

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : BELABED Zakaria

Intitulé de la thèse

## Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes

Soutenu le : 15/12/2015 Composition du jury :

M <sup>r</sup> El Abbas Adda Bedia	Pr	UDL SBA	Président
M <sup>r</sup> TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Directeur de thèse
M <sup>r</sup> AMARA Khaled	MCA	C.U de AIN TMOUCHENT	Examineur
M <sup>r</sup> BENYOUCEF Samir	MCA	UDL SBA	Examineur
M <sup>r</sup> YEGHNEM Redha	MCA	U de SAIDA	Examineur
M <sup>r</sup> AMEUR Mohammed	MCA	ENP d'ORAN	Examineur
M <sup>r</sup> HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA	U de MASCARA	Invité

Année universitaire 2015-2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

***A mon père défunt : Mustapha***

***A ma très cher mère LATIFA.***

*A ma femme, mon frère et ma sœur.*

***A mon ange Assem Loai***

# *Remerciements*

*J'exprime ma profonde reconnaissance et ma parfaite gratitude à mon encadreur*

***Professeur : Tounsi Abdelouiahid***

*Pour ses orientations et ses conseils tout au long de cette riche période de recherches, je le remercie également pour la confiance qu'il a eu en moi malgré l'éloignement.*

*Je tiens à remercier particulièrement Messieurs les membres du jury pour avoir accepté :*

***Professeur El Abbas Adda Bedia***

*De Présider la soutenance*

*Et pour m'avoir honoré par leur participation à l'examen de ce travail :*

***Dr AMARA Khaled , Dr BENYOUCEF Samir,***

***Dr YEGHNEM Redha et Dr AMEUR Mohammed***

*Pour son soutien constant et son aide qui m'a apporté tout le long de cette étude :*

***Dr Houari Mohammed Sid Ahmed***

***Mes collègues de laboratoire Matériaux et Hydrologie LMH, UDL , SBA***

***Mes collègues au centre Universitaire de Nâama***

*Et à tous ceux qui se sont intéressés à mes préoccupations et qu'ont toujours su m'encourager et réconforter.*

*Je leur exprime mes remerciements les plus cordiaux.*

**Abstract:**

**Study of the static and dynamic behaviours of non homogeneous thick plates**

In this work, an efficient and simple higher order shear and normal deformation theory is presented for functionally graded material (FGM) plates. By dividing the transverse displacement into bending, shear and thickness stretching parts, the number of unknowns and governing equations for the present theory is reduced, significantly facilitating engineering analysis.

Indeed, the number of unknown functions involved in the present theory is only five, as opposed to six or even greater numbers in the case of other shear and normal deformation theories.

The present theory accounts for both shear deformation and thickness stretching effects by a hyperbolic variation of all displacements across the thickness, and satisfies the stress-free boundary conditions on the upper and lower surfaces of the plate without requiring any shear correction factor.

Equations of motion are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions for the bending and free vibration analysis are obtained for simply supported plates.

The obtained results are compared with 3-dimensional and quasi-3-dimensional solutions and those predicted by other plate theories.

It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the bending and free vibration responses of functionally graded plates.

**Key words :** **A.** Plate; **B.** Computational modelling; Functionally graded materials , **C** Quasi-3D higher order plate theory, **D** bending response , **E** Free vibration

## Résumé:

### **Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes**

Dans ce travail, une théorie efficace et simple d'ordre supérieur de cisaillement et de déformation normale est présentée pour les plaques à gradients de propriétés. En divisant le déplacement transversal en parties de flexion, de cisaillement et de l'étirement de l'épaisseur, le nombre d'inconnus et les équations gouvernantes pour la présente théorie sont réduits, cette signification permet de faciliter l'analyse de l'ingénieur.

En effet, le nombre de fonctions inconnues impliqué dans la présente théorie est seulement cinq, tandis que six ou même plus grands nombres dans le cas d'autres théories de cisaillement et de déformation normale.

La présente théorie considère à la fois pour la déformation du cisaillement et les effets de l'étirement de l'épaisseur par une variation hyperbolique de tous les déplacements à travers l'épaisseur, et satisfait les conditions limites de la nullité des contraintes à la surface supérieure et inférieure de la plaque sans requis au facteur de correction du cisaillement.

Les équations du mouvement sont dérivées à partir du principe de Hamilton. Les solutions analytiques pour l'analyse de flexion et des vibrations libres sont obtenues pour les plaques simplement appuyées.

Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions 3-dimensionnelles et quasi-3-dimensionnelles et ceux prédisent par d'autres théories de plaques.

On peut conclure que la présente théorie n'est pas seulement exacte mais aussi simple pour prédire la réponse de la flexion et la vibration libre des plaques à gradient de propriétés.

**Mots clefs :** **A.** plaque; **B.** modélisation numérique; matériaux à gradient de propriétés **C** Théorie des plaques d'ordre supérieur Quasi-3D, **D.** comportement à flexion, **E.** vibration libre

**ملخص:****دراسة سلوك الإستاتيكي و الديناميكي للصفائح السميكة غير المتجانسة**

يقدم هذا العمل نظرية فعالة و بسيطة للقص ذات الترتيب العالي والتشوه العمودي للمواد المتدرجة الخواص . بقسمة الإزاحة العرضية إلى أجزاء الانحناء، القص وامتداد السمك، عدد المجاهل ومعادلات التحكم للنظرية المقدمة هو منخفض، مما يسهل إلى حد كبير التحليل الهندسي.

و في الواقع ، عدد المعادلات المجهولة المشاركة في النظرية الحالية هي خمسة فقط، في مقابل ستة أو أكثر من ذلك في حالة نظريات القص و التشوه العمودي الأخرى ،و النظرية الحالية تصف كلا من تشوه القص و تأثيرات تمدد السمك بتغير زاندي المقطع لجميع الإزاحات خلال السمك، ويلبي الشروط الحدية لانعدام الإجهادات على الأسطح العلوية والسفلية للصفحة من دون الحاجة إلى أي عامل تصحيح القص .و تستمد معادلات الحركة من مبدأ هاملتون .

ويتم الحصول على النتائج التحليلية لتحليل الانحناء و الاهتزازات الحرة للصفائح بسيطة المسند .حيث تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول الثلاثية-الأبعاد وشبه- ثلاثية-الأبعاد، وتلك التي استنبطت من النظريات الأخرى للصفائح.

يمكن استنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فحسب، بل أيضا بسيطة في توقع ردود الانحناء والاهتزازات الحرة للصفائح المتدرجة الخواص .

**كلمات مفتاحية:** أ صفيحة ؛ ب نمذجة عددية ؛ المواد المتدرجة الخواص ج نظرية الترتيب العالي شبه 3-الأبعاد ؛ د سلوك الانحناء؛ ه اهتزاز حر

# T able des matières

<b>Résumé</b>	i
<b>Table des Matières</b>	iv
<b>Liste des Tableaux</b>	vi
<b>Liste des Figures</b>	viii
<b>Notations</b>	ix

## **Chapitre I : Introduction Générale**

I.1) Introduction et Problématique	1
I.2) Méthodologie :	4
I.3) Organisation de la thèse :	5

## **Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés**

II.1) Introduction	6
II.2) FGM et les composites	6
II.3) commentaires et perspectives historiques:	8
II.4) Domaines d'application	9
II.5) Méthodes et techniques de mise en œuvre des matériaux à gradient de propriétés	10
II.6) Caractéristiques matérielles des FGM	11
II.7) méthodes d'Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés	12
II.7.1) Loi exponentielle E-FGM	13
II.7.2) Loi des puissances P-FGM	13
II.7.3) Schéma de Mori-Tanaka MT-FGM	14
II.8) loi de comportement matériel de l'élasticité 3D	15

## **Chapitre III : Mécanique et modèles des plaques en matériaux à gradient de propriétés**

III.1) Introduction :	20
III.2) Revue sur les théories des plaques FGM	20
III.2.1) Théorie de plaques bidimensionnelles	21
III.2.1.a) La théorie classique des plaques	21
III.2.1.b) Théorie des plaques du premier ordre	22
III.2.1.c) Théorie des plaques d'ordre supérieur	24
III.2.2) Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)	28
III.2.3) Approches quasi-tridimensionnelles	29
III.3) Conclusion	31



**Chapitre IV : Analyse statique et dynamique  
des plaques en FGM en utilisant une théorie Quasi-3D**

IV.1) Introduction :	32
IV.2) Formulation théorique	33
IV.2.1) Champ des déplacements	33
IV.2.2) Équations du mouvement	35
IV.2.2.a) Variation de l'énergie de déformation	35
IV.2.2.b) Expression du travail des efforts extérieurs	37
IV.2.2.c) Variation de l'énergie cinétique	37
IV.2.3) Résumé des relations fondamentales du mouvement	40
IV.2.4) Lois de comportement élastique	44
IV.2.5) Les équations de mouvement en termes de déplacement	47
IV.3) Solution Analytique	49
IV.4) Conclusion	51

**Chapitre V : Résultats et Discussions**

V.1) Introduction	52
V.2) caractéristiques matérielles	53
V.3) Résultats numériques	54
V.3.1) Validation en analyse statique	55
V.3.2) Validation en analyse dynamique	69
V.3.3) Validation pour le cas des plaques sandwichs	75
V.3.4) Comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle des lois des puissances	77
V.3.4.a) Comparaison pour le cas statique	78
V.3.4.b) Comparaison pour le cas dynamique:	85
V.4) Conclusion	88

**Chapitre VI : Conclusions et Recommandations**

VI.1) Introduction :	89
VI.2) Remarques et conclusions	90
VI.3) Recommandations pour des travaux futurs	91

<b>Références Bibliographiques</b>	92
------------------------------------	----

<b>ANNEXE 1 : Mise en œuvre du programme de calcul</b>	101
--	-----

# Liste des Tableaux

N°	Titre	Page
V.1	Caractéristiques des matériaux utilisés	54
V.2	Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal	55
V.3	Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal	56
V.4	Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement (b/a) avec a/h=2	57
V.5	Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement (b/a) avec a/h=10	59
V.6	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_y$ d'une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement (b/a) avec a/h=10	61
V.7	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_y$ d'une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement (b/a) avec a/h=4	62
V.8	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_y$ d'une plaque carrée en FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement (b/a) avec a/h=4	63
V.9	l'effet de la variation du matériau à travers l'épaisseur sur la flèche et les contraintes d'une plaque en FGM	65
V.10	les fréquences fondamentales $\hat{\omega} = \omega h\sqrt{\rho/G}$ pour une plaque isotrope	69
V.11	Comparaison des cinq premières fréquences propres d'une plaque carrée en FGM	71
V.12	Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal	72
V.13	Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal	73
V.14	Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal	76
V.15	Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	79
		80

<b>V.16</b>	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_x$ d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>81</b>
<b>V.17</b>	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_y$ d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>83</b>
<b>V.18</b>	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_x$ d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>84</b>
<b>V.19</b>	Comparaison de la contrainte adimensionnelle $\sigma_y$ d'une plaque carrée en FG sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>85</b>
<b>V.20</b>	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\omega$ d'une plaque carrée en FG avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>86</b>
<b>V.21</b>	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\omega$ d'une plaque carrée en FG avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et PFGM	<b>87</b>

# Liste des Figures

N°	Titre	Page
<b>II.1</b>	les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés	<b>9</b>
<b>II.2</b>	techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	<b>10</b>
<b>II.3</b>	géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés	<b>12</b>
<b>II.4</b>	distribution de module de Young à travers l'épaisseur de E-FGM	<b>12</b>
<b>II.5</b>	distribution de module de Young à travers l'épaisseur de P-FGM	<b>13</b>
<b>II.6</b>	distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGM	<b>14</b>
<b>II.7</b>	Définition des matériaux isotropes et anisotropes	<b>15</b>
<b>II.8</b>	Les composantes de contraintes et de déformations dans le système des Coordonnées Cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGM	<b>15</b> <b>20</b>
<b>III.1</b>	Cinématique de Love-Kirchhoff	<b>22</b>
<b>III.2</b>	Cinématique de Reissner-Mindlin	<b>23</b>
<b>III.3</b>	Cinématique de l'ordre supérieur.	<b>27</b>
<b>III.4</b>	Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur	<b>43</b>
<b>IV.1</b>	Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée	<b>68</b>
<b>V.1</b>	Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques carrées en FGM type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	<b>74</b>
<b>V.2</b>	Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice des lois des puissances $k$ pour des plaques carrées en FGM type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $a/h = 5$ ).	<b>74</b>
<b>V.3</b>	Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de rapport de l'épaisseur $a/h$ pour des plaques carrées en FGM type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	<b>74</b>
<b>V.4</b>	Description géométrique d'une plaque sandwich en FGM	<b>75</b>

# Notations

## Symboles :

1,2, 3 : les axes des coordonnées locales

$\int$  : Intégrale

$[]$  : Matrice

$\{ \}$  : Vecteur

df: dérivée de la fonction f

$f_{,x}$  : dérivée de la fonction f par rapport à x

$\sum$  : somme

3D : tridimensionnelle

2D : bidimensionnelle

## Minuscules romaines :

$f(z)$  : la fonction de cisaillement

$g(z)$  : dérivée de la fonction de cisaillement

x ,y,z : les axes de coordonnées cartésiennes

a, b : dimensions de la plaque

h : épaisseur de la plaque

k : l'indice de la variation matériel

u,v,w : composantes de déplacement

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  : Composantes des dérivées de déplacement par rapport le temps

$w_b$  : composante de déplacement de flexion

$w_s$  : composante de déplacement de cisaillement

q : charge répartie

t : temps

$k^b$  : la courbure due à la flexion

$k^s$  : la courbure due au cisaillement

$d_{ij}$ ,  $d_{ji}$  et  $d_{ijm}$  les opérateurs différentiels

**Majuscules romaines :**

FGM : en anglais « Functionally Graded Materials ».

P.V.D : en anglais « Powder Vapor Deposition »

C.V.D : en anglais « Chemical Vapor Deposition »

S.H.S : en anglais « Self-propagating High-temperature Synthesis »

$C_{ij}$  : Matrice élastique de Houke

U : énergie de déformation

V : travail des efforts extérieurs

K : énergie cinétique

$E(z)$  : Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de (z)

$E_0$  : Module de Young de la face homogène.

$E_c$  : Module de Young de la céramique.

$E_m$  : Module de Young du Métal.

$V_c$  : Fraction volumique de la céramique.

$G(z)$  : Module de Cisaillement à travers l'épaisseur en fonction de (z)

A : l'aire de la plaque.

C: contour de la plaque

$N_x, N_y, N_{xy}, N_z$ : Efforts normaux dans la plaque

$M_x, M_y, M_{xy}$  : Moments de flexion dans la plaque

$M_x, M_y, M_{xy}$  : Moments de flexion dans la plaque

$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$  : Moments supplémentaires dus à la flexion

$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$  : Moments supplémentaires dus au cisaillement

$S_{xz}, S_{yz}$  : Efforts tranchants dans la plaque

$A, B, D, D^s, B^s, H^s, A^s$ : les matrices de rigidités de la membrane, couplage membrane/flexion, flexion et de cisaillement.

$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  : les inerties massiques

$a_{ij}$  : coefficients de la matrice de rigidité

$m_{ij}$  : coefficient de la matrice masse

**Minuscules grecques**

$\sigma$  : Contraintes

$\varepsilon$  : Déformations

$\nu$  : Coefficient de Poisson

$\mu(z), \lambda(z)$  : Coefficients de Lamé.

$\varphi_x, \varphi_y$  : rotations d'une normale transversale

$\varphi_z$  : déformation normale

$\rho(z)$  : la masse volumique à travers l'épaisseur en fonction de  $(z)$ .

$\theta_1, \theta_2$  : composantes de rotation autour les axes x et y respectivement

$\mathfrak{G}_{xz}, \mathfrak{G}_{yz}$  : les déformations en plan .

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  : contraintes de cisaillement en plan

$\partial$  : dérivée partielle

$\delta$  : quantité virtuel

$\omega, \beta$  : fréquences propres

**Majuscules grecques :**

$\Psi(z)$  : fonction de cisaillement (Hyperbolique)

# Chapitre I

## Introduction générale

### *1.1) Introduction et problématique:*

Depuis longtemps, le développement durable de notre civilisation nous offre des stratégies l'utilisation des matériaux innovants. Selon les besoins de la récente technologie, tenant en compte l'évolution de l'industrie avec toutes ses spécialités et les recherches scientifiques expérimentales sur ce sujet. Une nouvelle classe des matériaux apparaît sous le nom « matériaux composites » qui offrent un grand challenge vis-à-vis les matériaux classiques. L'emploi des matériaux classiques ne satisfait pas les inévitabilités de la récente technologie avec toutes ses disciplines à cause de leurs inconvénients balancés devant leurs avantages offertes. Pour cela cette nouvelle classe des matériaux réserve un axe de recherche important dans le domaine de la technologie ; dans les constructions aéronautiques, aérospatiales, navales, ferroviaires, nucléaires et les matériaux innovants en génie civil, etc. L'avantage recherché de ce type de matériaux est de présenter leurs performances, leurs méthodes de fabrication, leurs facilités de mise en forme et leurs compatibilités avec l'environnement.

Les structures en plaque sont très répandues dans les milieux naturels et les réalisations industrielles les plus diverses, la modélisation de ce type de structures devient l'intérêt principal de plusieurs chercheurs, pour décrire leur comportement réel et la mise en œuvre des techniques adéquates capables de résoudre les problèmes rencontrés vis-à-vis de l'impact environnemental (statique, dynamique, thermique, couplages... etc.)

Alors, l'extension au cas des plaques en matériaux composites est nécessaire, d'où cette nouvelle classe se trouve dans plusieurs configurations matérielles selon le constructeur et les considérations imposées. Nous désignons en cas particulier, les plaques laminées ou les stratifiés



et les plaques sandwichs, ce type de plaques peuvent toutefois présenter des avantages supérieurs contre les matériaux classiques, ces avantages sont caractérisés par leurs ratios résistance — poids optimaux, bonne résistance à la corrosion, leurs performances mécaniques et thermiques, ténacité élevée et une grande légèreté. Ces avantages jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées.

L'importance technologique des plaques en matériaux composites (notamment les stratifiés et les sandwichs) relève à développer des outils de l'analyse très sophistiqués par des méthodes rigoureuses et précises pour lesquelles nous renvoyons vers les littératures spécialisées, sur diverses méthodes (analytiques ou/et numériques) et les types des problèmes analysés.

L'analyse du comportement des plaques en matériaux composites est basée sur trois aspects fondamentaux :

- Le comportement matériel,
- La mécanique des plaques,
- La nature de problème traité.

Le premier aspect c'est l'aspect le plus significatif, car il est consacré à améliorer d'une façon fiable et précise les méthodes de détermination des propriétés et des caractéristiques matérielles réservées aux plaques composites, en particulier dans leur comportement vibratoire. Pour obtenir ces paramètres, dans les cas des plaques en matériaux composites, de nombreux travaux ont les considérés comme des plaques en une seule couche.

Un deuxième aspect fait appel à l'ensemble des théories et des techniques analysant ce type de structures, avec le progrès technologique, ces théories avaient apporté un développement concret dans le domaine de la modélisation depuis les années 60. À partir d'une bibliothèque volumineuse et les résultats preuves, nous constatons clairement l'évolution de ces théories, et ça nous permet de saisir le comportement correct et le fonctionnement précis des plaques composites. Afin d'assurer un dimensionnement correct de cette classe des structures correspondant aux conditions imposées.

Le troisième aspect consiste à déterminer le milieu où la structure se trouve. Pour une modélisation correcte, il faut savoir la nature et les divers types de sollicitation imposée, afin d'étudier la réponse de la structure. La compréhension de la nature de problème traité permet d'obtenir des résultats à une précision très convenable et l'évaluation correcte des risques liés

aux problèmes d'ingénierie ainsi que leurs conséquences sur la réponse globale ou/et locale de la structure.

Des contributions cruciales ont fait l'objet de nombreux travaux, elles sont bien maîtrisées dans le cas des matériaux isotropes étendus vers l'application aux matériaux composites, dans cette optique, et d'une vue globale, ces plaques (les stratifiés et les plaques sandwichs) sont considérés comme des éléments globalement homogénéisés même pour les codes de calcul commerciaux, ils sont basés sur les approches d'homogénéisation, car elles assurent un bon compromis entre la précision et le coût de calcul, évidemment, il est très clair que la simulation de ce type de plaque, en les analysant couche par couche selon leur arrangement structurel, conduit à un large système des équations ainsi les degrés de liberté liés de ces équations qui procèdent des difficultés d'implémentation numérique, néanmoins, elle présente un outil performant dans l'analyse locale surtout dans le cas d'étude de l'endommagement et le délaminage. Dans ces cas, la modélisation et la simulation 3D sont indispensables dans les cas des plaques épaisses ou avec forte épaisseur, où l'effet de cisaillement transversal est important.

Un premier inconvénient de cette classe des matériaux est la concentration des contraintes résiduelles interlaminaires et les contraintes de cisaillement transversal sont discontinues aux interfaces dues à la discontinuité des paramètres matériels à travers l'épaisseur qui conduisent au délaminage ou la rupture, le deuxième problème posé, dans des cas particuliers, les stratifiés ou les plaques sandwichs (exemple : nid d'abeilles) possèdent une singularité matérielle telle que le coefficient de Poisson est négatif liée à la forme géométrique ou l'empilement des couches, cette tendance reconnaît comme des « matériaux rétractables » ou « matériaux à coefficient de Poisson négatif ».

Dans l'analyse dynamique des plaques composites, la détermination des fréquences est une étape très importante pour une bonne évaluation de phénomène de la résonance, cette dernière conduit directement à la ruine de la plaque. En effet, il faut recourir aux essais expérimentaux pour déterminer la masse volumique exacte à celle déterminée théoriquement pour construire la matrice masse, où par l'application d'une théorie adéquate (nous trouvons plusieurs contributions qui traitent les problèmes dynamiques à haute exactitude, mais avec une complexité soit avec la résolution analytique ou numérique) permet de prédire correctement le champ cinématique ou/et de contraintes, pour une simulation réelle d'un problème dynamique (cas de l'analyse dynamique rapide, l'explosion et le choc).

Finalement, l'analyse et la conception des plaques en matériaux composites (les stratifiés ou les sandwichs) exigent la bonne connaissance de la loi de comportement matériel des matériaux anisotropes, les théories structurelles adéquates et les critères de rupture avec/sans délaminage.

Une nouvelle classe de matériaux était proposée par des chercheurs japonais [Koi1993] permet de diminuer la concentration des contraintes (mécanique ou/et thermique). Cette classe de matériaux dite matériaux à gradient de propriétés « Functionally Graded Materials » (FGMs). FGMs sont une nouvelle classe de matériaux composites qui présentent une variation continue de propriétés matériels à travers l'épaisseur, d'une manière à éliminer la concentration des contraintes généralement rencontrée dans les composites stratifiés. Un matériau en FGM est une synthèse d'une combinaison d'une céramique avec un métal. Ces matériaux sont souvent isotropes, mais non homogènes. La raison de l'intérêt soutenu dans FGMs est la possibilité de réaliser de certains types des structures capables de s'adapter aux conditions de service. La progression dans l'application des FGMs nécessite des modèles mathématiques exacts pour envisager leurs réponses.

## **I.2) Méthodologie :**

L'objectif de cette étude doctorale est de présenter une nouvelle théorie d'ordre supérieur permettant d'analyser les plaques épaisses en FGM avec une haute précision, en analyse statique et dynamique (vibration propre), par contre aux autres théories d'ordre supérieur, cette théorie possède deux avantages principaux :

Le premier avantage, cette théorie offre une combinaison entre l'élasticité tridimensionnelle et les théories des plaques bidimensionnelles, de tel sort, nous présentons l'effet de l'étirement de l'épaisseur dit « stretching effect ».

Le deuxième, cette théorie n'utilise pas les facteurs de correction de cisaillement, les inconnues essentielles de cette théorie sont cinq alors d'autres théories d'ordre supérieur possèdent un nombre élevé des inconnues (selon l'approche adoptée) qui conduisent à un système d'équations important et leurs résolutions sera difficile. Cet avantage permet d'offrir une formulation théorique simple, fiable et robuste, en analyse statique et dynamique.

