material.

4 Evaluation of T-stress and biaxiality parameter β

Several methods have been proposed in literature to determine the T-stress for cracked specimen. The stress difference method proposed by Yang and Ravi-Chandar [25] has been widely used. In general, the T-stress can be evaluated according to the following expressions

$$\begin{aligned} \text{For } \theta = 0^\circ \text{ or } \pm 120^\circ, \quad T &= \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ \text{For } \theta = \pm 60^\circ \text{ or } \pm 90^\circ, \quad T &= \sigma_{xx} - \sigma_{yy}/3 \\ \text{For } \theta = 0^\circ, \quad T &= \sigma_{xx} \end{aligned} \quad (16)$$

Using Eq. (7), normal strains difference ($\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$) can be written as

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) &= -2A_0r^{-1/2}(1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + 2B_0(1 + \nu) \\ &+ 2A_1r^{1/2}(1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(1 + \nu)B_1r^1 \cos \theta \end{aligned} \quad (17)$$

It should be noted that three values of θ , ($\theta = 0^\circ, \pm 120^\circ, \pm 180^\circ$) yield expressions where the dominant coefficient A_0 can be eliminated by considering the difference of the normal strains ($\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$). At the same time, the angle $\theta = \pm 180^\circ$ is not a feasible choice due to the practical difficulty. Substituting $\theta = \pm 120^\circ$ in Eq. (17) as recommended by Malesky et al. [14], we obtain the following relation for normal strain difference.

$$\frac{E}{1 + \nu}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 + \frac{3A_1r^{1/2}}{4} - A_2r \quad (18)$$

Here, to assess T-stress, we can truncate the series either at $r^{1/2}$ term or at r^0 term. Then, we obtain, respectively the following relations:

$$T = \frac{E}{1 + \nu}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 + \frac{3A_1r^{1/2}}{4} \quad (19)$$

$$T = \frac{E}{1 + \nu}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \approx 2B_0 \quad (20)$$

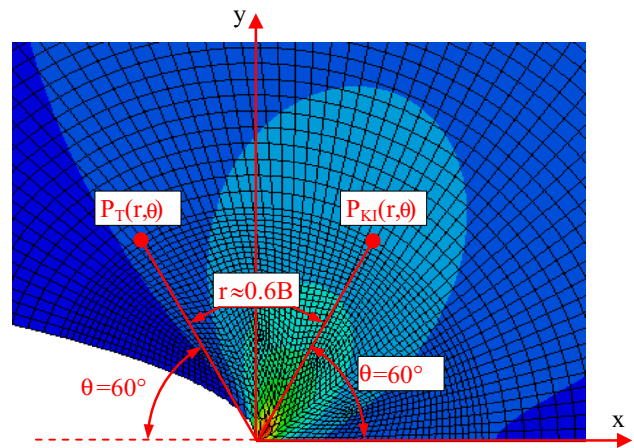


Fig. 2 Location of the virtual strain gages at the vicinity of a crack tip

It should be emphasized at this point that the strains difference values in finite dimensional samples should be measured at a distance beyond $r = 0.5B$, where B is the plate thickness to avoid crack tip 3D effects [14].

Leevers and Radon [6] introduced a biaxiality parameter β which is related to T-stress and K_I by the following equation:

$$\beta = \frac{T \sqrt{\pi a}}{K_I} \quad (21)$$

It is interesting to note that the crucial aspect of this work in comparison with other existing approaches is based on the use of the virtual strain gages for the computation of the fracture parameters (Fig. 2). Furthermore, the reason which makes this approach innovative is its application on complex configurations under static and dynamic loadings and for various materials cracking. On the other hand, this method seems to be quite simple and gives an efficient and accurate measures of the various fracture mechanics parameters.

5 Results and discussion

Two standard test specimens were examined in this work: the three-point bending specimen (TPB) (Fig. 3a) and the single edge notched tensile specimen (SENT) (Fig. 3b) under various loading conditions. A Finite element analysis using ABAQUS software [26] was employed to determine K_I and T-stress for mode I using the virtual strain gage method. Linear elastic fracture mechanics (LEFM) conditions were assumed. To predict correctly the mechanical behavior at the crack tip, special elements with an extremely refined mesh were used at the local zone near the crack tip. Noting that the same positions used for the strain