À la fin, nous présentons les résultats obtenus avec quelques théories quasi tridimensionnelles ou/et tridimensionnelles exactes choisies dans la littérature pour examiner la performance de notre théorie pour les problèmes statiques et dynamiques (vibration libre). Surtout pour leurs applications dans le domaine de l'aéronautique et nucléaire où la précision des résultats est cruciale à cause de la sécurité, mais pour des raisons de poids minimal.

### **I.3) Organisation de la thèse :**

Cette thèse est organisée en cinq (05) chapitres :

Dans **le deuxième chapitre**, nous présentons une rapide revue sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs historiques, leurs évolutions et les domaines d'utilisation, ensuite une synthèse bibliographique donne un aperçu général des méthodes de la détermination de leurs caractéristiques mécaniques, basant sur les aspects fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes

**Le chapitre trois** concerne l'état de l'art sur les différentes théories étendues à l'analyse des plaques en FGM et leurs modèles, une lecture critique de leurs principes de base et leurs hypothèses sont aussi discutés. On trouve également une présentation détaillée des théories d'ordre supérieur et leurs raffinements. Bien évidemment, le nombre de variables dépend de la théorie adaptée, ce qui augmente considérablement le taux de calculs. Une source de nombreux travaux récents et complémentaires introduisant l'effet de la déformation normale est présentée à la fin de ce chapitre.

Une formulation d'une nouvelle théorie est présentée dans **le chapitre quatre** où nous détaillons le passage de la théorie d'ordre supérieur à quatre variables des plaques en FGM épaisses vers un modèle quasi-tridimensionnel à cinq variables en introduisant l'effet de l'éirement de l'épaisseur, dédiée pour l'analyse statique et dynamique (vibration libre) des plaques épaisses en FGM.

**Le chapitre cinq** est réservé à la validation et l'évaluation de notre modèle développé dans cette étude, et la comparaison avec les résultats numériques obtenus par le groupe de tests de validation obtenus par des récents travaux pour plusieurs configurations de plaques en FGM, en analyse statique et dynamique. Dans un second temps, une étude paramétrique basée sur l'étude des plusieurs facteurs est présentée et discutée.

**Le chapitre six** résume les différentes conclusions obtenues et les recommandations pour des travaux futurs.

# Chapitre II

## Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

### II.1) Introduction :

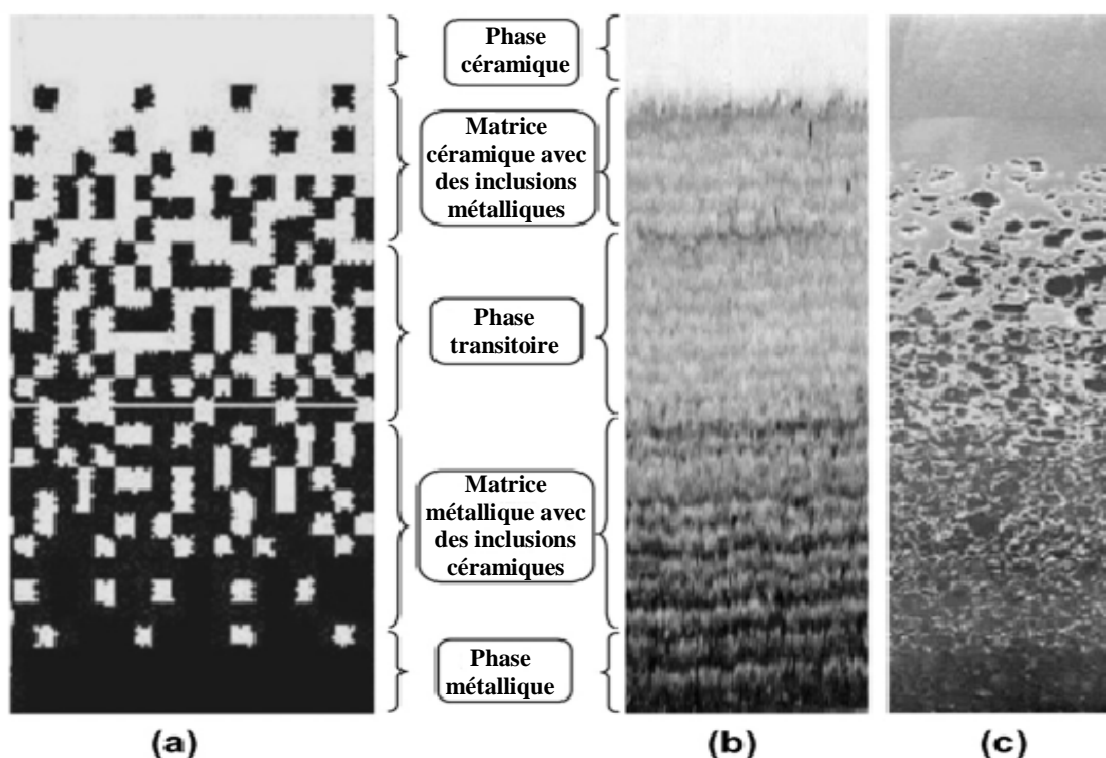
La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants, caractérisés par les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, Les avancées industrielles mènent à l'apparition d'une nouvelle classe des matériaux dits « matériaux composites ». De plus, pour obtenir des matériaux spécifiques propices, les chercheurs et les industriels ont contribué à l'introduction d'une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches.

### II.2) FGMs et les composites

En général, Les matériaux à gradient de propriétés ou dits « Functionally graded materials », sont des matériaux composites constitués de deux différents matériaux de base, céramique et métal, dans lesquelles leurs propriétés mécaniques et thermiques sont variées d'une façon continuée, quelconque et sans interruption dans l'épaisseur du matériau. Cette variation est atteinte par les fractions volumiques en fonction de ces deux composantes, afin de former un matériau dense et homogène dans l'épaisseur, cette complétant permet d'aboutir

à un matériau dont l'ensemble des performances techniques est supérieur à la performance de ces composantes prises séparément. Dans cet onglet et face aux problèmes liés aux matériaux classiques tels que le vieillissement, la corrosion, l'exposition à la haute température et les phénomènes de dégradation, on considère les matériaux à gradient de propriétés comme des matériaux optimaux dans l'environnement dans lesquels sont placés.

Les matériaux à gradient de propriétés sont considérés comme une nouvelle classe améliorée des matériaux composites, les multicouches et les stratifiés ont des caractéristiques discrètes à travers les interfaces entre les plis constituants, par conséquent, leurs composants (fibres et matrice) sont plus exposés au délaminage/rupture dû au chargement thermique/mécanique dans les conditions extrêmes car ils possèdent des différents paramètres tels que le coefficient de dilatation thermique, le coefficient de Poisson et le module de Young discontinus à travers l'épaisseur, en plus de ça, la présence des contraintes résiduelles et intermalinaires (concentrations des contraintes) entre les plis contribue à la propagation des fissures qui conduisent à l'endommagement des multicouches ou des stratifiés. Nous pouvons résoudre ou réduire ces problèmes par une variation continue de leurs matériaux constituants à travers l'épaisseur, cette graduation permet d'éliminer la concentration des contraintes, de réduire les contraintes thermiques résiduelles et de résister contre les extrêmes conditions de service.



**Fig. II.1:** schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal [Jha2013].

### II.3) Commentaires et perspectives historiques :

Les matériaux à gradient de propriétés existent dans la nature et dans les différentes configurations. Nous citons à titre d'exemple le bois, le bambou, les os et les dents. Avec le progrès de l'industrie, cette classe des matériaux est élaborée par un groupe de chercheurs japonais à Sendai, Tokyo, notamment Dr Niino et al dans le laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 [Koi1993], le but été de développer des matériaux qui résistent à haute température, par une combinaison variée à travers l'épaisseur des matériaux, une face métallique arrive à l'autre face céramique, ils ont les utilisé comme une barrière thermique dans les structures spatiales et aéronautiques où elles sont placées dans un environnement thermique extrême.

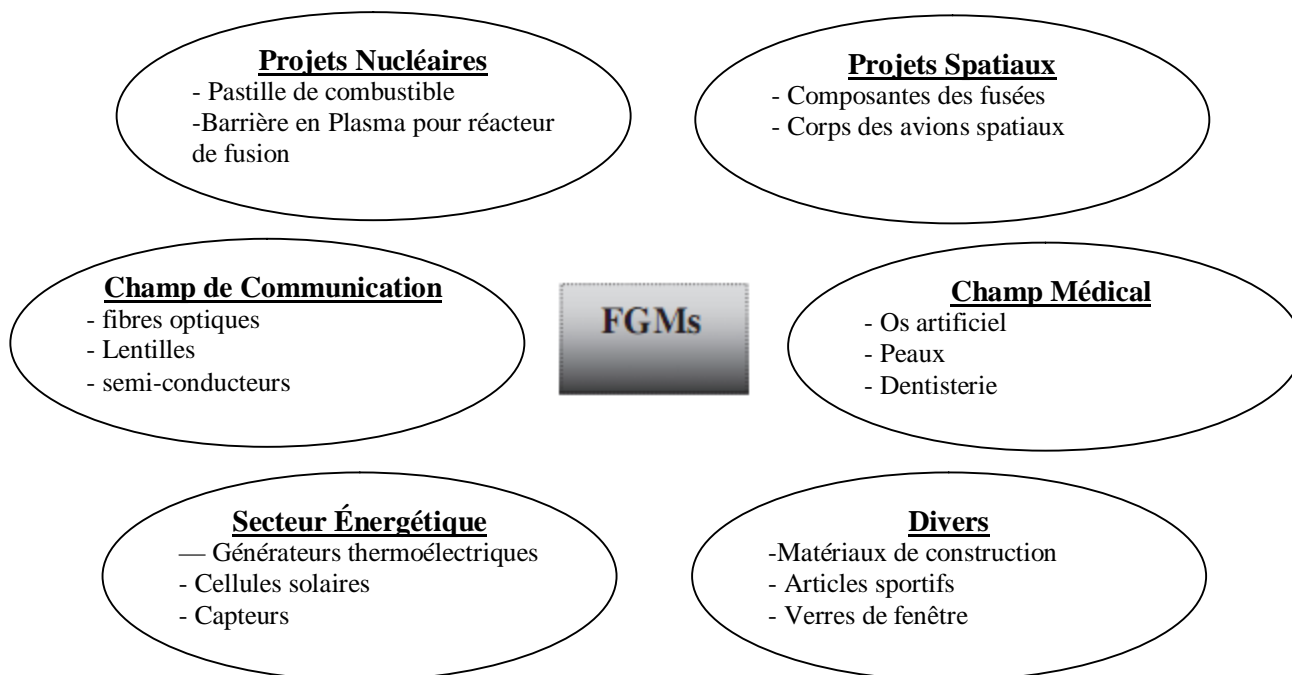
Dans la fin des années 80 et début des années 90, l'état Japonais a lancé des programmes de recherche sur ces matériaux sous titre : « *Fundamental Study on the Relaxation of Thermal Stress for High Temperature Materials by the Tailoring of Graded Structures* » avec un budget important, sous la direction de l'agence nationale des sciences et de la technologie. Leurs objectifs été le développement des matériaux à gradient de propriétés sous différentes architectures et configurations pour résister vis-à-vis des environnements à haute température, telle que les réacteurs de fusion, le lanceur des fusées et les structures aéronautiques, ensuite et en collaboration avec plusieurs laboratoires de recherches et universités, beaucoup de colloques et des séminaires internationaux ont été organisés dans le but de discuter les avantages, les techniques de la mise en œuvres, l'extension vers d'autres domaines d'applications et la modélisation des matériaux à gradient de propriétés. [Kiy 2001]

Dans le second temps, au début des années 90 ; après une évolution rapide de cette classe des matériaux, nombreux travaux citent les différentes techniques d'élaborer les FGMs en utilisant des configurations compatibles, les matériaux souvent utilisés sont : les alliages de magnésium, aluminium, cuivre, titane, tungstène, acier, etc...., et les céramiques d'une structure avancée comme : zircon, alumine, silicium-carbure et tungstène-carbure. Le champ d'application de ces matériaux est élargi et tendu vers plusieurs domaines d'industrie notamment le domaine énergétique où plusieurs programmes de recherches ont été lancé sous le nom « Research on energy conversion materials with functionally gradient structure ». [Kiy 2001].

À partir de l'année 2000, une bibliothèque volumineuse est réservée aux nouveaux processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés ainsi leurs domaines d'application, et le plus important, leurs modélisations théoriques et numériques. Tout ça est discuté à l'échelle technologique très avancée [Kiy2001]. Pour des informations supplémentaires, les ouvrages de [Kiy 2001] et [Miya1997] citent explicitement l'évolution historique des matériaux à gradient de propriétés.

#### II.4) Domaines d'application

Les matériaux à gradient de propriétés offrent des caractéristiques performantes pour plusieurs utilisations dans l'industrie et la technologie qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGMs présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. En comparaison aux matériaux classiques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier. Dans des cas de service, le gradient de température peut être important. L'utilisation des matériaux FGMs (céramique-métal) est sans aucun doute la solution adéquate ; d'une part, pour éliminer la concentration des contraintes thermiques, et l'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que : l'isolation thermique et la hygrothermique dans le matériau. La figure II.1 illustre les différents domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés selon [Jha2013].



**Fig. II.2:** les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés.



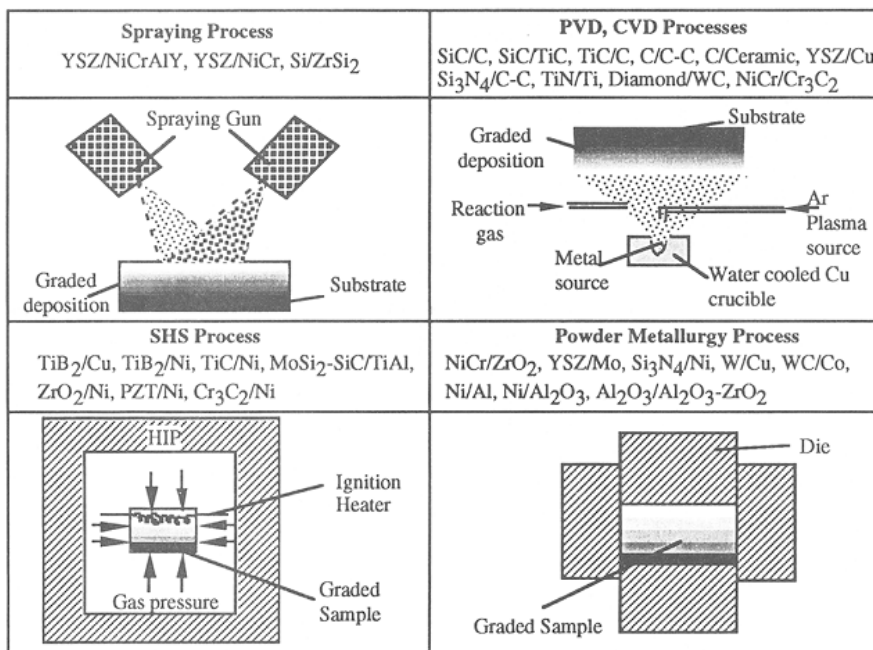
**II.5) Méthodes et techniques de mise en œuvre des matériaux à gradient de propriétés**

Comme décrit précédemment, un matériau à gradient de propriétés est caractérisé par la variation continue de leurs propriétés à travers l'épaisseur du matériau. En générale , les constitutions de base d'un FGM sont : les céramiques et les métaux. Alors l'élaboration d'un matériau dense et gradué à partir de ces deux matériaux dépend des techniques et les méthodes de fabrication.

Une qualité idéale pour élaborer un FGM nécessite une technologie avancée, l'autre part de concept des FGMs est basée sur le développement des processus de fabrication. Plusieurs chercheurs ont contribué des techniques plus avancées depuis la naissance de cette classe des matériaux [Jha2013], [Kieb2003] , dans la suite, nous citons la plupart des méthodes de la mise en œuvre des FGMs :

- 1) Technique de dépôt par évaporation (chimique ou électrique),
- 2) Métallurgie des poudres,
- 3) Méthode au centrifuge,
- 4) Méthode de fabrication solide libre,
- 5) Projection au plasma,
- 6) synthèse de Frittage à haute température,
- 7) Méthode de placage à laser.

Pour plus d'informations, Kieback et al [Kieb2003] font une synthèse détaillée sur les techniques et les méthodes d'élaborations des matériaux à gradient de propriétés.



**Fig. II.3:** techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.

## II.6) Caractéristiques matérielles des FGMs

Le choix des composantes de base d'un matériau à gradient de propriétés, est adapté en fonction des propriétés physiques de chaque constituant. Les FGMs sont communément constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal.

La majeure partie des éléments chimiques dans le tableau de Mandeliev sont les métaux. d'une façon générale, les métaux procèdent plusieurs avantages, sont ordinairement très bons conducteurs de la chaleur et de l'électricité, ils sont plus souvent durs, rigides et déformables plastiquement. Un nombre important procèdent une température de fusion très élevée. Les métaux plus communément utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Les céramiques résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr ...) avec des éléments non métalliques dont le plus courant est l'Oxygène. Elles sont utilisées typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.). Ils sont caractérisés généralement par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées. Les céramiques sont en général, des matériaux très durs et elles sont largement utilisées comme abrasifs.

Les céramiques ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques sont importants.

## II.7) Méthodes d'Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux à gradient de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes ou non homogènes à cause de leurs structures microscopiques ou/et macroscopiques. Dans le premier temps, nous allons présenter les différents modèles d'homogénéisation permettant de prédire le comportement équivalent d'un matériau à gradient de propriétés, et de déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser les structures en FGMs comme des structures homogènes à l'échelle macroscopique.

D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques :

- a) techniques d'homogénéisation analytiques,
- b) techniques d'homogénéisation numériques.

La première classe s'agit de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau en FGMs utilisant des modèles mathématiques, ces modèles permettent d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases constituant le matériau hétérogène.

Les modèles analytiques sont basés sur le choix d'un volume élémentaire représentatif pour prédire correctement les propriétés physiques effectives.

Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les propriétés matériels et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de Siboni et al. [Sib1991] et de Bary et al [Bar2009]

Dans notre cas d'étude, les méthodes analytiques d'homogénéisation sont adoptées. Nous utilisons les méthodes les plus récentes dans le cadre d'étudier le comportement mécanique des matériaux en FGMs.

Une présentation détaillée faite par A.H. Akbarzadeh et al [Akbar2015] pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGMs

Dans le problème qui nous intéresse, nous utilisons les trois méthodes d'homogénéisation employées dans la plupart des récents travaux, établis pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques en FGMs. Nous citons pour évaluer le module d'Young  $E(z)$  les méthodes suivantes :

- 1) loi exponentielle ;
- 2) loi des puissances;
- 3) Schéma de Mori-Tanaka.



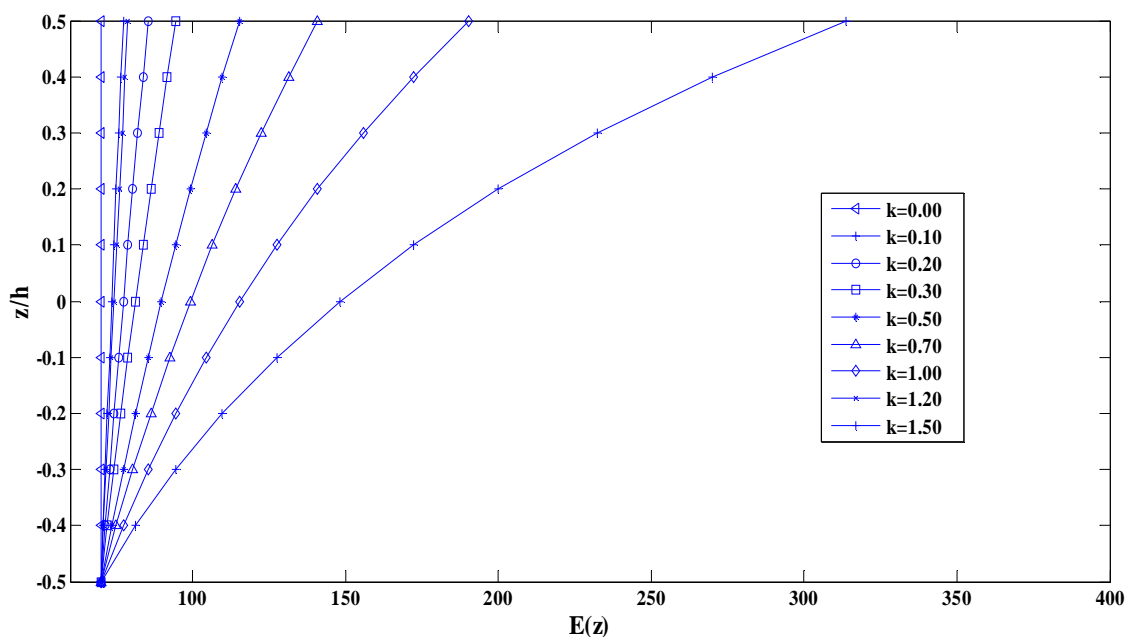
**Fig. II.4:** géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés.

**II.7.1) Loi exponentielle E-FGMs :**

Dans cette méthode, la fraction volumique est donnée sous forme d'une fonction exponentielle à travers l'épaisseur :

$$E(z) = E_0 e^{k(z/h+1/2)} \tag{II.1}$$

D'où  $E_0$  présente le module d'Young de la face homogène de la plaque, et « k » c'est l'indice de la variation matérielle à travers l'épaisseur de la plaque. Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur [Akbar2015].



**Fig. II.5:** distribution de module de Young à travers l'épaisseur de E-FGMs

**II.7.2) Loi des puissances P-FGMs :**

La loi des puissances est souvent introduite par plusieurs chercheurs pour évaluer le module d'Young, dans les cas statiques ou dynamiques, elle est utilisée pour estimer le module d'Young des plaques minces, modérément épaisses et épaisses [Red2000]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^k \tag{II.2}$$

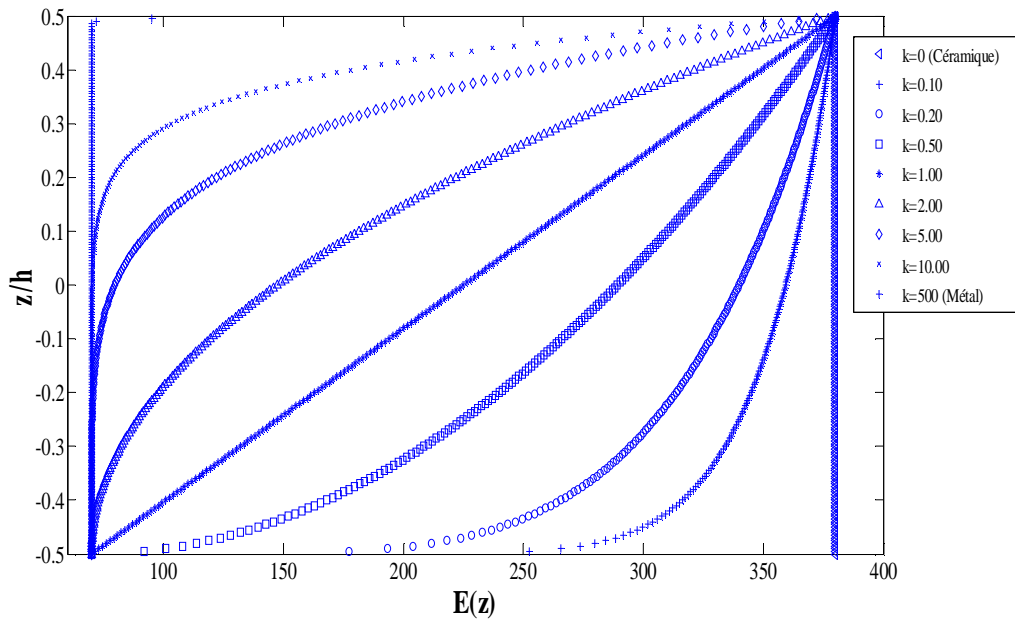


Fig. II.6: distribution de module de Young à travers l'épaisseur de P-FGMs

Où «k» est un paramètre matériel, les indices «m» et «c» sont les modules élastiques de la face intérieure «métal» et la face supérieure «céramique» respectivement.