Fig. 3 Schematic illustration of **a** TPB and **b** SENT specimens

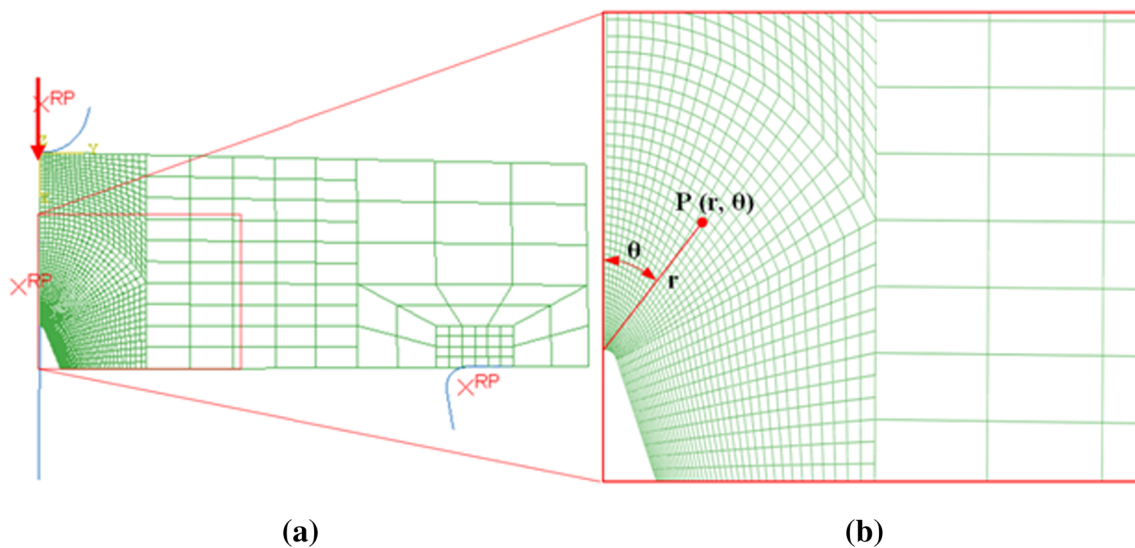
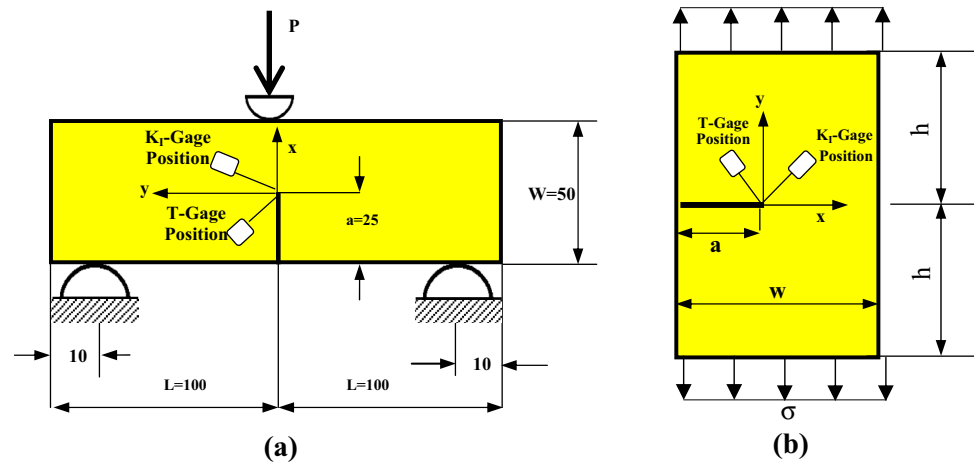


Fig. 4 Illustration of: **a** boundary conditions and typical mesh used for the half specimen. **b** Detail of the refined mesh used at the vicinity of the crack tip

gage method for the determination of K_I and T-stress have been adopted for the virtual strain gage method.

Indeed, the K_I and T-stress calculation were performed by positioning a dual-element virtual strain gages $\theta = 60^\circ$ and 120° respectively with $r = 0.63B$ as recommended by Maleski et al. [13]. The first was used for the record of the strain history for K_I determination and the second one was employed for the record of the strain history for T-stress computation. Then, these values were converted into SIF K_I and T-stress histories using Eqs. (15) and (20) respectively. The in-plane biaxiality parameter β was computed using Eq. (21). The obtained numerical results were compared to experimental findings given by Maleski et al. [13] and Swamy et al. [14], in which a description of the experimental techniques used to measure the parameters can be also found.

6 TPB specimen under impact loading

To validate the proposed approach developed in this work, the first example has been taken similar to that treated experimentally by Maleski et al. [13]. It consists of a three-point bending specimen (TPB) under impact loading, as shown in Fig. 3a. The dimensions of the specimen are: the length $2L = 200$ mm, the width $W = 50$ mm, the thickness $B = 6$ mm and the ratio $a/W = 0.2$ and 0.5 . The specimen was made in Epoxy with the following material properties [13]: Young's modulus $E = 4.37$ GPa, Poisson's ratio $\nu = 0.353$ and mass density $\rho = 1139$ kg/m³.