### II.7.3) Schéma de Mori-Tanaka MT-FGMs :

En premier lieu, Mori et al [Mori1973] ont proposé une approche de calculer les contraintes internes moyennes dans la matrice d'un matériau précipité. Par la suite, Benveniste [Benven1987] a reformulé cette méthode pour l'appliquer aux matériaux composites. Dans le cas d'un matériau à deux phases, le module d'Young est exprimé par la relation suivante :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(E_c / E_m - 1)(1 + \nu) / (3 - 3\nu)} \right) \quad (II.3)$$

Avec  $V_c = (0.5 + z/h)^k$  c'est la fraction volumique de la céramique.

Puisque les effets de la variation de coefficient de Poisson ( $\nu$ ) sur la réponse des plaques en FGMs sont faibles [Yan2005], [Kit2006], ce paramètre matériel est pris constant pour la simplification.

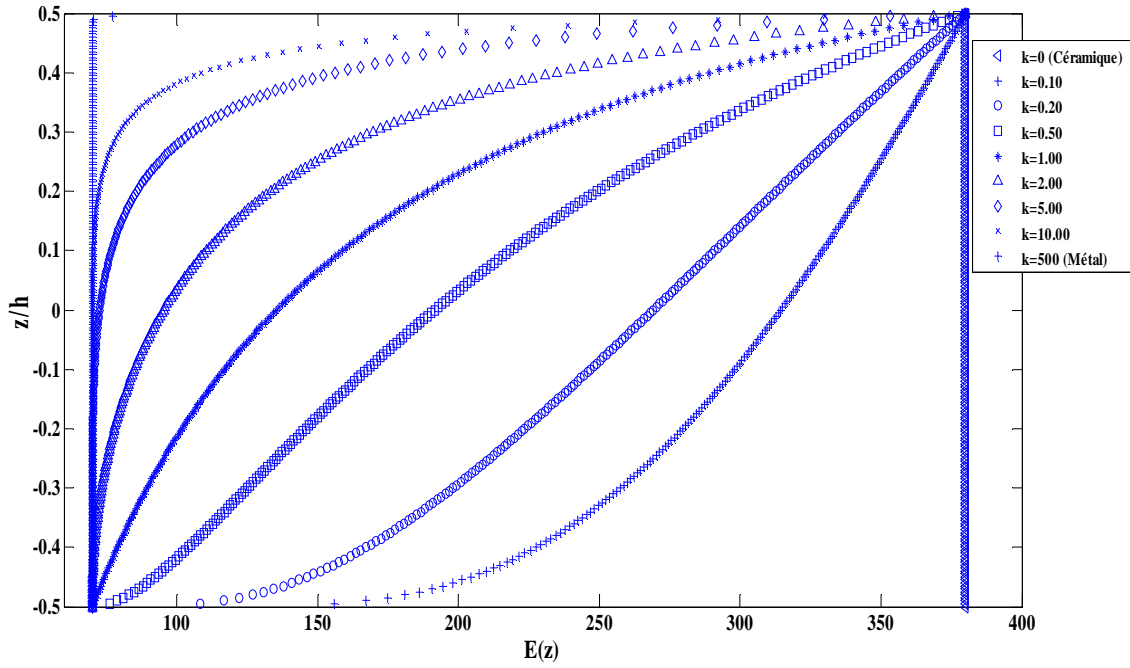


Fig. II.7: distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs

**II.8) loi de comportement matériel de l'élasticité 3D :**

Dans un système des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (Fig II.8), il est coutumier d'écrire l'état de déformation par six composantes de contraintes et de déformations. A savoir, trois composantes normales et trois du cisaillement. Une relation linéaire entre les contraintes et les déformations est connue comme la loi de Hooke généralisée, et elle est exprimée comme :

$$\sigma_k = C_{kj} \varepsilon_j \quad \text{avec } (k = 1, 2, \dots, 6) \tag{II.4}$$

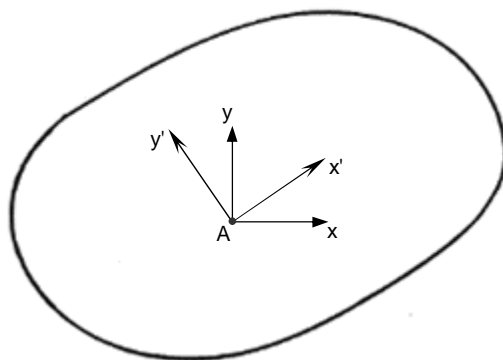
Où  $C_{kj}$  sont connus comme les coefficients élastiques. Notant que l'Eq (II.4) est une abréviation de la forme du tenseur adéquate de la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{II.5}$$

Quand  $C_{kj}$  sont en fonction d'une position, le matériau est hétérogène, et quand ils sont constants partout dans le matériau, le matériau est homogène. Nous notons que  $C_{kj}$  sont des entrées dans le k-ème rangée et j-ème colonne d'une matrice carré de (6x6). Cependant,  $C_{kj}$  ne sont pas les composantes du tenseur de deuxième ordre. Aussi, la notation en un seul indice pour les composantes des contraintes et des déformations sont basées sur la convention,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \tag{II.6}$$

Ici  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  présentent les contraintes normales, et  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  présentent les contraintes du cisaillement ;  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$  sont les contraintes en plan et  $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  sont les contraintes hors plan (c.-à-d., transversal). Une terminologie semblable est utilisée pour les composantes des déformations.



$m$  : une propriété matérielle mesurée par respect de système  $(x, y)$   
 $m'$  : une propriété matérielle mesurée par respect de système  $(x', y')$   
 un matériau isotrope :  $m = m'$ , un matériau anisotrope :  $m \neq m'$

Fig. II.8: Définition des matériaux isotropes et anisotropes.

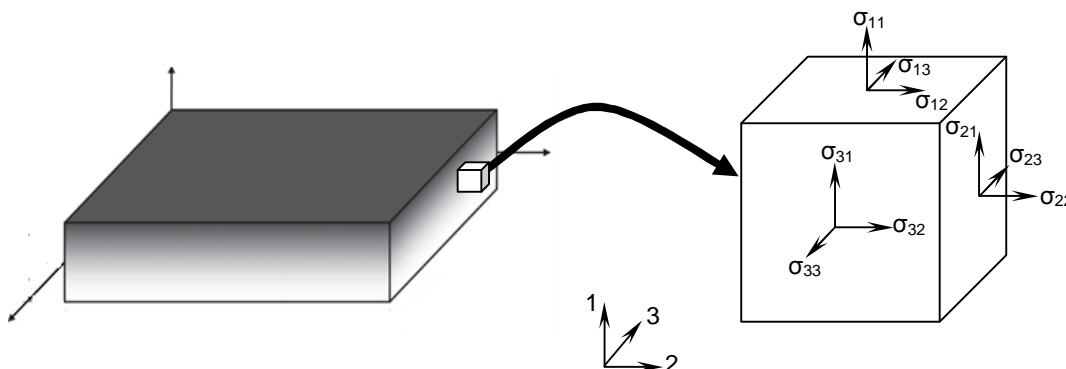


Fig. II.9: Les composantes des contraintes et des déformations dans le système des Coordonnées Cartésiennes rectangulaires d'une plaque épaisse en FGMs.

Les trente-six coefficients  $C_{ij}$  ne sont pas tous indépendants de l'un à l'autre. Le nombre des constantes indépendantes dépend de la constitution matérielle. En premier, nous montrons que  $C_{kj}=C_{jk}$ , ils sont symétriques pour les matériaux pour lesquels la fonction de la densité d'énergie de déformation  $U_0$  est définie par :

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_k} = \sigma_k \quad (\text{II.7})$$

Pour illustrer ceci, nous considérons la densité d'énergie de déformation du matériau comme :

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_k d\varepsilon_k \quad (\text{II.8})$$

Substituant l'équation (II.4) dans l'équation (II.8) et nous l'intégrons, nous obtenons :

$$U_0 = \frac{I}{2} C_k \varepsilon_k \varepsilon_j \quad (\text{II.9})$$

En remplaçant  $U_0$  d'Éq. (II.9) dans l'Éq. (II.7), nous arrivons à l'expression ;

$$\sigma_k = \frac{I}{2} (C_{kj} + C_{jk}) \varepsilon_j \quad (\text{II.10})$$

Nous comparons les expressions (II.10) et (II.4), nous concluons que  $C_{kj} = C_{jk}$ . À cause de cette symétrie, il y a seulement (21) constantes élastiques indépendantes pour les matériaux anisotropes. L'Éq (II.4) peut exprimer par la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

*Sym*

En général, les coefficients élastiques  $C_{ij}$  relient les composantes cartésiennes de déformations et de contraintes dépendent de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  utilisées. Nous faisons la référence à un autre système des coordonnées cartésiennes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , les coefficients élastiques sont  $\bar{C}_{ij}$ , et en général  $\bar{C}_{ij} \neq C_{ij}$ . Si  $\bar{C}_{ij} = C_{ij}$ , alors ils sont indépendants de système des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et le matériau dit un matériau isotrope.



Quelques matériaux anisotropes peuvent posséder des symétries matérielles et leurs comportements constitutifs décrivent avec moins de (21) constantes. Quand les coefficients élastiques en un point ont les mêmes valeurs pour chaque paire de systèmes des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  qu'ils sont l'image inverse de l'un à l'autre dans un certain plan, ce plan est appelé plan de symétrie élastique. Les matériaux avec un plan de symétrie élastique sont appelés les matériaux monocliniques, et le nombre des coefficients élastiques pour les tels matériaux réduits à (13). Si le plan de symétrie est  $x_3=0$ , les relations constitutives devinent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & Sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Notons que les contraintes de cisaillement hors plan  $\sigma_4$  et  $\sigma_5$  sont indépendantes de contraintes normales et de cisaillement en plan.

Si un système matériel a trois plans mutuellement perpendiculaires à un plan de symétrie élastique, alors le nombre de coefficients élastiques indépendants est réduit à neuf. De tels matériaux sont connus sous le nom d'orthotrope. La relation contraintes-déformations pour un matériau orthotrope est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Les coefficients de  $C_{ij}$  pour un matériau orthotrope sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), \quad (\text{II.14})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)},$$

Où

$$\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{II.15})$$

$$\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

$E$ ,  $G$  sont les modules d'Young et de cisaillement respectivement.

### II.9) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref historique sur les matériaux à gradients de propriétés, leurs modes de la mise en œuvre et les modèles de l'homogénéisation de ce type des matériaux, et finalement, décrire les lois de constitution matérielle.

Ce chapitre fait l'introduction au chapitre suivant, pour estimer la mécanique des plaques en FGMs.

# Chapitre III

## Mécanique et modèles des plaques en matériaux à gradient de propriétés

### III.1) Introduction:

Afin de positionner notre étude, il est évidemment de présenter les travaux menés sur les différentes théories et les modèles des plaques en FGMs. Alors, le développement de notre théorie est basé sur une synthèse récente des travaux portant l'étude de la réponse des plaques sous chargement statique et en vibration libre.

### III.2) Revue sur les théories des plaques FGM:

Depuis la fondation des matériaux à gradient de propriétés, les théories particularisées à analyser des structures en ces matériaux sont établies à nouveau, notre travail est basé sur l'étude des plaques, ces dernières ne sont pas l'exclusivité dans le domaine de génie civil, elles sont employées également en aéronautique, aérospatial, constructions navale, automobile et nucléaire. La majorité des théories présentées ici se sont des extensions des théories analysant les plaques isotropes ou composites. À ce stade, diverses théories ont été proposées, et prennent un axe important dans la mécanique des structures. De la théorie simplifiée de Love-Kirchhoff, certaines se sont des améliorations, d'autres sont des théories plus précises.

Aujourd'hui, les recherches sur les plaques en FGM ont acquis un intérêt appréciable, On peut les regrouper en trois principaux groupes selon l'approche adoptée :

- a) Théories des plaques FGM bidimensionnelles,
- b) Théories des plaques FGM tridimensionnelles,
- c) Approches Quasi-dimensionnelles des plaques FGM.

### III.2.1) Théorie de plaques bidimensionnelles :

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ( $\varepsilon_z = 0$ ), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur) . Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

- 1) Les théories classiques des plaques FGM,
- 2) Les théories de premier ordre des plaques FGM,
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques FGM.

#### III.2.1.a) La théorie classique des plaques (Classical plate theory CPT) :

Les théories classiques, dites théories des plaques minces, où la contrainte normale transversale est négligeable, due à faible épaisseur de la plaque. Cette hypothèse n'est pas valable et incorrecte dans le cas des plaques modérément épaisses ou avec forte épaisseur. Cette théorie a été adoptée par Feldman et Aboudi [Feld1997], Abrate [Abr2008], Mahdavian [Mah2009], et Mohammadi et al. [Moh2010], pour étudier le flambement des plaques minces en FGMs.

Cependant, la théorie classique des plaques en FGMs sous-estime la flèche de déplacement et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses en FGMs [Red2004].

La théorie classique des plaques est basée sur les hypothèses suivantes :

- la contrainte normale dans le plan de la plaque est négligeable. (hypothèses des contraintes planes).
- les points situés sur une normale à la fibre moyenne avant déformation restent sur cette normale après déformation.

Ces hypothèses correspondent à la théorie des plaques minces dans le domaine des petites déformations (modèle de Love-Kirchhoff).

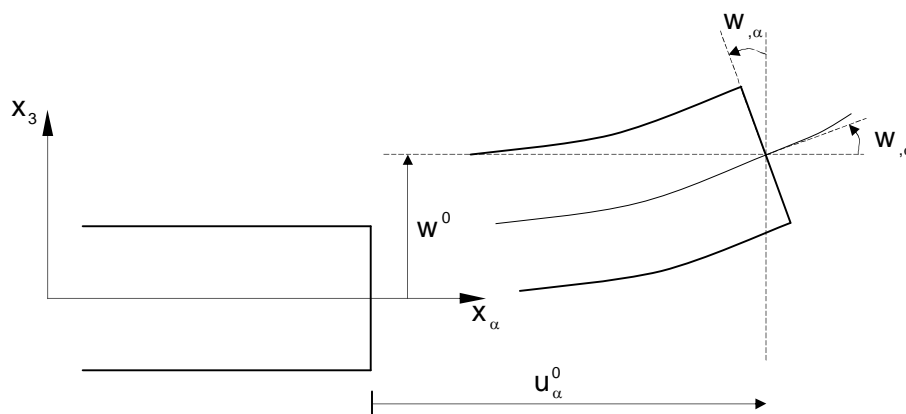


Fig. III.1: Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ cinématique, d'un point quelconque d'une plaque est donné par la relation suivante

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) - zw_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) - zw_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

Avec :

$u, v$  : Le déplacement du plan neutre.

$w$  : La flèche de la plaque,

$w_{,x}, w_{,y}$  : Représentent la rotation de la fibre normale (fig III.1) autour des axes (x) et (y) respectivement.

### III.2.1.b) Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT):

Les théories de premier ordre [Reis1945], [Mind1951], tiennent en compte l'effet de cisaillement transversal, mais elles nécessitent d'introduire des facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal, à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs études ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des plaques basant sur la théorie de cisaillement de premier ordre dans les littératures [Del2004], [Yan2005], [Zha2009], [Mor2012], [Men2012], [Yag2013] et [Ras2012].

Dans la théorie précédente, on a opté des hypothèses cinématiques qui négligent le cisaillement. Une théorie semblable, appliquée aux plaques modérément épaisses, est

proposée par Reissner et Rayleigh [Reis1945]. L'idée principale est de présenter l'influence de cisaillement transversal sur le comportement statique et dynamique des plaques isotropes épaisses, notamment, dans les travaux de Mindlin [Mind1951]. La cinématique de Mindlin-Reissner est une extension celle de Kirchhoff-Love, néanmoins, la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée (due à l'effet de cisaillement transversal).

Alors, Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin est présenté par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad \text{(III.2)}$$

Avec :

$\varphi_x, \varphi_y$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

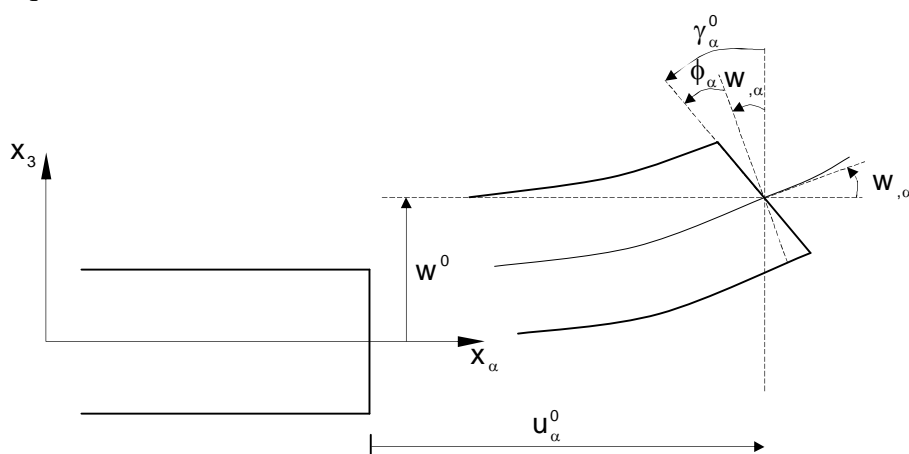
Nous remarquons que la cinématique présentée ici, et par conséquence, les déformations transversales sont indépendantes en  $(z)$ . Évidemment, la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur est donc constante, cette fausse description du champ de contraintes tangentielles nécessite d'introduire un facteur correctif.

Pour des informations supplémentaires sur ce sujet, il y a plusieurs auteurs cites les méthodes pour déterminer le facteur de correction de cisaillement.

La contribution la plus significatif constitue une première approche pour déterminer le facteur de correction de cisaillement : est basée sur le principe d'équivalence énergétique, On fait notamment, déduire le facteur de correction de cisaillement à partir de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle par l'analogie avec le modèle de plaque correspond. On peut citer notamment les travaux de Mena et al [Men2012], Nguyen et al [Ngu2008], Thai et al [Thai2013] , ils ont proposé des expressions analytiques pour déterminer le facteur de correction de cisaillement dans le cas des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Une deuxième approche basée sur l'équivalence de fréquences propres obtenues par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle et la théorie de premier ordre. Les références [Cho1971], [Hos2010], présentent des informations additionnelles sur la procédure pour l'obtention de facteur de correction de cisaillement à travers l'épaisseur, basant sur des considérations dynamiques.

Tanov et al [Tan2000] et Fares et al [Far2008] ont présenté des études en vue d'améliorer le champ de contraintes de cisaillement, en comparant les contraintes tangentielles avec celles adoptés par la théorie de Reddy. Pour tenir en compte une distribution quadratique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et de satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque.



**Fig. III.2: Cinématique de Reissner-Mindlin**

Les résultats obtenus par la théorie de premier ordre sont globalement satisfaisants, mais elle nécessite toujours l'appel aux facteurs de correction pour présenter correctement les contraintes de cisaillement. Pour des situations générales, et dans le cas des plaques épaisses, cette théorie est imparfaite à cause de la variation des propriétés matériels à travers l'épaisseur (notamment, le module élastique et la masse volumique). Nous ont motivé de présenter une théorie correcte sans recourir au facteur de cisaillement et preuve des performances appréciables.

### III.2.1.c) Théorie des plaques d'ordre supérieur (Higher Order Shear Plate Theory HSPT):

Pour éviter l'introduction des facteurs de correction, une bibliothèque volumineuse existe sur ce sujet, car les recherches internationales récentes font l'actualité dans le domaine d'analyse des plaques et coques, isotropes ou composites, en analyse statique ou dynamique. En effet, beaucoup d'auteurs proposent des théories dites les théories d'ordre supérieur. Ces théories sont basées sur des distributions plus générales de la cinématique, éventuellement, les contraintes de cisaillements à travers l'épaisseur.

D'une façon générale, La cinématique des théories d'ordre supérieur sont basées sur le développement de série de Taylor, d'une manière générale, elles s'expriment :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 \phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Parmi les premiers, Nelson et Lorch [Nel1977] ont développé le champ cinématique précédent en introduisant neuf inconnus de déplacement, Lo et al. [Lo1977] avec onze inconnus, Bhimaraddi et Stevens [Bhi1984] avec cinq inconnus même pour Reddy [Red1984] avec cinq inconnus, Kant et Pandya [Kan1988] avec sept inconnus, Kant et Khare [Kan1997] avec neuf inconnus et Talha and Singh [Tal2010] avec onze inconnus. D'autres théories d'ordre supérieur sont basées sur la formulation unifiée de Carrera (CUF) citées dans les références [Tor2009], [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013], [Tor2013], [Vio2013a], [Vio2013b], [Faz2013] et [Tor2014] et ont été les utilisés aussi pour étudier des structures en FGM.

En principe, ces théories d'ordre supérieur sont plus précises que les théories du premier ordre et la théorie classique de Love-Kirchhoff.

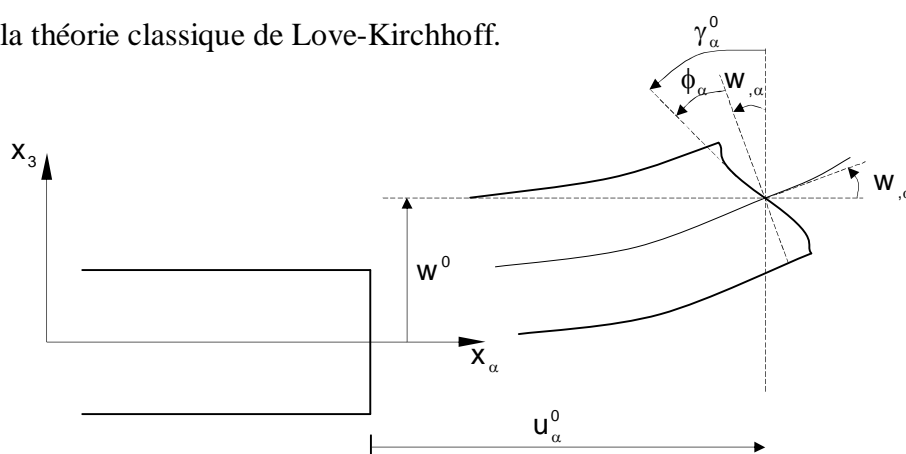


Fig. III.3: Cinématique de l'ordre supérieur.

La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre d'inconnus supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendants dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin). Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications ont été proposées.

Toutes ces théories sont intéressantes soit pour une présentation correcte de la cinématique ou les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, soit pour éviter l'introduction des facteurs de correction, mais il faut distinguer que ces théories imposent un



nombre important de paramètres des déplacements supplémentaires (trois variables pour la théorie de Kerchhoff, et cinq celle de Mindlin-Reissner). Ceci pose un inconvénient sérieux lors de l'application des conditions aux limites sur les frontières et la formulation de leurs modèles numériques (notamment la méthode des éléments finis). Tout ça influe directement sur le taux de calcul et l'efficacité de la théorie choisie.

Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs auteurs ont exprimé un champ de déplacement raffiné basé sur le développement de la cinématique (III.29) est utilisé avec  $\phi_1^{0(4)} = \phi_1^{0(2)} = \phi_3^{0(3)} = \phi_3^{0(1)} = 0, \phi_\alpha^{0(3)}, \alpha = \{1,2\}$  dépendent à  $\phi_\alpha^{0(1)}$  et à  $w_\alpha$ . L'expression de (III.29) devient :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_\alpha(x_1, x_2) + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2), \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad \text{(III.4)}$$

Voici quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- Ambartsumyan [Amb1969]:  $f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right);$
- Reissner [Reisb], Panc [Pan1975] :  $f(z) = \frac{5}{2} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right); \quad \text{(III.5)}$
- Levinson [Lev1980], Murthy [Mur1981] et Reddy [Red1984]:  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right);$

$h$  étant l'épaisseur de la plaque.

La plupart de ces modèles adoptés pour étudier la mécanique des plaques en FGMs ont les mêmes cinq inconnus, citons la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Red2000], théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale [Zen2006], théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Atm2010], [Ben2010].

Récemment, d'autres auteurs ont proposé un raffinement de la théorie d'ordre supérieur utilisant quatre inconnus, ces théories ont une formulation simple basé sur la décomposition de déplacement transversal en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement. En effet, on exprime les rotations de la normale en fonction de déplacement transversal, de tel sort, le champ de la cinématique s'exprime par :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
\end{aligned} \tag{III.6}$$

Cette simplification mène à un nombre réduit des équations de mouvement en termes d'inconnus, dans les recherches actuelles sur ce sujet, nous trouvons plusieurs contributions basées sur l'amélioration de la fonction de cisaillement  $f(z)$  pour donner une bonne satisfaction de la condition de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque, dans l'analyse statique, dynamique et plus loin dans le cas thermomécanique. Les travaux de Tounsi et al [Tou2013], Houari et al [Hou2010] et Hamidi et al [Ham2012] ont étudiés le comportement mécanique et thermique des plaques en FGM présentant des améliorations considérables dans la fonction de cisaillement :

- Fonction de cisaillement Trigonométrique [Tou2013]:

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

- Fonction de cisaillement hyperbolique [El M2011]:

$$f(z) = z - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} z \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \tag{III.7}$$

- Fonction de cisaillement polynomiale [Hou2010]

$$f(z) = z \left[ -\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right]$$

En conclusion, les équations résultantes du mouvement sont plus compliquées par rapport celles optées avec la théorie classique et la théorie de premier ordre. De plus, il doit noter que les théories deux-dimensionnelles des plaques susmentionnées (CPT, FSDT, et HSDT) omissent l'effet de l'étirement de l'épaisseur dû à l'état de contraintes planes ( $\varepsilon_z = 0$ ), comme elles considèrent un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur. Cette hypothèse est appropriée pour les plaques en FGMs minces ou modérément épaisses, mais

elle est déficiente pour les plaques en FGMs épaisses ou avec forte épaisseur [Qia2004]. L'importance de l'effet de l'éirement de l'épaisseur dans les plaques en FGMs a été identifié de façon concise dans le travail de Carrera et al. [Car2011]. Cet effet joue un rôle significatif dans les plaques en FGMs épaisses et devrait être pris en considération.

### III.2.2) Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) :

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur, On note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont été, en outre, consacrés leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximées pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités.

S.S Vel et al [Vel2004] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGM, Uymaz et Aydogdu [Uym2007] ont proposé une solution approche par une série des études utilisant les polynômes de Chebyshev, mêmes problèmes ont été traités par Li et al [Li2008] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution.

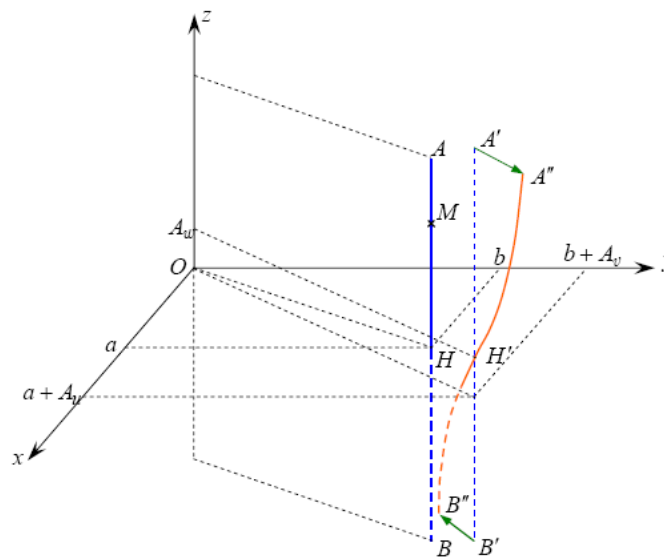
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{(III.8)}$$

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

Plus récemment, Huang et al. [Hua2008], Amini et al. [Ami2009] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh [Mal2009] a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, Zankour [Zen2007] a étudié des plaques en FGM épaisses basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle des propriétés matériels à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

### III.2.3) Approches quasi-tridimensionnelles :



**Fig. III.4: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur**

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse, Cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire.

De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur ( $z$ )

de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles concèdent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [Car2001] [Car2003] [Car2005], et récemment évoluée par Demasi [Dem2009a] [Dem2009b] [Dem2009c] [Dem2009d] et [Dem2009e].

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al [Car2011a] et [Car2011b] font l'objet.

De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures [Mat2009], [Tal2010] , [Red2011], ces théories sont lourdes et coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important des inconnus.

Talha et Singh [Tal2010] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé.

Jha et al [Jha2013] ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement.

Reddy [Red2011] présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre des inconnus élevé nécessite un large système des équations qui conduit aux difficultés de résolution.

Neves et al. [Nev2012a], [Nev2012b] , [Nev2013] ont traité des problèmes des plaques en FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par Zenkour [Zen2007] et récemment par Mantari et Guedes Soares [Man2012]

[Man2013] , elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre. Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. En effet, Thai et Kim [Tha2013b] ont présenté plus récemment une théorie de déformation du cisaillement sinusoidale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGMs. Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z), alors la cinématique devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.9}$$

### III.3) Conclusion

En conclusion, la réponse en flexion et les vibrations libres des plaques en FGM doivent être étudiées selon la théorie des plaques d'ordre supérieur et de déformation normale afin de décrire les équations d'équilibre du mouvement. Nous pourrions craindre un double emploi avec la nouvelle théorie quasi-3D.

En premier, nous adaptons les hypothèses de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables et nous prenons en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur par l'estimation de déplacement transversal variable à traves l'épaisseur.

En deuxième, nous faisons le choix d'une fonction hyperbolique améliorée en (z) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur, elle assure les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque en FGM.

La formulation théorique des équations d'équilibre et l'établissement des équations du mouvement de la nouvelle théorie quasi-3D est une partie de notre travail de thèse. Aussi, elle dépasse le strict cadre de l'étude bibliographique et sera développée dans le chapitre suivant.

# Chapitre IV

## Analyse statique et dynamique des plaques en FGM en utilisant une théorie Quasi-3D

### IV.1) Introduction :

Dans ce chapitre, Nous présentons en détail une nouvelle théorie d'ordre supérieur et de déformation normale avec uniquement cinq inconnus, pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriétés. Contrairement aux théories raffinées à quatre variables élaborées dans la littérature [Abz2011], [Mer2011], [Bou2012], [Bou2013], [El M2011], [Hou2011], [Tou2013], [Ham2012], où l'effet de la déformation normale transversale est négligé. la théorie présentée ici, est prend en considération l'effet de la déformation normale transverse. Le champ de déplacement adopté est basé sur une variation hyperbolique du déplacement transversal à travers l'épaisseur, la composante de déplacement transversal est divisée en trois termes: de flexion, de cisaillement, et éventuellement de l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Cette hypothèse permet de réduire le nombre des paramètres de déplacement, par conséquent, et qui de plus serait simple et facilement de déterminer leur modèle mathématique. Les équations du mouvement et les conditions aux limites seront décrit selon le principe de Hamilton. Cette théorie a été exploitée par la suite à la résolution analytique, en traitent quelques problèmes de statique et de vibration libre dans le cas des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés. Cette étude peut toutefois présenter des avantages remarquables dans l'industrie aérospatiale et aéronautique.

**IV.2) Formulation théorique :****IV.2.1) Champ des déplacements :**

Le champ des déplacements adopté dans cette étude est basé sur les considérations suivantes :

1- Le déplacement transversal est divisé en trois parties : la première partie présente le déplacement dû à la flexion  $w_b(x, y, t)$ , la deuxième est réservée à la flèche introduite par le cisaillement  $w_s(x, y, t)$  et la dernière due au l'effet de l'étirement de l'épaisseur  $w_{stretch}(x, y, z, t)$ .

2- Les déplacements plans se composent en : déplacement en membrane, flexion et cisaillement.

3- Le déplacement flexionnel est semblable à cela utilisé dans la théorie classique des plaques.

4- Les composantes de déplacement dû au cisaillement admettent une variation hyperbolique qui garantit les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur la face supérieure et inférieure de la plaque.

Nous basons sur ces hypothèses, les champs de déplacement utilisés dans cette étude prennent la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z) \varphi(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Où

$u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements membranaires plans dans les directions (x) et (y) respectivement,  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de déplacement transversal en terme de



flexion et de cisaillement ; et le déplacement additionnel  $\varphi$  présente l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effet). Dans cette étude, le choix des fonctions  $f(z)$  et  $g(z)$  est basé sur la fonction hyperbolique  $\Psi(z)$  proposée par Mantari and Guedes Soares [Man2013b], comme :

$$f(z) = z - \Psi(z)$$

Avec

(IV.2)

$$\Psi(z) = \sinh\left(\frac{z}{h}\right) e^{\frac{1}{5h} \cosh\left(\frac{z}{h}\right)} + z \left[ \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5h} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\right)}{-h} e^{\frac{1}{5h} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)} \right]$$

Et

$$g(z) = 1 - f'(z)$$

(IV.3)

Il est très claire remarqué que par la division de déplacement transversal  $w$  en trois parties , de flexion , de cisaillement et partie due à l'effet de l'étirement de l'épaisseur ( $w = w_b + w_s + g(z)\varphi$ ) et tient en compte les hypothèses suivantes :  $\theta_1 = \partial w_s / \partial x$  et  $\theta_2 = \partial w_s / \partial y$  d'où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les rotations autour les plans (yz) et (xz) respectivement , comme définies par Mantari et Guedes Soares [Man2013b], le champ de déplacement de la présente théorie devient plus simple.

Le champ de déformations est défini , alors par

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad (IV.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0$$

Avec

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (IV.5)$$

$$\varepsilon_z^0 = \varphi$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (IV.6)$$

#### IV.2.2) Équations du mouvement :

Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton et sont exprimées par la forme variationnelle suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (IV.7)$$

Dans cette expression,  $\delta U$ ,  $\delta K$ ,  $\delta V$  représentent, respectivement, la variation d'énergie de déformation, la variation d'énergie cinétique et la variation du travail des efforts extérieurs s'exerçant sur la plaque.

##### IV.2.2.a) Variation de l'énergie de déformation :

A partir la présente théorie, la variation de l'énergie de déformation pour une plaque en FGMs est définie par :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{iz} \delta \varepsilon_{iz} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz}) dV \quad (i, j = 1, 2) \quad (IV.8)$$

Soit, en considérant les hypothèses retenues :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[ \sigma_x (\delta \varepsilon_x^0 + z \delta k_x^b + f(z) \delta k_x^s) + \sigma_y (\delta \varepsilon_y^0 + z \delta k_y^b + f(z) \delta k_y^s) + \sigma_z g'(z) \delta \varepsilon_z^0 \right. \\ \left. + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}^0 + z \delta k_{xy}^b + f(z) \delta k_{xy}^s) + \tau_{yz} g(z) \delta \gamma_{yz}^0 + \tau_{xz} g(z) \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA dz$$

Alors, l'expression finale de la variation de l'énergie de déformation s'exprime à l'aide de variables des contraintes et des déformations :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA$$

Pour exprimer la forme variationnelle de l'énergie de déformation en fonction des variables en déplacements, en remplaçant les déformations par leurs expressions déterminées ci-dessus accorder la cinématique adoptée, nous trouvons :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_z \delta \varphi + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + S_{yz}^s \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) + S_{xz}^s \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) \right] dA \quad (IV.9)$$

Où (A) est la surface supérieure de la plaque.

La résultantes des charges en plan ( $N_x, N_y, N_{xy}$  et  $N_z$ ) sont définies par l'intégrale des termes des contraintes sur l'épaisseur :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (IV.10)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz$$

et les résultantes des moments en plan ( $M_x, M_y$  et  $M_{xy}$ ) sont définies par l'intégrale des moments créés par les contraintes en plan et le plan moyen de la plaque sur l'épaisseur

$$M_x^b = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y^b = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy}^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (IV.11)$$

$$M_x^s = \int_{-h/2}^{h/2} f \sigma_x dz, \quad M_y^s = \int_{-h/2}^{h/2} f \sigma_y dz, \quad M_{xy}^s = \int_{-h/2}^{h/2} f \tau_{xy} dz$$

Les résultantes des charges du cisaillement ( $S_{xz}$  et  $S_{yz}$ ) sont définies par les intégrales des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque.

$$S_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz, \quad S_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{yz} dz \quad (\text{IV.12})$$

#### IV.2.2.b) Expression du travail des efforts extérieurs :

Le travail des forces extérieures appliquées à la plaque s'exprime par :

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_V \delta \{u^v\}^T \{f^v\} dV + \int_S \delta \{u^s\}^T \{f^s\} dS + \sum \delta \{u^i\} \{f^i\} \quad (\text{IV.13})$$

Le problème traité dans cette étude est un problème de flexion, Ceci se traduit, la négligence des sollicitations volumiques ainsi que les charges appliquées en dehors de leurs plan et prend en compte une répartition uniforme des charges appliquées en plan, l'énergie potentielle se réduit en fonction du déplacement transversal, alors:

$$\delta V = -\frac{1}{2} \int_A q \delta w dA = -\frac{1}{2} \int_A q \delta (w_b + w_s + g(z) \varphi) dA \quad (\text{IV.14})$$

(q) est une charge uniforme par unité de surface de la plaque, dirigée suivant l'axe z (exemple : une pression).

#### IV.2.2.c) Variation de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique peut s'exprimer par :

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad i = 1,2,3 \quad (\text{IV.15})$$

En respectant les hypothèses cinématiques ci-dessus, l'énergie cinétique de la plaque pour un déplacement virtuel ( $\delta u_i$ ), s'écrit :

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz \quad (\text{IV.16})$$

Par conséquent, le champ de vitesse s'exprime en fonction de la composante ( $u_i$ ) du vecteur déplacement,

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, z, t) &= \dot{u}_0(x, y, t) - z \frac{\partial \dot{w}_b(x, y, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s(x, y, t)}{\partial x} \\ \dot{v}(x, y, z, t) &= \dot{v}_0(x, y, t) - z \frac{\partial \dot{w}_b(x, y, t)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s(x, y, t)}{\partial y} \\ \dot{w}(x, y, z, t) &= \dot{w}_b(x, y, t) + \dot{w}_s(x, y, t) + g(z) \dot{\phi}(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV.17)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[ \begin{aligned} &\left( \dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \left( \delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ &+ \left( \dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \left( \delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &+ (\dot{w}_b + \dot{w}_s + g(z) \dot{\phi}) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s + g(z) \delta \dot{\phi}) \end{aligned} \right] \rho(z) dA dz \quad (IV.18)$$

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{aligned} &\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 - z \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + z^2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + z f(z) \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \\ &- f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + z f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + f^2(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \\ &\dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 - z \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + z^2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + z f(z) \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \\ &- f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + z f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + f^2(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \\ &(\dot{w}_b \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s + g(z) \dot{w}_b \delta \dot{\phi}) + (\dot{w}_s \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s + g(z) \dot{w}_s \delta \dot{\phi}) \\ &(g(z) \dot{\phi} \delta \dot{w}_b + g(z) \dot{\phi} \delta \dot{w}_s + g^2(z) \dot{\phi} \delta \dot{\phi}) \end{aligned} \right] \rho(z) dA dz \quad (IV.19) \end{aligned}$$

En collectionnant les termes semblables :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{aligned}
 & \left[ (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_b \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s + \dot{w}_s \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s) \rho(z) \right] \\
 & - \left[ \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) z \rho(z) \right] \\
 & - \left[ \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) f(z) \rho(z) \right] \\
 & + \left[ (\dot{w}_b \delta \dot{\phi} + \dot{w}_s \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{w}_b + \dot{\phi} \delta \dot{w}_s) g(z) \rho(z) \right] \\
 & + \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) z^2 \rho(z) \right] + \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) z f(z) \rho(z) \right] \\
 & + \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) z f(z) \rho(z) \right] + \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) f^2(z) \rho(z) \right] \\
 & + \left[ \dot{\phi} \delta \dot{\phi} g^2(z) \rho(z) \right]
 \end{aligned} \right] dA dz \tag{IV.20}
 \end{aligned}$$

L'expression de la variation d'énergie cinétique alors s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \frac{I}{2} \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \right. \\
 & - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 & - J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 & + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\
 & + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\
 & \left. + J_1^s ((\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)) + K_2^s \dot{\phi} \delta \dot{\phi} \right\} dA \tag{IV.21}
 \end{aligned}$$

$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les inerties massiques, définies respectivement par :

$$(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (I, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2) \rho(z) dz \tag{IV.22}$$

## IV.2.3) Résumé des relations fondamentales du mouvement :

Nous obtenons les relations fondamentales fournies par cette nouvelle théorie par la constitution les expressions  $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta K$  en fonction des déplacements virtuels, et en les remplaçant dans le principe d'Hamilton. nous trouvons, par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\{ \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_z \delta \varphi + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + S_{yz}^s \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) + S_{xz}^s \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) \right] dA \right. \\
& \quad \left. - \int_A [q \delta (w_b + w_s + w_{st})] dA + \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \right. \\
& \quad \left. - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) - J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
& \quad \left. + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + J_1^s ((\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)) + K_2^s \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} \right\} dA \} dt = 0 \tag{IV.23}
\end{aligned}$$

En intégrant par parties les termes de l'expression précédente et en reconnaissant que les termes d'intégration sont nuls puisque  $\delta u_i(t=0) = \delta u_i(t=T) = 0$ , afin d'extraire les déplacements virtuels  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$  et  $\delta \varphi$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\{ \int_A \left[ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial N_y}{\partial x} \delta v_0 + N_z \delta \varphi + \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 \right) - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \delta w_b - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \delta w_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \delta w_s - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \delta w_s + \left( \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \delta w_s + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \delta \varphi \right) + \left( \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} \delta w_s + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} \delta \varphi \right) \right] dA + \oint_r \Gamma \delta u_i ds \right. \\
& \quad \left. - \int_A [q (\delta w_b + \delta w_s + g(z) \delta \varphi)] dA + \int_A \{ (I_0 \ddot{u}_0 \delta u_0 + I_0 \ddot{v}_0 \delta v_0 + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta w_b + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta w_s \right. \\
& \quad \left. - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \delta w_b - I_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \delta v_0 \right) - J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \delta w_s - J_1 \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \delta v_0 \right) \right. \\
& \quad \left. + I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \delta w_b + K_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_s + J_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \delta w_s + J_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_b \right. \\
& \quad \left. + J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta \varphi + J_1^s \dot{\varphi} \delta (w_b + w_s) + K_2^s \dot{\varphi} \delta \varphi \right\} dA \} = 0 \tag{IV.24}
\end{aligned}$$

L'expression des conditions aux limites imposées sur le contour ( $\Gamma$ ) de l'équation ci-dessus peuvent être écrite sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \Gamma \delta u_i dl = \oint_{\Gamma} (N_x^n \delta u_0 + N_y^n \delta v_0 + M_b^n \delta w_b + M_s^n \delta w_s + Q_s^n \delta \phi) ds$$

Avec :

$$\begin{aligned} \delta u_0 &: N_x n_x + N_{xy} n_y \\ \delta v_0 &: N_{xy} n_x + N_y n_y \\ \delta w_b &: \left( \frac{\partial M_x^b}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} - I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + J_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) n_x + \\ &\quad \left( \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial x} + \frac{\partial M_y^b}{\partial y} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} + J_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) n_y + \frac{\partial M_{ns}^b}{\partial s} \\ \delta w_s &: \left( S_{xz}^s + \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} - J_1 \ddot{u}_0 + J_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + K_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) n_x \\ &\quad + \left( S_{yz}^s + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} + \frac{\partial M_y^s}{\partial y} - J_1 \ddot{v}_0 + J_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} + K_2 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) n_y + \frac{\partial M_{ns}^s}{\partial s} \\ \delta \phi &: S_{xz}^s n_x + S_{yz}^s n_y \end{aligned} \tag{IV.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta w_b}{\partial n} &: M_n^b \\ \frac{\partial \delta w_s}{\partial n} &: M_n^s \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} M_{ns}^b &= (M_y^b - M_x^b) n_x n_y + M_{xy}^b (n_x^2 - n_y^2), \\ M_n^b &= M_x^b n_x^2 + M_y^b n_y^2 + 2M_{xy}^b n_x n_y \\ M_{ns}^s &= (M_y^s - M_x^s) n_x n_y + M_{xy}^s (n_x^2 - n_y^2), \\ M_n^s &= M_x^s n_x^2 + M_y^s n_y^2 + 2M_{xy}^s n_x n_y \end{aligned} \tag{IV.26}$$



$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = n_x \frac{\partial}{\partial x} - n_y \frac{\partial}{\partial y}$$

L'intervalle du temps  $[0, T]$  et la surface (A) sont arbitraires ainsi que les déplacements virtuels  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$  et  $\delta \varphi$  sur (A). Par conséquent, l'équation ne peut être satisfaite que si les intégrants s'annulent séparément sur (A) et sur (C).

Nous avons alors les équations dynamiques suivantes sur (A) :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v_0 - \left( \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q \right) \delta w_b \\ & - \left( \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q \right) \delta w_s + \left( \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z + g(z) \right) \delta \varphi \\ & - \left( I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \delta u_0 - \left( I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \delta v_0 \\ & + \left( I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\varphi} \right) \delta w_b \\ & + \left( I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\varphi} \right) \delta w_s \\ & + \left( J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi} \right) \delta \varphi = 0 \end{aligned} \tag{IV.27}$$

En séparant les déplacements virtuels et en s'annulent ces derniers, On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \\
 \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\phi} \\
 \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & \quad \quad \quad - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^s \ddot{\phi} \\
 \delta \phi : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\phi}
 \end{aligned} \tag{IV.28}$$

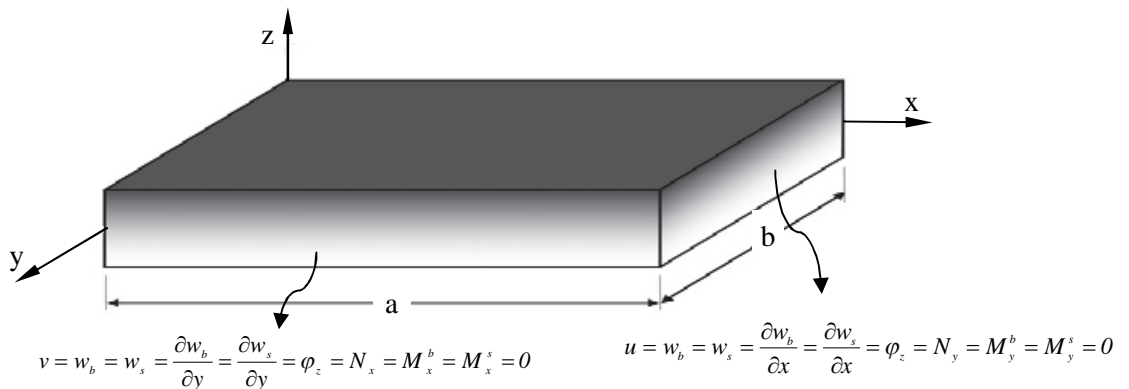
La figure suivante présente les conditions aux limites pour une plaque simplement appuyées de la présente théorie, nous adoptons :

Pour les bords  $x=0$  et  $x=a$ :

$$v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \varphi_z = N_x = M_x^b = M_x^s = 0$$

Pour les bords  $y=0$  et  $y=b$ :

$$u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \varphi_z = N_y = M_y^b = M_y^s = 0$$



**Fig. IV.1: Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.**

## IV.2.4) les expressions des résultantes et moments:

Les relations contraintes-déformations, s'écrivent pour une plaque en matériaux à gradient de propriétés :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

$\{\sigma_{i,j}\}$  et  $\{\varepsilon_{i,j}\}$  Sont les composantes physiques en un point quelconque de la plaque en FGMs.