Since the geometry, loads and constraints for this specimen are symmetric, only half of the specimen needs to be analyzed. The mesh employed for the simulation of

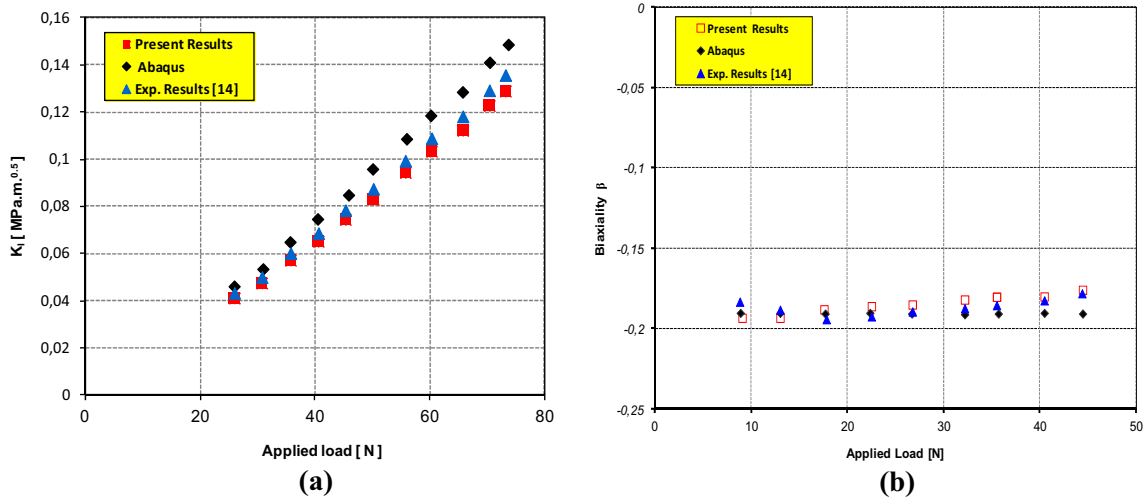


Fig. 5 Comparison between the numerical and experimental results for the evolution of **a** SIF and **b** biaxiality parameter versus the applied load

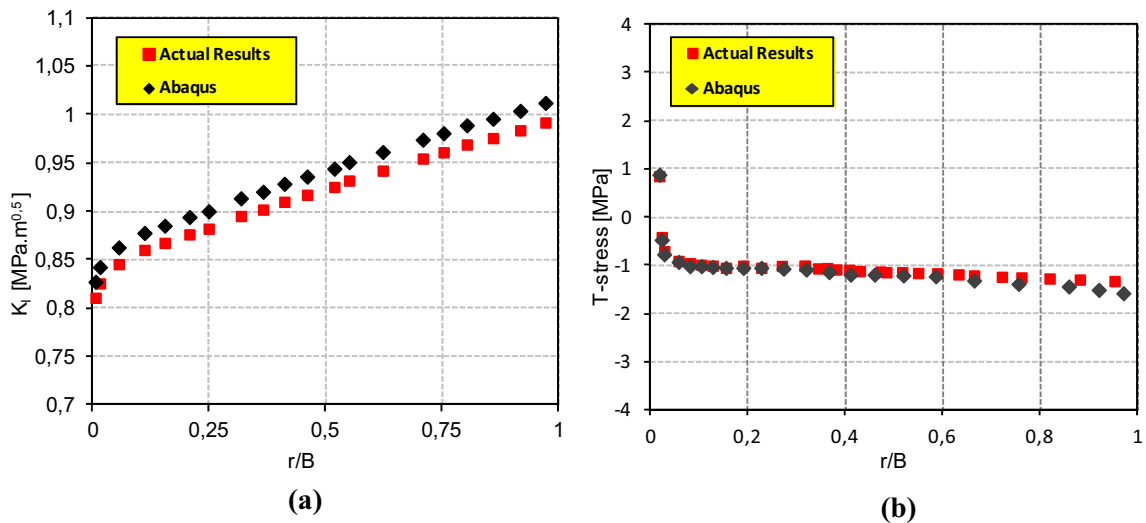


Fig. 6 Comparison between numerical and experimental results when $a/W = 0.5$ for the evolution of the **a** SIF and **b** T-stress

the TPB specimen is shown in Fig. 4a and the detail of the mesh used at the vicinity of the crack tip is shown in Fig. 4b. It is composed of 1475 elements of type Q8R with 1702 nodes. Furthermore, refine mesh is used near the crack tip and at the applied load P . The positions of the virtual strain gages are located by a radius $r = 5.5$ mm with $\theta = 60^\circ$ for the determination of K_I and $\theta = 120^\circ$ for the determination of T (see Figs. 2, 3).