Nous remplaçons les expressions des déformations par leurs expressions détaillées dans les relations (IV.5), nous obtenons les expressions des contraintes sous la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(z) \left[ \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - f(z) \left( \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \right] \\ \sigma_y &= \lambda(z) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \right] \\ \sigma_z &= \lambda(z) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \frac{(1-\nu)}{\nu} g'(z) \varphi_z \right] \\ \tau_{xy} &= \mu(z) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \\ \tau_{xz} &= \mu(z) g(z) \left[ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \right] \\ \tau_{yz} &= \mu(z) g(z) \left[ \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Par la suite, nous remplaçons les expressions des contraintes par leurs relations, Les expressions des résultantes et moments sont obtenues sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ & A_{22} & 0 \\ \text{Sym} & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 \\ \text{Sym} & & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ & B_{22}^s & 0 \\ \text{Sym} & & B_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 \\ \text{Sym} & & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ \text{Sym} & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ & D_{22}^s & 0 \\ \text{Sym} & & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ & B_{22}^s & 0 \\ \text{Sym} & & B_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ & D_{22}^s & 0 \\ \text{Sym} & & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ & H_{22}^s & 0 \\ \text{Sym} & & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{IV.31}$$

Les coefficients élastiques  $C_{ij}$  ainsi définis tiennent en compte la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur à partir les expressions données dans les équations (II.1), (II.2) ou (II.3). En substituant les relations (IV.4) dans l'expression de la matrice (IV.29) et en fonction des résultats obtenus dans (IV.10) (IV.11) et (IV.12) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^o, \tag{IV.32}$$

$$S = A^s \gamma,$$

$$N_z = R^a \varphi + L(\varepsilon_x^o + \varepsilon_y^o) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s), \tag{IV.33}$$

Ou

$$\begin{aligned}
N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}, \\
M^b &= \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, \\
M^s &= \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\},
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o, \gamma_{xy}^o\}, \tag{IV.35}$$

$$k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\},$$

$$k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.36})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.37})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV.38})$$

Ici, Les coefficients de rigidité sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ \nu \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV.39})$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{IV.40})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mu(z) [g(z)]^2 dz, \quad (\text{IV.41})$$

## IV.2.5). Les équations de mouvement en termes de déplacement :

En introduisant les équations (IV32-IV38) dans les équations (IV25-IV26-IV-28), les équations du mouvement s'expriment en termes des déplacements ( $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta \varphi$ ) et les équations appropriées ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - B_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + X_{13} \varphi_z \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2B_{66}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s + L d_1 \varphi = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_b - J_1 d_1 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2B_{66}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} - 2B_{66}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - B_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - B_{22}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - B_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - B_{22}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} + X_{23} \varphi_z \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s + L d_2 \varphi = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_b - J_1 d_2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - D_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - D_{11}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - D_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} + Y_{13} \varphi_z \right) \\ &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2D_{66}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} - 2D_{66}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - D_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - D_{22}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - D_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - D_{22}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} + Y_{23} \varphi_z \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 \\ - D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s - D_{22}^s d_{2222} w_s + L^a (d_{11} \varphi + d_{22} \varphi) + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_s) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) + J_1^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = \\
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_{11}^s \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}^s \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11}^s \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{12}^s \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - H_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - H_{11}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - H_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} + Y_{13}^s \varphi_z \right) \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( B_{66}^s \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2D_{66}^s \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2H_{66}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} - 2H_{66}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( B_{12}^s \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}^s \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12}^s \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{22}^s \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{12}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - H_{22}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - H_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - H_{22}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} + Y_{23}^s \varphi_z \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{55}^s \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{44}^s \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) \right) = q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b \\
& - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s \\
& - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{44}^s d_{11} w_s + A_{55}^s d_{22} w_s + R(d_{11} \varphi + d_{22} \varphi) \\
& + A_{44}^s d_{11} \varphi + A_{55}^s d_{22} \varphi + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_s) \\
& - K_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) + J_1 \ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{IV.45}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 N_x^z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 N_{xy}^z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_y^z}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - M_z = -gq(x, y) \\
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_{11}^z \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}^z \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11}^z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{12}^z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{11}^z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - H_{12}^z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - F_{11}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - F_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} \right) \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( B_{66}^z \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2D_{66}^z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2H_{66}^z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} - 2F_{66}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( B_{12}^z \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}^z \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12}^z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{22}^z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{12}^z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - H_{22}^z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - F_{12}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - F_{22}^z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{55}^z \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{44}^z \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) \right) \\
& - \left( X_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{23} \frac{\partial v}{\partial y} - Y_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - Y_{23} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - Y_{13}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - Y_{23}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + Z_{33} \varphi_z \right) - gq(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L(d_1 u_0 + d_2 v_0) - L^a (d_{11} w_b + d_{22} w_b) + (R - A_{44}^s) d_{11} w_s + (R - A_{55}^s) d_{22} w_s + R^a \varphi - A_{44}^s d_{11} \varphi \\
& - A_{55}^s d_{22} \varphi = J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{IV.46}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels, donnés par :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV.47})$$

### **IV.3). Solution Analytique :**

Nous considérons une plaque simplement appuyée de dimensions (a) et (b) et chargée dans leur plan par une charge uniforme (q). La stratégie adaptée pour la résolution des problèmes traités dans ce travail est basée sur la méthode de Navier. Les composantes du vecteur de déplacement  $(u_0, v_0, w_b, w_s, \varphi)$  sont exprimées par la forme de double série de Fourier comme la suite,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée à  $(m, n)$ <sup>xième</sup> mode propre, avec  $\lambda = m\pi / a$  et  $\mu = n\pi / b$ .

Ainsi la charge transversale q est exprimée aussi en doubles séries de Fourier,

(IV.49)

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

Les coefficients  $Q_{mn}$  sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\lambda x) \sin(\mu y) dx dy = \begin{cases} q_0 & \text{pour charge sinusoidale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour charge uniformement répartie} \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$



Nous substituons les équations (IV48) et (IV49) dans les équations (IV42), (IV43) (IV44) (IV45) et (IV46), la solution analytique est obtenue sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

Dans lequel

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{15} &= L\lambda \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{25} &= L\mu \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\ a_{35} &= -L^a(\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \\ a_{45} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2)) \\ a_{55} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R^a) \\ m_{11} &= m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1, m_{24} = \mu J_1, \\ m_{33} &= -(I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2)), \\ m_{34} &= -(I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2)), m_{44} = -(I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2)), \\ m_{35} &= m_{45} = -J_1^s, m_{55} = -K_2^s \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

Après la substitution des relations de la solution de Navier dans l'expression des contraintes, donc l'expression finale des contraintes en fonctions des paramètres arbitraires est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(z) \left[ -\left( \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda U_0 + \mu V_0 \right) + z \left( \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda^2 + \mu^2 \right) w_b + f(z) \left( \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda^2 + \mu^2 \right) w_s \right. \\
&\quad \left. + g'(z) \varphi_z \right] \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\
\sigma_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(z) \left[ -\left( \lambda U_0 + \frac{(1-\nu)}{\nu} \mu V_0 \right) - z \left( \lambda^2 + \frac{(1-\nu)}{\nu} \mu^2 \right) w_b - f(z) \left( \lambda^2 + \frac{(1-\nu)}{\nu} \mu^2 \right) w_s \right. \\
&\quad \left. + g'(z) \varphi_z \right] \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\
\sigma_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -(\lambda U_0 + \mu V_0) + z(\lambda^2 + \mu^2) w_b + f(z)(\lambda^2 + \mu^2) w_s + \frac{(1-\nu)}{\nu} g'(z) \varphi_z \right] \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\
\tau_{xy} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z) [\mu U_0 + \lambda V_0 - 2z\lambda\mu w_b - 2f(z)\lambda\mu w_s] \cos(\lambda x) \cos(\mu y) \\
\tau_{xz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z) g(z) \lambda (w_s + \varphi_s) \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\
\tau_{yz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z) g(z) \mu (w_s + \varphi_s) \sin(\lambda x) \cos(\mu y)
\end{aligned} \tag{IV.53}$$

#### **IV.4) Conclusion**

Ce chapitre nous a permis d'établir les considérations de la présente théorie. Cette nouvelle théorie est une théorie de plaque d'ordre supérieur et de déformation normale, présente une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et prend en compte l'effet l'étirement de l'épaisseur. Le modèle est aussi capable de tenir en compte de dépassement de la limite des théories classiques et/ou de premier ordre des plaques en FGMs, et possède un nombre réduit des inconnus, tandis que plus dans les autres théories d'ordre supérieur. Par l'application les lois de l'élasticité tridimensionnelle.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques en basant sur la méthode de Navier en doubles séries de Fourier. Cette méthode nous offre des solutions aux problèmes d'une plaque épaisse en analyse statique et dynamique (vibration libre). La résolution du problème dépasse le strict cadre de l'étude bibliographique qu'elle est clairement présentée pour les résultats obtenus dans le chapitre suivant, par la comparaison avec des solutions de référence.

# Chapitre V

# Résultats et Discussions

## V.1) Introduction :

L'intérêt principal de cette section est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie développée dans ce travail, cette théorie est une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale, basée sur une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La plupart des théories d'ordre supérieur présentent une cinématique introduisant un nombre des inconnus en déplacements indépendants élevé, le nombre des inconnues en déplacement utilisé ici est seulement cinq inconnus avec la prise en compte également l'effet l'étirement de l'épaisseur, cette contribution nous a permis de franchir les limites de l'état plan des contraintes ( $\varepsilon_z = 0$ ) par la proposition d'un nouveau modèle Quasi3D.

Les résultats obtenus seront comparés à ceux déterminés analytiquement basant sur l'élasticité 3D ou ceux obtenus à l'aide d'autres approches Quasi3D.

Une fois la performance de ce modèle est confirmée, nous présentons une étude paramétrique pour étudier l'influence des paramètres matériels sur le comportement statique et dynamique des plaques en FGM.

Nous considérons, des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM, rectangulaires ou carrées, simplement appuyées, épaisses ou avec forte épaisseur, d'épaisseur constante et un état de contraintes ou de déformations initiales nulles. Les différents types des

plaques considérées, pour l'évaluation, dans le cas statique et dynamique (vibration libre), sont :

- **Cas Statique :**
  - étude d'une plaque épaisse isotrope sous chargement uniforme ;
  - étude d'une plaque en P-FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec l'étude de l'influence de l'épaisseur;
  - étude des plaques en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec forte épaisseur;
  - analyse des plaques en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> modérément épaisse  $a/h=10$ ;
  - analyse des plaque en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec forte épaisseur  $a/h=4$  avec l'étude de l'influence de l'allongement ;
  - analyse des plaques en P-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> modérément épaisse  $a/h=10$  ;
- **Cas Dynamique (vibrations libres):**
  - Vibration libre d'une plaque isotrope simplement appuyée avec  $a/h=10$ ;
  - Analyse vibration libre des plaques minces et épaisses en MT-FGM de type Al/ZrO<sub>2</sub>;
  - étude des plaques minces et épaisses en analyse des vibrations libres en P-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>;
  - Vibration libre des plaques épaisses en P-FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.
- **Cas des plaques sandwich en analyse statique.**
- **Étude paramétrique :**
  - Comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et la loi des puissances avec devers paramètres matériels et configurations géométriques.

## V.2) caractéristiques matérielles :

Nous avons utilisé dans cette étude, deux types des plaques en FGMs [Hos2011a], [Hos2011b], [Thai2013c]:

$$\text{Al/Al}_2\text{O}_3 \text{ et Al/ZrO}_2,$$

et leurs propriétés matériels sont respectivement illustrées dans le **tableau V.1**

Le module d'Young est évalué en utilisant les trois modèles de distribution à travers l'épaisseur de la plaque en FGMs, notons :

**Modèle I :** modèle de Mori-Tanaka

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(E_c/E_m - 1)(1 + \nu)/(3 - 3\nu)} \right)$$

**Modèle II** : modèle de la loi des puissances

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k :$$

**Modèle III** : modèle exponentiel

$$E(z) = E_0 e^{k(z/h+1/2)}$$

En analyse dynamique, nous adoptons seulement la loi des puissances pour évaluer la masse volumique à tout point de la plaque :

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k$$

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminium (Al)	Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )
$E$ (GPa)	70	380	200
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2702	3800	5700

**Tableau V.1** : caractéristiques des matériaux utilisés

### V.3) Résultats numériques :

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques obtenus et la comparaison avec quelques théories choisies dans la littérature pour la résolution des problèmes statiques et dynamiques (vibration libre) des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGMs).

Pour l'analyse statique, nous considérons que les plaques soumissent à un chargement uniforme et sinusoïdal. Par conformité, nous avons utilisé les formes adimensionnelles suivantes :

$$\bar{z} = \frac{z}{h},$$

$$\bar{u} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} \left( 0, \frac{b}{2}, z \right),$$

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right),$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{aq_0} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy} (0, 0, z),$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, z \right),$$

Dans le cas dynamique, nous tenons les fréquences adimensionnelles en fonction des fréquences propres, les suivantes :

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c},$$

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c},$$

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

### V.3.1) Validation en analyse statique :

**Exemple 01** : étude d'une plaque épaisse isotrope sous chargement uniforme :

Cet exemple s'agit d'étudier une plaque isotrope sous chargement uniforme simplement appuyée avec deux rapports d'épaisseur différents, cet exemple a étudié la flèche et les contraintes, et les comparé par la solution exacte de l'élasticité 3D a été fournit par Srivinas et al [Sri1970] , les résultats de Shimpi et al [Shi2003] sont obtenus par une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale, le résultat de la théorie de Reddy [Red1984] est aussi figuré dans la comparaison. Les résultats obtenus sont illustrés sur le tableau (V.2).

a/b	h/a	théorie	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
1	0.14	Shimpi	4.819	0.310	0.310	0.198	0.499	0.499
		Exacte 3D	4.834	0.292	0.292	-	0.480	-
		<b>Présente</b>	<b>4.822</b>	<b>0.301</b>	<b>0.301</b>	<b>0.191</b>	<b>0.490</b>	<b>0.490</b>
	0.1	Shimpi	4.625	0.307	0.307	0.195	0.505	0.505
		Exacte 3D	4.639	0.290	0.290	-	0.488	-
		Reddy	4.670	0.289	0.289	0.199	0.489	0.489
<b>Présente</b>	<b>4.631</b>	<b>0.298</b>	<b>0.298</b>	<b>0.192</b>	<b>0.499</b>	<b>0.499</b>		
0.5	0.14	Shimpi	11.640	0.327	0.158	0.143	0.696	0.392
		Exacte 3D	11.677	0.313	0.145	-	0.670	-
		<b>Présente</b>	<b>11.671</b>	<b>0.321</b>	<b>0.154</b>	<b>0.133</b>	<b>0.680</b>	<b>0.391</b>
	0.1	Shimpi	11.339	0.639	0.308	0.278	0.702	0.553
		Exacte 3D	11.375	0.612	0.281	-	0.679	-
		Reddy	11.420	0.612	0.278	0.280	0.679	0.523
<b>Présente</b>	<b>11.373</b>	<b>0.615</b>	<b>0.279</b>	<b>0.282</b>	<b>0.681</b>	<b>0.523</b>		

**Tableau V.2** : Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en FG sous chargement uniforme.

En comparant les résultats obtenus en termes de la flèche et des contraintes avec ceux obtenus par Shimpi , Reddy et Srivinas , nous conclusions que les résultats obtenus sont presque les mêmes à ceux obtenus avec l'élasticité 3D pour les différentes configurations géométriques.

**Exemple 02 :** plaque en P-FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec l'étude de l'influence de l'épaisseur.

Le deuxième exemple est dédié pour les plaques carrées en FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> minces et épaisses, nous adoptons la distribution de la loi des puissances, en considérant trois différentes valeurs de l'indice  $k = 1, 4, \text{ et } 10$ , les résultats obtenus sont comparés par les solutions Quasi3D données en référence de Neves *et al.* [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013] et Carrera *et al.* [Car2011a], [Car2008], le **tableau (V.3)** contient les valeurs adimensionnelles de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  et le déplacement transversal  $\bar{w}$ , il est pertinent de noter que les solutions Quasi3D de Neves *et al.* sont dérivées en basant sur les variations : sinusoïdale [Nev2012a], hyperbolique [Nev2012b], et cubique [Nev2013] de déplacement dans le plan et une variation quadratique de déplacement transversal à travers l'épaisseur, en revanche, les solutions Quasi3D analytique et en éléments finis de Carrera *et al.* sont obtenus basant sur une variation du quatrième-ordre du déplacement dans le plan et le déplacement transversal à travers l'épaisseur, l'inspection de tableau (V.3) prouve que les présents calculs sont en très bon accord avec les solutions Quasi3D disponibles dans la littérature.

**Tableau V.3 :** Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque carrée en P-FGM Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous chargement sinusoïdal en fonction de ratio d'épaisseur ( $a/h$ )

$k$	Théorie	$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/3)$			$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$		
		$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$
1	Quasi-3D [Nev2012a]	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
	Quasi-3D [Nev2012b]	0.5910	1.4917	14.9440	0.7020	0.5868	0.5648
	Quasi-3D [Nev2013]	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
	Quasi-3D [Car2008]	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Quasi-3D [Car2011a]	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.5865</b>	<b>1.4677</b>	<b>14.6762</b>	<b>0.6916</b>	<b>0.5695</b>	<b>0.5461</b>
4	Quasi-3D [Nev2012a]	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [Nev2012b]	0.4340	1.1593	11.7380	1.1095	0.8698	0.8241
	Quasi-3D [Nev2013]	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
	Quasi-3D [Car2008]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Quasi-3D [Car2011a]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.4396</b>	<b>1.1460</b>	<b>11.5443</b>	<b>1.0981</b>	<b>0.8423</b>	<b>0.7934</b>
10	Quasi-3D [Nev2012a]	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [Nev2012b]	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
	Quasi-3D [Nev2013]	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
	Quasi-3D [Car2008]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	Quasi-3D [Car2011a]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.3231</b>	<b>0.8622</b>	<b>8.7215</b>	<b>1.3353</b>	<b>0.9812</b>	<b>0.9135</b>

**Exemple 03** : plaque en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec forte épaisseur

Dans cet exemple nous avons analysé des plaques FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec les rapports d'épaisseur  $a/h = 2$  et  $4$ , dans cette chronique, le module d'Young est évalué en utilisant une distribution exponentielle. Cet exemple a l'intention de vérifier la précision de la présente théorie pour les plaques en FGM avec forte épaisseur, une autre situation de pertinence aux structures aéronautiques et les engins spatiaux.

**Tableau V.4** : Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée en E-FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement ( $b/a$ ) avec  $a/h=2$  et «  $k$  »

$a/h$	$b/a$	Théorie	$k$					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
2	1	3D [Zen2007]	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890
		Quasi-3D [Zen2007]	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
		Quasi-3D [Man2012a]	0.5776	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0.2792
		HSDT [Man2012b]	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
		<b>Présente théorie</b>	<b>0.5786</b>	<b>0.5231</b>	<b>0.4724</b>	<b>0.4262</b>	<b>0.3646</b>	<b>0.2797</b>
	2	3D [Zen2007]	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017
		Quasi-3D [Zen2007]	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
		Quasi-3D [Man2012a]	1.1938	1.0790	0.9748	0.8797	0.7530	0.5785
		HSDT [Man2012b]	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
		<b>Présente théorie</b>	<b>1.1947</b>	<b>1.0801</b>	<b>0.9756</b>	<b>0.8804</b>	<b>0.7535</b>	<b>0.5789</b>
	3	3D [Zen2007]	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275
		Quasi-3D [Zen2007]	1.4354	1.2977	1.1722	1.0580	0.9057	0.6962
		Quasi-3D [Man2012a]	1.4419	1.3035	1.1774	1.0626	0.9096	0.6991
		HSDT [Man2012b]	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
		<b>Présente théorie</b>	<b>1.4427</b>	<b>1.3043</b>	<b>1.1781</b>	<b>1.0633</b>	<b>0.9102</b>	<b>0.6995</b>
4	1	3D [Zen2007]	0.3490	0.3168	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805
		Quasi-3D [Zen2007]	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
		Quasi-3D [Man2012a]	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697
		HSDT [Man2012b]	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		<b>Présente théorie</b>	<b>0.3486</b>	<b>0.3152</b>	<b>0.2848</b>	<b>0.2571</b>	<b>0.2203</b>	<b>0.1697</b>
	2	3D [Zen2007]	0.8153	0.7395	0.6708	0.6085	0.5257	0.4120
		Quasi-3D [Zen2007]	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
		Quasi-3D [Man2012a]	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
		HSDT [Man2012b]	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		<b>Présente théorie</b>	<b>0.8144</b>	<b>0.7364</b>	<b>0.6654</b>	<b>0.6009</b>	<b>0.5150</b>	<b>0.3973</b>
	3	3D [Zen2007]	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
		Quasi-3D [Zen2007]	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
		Quasi-3D [Man2012a]	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
		HSDT [Man2012b]	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		<b>Présente théorie</b>	<b>1.0123</b>	<b>0.9154</b>	<b>0.8271</b>	<b>0.7470</b>	<b>0.6403</b>	<b>0.4941</b>



Les résultats obtenus sont comparés par les solutions de l'élasticité 3D [Zen2007] , Quasi3D [Zen2007], [Man2012b], et ceux ont prévu par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur [Man2012a] dans le tableau (V.4), il est important de rappeler que les solutions quasi-3D données par Zenkour [Zen2007] sont obtenus basant sur une variation sinusoïdale des déplacements dans le plan et transversal , tandis que les solutions Quasi-3D données par Mantari et Guedes Soares [Man2012b] sont générées basant sur une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation quadratique de déplacement transversal . Il est remarquable que les résultats obtenus soient étroitement corrélés avec les deux solutions, quasi-3D [Man2012b] et 3D [Zen2007].

Il doit être noté que la théorie HSMT [Man2012b] est légèrement surestimé la flèche des plaques en FGM avec forte épaisseur avec un rapport d'épaisseur  $a/h=2$ . Ce peut être attribuable à l'effet de déformation normale dans les plaques avec forte épaisseur, lequel est omis dans la formulation des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur [Man2012b]. La variation des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur sont aussi illustrées dans la figure (**Fig. V.1**) pour les plaques épaisses avec  $a/h = 4$  et  $k = 0.5$ . Deux plaques sont considérées, carrées ( $b/a=1$ ) et rectangulaire ( $b/a = 2$ ).

En plus, la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale expose un meilleur accord avec les solutions prédites par la théorie d'élasticité 3D [Zen2007].

Les résultats présentés dans les tableaux (**V.3-V.4**) et dans la figure (**Fig. V.1**) présentent que la même précision est réalisable avec la présente théorie en utilisant un nombre faible des inconnus que d'autres théories, et marquant clairement comme la présente théorie est plus simple et déployé plus facilement dans les simulations mécaniques des structures en matériaux à gradient de propriétés

**Exemple 04 :** plaque en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> modérément épaisse

Dans l'exemple présenté ici, nous avons étudié le comportement statique des plaques FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec les différentes valeurs pour le rapport d'allongement  $b/a$  égales à 1,2, 3, 4, 5 et 6 sous chargement sinusoïdal, dans ce stade, le module d'Young est évalué utilisant une distribution exponentielle E-FGM. Cet exemple a le but de présenter la précision de la présente théorie dans les cas des plaques modérément épaisses, surtout l'étude de l'influence d'allongement sur la flèche et les contraintes normales.

Les tableaux (**V.5-V.6**) présentent les résultats obtenus respectivement pour la flèche et la contrainte normale adimensionnelle, nous constatons également que les résultats obtenus avec la présente théorie sont très proches de ceux obtenus avec les autres théories Quasi-3D.

**Tableau V.5 : Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée en E-FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement ( $b/a$ ) avec  $a/h=10$  et «  $k$  »**

b/a	théorie	k					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	Quasi-3D [Man2012b]	0.2799	0.2531	0.2287	0.2066	0.1772	0.1370
	HSDT [Man2012b]	0.2816	0.2550	0.2309	0.2093	0.1807	0.1417
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2799	0.2531	0.2287	0.2066	0.1772	0.1370
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2798</b>	<b>0.2530</b>	<b>0.2287</b>	<b>0.2066</b>	<b>0.1772</b>	<b>0.1369</b>
2	Quasi-3D [Man2012b]	0.7037	0.6364	0.5752	0.5196	0.4457	0.3445
	HSDT [Man2012b]	0.7066	0.6397	0.5795	0.5252	0.4536	0.3560
	Quasi-3D [Thai2014]	0.7037	0.6364	0.5752	0.5196	0.4457	0.3445
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.7036</b>	<b>0.6363</b>	<b>0.5751</b>	<b>0.5195</b>	<b>0.4456</b>	<b>0.3445</b>
3	Quasi-3D [Man2012b]	0.8877	0.8027	0.7255	0.6554	0.5622	0.4346
	HSDT [Man2012b]	0.8909	0.8066	0.7307	0.6622	0.5720	0.4489
	Quasi-3D [Thai2014]	0.8877	0.8027	0.7255	0.6554	0.5622	0.4346
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.8875</b>	<b>0.8026</b>	<b>0.7254</b>	<b>0.6553</b>	<b>0.5621</b>	<b>0.4346</b>
4	Quasi-3D [Man2012b]	0.9696	0.8768	0.7925	0.7159	0.6141	0.4747
	HSDT [Man2012b]	0.9730	0.8809	0.7980	0.7233	0.6247	0.4903
	Quasi-3D [Thai2014]	0.9696	0.8768	0.7925	0.7159	0.6141	0.4747
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.9694</b>	<b>0.8767</b>	<b>0.7923</b>	<b>0.7158</b>	<b>0.6140</b>	<b>0.4747</b>
5	Quasi-3D [Man2012b]	1.0115	0.9147	0.8267	0.7468	0.6406	0.4952
	HSDT [Man2012b]	1.0149	0.9189	0.8324	0.7545	0.6516	0.5115
	Quasi-3D [Thai2014]	1.0115	0.9147	0.8267	0.7468	0.6406	0.4952
	<b>Présente théorie</b>	<b>1.0113</b>	<b>0.9145</b>	<b>0.8265</b>	<b>0.7467</b>	<b>0.6405</b>	<b>0.4952</b>
6	Quasi-3D [Man2012b]	1.0354	0.9363	0.8462	0.7644	0.6558	0.5069
	HSDT [Man2012b]	1.0388	0.9405	0.8520	0.7723	0.6670	0.5236
	Quasi-3D [Thai2014]	1.0354	0.9363	0.8462	0.7644	0.6558	0.5069
	<b>Présente théorie</b>	<b>1.0351</b>	<b>0.9361</b>	<b>0.8461</b>	<b>0.7643</b>	<b>0.6556</b>	<b>0.5069</b>

L'analyse des résultats de la flèche transversale soulève évidemment la question de précision de la nouvelle théorie développée dans cette étude, avec la confrontation des résultats obtenus avec la même approche Quasi-3D suivie dans le développement théorique de cette nouvelle théorie avec une fonction hyperbolique et les atouts supplémentaires de cette théorie sont sa précision avec un nombre faible des inconnus.

L'analyse des contraintes normales adimensionnelles avec des différentes valeurs de ratio  $b/a$  présente un excellent accord avec ceux obtenus par les autres approches Quasi-3D, et suffisamment en concordance avec les résultats obtenus par l'approche 3D de Zenkour [Zen2007].

**Exemple 05 :** plaque en E-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec forte épaisseur  $a/h=4$  avec l'étude de l'influence de l'allongement :

Connaitre l'influence de l'épaisseur sur la flèche et la contrainte normale, nous avons opté l'exemple précédent avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 4$ , nous gardons la loi exponentielle pour évaluer le module d'Young E-FGM, les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux (V.7-V.8). Nous pouvons confirmer l'efficacité des résultats obtenus ceci après comparaison de la flèche et la contrainte normale.

Les résultats ont déjà été exploités par d'autres auteurs adaptent l'approche Quasi-3D pour étudier cet exemple telle que Thaï et al [Thai2014] et Mantari et al [Man2013a], et les solutions de l'élasticité 3D obtenues par Zenkour [Zen2007] qui pris comme référence dans ce cas. Nos résultats obtenus en termes de flèche et de contrainte normale présentent sans doute un bon accord avec les autres résultats obtenus, Cette affirmation est prouvée en utilisant une nouvelle théorie simple et efficace avec un nombre réduit des inconnus dont l'effet de l'étirement de l'épaisseur est pris en considération.

**Tableau V.6 :** Comparaison de la contrainte adimensionnelle  $\sigma_y$  d'une plaque carrée en E-FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement ( $b/a$ ) avec  $a/h=10$  et «  $k$  »

b/a	théorie	k					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	3D [Zen2007]	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2924	0.3147	0.3383	0.3633	0.4041	0.4785
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2927	0.3149	0.3385	0.3636	0.4039	0.4790
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2918</b>	<b>0.3139</b>	<b>0.3374</b>	<b>0.3623</b>	<b>0.4024</b>	<b>0.4771</b>
2	3D [Zen2007]	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5092
	Quasi-3D [Man2013a]	0.3042	0.3261	0.3495	0.3743	0.4148	0.4905
	Quasi-3D [Thai2014]	0.3049	0.3269	0.3503	0.3752	0.4155	0.4918
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.3022</b>	<b>0.3239</b>	<b>0.3470</b>	<b>0.3716</b>	<b>0.4115</b>	<b>0.4869</b>
3	3D [Zen2007]	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2912	0.3118	0.3337	0.3571	0.3954	0.4673
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2920	0.3127	0.3347	0.3582	0.3964	0.4688
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2887</b>	<b>0.3090</b>	<b>0.3307</b>	<b>0.3538</b>	<b>0.3915</b>	<b>0.4629</b>
4	3D [Zen2007]	0.2974	0.3186	0.3412	0.3653	0.4045	0.4786
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2834	0.3032	0.3243	0.3469	0.3839	0.4537
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2843	0.3042	0.3254	0.3481	0.3850	0.4554
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2807</b>	<b>0.3002</b>	<b>0.3211</b>	<b>0.3434</b>	<b>0.3798</b>	<b>0.4490</b>
5	3D [Zen2007]	0.2935	0.3144	0.3366	0.3603	0.3988	0.4719
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2789	0.2983	0.3191	0.3412	0.3776	0.4461
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2799	0.2994	0.3202	0.3424	0.3787	0.4478
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2762</b>	<b>0.2953</b>	<b>0.3157</b>	<b>0.3376</b>	<b>0.3732</b>	<b>0.4413</b>
6	3D [Zen2007]	0.2912	0.3118	0.3339	0.3573	0.3955	0.4679
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2763	0.2954	0.3159	0.3378	0.3737	0.4416
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2772	0.2965	0.3171	0.3390	0.3749	0.4433
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2735</b>	<b>0.2923</b>	<b>0.3125</b>	<b>0.3341</b>	<b>0.3694</b>	<b>0.4367</b>

**Tableau V.7 :** Comparaison de la contrainte adimensionnelle  $\sigma_y$  d'une plaque carrée en E-FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement ( $b/a$ ) avec  $a/h=4$  et «  $k$  »

b/a	Theory	k					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	3D [Zen2007]	0.2247	0.2399	0.2562	0.2736	0.3018	0.3588
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2237	0.2391	0.2554	0.2729	0.3014	0.3556
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2244	0.2398	0.2563	0.2738	0.3024	0.3567
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2216</b>	<b>0.2368</b>	<b>0.2530</b>	<b>0.2702</b>	<b>0.2984</b>	<b>0.3521</b>
2	3D [Zen2007]	0.2431	0.2591	0.2762	0.2943	0.3238	0.3797
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2395	0.2550	0.2715	0.2894	0.3187	0.3756
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2407	0.2563	0.2730	0.2909	0.3204	0.3776
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2359</b>	<b>0.2510</b>	<b>0.2673</b>	<b>0.2847</b>	<b>0.3135</b>	<b>0.3696</b>
3	3D [Zen2007]	0.2319	0.2469	0.2629	0.2800	0.3077	0.3602
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2272	0.2414	0.2566	0.2731	0.3004	0.3540
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2286	0.2429	0.2583	0.2749	0.3024	0.3563
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2231</b>	<b>0.2369</b>	<b>0.2517</b>	<b>0.2678</b>	<b>0.2946</b>	<b>0.3472</b>
4	3D [Zen2007]	0.2206	0.2348	0.2498	0.2659	0.2920	0.3413
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2196	0.2330	0.2475	0.2633	0.2894	0.3411
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2167	0.2299	0.2442	0.2596	0.2854	0.3362
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2153</b>	<b>0.2283</b>	<b>0.2424</b>	<b>0.2577</b>	<b>0.2833</b>	<b>0.3339</b>
5	3D [Zen2007]	0.2206	0.2348	0.2498	0.2659	0.2920	0.3413
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2152	0.2283	0.2424	0.2577	0.2832	0.3337
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2167	0.2299	0.2442	0.2596	0.2854	0.3362
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2108</b>	<b>0.2235</b>	<b>0.2372</b>	<b>0.2520</b>	<b>0.2769</b>	<b>0.3264</b>
6	3D [Zen2007]	0.2181	0.2321	0.2470	0.2628	0.2886	0.3373
	Quasi-3D [Man2013a]	0.2127	0.2255	0.2393	0.2544	0.2795	0.3294
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2141	0.2271	0.2411	0.2563	0.2817	0.3319
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2082</b>	<b>0.2206</b>	<b>0.2340</b>	<b>0.2486</b>	<b>0.2731</b>	<b>0.3220</b>

**Tableau V.8:** Comparaison de la contrainte adimensionnelle  $\sigma_y$  d'une plaque carrée en E-FGM sous chargement sinusoïdal en fonction d'allongement ( $b/a$ ) avec  $a/h=4$  et «  $k$  »

b/a	Theory	k					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	Quasi-3D [Man2012b]	0.2063	0.2199	0.2344	0.2499	0.2753	0.3240
	HSDT [Man2012b]	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2071	0.2208	0.2354	0.2510	0.2765	0.3254
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2038</b>	<b>0.2171</b>	<b>0.2314</b>	<b>0.2467</b>	<b>0.2717</b>	<b>0.3198</b>
2	Quasi-3D [Man2012b]	0.2223	0.2360	0.2507	0.2666	0.2930	0.3447
	HSDT [Man2012b]	0.2225	0.2378	0.2541	0.2713	0.2993	0.3521
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2236	0.2375	0.2523	0.2684	0.2950	0.3470
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2182</b>	<b>0.2315</b>	<b>0.2459</b>	<b>0.2614</b>	<b>0.2872</b>	<b>0.3381</b>
3	Quasi-3D [Man2012b]	0.2099	0.2224	0.2358	0.2504	0.2748	0.3233
	HSDT [Man2012b]	0.2104	0.2248	0.2402	0.2565	0.2829	0.3328
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2115	0.2240	0.2377	0.2524	0.2770	0.3258
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.2054</b>	<b>0.2174</b>	<b>0.2304</b>	<b>0.2446</b>	<b>0.2683</b>	<b>0.3158</b>
4	Quasi-3D [Man2012b]	0.2023	0.2140	0.2267	0.2406	0.2638	0.3104
	HSDT [Man2012b]	0.2028	0.2168	0.2316	0.2473	0.2728	0.3208
	Quasi-3D [Thai2014]	0.2039	0.2158	0.2286	0.2427	0.2661	0.3130
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.1975</b>	<b>0.2088</b>	<b>0.2210</b>	<b>0.2344</b>	<b>0.2570</b>	<b>0.3025</b>
5	Quasi-3D [Man2012b]	0.1980	0.2093	0.2216	0.2350	0.2577	0.3031
	HSDT [Man2012b]	0.1985	0.2122	0.2267	0.2421	0.2670	0.3140
	Quasi-3D [Thai2014]	0.1996	0.2111	0.2236	0.2372	0.2600	0.3058
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.1931</b>	<b>0.2039</b>	<b>0.2158</b>	<b>0.2288</b>	<b>0.2507</b>	<b>0.2951</b>
6	Quasi-3D [Man2012b]	0.1954	0.2065	0.2185	0.2317	0.2540	0.2988
	HSDT [Man2012b]	0.1960	0.2094	0.2237	0.2389	0.2635	0.3100
	Quasi-3D [Thai2014]	0.1970	0.2083	0.2205	0.2339	0.2563	0.3015
	<b>Présente théorie</b>	<b>0.1904</b>	<b>0.2011</b>	<b>0.2127</b>	<b>0.2254</b>	<b>0.2469</b>	<b>0.2906</b>

**Exemple 06 :** plaque en P-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> épaisse:

L'exemple présenté ici s'agit d'une plaque carrée simplement appuyée, chargée par un chargement sinusoïdal en matériau à gradient de propriétés de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, le modèle choisi pour évaluer le module d'Young c'est le modèle de la loi des puissances P-FGM.

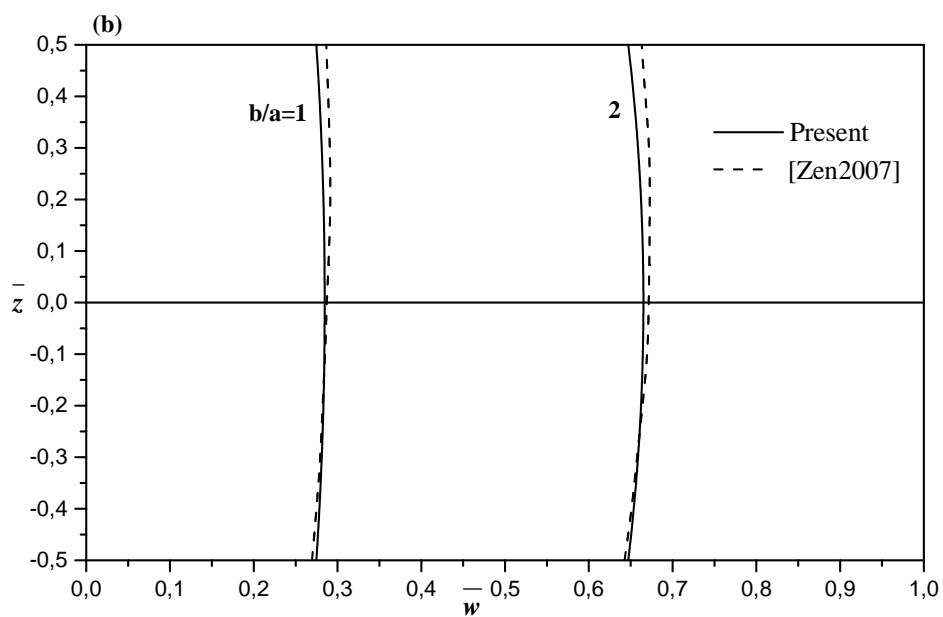
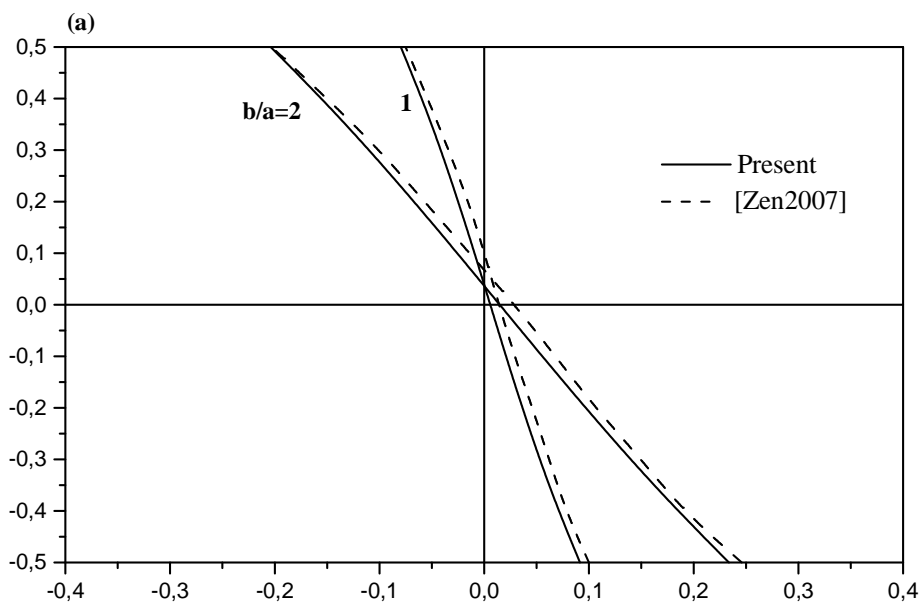
Le but de cet exemple est de montrer la performance de notre modèle dans le cas des plaques épaisses en P-FGM, les résultats en terme de flèche et des contraintes trouvées sont présentés dans le tableau (V.9) , l'exemple est traité par Benyoucef et al [Ben2010] et Zenkour [Zen2013], [Zen2006] d'où ils basent sur les théories des plaques d'ordre supérieur, le cas où l'effet de l'étirement de l'épaisseur est négligé , nous observons un accord satisfaisant entre les résultats obtenus avec les résultats présentés par le modèle Quasi-3D de Zenkour [Zen2013], nous notons aussi que les résultats obtenus sont sensibles aux différentes valeurs de l'indice matériel « k » , évidemment sont presque identique dans le cas isotrope (métal ou céramique) , par la suite il faut estimer correctement l'hétérogénéité des plaques FGM pour l'obtention des résultats suffisamment fiables et précis.

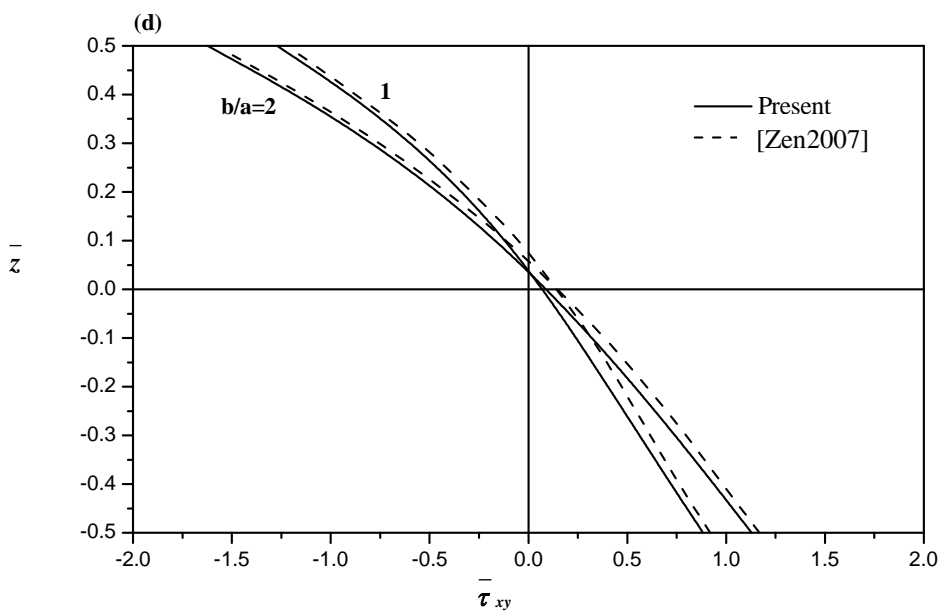
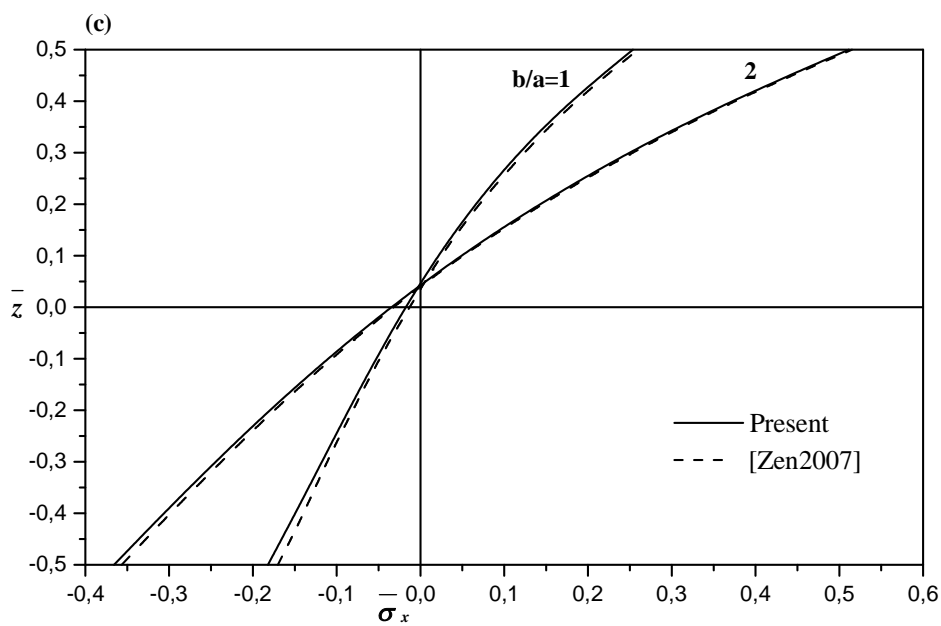
La dispersion remarquable dans les résultats obtenus pour le cas de deux théories d'ordre supérieur dues à la négligence de l'effet de l'étirement de l'épaisseur et il est clairement souligné dans l'évaluation des contraintes. En effet, dans le cas des plaques épaisses en FGM, il faut exprimer une formulation qui prise en compte l'effet de cisaillement transversal ainsi que d'introduire la déformation normale  $\varepsilon_z$  présenté par l'effet de l'étirement de l'épaisseur , surtout dans les cas où l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés recommande une précision et une grande prudence de leurs mises en service notamment les domaines nucléaires et l'aérospatial.

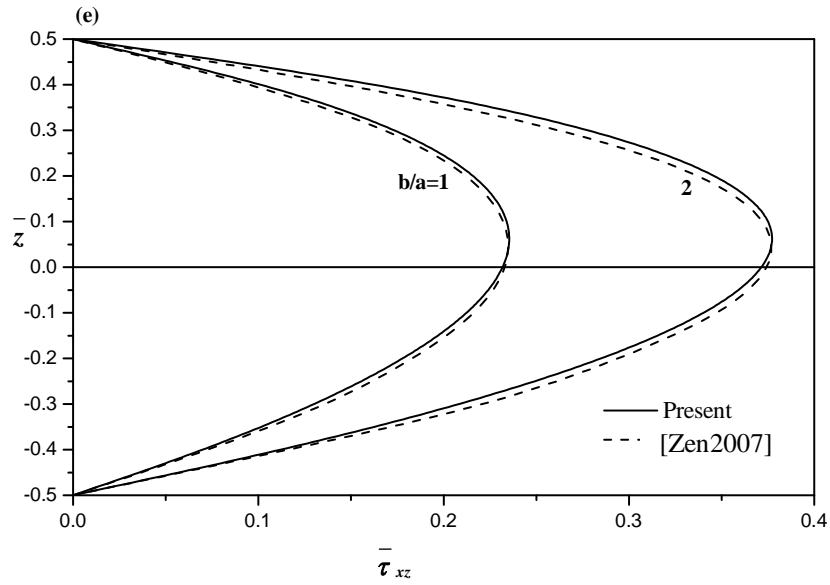
**Tableau V.9 :** l'effet de la variation du matériau à travers l'épaisseur sur la flèche et les contraintes d'une plaque carrée en P-FGM avec  $a/h=10$ .

k	Théorie	$\varepsilon_z$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$
céramique	HSDT [Ben2010]	= 0	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.2936	2.0211	1.3240	0.6932
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.2942</b>	<b>1.9742</b>	<b>1.3261</b>	<b>0.7010</b>
1	HSDT [Ben2010]	= 0	0.5889	3.0870	1.4894	0.6110
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.5889	3.0870	1.4894	0.6110
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.5684	3.1022	1.4647	0.5618
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.5695</b>	<b>3.0231</b>	<b>1.4677</b>	<b>0.5660</b>
2	HSDT [Ben2010]	= 0	0.7572	3.6094	1.3954	0.5441
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.7573	3.6094	1.3954	0.5441
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.7224	3.6032	1.3509	0.4940
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.7225</b>	<b>3.5424</b>	<b>1.3643</b>	<b>0.4947</b>
3	HSDT [Ben2010]	= 0	0.8372	3.8742	1.2748	0.5525
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.8377	3.8742	1.2748	0.5525
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.7977	3.8407	1.2218	0.5028
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.7981</b>	<b>3.8002</b>	<b>1.2412</b>	<b>0.5010</b>
4	HSDT [Ben2010]	= 0	0.8810	4.0693	1.1783	0.5667
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.8819	4.0693	1.1783	0.5667
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.8411	4.0129	1.1241	0.5184
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.8423</b>	<b>3.9874</b>	<b>1.1460</b>	<b>0.5149</b>
5	HSDT [Ben2010]	= 0	0.9108	4.2488	1.1029	0.5755
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.9118	4.2488	1.1029	0.5755
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.8720	4.1760	1.0510	0.5292
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.8739</b>	<b>4.1602</b>	<b>1.0735</b>	<b>0.5247</b>
6	HSDT [Ben2010]	= 0	0.9345	4.4244	1.0417	0.5803
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.9356	4.4244	1.0417	0.5803
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.8974	4.3405	0.9934	0.5365
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.8999</b>	<b>4.3304</b>	<b>1.0155</b>	<b>0.5312</b>
7	HSDT [Ben2010]	= 0	0.9552	4.5971	0.9903	0.5834
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.9562	4.5971	0.9903	0.5834
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.9199	4.5062	0.9460	0.5419
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.9227</b>	<b>4.4989</b>	<b>0.9673</b>	<b>0.5361</b>
8	HSDT [Ben2010]	= 0	0.9741	4.7661	0.9466	0.5856
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.9750	4.7661	0.9466	0.5856
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.9407	4.6712	0.9062	0.5462
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.9436</b>	<b>4.6646</b>	<b>0.9265</b>	<b>0.5401</b>
9	HSDT [Ben2010]	= 0	0.9917	4.9303	0.9092	0.5875
	SSDT [Zen2006]	= 0	0.9925	4.9303	0.9092	0.5875
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.9602	4.8334	0.8723	0.5501
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>0.9630</b>	<b>4.8262</b>	<b>0.8917</b>	0.5438
10	HSDT [Ben2010]	= 0	1.0083	5.0890	0.8775	0.5894
	SSDT [Zen2006]	= 0	1.0089	5.0890	0.8775	0.5894
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	0.9786	4.9916	0.8438	0.5536
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	0.9812	4.9828	0.8622	0.5473
Métal	HSDT [Ben2010]	= 0	1.6071	1.9955	1.3121	0.7065
	SSDT [Zen2006]	= 0	1.6070	1.9955	1.3121	0.7065
	Quasi-3D [Zen2013]	≠ 0	1.5938	2.0211	1.3240	0.6932
	<b>Présente théorie</b>	≠ 0	<b>1.5971</b>	<b>1.9742</b>	<b>1.3261</b>	<b>0.7010</b>









**Fig. V.1:** Variation des déplacements et des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques carrées en E-FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $a/h = 4$ ,  $k = 0.5$ ):

- (a) Déplacement axial  $\bar{u}$ ,
- (b) La flèche  $\bar{w}$
- (c) La contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$ ,
- (d) La contrainte longitudinale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xy}$ ,
- (e) La contrainte longitudinale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$ .