The fracture parameters (SIF, T-stress and biaxiality parameter) were calculated for different loads by the conventional finite element modeling and using the virtual strain gage method. The obtained results for K_I and biaxiality parameter are illustrated in Fig. 5. It can be seen that the results obtained by the proposed approach are in good agreement with that of the experimental data given

by Malesky et al. [13]. In addition, it can be observed that the SIF increases linearly with the increase of the applied load as shown in Fig. 5a. However, the biaxiality parameter remains almost constant with respect to the increase of the applied load (Fig. 5b).

Finite elements simulations were also conducted under plane stress for dynamic loading conditions to verify the proposed method for achieving transient values of K_I and T-stress. The same finite element model shown in Fig. 4 has been used for the dynamic simulations. The model was loaded using the force history given by Malesky et al. [13] for a velocity of 1.5 m/s. The implicit time integration scheme of the Newmark method was adopted in the simulations. The results of the simulations using the virtual strain gage method were used to calculate the values of K_I and

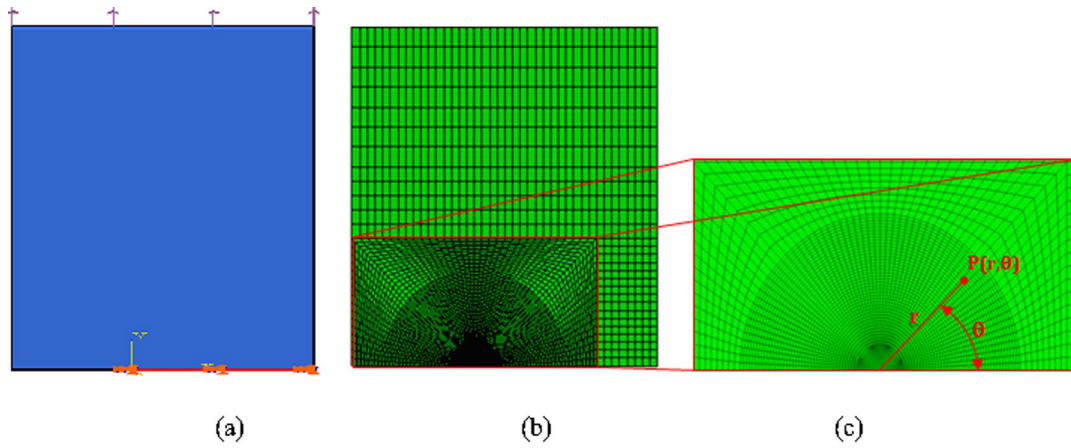


Fig. 7 Illustration of: **a** boundary conditions; **b** typical mesh used for the SENT specimen. **c** Detail of the refined mesh near the crack tip