### V.3.b) Validation en analyse dynamique :

Nous avons montré la précision et l'efficacité de la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale à travers les exemples en étude statique, cette motivation nous conduit à étendre notre étude au cas des vibrations libres, les testes présentés dans cette section, sont fréquemment utilisés par les chercheurs et servent aussi à tester l'amplitude de notre théorie proposée, afin d'augurer favorablement sur les autres recommandations liées à cette nouvelle théorie.

**Exemple 01 :** vibration libre plaque isotrope simplement appuyée avec  $a/h=10$  :

Dans le premier temps, nous considérons une plaque isotrope carrée simplement appuyée, modérément épaisse dont le rapport d'épaisseur égal à  $a/h=10$ , cette vérification sert à présenter la précision de la nouvelle théorie Quasi-3D dans le cas des vibrations libres des plaques isotropes, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par les solutions 3D dans les travaux de Srinivas et al [Sri1970b], Whitney et Pagano [Whi1970] et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur obtenue par Reddy et Phan [Red1985], les premières fréquences propres adimensionnelles sont présentées dans le tableau (V.10)

$m$	$n$	Présente théorie $\varepsilon_z \neq 0$	Srinivas et al. [Sri1970b]	Reddy et Phan [Red1985]	Whitney et Pagano [Whi1970]
1	1	0.0932	0.0932	0.0931	0.0930
1	2	0.2229	0.2226	0.2222	0.2220
2	2	0.3425	0.3421	0.3411	0.3406
1	3	0.4178	0.4171	0.4158	0.4149
2	3	0.5248	0.5239	0.5221	0.5206
3	3	0.6904	0.6889	0.6862	0.6834
2	4	0.7528	0.7511	0.7481	0.7447
1	5	0.9294	0.9268	0.9230	0.9174
4	4	1.0924	1.0889	1.0847	1.0764

**Tableau V.10:** les fréquences fondamentales  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  pour une plaque isotrope avec  $\nu = 0.3$ ,  $a/h = 10$  et  $a/b = 1$

**Exemple 02:** analyse vibration libre des plaques minces et épaisses en MT-FGM de type Al/ ZrO<sub>2</sub>

La première vérification est réservée pour les plaques carrées minces et épaisses en FGM de type Al/ZrO<sub>2</sub>. Cet exemple est réservé à vérifier les résultats obtenus avec les solutions 3D de Vel et Batra [Vel2004] et les solutions Quasi-3D obtenues par Neves *et al.* [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013].

Le module d'Young est évalué en utilisant le schéma de l'homogénéisation de *Mori-Tanaka*

Cette approche a été aussi utilisée par plusieurs autres chercheurs et elle est applicable dans les zones des microstructures squelettiques lesquelles possèdent une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue. Leurs modèles tiennent en compte l'interaction robustesse et suffisante de champ élastique entre les inclusions adjacentes.

La fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\beta}$  est donnée dans le tableau (V.11) pour diverses valeurs de rapport de l'épaisseur et l'indice du modèle de Mori-Tanaka. Il est évident que les présents calculs sont dans un excellent accord avec les solutions de l'élasticité 3D [Vel2004] ainsi les solutions Quasi-3D [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013].

**Exemple 03** : étude des plaques minces et épaisses en analyse des vibrations libres en P-FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Le deuxième exemple s'agit d'analyser les plaques carrées minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, avec un rapport d'épaisseur varié de 5 à 20 et l'indice pris en compte est varié entre 0 à 10.

Les fréquences adimensionnelles  $\hat{\omega}$  prédites par la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) [Hos2011a], de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT [Hos2011b], et la présente théorie sont comparées et illustrées dans le tableau **Tableau (V.12)**.

**Le Tableau (V.12)** montre que les calculs basés sur la présente théorie sont autrefois dans un excellent accord avec ceux prédits par TSDT [Hos2011a] pour tous les modes de vibration.

Il est confirmé que le modèle de troisième ordre contient un nombre supérieur des inconnus à ceux qui d'associés avec la présente théorie.

Une petite différence entre les présents résultats et ceux prédits par TSDT [Hos2011a], elle est due à la négligence de l'effet de déformation normale à travers l'épaisseur par la théorie de troisième ordre TSDT [Hos2011a].

Les figures **Fig.V.2** et **Fig.V.3** montrent la variation de la fréquence adimensionnelle correspondante à l'indice de la loi des puissances  $k$  et le rapport d'épaisseur  $a/h$  respectivement. Dans ces figures (**Figs. V.2 et V.3**), les paramètres de la fréquence propre des

plaques en FGM sont calculés utilisant la théorie classique CPT, théorie de premier ordre FSDT, théorie de troisième ordre et la présente théorie.

Il est remarquable que la présente théorie et la théorie de troisième ordre atteignent des résultats presque identiques pour toutes les valeurs de l'indice de la loi des puissances  $k$  (cf. Fig. V.2) et le rapport d'épaisseur  $a/h$  (cf. Fig. V.3).

Puisque le modèle de la théorie classique des plaques omet les effets de déformation de cisaillement, par conséquent, il est visible les sous-estimations de la fréquence des plaques épaisses (**Fig. V.2**).

théorie	$k = 0$		$k = 1$			$a/h = 5$		
	$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
3D [Vel2004]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Quasi-3D [Nev2012a]	/	/	0.2193	0.0596	0.0153	0.2198	0.2212	0.2225
Quasi-3D [Nev2012b]	/	/	0.2193	0.0596	0.0153	0.2201	0.2216	0.2230
Quasi-3D [Nev2013]	/	/	0.2193	/	/	0.2200	0.2215	0.2230
Présente théorie	0.4659	0.0578	0.2192	0.0597	0.0153	0.2201	0.2214	0.2225

**Tableau V.11** : Comparaison des cinq premières fréquences propres d'une plaque carrée en MT-FGM

**Exemple 04** : Vibration libre des plaques épaisses en P-FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Dans l'ordre de vérifier la précision de la présente théorie pour les plaques en FGM avec forte épaisseur, une plaque carrée en FGM de type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec le rapport d'épaisseur  $a/h$  varié de 2 à 10 est maintenant examinée. Le **tableau V.13** montre les deux premières fréquences adimensionnelles  $\hat{\omega}$  pour diverses valeurs de rapport d'épaisseur et l'indice de la loi des puissances.

Nous marquons que les solutions quasi-3D données par Matsunaga [Mat2008] sont obtenues basant sur les concepts de la formulation unifiée de Carrera dans laquelle les deux déplacements, dans le plan et transversaux, sont étendus comme des variations d'ordre supérieur à travers l'épaisseur de la plaque. Une fois encore, les résultats obtenus sont établis pour correspondre à titre exceptionnel avec les solutions Quasi-3D [Mat2008] pour tous les modes de vibration, même pour les plaques avec forte épaisseur ( $a/h=2$ ).

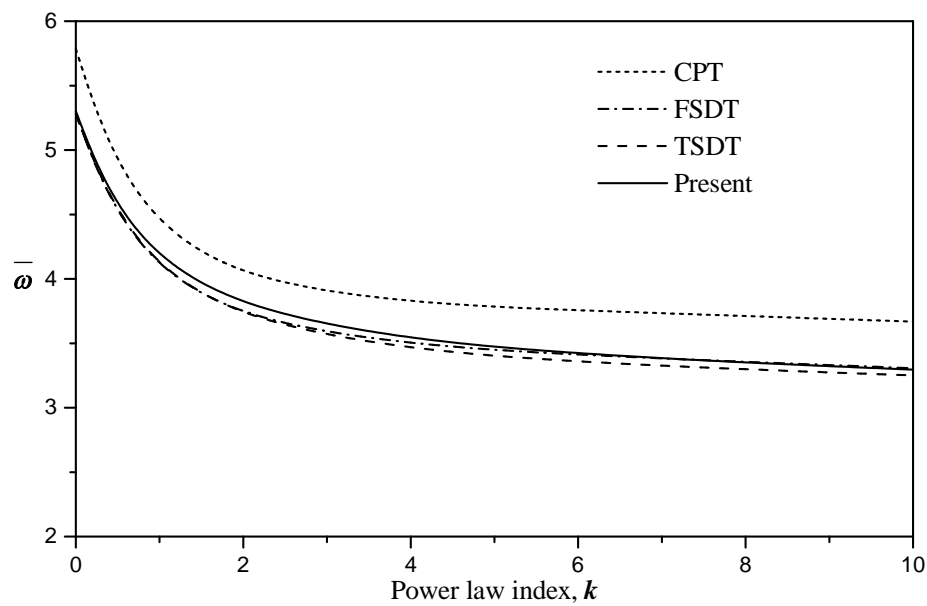
$a/h$	Mode ( $m,n$ )	théorie	Power law index ( $k$ )				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	TSDT [Hos2011a]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [Hos2011b]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Présente théorie	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	2(1,2)	TSDT [Hos2011a]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT [Hos2011b]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Présente théorie	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
	3(2,2)	TSDT [Hos2011a]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT [Hos2011b]	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Présente théorie	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
10	1(1,1)	TSDT [Hos2011a]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT [Hos2011b]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Présente théorie	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	2(1,2)	TSDT [Hos2011a]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT [Hos2011b]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Présente théorie	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
	3(2,2)	TSDT [Hos2011a]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [Hos2011b]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Présente théorie	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
20	1(1,1)	TSDT [Hos2011a]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT [Hos2011b]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Présente théorie	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

**Tableau V.12 :** Comparaison des trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction de la ration d'épaisseur  $a/h$

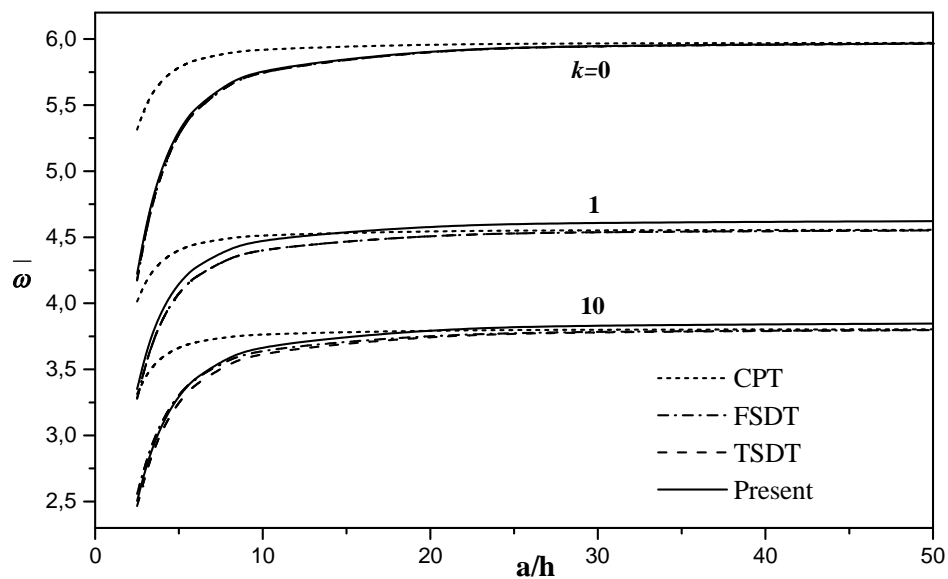
Mode	$a/h$	Méthode	$k$				
			0	0.5	1	4	10
1	2	Matsunaga [75]	0.9400	0.8233	0.7477	0.5997	0.5460
		Présent	0.9414	0.8248	0.7516	0.6056	0.5495
	5	Matsunaga [75]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Présent	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
	10	Matsunaga [75]	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		Présent	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
2	2	Matsunaga [75]	1.7406	1.5425	1.4078	1.1040	0.9847
		Présent	1.7512	1.5798	1.4164	1.1147	0.9958
	5	Matsunaga [75]	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		Présent	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
	10	Matsunaga [75]	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		Présent	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868

**Tableau V.13 :** Comparaison des deux premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction de la ration d'épaisseur  $a/h$





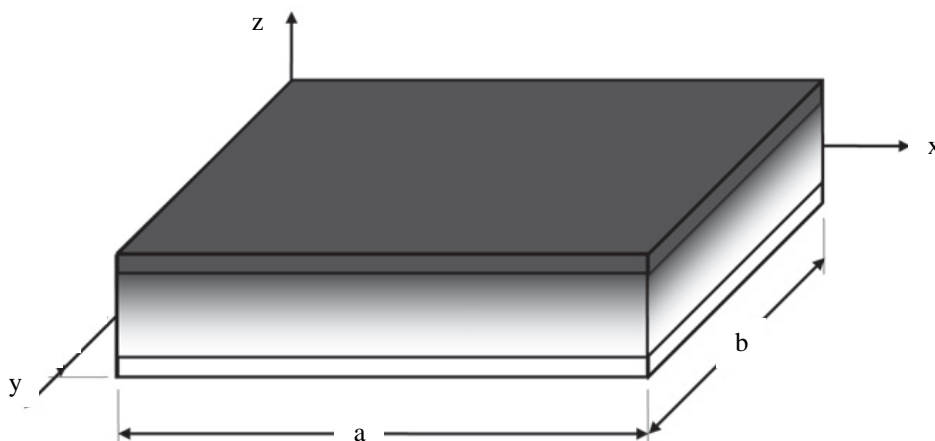
**Fig. V.2:** variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction de l'indice des lois des puissances  $k$  pour des plaques carrées en FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $a/h = 5$ ).



**Fig. V.3:** variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction de rapport de l'épaisseur  $a/h$  pour des plaques carrées en FGM type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

### V.3.3) Validation pour le cas statique des plaques sandwich :

Dans le but d'une meilleure qualification de notre modèle, nous avons étudié une plaque carrée sandwich suivante :



**Fig. V.4:** description géométrique d'une plaque sandwich en FGM.

D'où les peaux sont en matériau homogène : la face supérieure en céramique et la face inférieure en métal (Al) et le cœur en P-FGM  $Al/Al_2O_3$ , la répartition des épaisseurs est considérée par :

$h_B$  : épaisseur de la face inférieure égale à 0.1 h en Métal (Al)

$h_C$  : épaisseur du cœur égale à 0.8 h en P-FGM

$h_T$  : épaisseur de la face supérieure égale à 0.1 h en Céramique ( $Al_2O_3$ )

Cette plaque est émotionnée dans la littérature par le type **1-8-1**.

Nous adoptons le modèle des lois des puissances pour évaluer le module d'Young à travers l'épaisseur du cœur, Les résultats acquis en termes de flèche et de contrainte transversale  $\sigma_{xz}$  sont montrés dans le tableau (V.14).

La stratification de la plaque sandwich est une condition supplémentaire sur les propriétés matériels à travers l'épaisseur, nous pouvons introduire notre modèle développé dans cette étude pour résoudre de façon fiable et exacte les mêmes problèmes traités par d'autres auteurs avec un nombre faible des inconnus et on prend on considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par l'approche Quasi-3D de Neves et al [Nev2012b], [Nev2013], Carrera et al [Car2011a] et Thaï et al [Tha2013b], nous indiquons que les solutions apportées par Neves et al [Nev2012b], [Nev2013] et Carrera et al [Nev2013] sont basés sur la formulation unifiée de Carrera et Thaï et al [Tha2013b]

utilise une théorie d'ordre supérieur avec une distribution sinusoïdale du champ de cisaillement. Il est souligné que les résultats sont légèrement différents et en bon accord avec ceux obtenus avec Thaï et al [Tha2013b]. Au stade de la première comparaison, le cas des plaques avec forte épaisseur ( $a/h = 4$ ), il est remarquable que notre modèle présente des résultats satisfaisants, cette confirmation est un résultat aux descriptions correctes du champ de cisaillement et l'inclusion de l'effet de l'étirement de l'épaisseur qui influe d'une façon directe sur le comportement global des plaques en FGM, alors en résumé, nous distinguons que la précision et la performance de notre modèle est confirmé pour les cas des plaques épaisses en FGM.

La deuxième partie s'agit d'étendre notre analyse aux plaques minces en FGM, nous remarquons qu'il y a une légère différence sur les résultats obtenus, dans cette circonstance, afin de comprendre l'influence d'effet de l'étirement de l'épaisseur, en même synthétique, il est recommandé d'analyser ces cas par une théorie classique ou par la théorie de premier ordre pour éviter la complexité d'appliquer les théories d'ordre supérieur ou Quasi-3D. D'une façon générale, dans les cas des plaques minces, il est inutile d'introduire les théories qui prises en compte l'effet de cisaillement transversal parce qu'il porte un effet pratiquement faible sur le comportement global de ces plaques et seulement le modèle classique est largement suffisant pour analyser ces cas.

**Tableau V.14 :** Comparaison de la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque sandwich carrée en P-FGM  $Al/Al_2O_3$  sous chargement sinusoïdal

$k$	théorie	$\bar{\sigma}_{xz}(a/2, b/2, h/3)$			$\bar{w}(a/2, b/2, 2,0)$		
		$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$
1	Quasi-3D [Nev2012b]	0.2596	0.2593	0.2593	0.7416	0.6305	0.6092
	Quasi-3D [Nev2013]	0.2233	0.2271	0.2274	0.7417	0.6305	0.6093
	Quasi-3D [Car2011a]	0.2742	0.2788	0.2793	0.7735	0.6337	0.6072
	Quasi-3D [Tha2013b]	0.2719	0.273	0.2732	0.7252	0.6041	0.5808
	<b>Présente théorie</b>	0.2710	0.2721	0.2721	0.7277	0.6060	0.5827
4	Quasi-3D [Nev2012b]	0.2723	0.2778	0.2785	1.0391	0.8202	0.7784
	Quasi-3D [Nev2013]	0.3154	0.3219	0.3230	1.0349	0.8195	0.7785
	Quasi-3D [Car2011a]	0.2400	0.2398	0.2398	1.0977	0.8308	0.7797
	Quasi-3D [Tha2013b]	0.2648	0.2664	0.2667	1.0166	0.7795	0.734
	<b>Présente théorie</b>	0.2580	0.2595	0.2595	1.0157	0.7815	0.7368
10	Quasi-3D [Nev2012b]	0.2016	0.2059	0.2064	1.1780	0.8650	0.8050
	Quasi-3D [Nev2013]	0.2945	0.3000	0.3004	1.1720	0.8639	0.8050
	Quasi-3D [Car2011a]	0.1935	0.1944	0.1946	1.2240	0.8743	0.8077
	Quasi-3D [Tha2013b]	0.1944	0.1958	0.196	1.157	0.8318	0.7694
	<b>Présente théorie</b>	0.1887	0.1898	0.1898	1.1519	0.8311	0.7698

#### V.3.4) Comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle des lois des puissances:

À travers les résultats obtenus précédemment, nous confirmons la précision et la puissance de notre nouvelle théorie et aussi elle présente des résultats qualitatifs avec les différents modèles choisis pour évaluer les paramètres matériels. Ces motivations nous permettent à effectuer une étude paramétrique consacrée à comparer les résultats obtenus par les deux modèles :

Modèle des lois de puissances et le modèle présenté par Mori-Tanaka, vu à la situation proche entre ces deux modèles. Récemment, cette étude est déjà entamée par Akbarzadeh et al [Akbar2015], dans ce travail, Akbarzadeh et al ont été utilisé une théorie de troisième ordre de Reddy [Red2000] avec une confrontation entre les différentes méthodes de l'homogénéisation matérielle pour le cas statique des plaques à gradient de propriétés.

Avant même de présenter les résultats de la comparaison entre ces deux modèles, il nécessite de donner une brève introduction à quoi s'agit-il ces deux modèles :

- Le modèle des lois des puissances est extrêmement utilisé dans l'évaluation des paramètres physiques et mécaniques des matériaux à gradient de propriétés, l'avantage dédié par ce modèle est de sa facilité et de sa simplicité d'évaluer ces paramètres à travers l'épaisseur.
- Le modèle de Mori-Tanaka est généralement utilisé pour évaluer les caractéristiques matérielles pour les plaques avec hétérogénéité organisée (dans leurs structures), ce modèle est pour le premier temps utilisé pour les plaques composites laminées afin de l'exprimer pour le cas des plaques à gradient de propriétés.
- Les deux méthodes différentes par la méthode d'évaluer les paramètres matériels à travers l'épaisseur, alors que le modèle de Mori-Tanaka tient en compte le coefficient de poisson comme un paramètre d'évaluer le module d'Young par contre le modèle de la loi des puissances qui utilise une fonction polynomiale pour donner la variation du module d'Young à travers l'épaisseur.
- Pour le cas où le matériau est parfaitement isotrope les deux modèles donnent la même évaluation
- Dans l'homogénéisation à travers l'épaisseur, le modèle P-FGM présente une variation continue et graduée qui offre un avantage pour déterminer l'axe neutre de la plaque en FGM, dans le modèle de Mori-Tanaka vu à leur approche utilisée, on peut souligner que l'axe neutre est difficilement évaluer dû à la distribution optée et aussi le cas d'application qu'il est généralement correct dans les cas des plaques en FGM structurées.

### V.3.4.a) Comparaison pour le cas statique :

Aux premiers instants, nous avons effectué une étude statique et les résultats obtenus s'expriment en termes de flèche et des contraintes pour deux types de plaque en FGM dont la variation optée en fonction de l'épaisseur, l'allongement et l'indice matériel «  $k$  ». Le premier type s'agit d'une plaque en FGM de type  $Al/Al_2O_3$  dont les modules d'Young sont largement différents, notamment le module d'Young de métal égal à  $E_m=70$  GPa et pour la céramique égale à  $E_c=380$  GPa.

Pour le deuxième type, c'est une plaque en FGM  $Al/ZrO_2$  dont leurs modules égalent correspondant,  $E_m=70$  GPa et  $E_c=200$  GPa, dans ce type nous remarquons que les modules d'Young sont légèrement proches.

L'objectif principal de cette étude est de confronter les évolutions des flèches et des contraintes de flexion obtenues par les deux modèles d'homogénéisation ; celles de la loi des puissances et celles obtenues par le Schéma de Mori-Tanaka. L'adéquation entre ces résultats permettrait de valider les hypothèses retenues et de donner des contributions pour les modèles choisis.

Les résultats obtenus pour le premier cas sont montrés dans le tableau (V.15) pour la flèche et dans les tableaux (V.16- V.17) pour les contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , après l'interprétation de ces résultats obtenus, nous remarquons une adéquation parfaite pour les cas isotropes, notamment pour les valeurs de l'indice matériel  $k=0$  et  $k=\infty$ , pour les autres variations, on souligne un désaccord entre les résultats obtenus et varie relativement en fonction d'allongement de l'épaisseur, ce désaccord augmente légèrement lorsqu'on augmente le rapport  $b/h$  et concédé modère pour le cas d'une plaque carrée, il n'est alors pas une explication que la flèche ainsi que les contraintes sont aussi importantes dans les plaques rectangulaires que les plaques carrées. Nous remarquons aussi dans le voisinage (l'indice matériel  $k$ ) de l'isotropie la différence garde une tendance faible par rapport les autres cas. Ça dépend des paramètres introduits dans ces modèles et leurs influences sont clairement présentées dans les résultats obtenus.