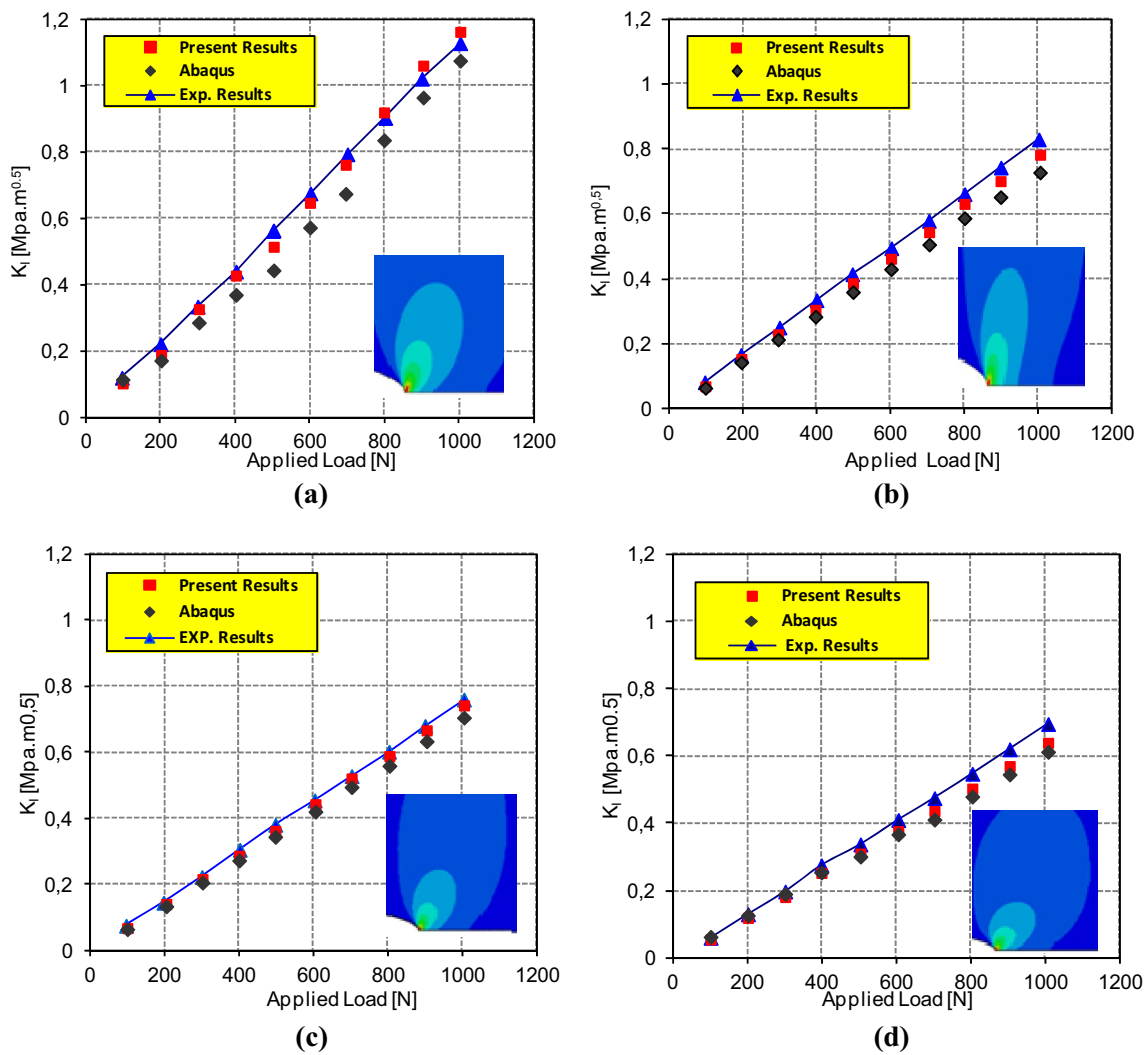


Fig. 8 Comparison between the numerical and experimental results for the evolution of the normalized values of SIF in the case of $a/W = 0.3$ and different ratios, **a** $h/W = 0.3$, **b** $h/W = 0.5$; **c** $h/W = 0.7$ and **d** $h/W = 1$

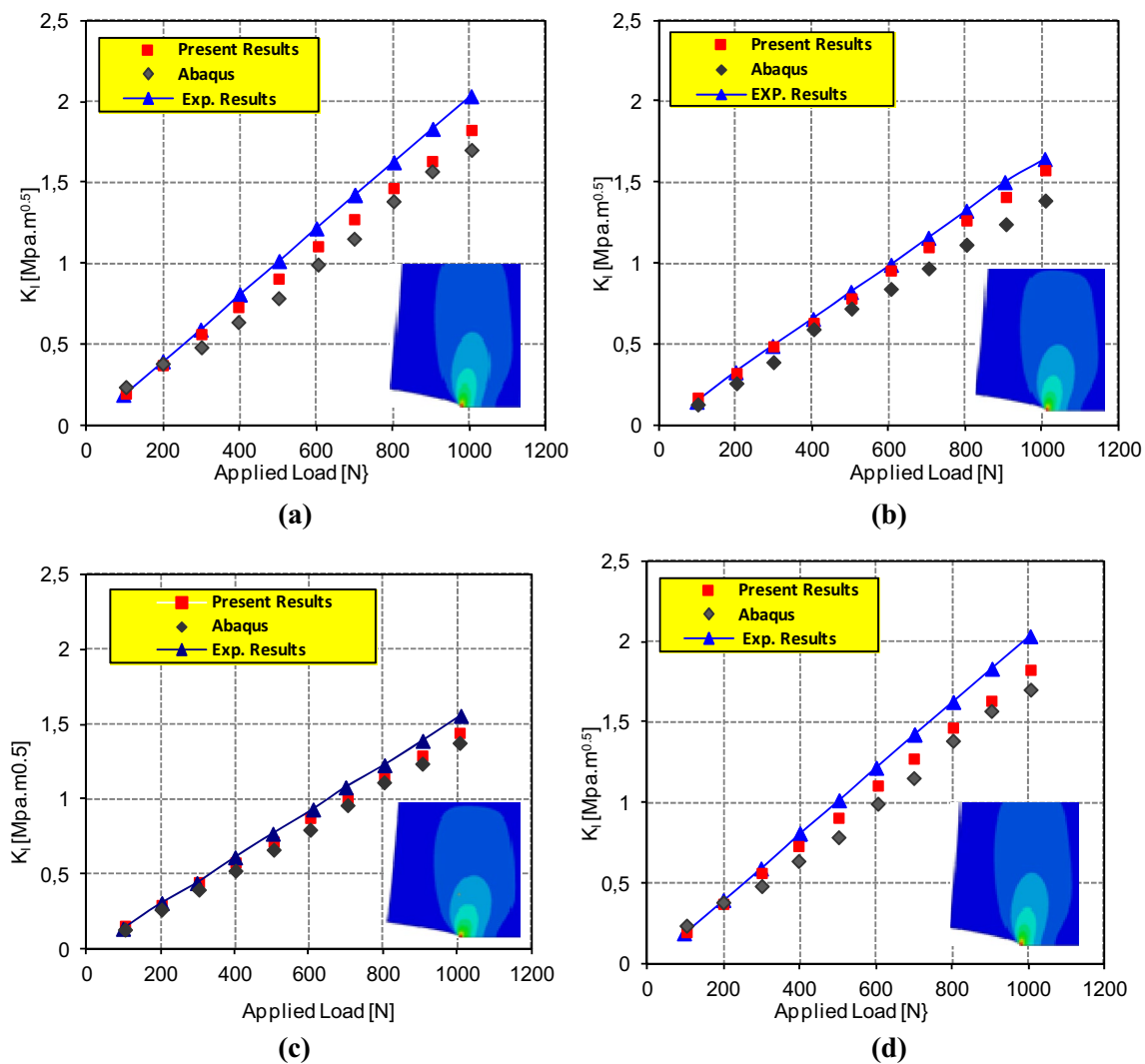


Fig. 9 Comparison between the numerical and experimental results for the evolution of the normalized values of SIF in the case of $a/W = 0.5$ and **a** $h/W = 0.3$, **b** $h/W = 0.5$, **c** $h/W = 0.7$ and **d** $h/W = 1$

T-stress over the time duration of force input. The evolution of SIF (K_I) and T-stress as a function of the radial distance r/B are depicted in Fig. 6. It can be seen that the results obtained by the proposed method are within 1.8 % for K_I and 4.5 % for T-stress compared to that given by Malesky et al. [13]. Furthermore, it can be observed that the SIF increases with the increase of the distance from the crack tip (r/B). However, T-stress decreases slightly with the increase of r/B , and a good linearity has been illustrated when $r/B > 0.1$.

7 SENT specimen subjected to uniform tensile stress

The second example addressed here, is a PMMA single edge notched tensile specimen under uniform tensile stress (Fig. 3b). The dimensions of the specimen are: the

width $W = 150$ mm, the thickness $B = 6$ mm, while the length “ a ” of the crack and the height “ h ” were varied as a function of the width as follows: $h/W = 0.3; 0.5; 0.7; \text{ and } 1.0$; $a/W = 0.3$ and 0.5 . A plane stress state was assumed. The material properties of the PMMA SENT specimen are [14]: $E = 2300$ MPa; $\nu = 0.37$; $K_{IC} = 1.9$ MPa $m^{0.5}$; $G_{IC} = 0.3\text{--}0.4$ kJ/m².

For the reason of symmetry only half of the specimen was considered for the finite element simulations (Fig. 7a). Theoretically, when the mesh was refined significant improvements were noticed in the values of SIF as has been reported by Dally and Sanford [20]. Hence, a refined mesh was adopted for the simulation as shown in Fig. 7b. It is composed of 1882 elements of type Q8R with 2341 nodes. The detail of the refined mesh near the crack tip is also shown in Fig. 7c. A focused mesh having concentric rings of elements surrounding the crack tip is used.

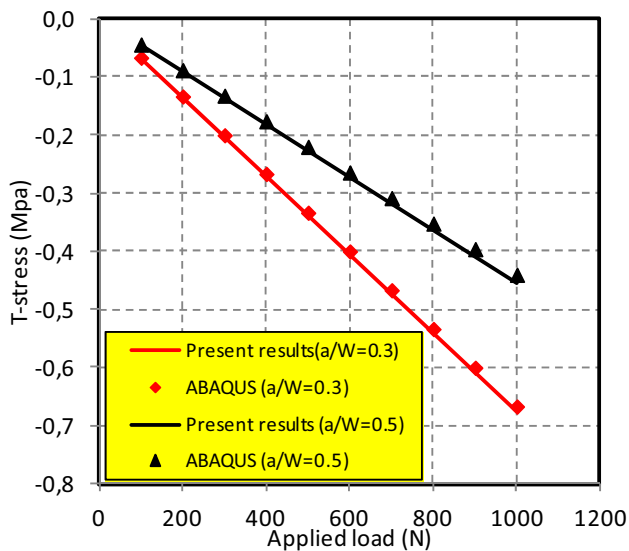


Fig. 10 Evolution history of T-stress with respect to the applied load for SENT specimen

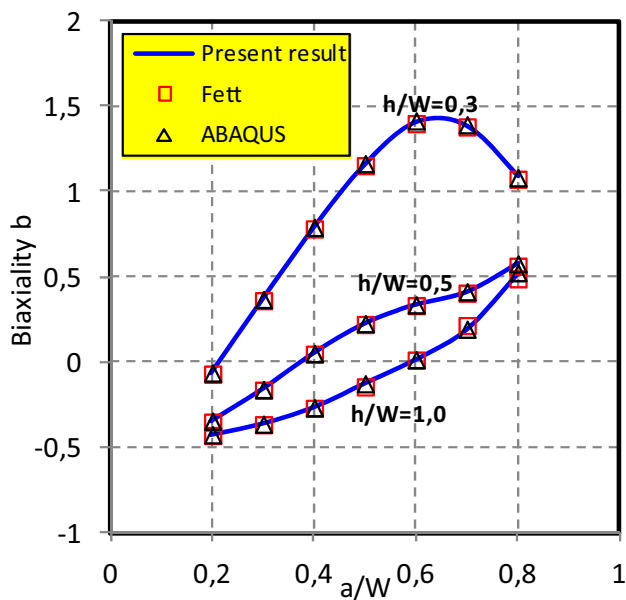


Fig. 11 Evolution of biaxiality parameter with the ratio a/W in the case of $h/W = 0.3, 0.5$ and 1.0

To make a comparison between the results obtained by the proposed method and those obtained experimentally by Swamy et al. [14], the evolutions of the normalized values of SIF as a function of the applied load in the case of $a/W = 0.3$ and 0.5 with different ratios $h/W = \{0.3, 0.5, 0.7$ and $1\}$ have been plotted in Figs. 8 and 9 respectively. The results obtained by the extrapolation method of ABAQUS have been also highlighted. It can be seen that all the results obtained by the virtual strain gage method are in accordance

with that of the extrapolation FE method and the experimental data, and consequently establishing confidence in the obtained results for the first fracture parameter (SIF) of SENT specimen. Indeed, the discrepancy between the virtual strain gage method and the experimentally determined results ranging from 2.6 to 6 %, shows that the proposed method is substantially accurate in comparison with that of the extrapolation finite element method using ABAQUS, since the errors of this latter is ranging from 4.8 to 11 % (with respect to experimental results). In addition, it can be observed that the greater the applied load increases, the SIF increases. Furthermore, it was found that the SIF increases linearly with the applied load and the values of K_I determined for $a/W = 0.3$ were consistently less than that of $a/W = 0.5$. This behavior was found to be very similar to the results obtained by Rice [2] and Larsson et al. [27].

In Fig. 10, the evolution history of T-stress with the loading are displayed for SENT specimen with $a/W = 0.3$ and 0.5 in the case of $h/W = 1.0$. It can be seen that a good agreement has been found between the results obtained by the proposed method and those obtained using Abaqus software [26]. Moreover, it can be noticed that T-stress increases with the increase of the ratio a/W .

The evolution of the biaxiality parameter as a function of the ratio a/W is shown in Fig. 11. According to this figure, a good agreement has been found between the results obtained by the proposed method and those obtained by Fett [28] or using ABAQUS software [26]. Furthermore, it can be observed that the biaxiality parameter (β) increases with the increase of the ratio a/W .

8 Conclusion

In this paper, a numerical evaluation of the fracture parameters, such as, the SIF, the T-stress and the biaxiality parameter using the virtual strain gage method was proposed. Two types of specimens (TPB and SENT) were examined to highlight the effectiveness and applicability of this numerical method. The simulations have been carried out under static for TPB and SENT specimens, and low velocity impact loading conditions on TPB specimen. To access the efficiency of the proposed method, the obtained results have been compared to the previously published experimental results and those obtained using directly ABAQUS software.

According to the obtained results a good agreement has been found between the proposed method and the experimental or extrapolation method using Abaqus software. Furthermore, it has been demonstrated that the virtual strain gage method can be effectively applied in the cases of static or dynamic conditions for cracked materials (EPOXY or PMMA) and loading conditions (Tension

or bending). The results have shown that the angles of 60° and 120° (used for experimental study) with radial distance $r = 0.6B$ (where B is the specimen thickness) are also the optimum positions for locating the virtual strain gages.

Finally, it should be noted that further experiments and numerical simulations must be carried out to vulgarize the proposed method by highlighting the effects of other parameters, such as, the geometry of the component, the material properties, the crack profile and the impact velocities.

References

- Williams ML (1957) On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech* 24:109–114
- Rice JR (1974) Limitations to the small-scale yielding approximations for crack tip plasticity. *J Mech Phys Solids* 22:17–26
- Bilby BA, Cardew GE, Goldthorpe MR, Howard IC (1986) A finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tips of stationary cracks. Size effects in fracture. Institution of Mechanical Engineers, London, pp 36–46
- Betegón C, Hancock J (1991) Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields. *J Appl Mech Trans ASME* 113:104–110
- Nevalainen MJ (1997) The effect of specimen and flaw dimensions on fracture toughness. Dissertation for the degree of Doctor of Technology, Helsinki University of Technology. Technical Research Centre, Espoo, Finland
- Leevers PS, Radon JC (1983) Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *Int J Fract* 19:311–325
- Al-Ani AM, Hancock JW (1991) J-Dominance of short cracks in tension and bending. *J Mech Phys Solids* 39(1):23–43
- Du ZZ, Hancock JW (1991) The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint. *J Mech Phys Solids* 39(4):555–567
- Sham TL (1991) The determination of the elastic T-term using higher order weight functions. *Int J Fract* 48:81–102
- Tvergaard V, Hutchinson JW (1994) Effect of T-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid. *Int J Solids Struct* 31(6):823–833
- Hancock JW, Reuter WG, Parks DM (1993) Constraint and toughness parameterized by T. In: Hackett EM, Schwalbe K-H, Dodds RH (eds) *Constraint effects in fracture*. ASTM STP 1171. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp 21–40
- Berger JR, Dally JW (1988) An over deterministic approach for measuring K_I using strain gages. *Exp Mech* 28:142–145
- Malesky MJ, Kirugulige MS, Tippur HV (2004) A method for measuring mode I crack tip constraint under static and dynamic loading conditions. *Soc Exp Mech* 44(5):522–532
- Swamy S, Srikanth MV, Murthy KS, Robi PS (2008) Determination of mode I stress intensity factors of complex configurations using strain gages. *J Mech Mater Struct* 3(7):1239–1255
- Sanford RJ (2002) *Principles of fracture mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ
- Paulino GH, Kim JH (2004) A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method. *Eng Fract Mech* 71:1907–1950
- Broberg KB (2005) A note on T-stress determination using dislocation arrays. *Int J Fract* 131(1):1–14
- Sumpter JDG (1993) *Constraint effects in fracture*, ASTM STP 1171. Philadelphia, US
- Smith DJ, Ayatollahi MR, Pavier (2001) The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 24(2):137–150
- Dally JW, Sanford RJ (1990) Measuring the stress intensity factor for propagating cracks with strain gages. *J Test Eval* 18(4):240–249
- Dally JW, Sanford RJ (1987) Strain gage methods for measuring the opening mode stress intensity factor K_I. *Exp Mech* 27:381–388
- Khelil F, Belhouari M, Benseddiq N, Talha A (2014) A numerical approach for the determination of mode I stress intensity factors in PMMA materials. *Eng Technol Appl Sci Res* 4(3):644–648
- Westergaard HM (1939) Bearing pressure and cracks. *J Appl Mech* 6:A49–A53
- Sarangi H, Murthy KSRK, Chakraborty D (2010) Radial location for strain gages for accurate measurement of mode I stress intensity factor. *Mater Des* 31:2840–2850
- Yang B, Ravi-Chandar K (1999) Evaluation of T-stress by stress difference method. *Eng Fract Mech* 64:589–605
- SIMULIA ABAQUS 6.9.3 EF1 (2010) *User's manual*, Swanson analysis systems
- Larsson SG, Carlsson AJ (1973) Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *J Mech Phys Solids* 21:263–278
- Fett T (1998) A compendium of T-stress solutions, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik and Umwelt, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6057. www.ubka.uni-karlsruhe.de, pp 1–72