Pour les plaques minces, nous observons une dissemblance faible vue à l'effet de cisaillement qu'il est faible pour ces plaques vis-à-vis les plaques épaisses, la présence de l'effet de cisaillement transversal est important par l'importance de l'épaisseur. Cette considération est une conclusion aussi pour la distribution et l'évaluation de module d'Young à travers l'épaisseur.

a/h	b/a	Méthode	k						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
2	1	Quasi 3D P-FGM	0.6084	1.1001	1.4734	1.7498	2.1229	2.5303	3.3026
		Quasi 3D MT-FGM	0.6084	1.5574	1.9918	2.2480	2.5247	2.7831	3.3026
	2	Quasi 3D P-FGM	1.2561	2.3074	3.0498	3.5625	4.2297	4.9831	6.8191
		Quasi 3D MT-FGM	1.2561	3.1941	4.0134	4.4881	5.0135	5.5551	6.8191
	4	Quasi 3D P-FGM	1.6307	3.0114	3.9632	4.6039	5.4251	6.3646	8.8526
		Quasi 3D MT-FGM	1.6307	4.1379	5.1678	5.7602	6.4222	7.1283	8.8526
5	1	Quasi 3D P-FGM	0.3358	0.6397	0.8214	0.9232	1.0379	1.1846	1.8227
		Quasi 3D MT-FGM	0.3358	0.8419	1.0131	1.1063	1.2180	1.3666	1.8227
	2	Quasi 3D P-FGM	0.8065	1.5480	1.9767	2.2038	2.4479	2.7730	4.3783
		Quasi 3D MT-FGM	0.8065	2.0168	2.4046	2.6117	2.8656	3.2243	4.3783
	4	Quasi 3D P-FGM	1.0979	2.1115	2.6920	2.9948	3.3154	3.7479	5.9600
		Quasi 3D MT-FGM	1.0979	2.7433	3.2625	3.5382	3.8785	4.3675	5.9600
10	1	Quasi 3D P-FGM	0.2942	0.5695	0.7225	0.7981	0.8739	0.9812	1.5971
		Quasi 3D MT-FGM	0.2942	0.7333	0.8649	0.9335	1.0201	1.1517	1.5971
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7397	1.4352	1.8176	2.0027	2.1844	2.4462	4.0156
		Quasi 3D MT-FGM	0.7397	1.8423	2.1665	2.3340	2.5477	2.8789	4.0156
	4	Quasi 3D P-FGM	1.0192	1.9786	2.5046	2.7579	3.0051	3.3631	5.5328
		Quasi 3D MT-FGM	1.0192	2.5378	2.9820	3.2112	3.5041	3.9606	5.5328
100	1	Quasi 3D P-FGM	0.2803	0.5461	0.6895	0.7564	0.8193	0.9135	1.5218
		Quasi 3D MT-FGM	0.2803	0.6972	0.8156	0.8760	0.9542	1.0801	1.5218
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7175	1.3977	1.7647	1.9359	2.0970	2.3378	3.8952
		Quasi 3D MT-FGM	0.7175	1.7844	2.0874	2.2419	2.4421	2.7642	3.8952
	4	Quasi 3D P-FGM	0.9931	1.9345	2.4424	2.6794	2.9022	3.2355	5.3910
		Quasi 3D MT-FGM	0.9931	2.4696	2.8890	3.1028	3.3799	3.8257	5.3910

**Tableau V.15 :** Comparaison de la flèche adimensionnelle des plaques en FG  $Al/Al_2O_3$  sous charge sinusoïdale avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

a/h	b/a	Méthode	k						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
2	1	Quasi 3D P-FGM	0.2605	0.2867	0.2494	0.2104	0.1605	0.1184	0.2605
		Quasi 3D MT-FGM	0.2605	0.2273	0.1791	0.1562	0.1398	0.1393	0.2605
	2	Quasi 3D P-FGM	0.5329	0.5922	0.5320	0.4652	0.3770	0.2895	0.5329
		Quasi 3D MT-FGM	0.5329	0.4901	0.4042	0.3612	0.3264	0.3168	0.5329
	4	Quasi 3D P-FGM	0.6960	0.7777	0.7048	0.6219	0.5109	0.3951	0.6960
		Quasi 3D MT-FGM	0.6960	0.6507	0.5426	0.4873	0.4409	0.4251	0.6960
5	1	Quasi 3D P-FGM	0.6629	0.7337	0.6768	0.6107	0.5216	0.4157	0.6629
		Quasi 3D MT-FGM	0.6629	0.6307	0.5418	0.4948	0.4523	0.4314	0.6629
	2	Quasi 3D P-FGM	1.3914	1.5668	1.4600	1.3278	1.1430	0.9095	1.3914
		Quasi 3D MT-FGM	1.3914	1.3608	1.1777	1.0775	0.9824	0.9286	1.3914
	4	Quasi 3D P-FGM	1.8225	2.0645	1.9294	1.7583	1.5164	1.2056	1.8225
		Quasi 3D MT-FGM	1.8225	1.7981	1.5591	1.4268	1.2996	1.2251	1.8225
10	1	Quasi 3D P-FGM	1.3261	1.4677	1.3643	1.2412	1.0735	0.8622	1.3261
		Quasi 3D MT-FGM	1.3261	1.2748	1.1062	1.0155	0.9303	0.8832	1.3261
	2	Quasi 3D P-FGM	2.7975	3.1551	2.9539	2.6994	2.3403	1.8696	2.7975
		Quasi 3D MT-FGM	2.7975	2.7571	2.4002	2.2020	2.0096	1.8937	2.7975
	4	Quasi 3D P-FGM	3.6666	4.1604	3.9036	3.5718	3.0986	2.4711	3.6666
		Quasi 3D MT-FGM	3.6666	3.6421	3.1734	2.9106	2.6532	2.4943	3.6666
100	1	Quasi 3D P-FGM	13.2599	14.6762	13.6756	12.4747	10.8322	8.7215	13.2599
		Quasi 3D MT-FGM	13.2599	12.7896	11.1345	10.2383	9.3859	8.8974	13.2599
	2	Quasi 3D P-FGM	28.0226	31.6203	29.6490	27.1364	23.5802	18.8617	28.0226
		Quasi 3D MT-FGM	28.0226	27.6863	24.1475	22.1731	20.2430	19.0563	28.0226
	4	Quasi 3D P-FGM	36.7364	41.7062	39.1820	35.8987	31.2010	24.9072	36.7364
		Quasi 3D MT-FGM	36.7364	36.5711	31.9146	29.2927	26.7084	25.0880	36.7364

**Tableau V.16 :** Comparaison de la contrainte adim.  $\sigma_x$  des plaques en FG Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous charge sinusoïdale avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

a/h	b/a	Méthode	k						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
2	1	Quasi 3D P-FGM	0.2605	0.2867	0.2494	0.2104	0.1605	0.1184	0.2605
		Quasi 3D MT-FGM	0.2605	0.2273	0.1791	0.1562	0.1398	0.1393	0.2605
	2	Quasi 3D P-FGM	0.3103	0.3392	0.3009	0.2607	0.2093	0.1610	0.3103
		Quasi 3D MT-FGM	0.3103	0.2773	0.2266	0.2020	0.1830	0.1795	0.3103
	4	Quasi 3D P-FGM	0.2979	0.3209	0.2841	0.2464	0.1991	0.1550	0.2979
		Quasi 3D MT-FGM	0.2979	0.2625	0.2153	0.1928	0.1757	0.1728	0.2979
5	1	Quasi 3D P-FGM	0.6629	0.7337	0.6768	0.6107	0.5216	0.4157	0.6629
		Quasi 3D MT-FGM	0.6629	0.6307	0.5418	0.4948	0.4523	0.4314	0.6629
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7302	0.7815	0.7146	0.6426	0.5506	0.4455	0.7302
		Quasi 3D MT-FGM	0.7302	0.6684	0.5743	0.5269	0.4857	0.4683	0.7302
	4	Quasi 3D P-FGM	0.6736	0.6983	0.6315	0.5645	0.4831	0.3959	0.6736
		Quasi 3D MT-FGM	0.6736	0.5924	0.5074	0.4667	0.4336	0.4231	0.6736
10	1	Quasi 3D P-FGM	1.3261	1.4677	1.3643	1.2412	1.0735	0.8622	1.3261
		Quasi 3D MT-FGM	1.3261	1.2748	1.1062	1.0155	0.9303	0.8832	1.3261
	2	Quasi 3D P-FGM	1.4458	0.9015	1.1067	1.2802	1.4158	1.5416	1.4458
		Quasi 3D MT-FGM	1.4458	1.3274	1.1485	1.0578	0.9774	0.9405	1.4458
	4	Quasi 3D P-FGM	1.3255	1.3651	1.2385	1.1122	0.9602	0.7926	1.3255
		Quasi 3D MT-FGM	1.3255	1.1646	1.0041	0.9274	0.8640	0.8423	1.3255
100	1	Quasi 3D P-FGM	13.2599	14.6762	13.6756	12.4747	10.8322	8.7215	13.2599
		Quasi 3D MT-FGM	13.2599	12.7896	11.1345	10.2383	9.3859	8.8974	13.2599
	2	Quasi 3D P-FGM	14.4090	15.3437	14.1132	12.7834	11.0839	9.0482	14.4090
		Quasi 3D MT-FGM	14.4090	13.2410	11.4839	10.5904	9.7930	9.4161	14.4090
	4	Quasi 3D P-FGM	13.1832	13.5455	12.3030	11.0661	9.5807	7.9284	13.1832
		Quasi 3D MT-FGM	13.1832	11.5788	10.0049	9.2529	8.6284	8.4092	13.1832

**Tableau V.17 :** Comparaison de la contrainte adim.  $\sigma_y$  des plaques en FG Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM



Cette deuxième comparaison s'agit-elle d'une étude statique des plaques en FGM dont leurs constituants sont  $Al/ZrO_2$ , l'avantage souligné c'est qu'il n'y a pas une différence importante et considérable dans les valeurs de module d'Young Céramique-Métal, nous allons étudier ce point en détail afin d'extraire les résultats correspondants en termes de flèche et des contraintes normales, les mêmes démarches précédentes sont adoptées. Ensuite l'application des deux modèles, Mori-Tanaka et la loi des puissances, a donné des résultats qui sont présentés dans les tableaux (V.18) et (V.19).

Afin d'expliquer la différence observée dans l'exemple précédemment analysé, nous pouvons intervenir pour mettre en évidence le modèle choisi pour estimer correctement le module d'Young et laisser un commentaire net sur la description générale sur le schéma suivi pour explorer le comportement exact des plaques en matériaux à gradient de propriétés .

À travers cette campagne des tests effectués sur ce cas, les résultats obtenus confirment une adéquation pour les cas isotropes, pour les cas différents, nous remarquons qu'il y a une concordance entre les résultats obtenus par les deux modèles à cause des propriétés matériels pour les constitutions de ce type des plaques FGM, cette observation dépend de la formation microstructure et la graduation des deux matériaux Céramique-Métal pour une conception globale d'un matériau FGM. Les paramètres de l'épaisseur et l'allongement sont aussi des paramètres influents sur la réponse des plaques en FGM.

Cependant, l'introduction de ces modèles prouve d'une façon claire l'intérêt et le mode de fonctionnement pour chaque schéma, le modèle de la loi des puissances adopte une variation uniforme des caractéristiques matérielles à travers l'épaisseur en fonction de la fraction volumique correspondante , le modèle de Mori-Tanaka est considéré comme un modèle micromécanique qui dépend de plusieurs facteurs notamment la structure de la matrice et les incluons au voisinage , vu à la différence pratiquement faible dans le rapport  $E_c/E_m$  auprès le premier exemple, les résultats obtenus présentent effectivement que la différence commise par les deux modèles est due uniquement par le schéma adopté , donc la connaissance de type de FGM et le mode de l'élaboration ont un facteur le plus important pour donner la validation analytique idéale pour mieux comprendre le comportement de cette nouvelle classe des matériaux.

$a/h$	$b/a$	Méthode	$k$						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
2	1	Quasi 3D P-FGM	0.6084	0.9297	1.1155	1.2344	1.3725	1.5044	1.7382
		Quasi 3D MT-FGM	0.6084	1.0574	1.2436	1.3479	1.4571	1.5575	1.7382
	2	Quasi 3D P-FGM	1.2561	1.9336	2.2911	2.5088	2.7614	3.0230	3.5890
		Quasi 3D MT-FGM	1.2561	2.1783	2.5297	2.7241	2.9342	3.1481	3.5890
	4	Quasi 3D P-FGM	1.6307	2.5165	2.9693	3.2398	3.5536	3.8884	4.6593
		Quasi 3D MT-FGM	1.6307	2.8258	3.2678	3.5110	3.7770	4.0574	4.6593
5	1	Quasi 3D P-FGM	0.3358	0.5258	0.6055	0.6466	0.6941	0.7570	0.9593
		Quasi 3D MT-FGM	0.3358	0.5796	0.6533	0.6923	0.7388	0.7996	0.9593
	2	Quasi 3D P-FGM	0.8065	1.2675	1.4513	1.5417	1.6458	1.7934	2.3044
		Quasi 3D MT-FGM	0.8065	1.3910	1.5582	1.6455	1.7524	1.9000	2.3044
	4	Quasi 3D P-FGM	1.0979	1.7271	1.9743	2.0943	2.2323	2.4320	3.1368
		Quasi 3D MT-FGM	1.0979	1.8930	2.1169	2.2334	2.3771	2.5787	3.1368
10	1	Quasi 3D P-FGM	0.2942	0.4642	0.5280	0.5575	0.5913	0.6437	0.8406
		Quasi 3D MT-FGM	0.2942	0.5069	0.5637	0.5929	0.6298	0.6844	0.8406
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7397	1.1686	1.3267	1.3984	1.4806	1.6113	2.1135
		Quasi 3D MT-FGM	0.7397	1.2742	1.4142	1.4856	1.5772	1.7149	2.1135
	4	Quasi 3D P-FGM	1.0192	1.6105	1.8276	1.9255	2.0377	2.2174	2.9120
		Quasi 3D MT-FGM	1.0192	1.7554	1.9473	2.0452	2.1708	2.3606	2.9120
100	1	Quasi 3D P-FGM	0.2803	0.4437	0.5022	0.5278	0.5571	0.6059	0.8010
		Quasi 3D MT-FGM	0.2803	0.4827	0.5338	0.5597	0.5935	0.6460	0.8010
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7175	1.1357	1.2853	1.3508	1.4257	1.5508	2.0501
		Quasi 3D MT-FGM	0.7175	1.2354	1.3664	1.4326	1.5191	1.6534	2.0501
	4	Quasi 3D P-FGM	0.9931	1.5718	1.7789	1.8695	1.9732	2.1463	2.8374
		Quasi 3D MT-FGM	0.9931	1.7098	1.8911	1.9827	2.1024	2.2883	2.8374

**Tableau V.18 :** Comparaison de la flèche adimensionnelle  $w$  des plaques en FG  $ZrO_2$  sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

a/h	b/a	Méthode	k						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
2	1	Quasi 3D P-FGM	0.2605	0.2494	0.2169	0.1945	0.1720	0.1615	0.2605
		Quasi 3D MT-FGM	0.2605	0.2576	0.2298	0.2129	0.1963	0.1874	0.2605
	2	Quasi 3D P-FGM	0.3103	0.2956	0.2601	0.2361	0.2123	0.2011	0.3103
		Quasi 3D MT-FGM	0.3103	0.3081	0.2791	0.2611	0.2427	0.2314	0.3103
	4	Quasi 3D P-FGM	0.2979	0.2806	0.2469	0.2245	0.2027	0.1930	0.2979
		Quasi 3D MT-FGM	0.2979	0.2927	0.2657	0.2492	0.2324	0.2222	0.2979
5	1	Quasi 3D P-FGM	0.6629	0.6373	0.5733	0.5295	0.4851	0.4619	0.6629
		Quasi 3D MT-FGM	0.6629	0.6746	0.6250	0.5915	0.5535	0.5237	0.6629
	2	Quasi 3D P-FGM	0.7302	0.6846	0.6137	0.5673	0.5223	0.5018	0.7302
		Quasi 3D MT-FGM	0.7302	0.7239	0.6712	0.6372	0.5996	0.5714	0.7302
	4	Quasi 3D P-FGM	0.6736	0.6167	0.5503	0.5085	0.4697	0.4549	0.6736
		Quasi 3D MT-FGM	0.6736	0.6510	0.6030	0.5737	0.5423	0.5206	0.6736
10	1	Quasi 3D P-FGM	1.3261	1.2750	1.1521	1.0679	0.9827	0.9373	1.3261
		Quasi 3D MT-FGM	1.3261	1.3537	1.2603	1.1961	1.1213	1.0598	1.3261
	2	Quasi 3D P-FGM	1.4458	1.3517	1.2151	1.1262	1.0404	1.0016	1.4458
		Quasi 3D MT-FGM	1.4458	1.4324	1.3326	1.2678	1.1951	1.1389	1.4458
	4	Quasi 3D P-FGM	1.3255	1.2077	1.0799	1.0005	0.9275	0.9007	1.3255
		Quasi 3D MT-FGM	1.3255	1.2771	1.1869	1.1316	1.0721	1.0297	1.3255
100	1	Quasi 3D P-FGM	13.2599	12.7487	11.5364	10.7063	9.8662	9.4155	13.2599
		Quasi 3D MT-FGM	13.2599	13.5505	12.6355	12.0017	11.2577	10.6364	13.2599
	2	Quasi 3D P-FGM	14.4090	13.4582	12.1088	11.2328	10.3895	10.0089	14.4090
		Quasi 3D MT-FGM	14.4090	14.2717	13.2925	12.6553	11.9363	11.3757	14.4090
	4	Quasi 3D P-FGM	13.1832	11.9910	10.7302	9.9500	9.2351	8.9759	13.1832
		Quasi 3D MT-FGM	13.1832	12.6881	11.8045	11.2634	10.6786	10.2590	13.1832

**Tableau V.19:** Comparaison de la contrainte adimensionnelle  $\sigma_y$  des plaques en FG  $ZrO_2$  sous chargement sinusoïdal avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

### V.3.4.b) Comparaison pour le cas dynamique:

Il est intéressant de noter d'un sens mécanique que les fréquences propres d'une plaque en FGM est un gradient physique dépend de nombreux paramètres, telles que les conditions aux limites, les lois de constitution matérielle, l'épaisseur et l'allongement, le plus important c'est le modèle cinématique choisi et le principe variationnel appliqué. Afin de construire les matrices de rigidité et de masse (exprimée par les moments d'inertie).

La masse volumique du matériau est évaluée à partir de la loi des puissances utilisée dans la section d'étude dynamique précédente, en effet la matrice masse sera identique dans l'analyse vibratoire avec les deux modèles proposés, par conséquent, la différence sera apparue dans la matrice de rigidité.

La seconde partie de cette étude correspond à l'analyse de la réponse vibratoire des plaques simplement appuyées en FGM avec une étude comparative entre les deux modèles considérés dans l'analyse statique, cette comparaison sert à présenter l'influence du modèle choisi de l'homogénéisation sur le comportement vibratoire des plaques épaisses en FGM.

Avec les mêmes procédures suivies dans l'étude statique, nous adoptons les deux types de plaque en FGM  $\text{Al/ZrO}_2$  et  $\text{Al/Al}_2\text{O}_3$ , il a été confirmé que les fréquences propres des plaques en FGM sont des quantités variables qui dépendent de plusieurs paramètres tels que l'indice matériel « k », l'épaisseur et le schéma opté, alors il est très important de prendre ces paramètres en considération car ils influent directement sur la réponse vibratoire de ces plaques.

Les résultats obtenus pour les quatre fréquences propres sont illustrés dans les tableaux (V.20) et (V.21), l'exploration des résultats mène à constater d'une différence pratiquement faible pour les cas des plaques modérément épaisses tandis qu'elle augmente dans les cas des plaques épaisses. En plus, ces fréquences sont identiques pour les cas isotropes et ont une valeur proche au voisinage des schémas d'isotropie pour l'indice matériel « k » idem pour les résultats obtenus à travers le cas statique.

D'une façon générale, celles-ci proviennent de l'importance de la matrice de rigidité vis-à-vis la matrice de masse pour les cas des plaques en FGM, puisque les matrices de masse sont identiques, cette importance figure dans les éléments de la matrice de rigidité, notamment les éléments en relation avec l'effet de cisaillement transversal et l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Cependant, c'est un cas inverse pour les cas des plaques modérément épaisses ou minces.

Mode	$a/h$	Méthode	$k$						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
(1,1)	2	Quasi 3D P-FGM	0.9414	0.7516	0.6725	0.6314	0.5880	0.5495	0.4791
		Quasi 3D MT-FGM	0.9414	0.6388	0.5864	0.5627	0.5406	0.5212	0.4791
	5	Quasi 3D P-FGM	0.2121	0.1659	0.1507	0.1444	0.1386	0.1318	0.1080
		Quasi 3D MT-FGM	0.2121	0.1448	0.1360	0.1323	0.1281	0.1227	0.1080
	10	Quasi 3D P-FGM	0.0578	0.0449	0.0410	0.0396	0.0384	0.0368	0.0294
		Quasi 3D MT-FGM	0.0578	0.0396	0.0375	0.0366	0.0356	0.0340	0.0294
(1,2)	2	Quasi 3D P-FGM	1.7512	1.4164	1.2605	1.1719	1.0758	0.9958	0.8913
		Quasi 3D MT-FGM	1.7512	1.1889	1.0795	1.0294	0.9847	0.9516	0.8913
	5	Quasi 3D P-FGM	0.4659	0.3676	0.3315	0.3147	0.2979	0.2811	0.2371
		Quasi 3D MT-FGM	0.4659	0.3170	0.2946	0.2848	0.2748	0.2641	0.2371
	10	Quasi 3D P-FGM	0.1381	0.1077	0.0980	0.0943	0.0909	0.0868	0.0703
		Quasi 3D MT-FGM	0.1381	0.0943	0.0890	0.0867	0.0841	0.0805	0.0703
(2,2)	2	Quasi 3D P-FGM	2.3482	1.9110	1.6991	1.5745	1.4378	1.3258	1.1952
		Quasi 3D MT-FGM	2.3482	1.5975	1.4452	1.3750	1.3131	1.2695	1.1952
	5	Quasi 3D P-FGM	0.6757	0.5362	0.4816	0.4546	0.4268	0.4008	0.3439
		Quasi 3D MT-FGM	0.3439	0.3784	0.3931	0.4082	0.4239	0.4590	0.6757
	10	Quasi 3D P-FGM	0.2121	0.1659	0.1507	0.1444	0.1386	0.1318	0.1080
		Quasi 3D MT-FGM	0.2121	0.1448	0.1360	0.1323	0.1281	0.1227	0.1080
(3,3)	2	Quasi 3D P-FGM	3.8105	3.1269	2.7856	2.5759	2.3428	2.1503	1.9395
		Quasi 3D MT-FGM	3.8105	2.6085	2.3547	2.2365	2.1319	2.0593	1.9395
	5	Quasi 3D P-FGM	1.2161	0.9759	0.8710	0.8142	0.7536	0.7014	0.6190
		Quasi 3D MT-FGM	1.2161	0.8249	0.7537	0.7213	0.6916	0.6677	0.6190
	10	Quasi 3D P-FGM	0.4273	0.3368	0.3040	0.2889	0.2740	0.2588	0.2175
		Quasi 3D MT-FGM	0.4273	0.2908	0.2707	0.2618	0.2528	0.2428	0.2175

**Tableau V.20 :** Comparaison des trois premières fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques en FG  $Al_3O_2$  avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

Mode	$a/h$	Méthode	$k$						
			Céramique	1	2	3	5	10	métal
1	2	Quasi 3D P-FGM	0.9414	0.8869	0.8680	0.8581	0.8479	0.8398	0.8089
		Quasi 3D MT-FGM	0.9414	0.8357	0.8256	0.8231	0.8225	0.8230	0.8089
	5	Quasi 3D P-FGM	0.2121	0.1976	0.1963	0.1968	0.1972	0.1959	0.1823
		Quasi 3D MT-FGM	0.2121	0.1884	0.1891	0.1902	0.1911	0.1905	0.1823
	10	Quasi 3D P-FGM	0.0578	0.0536	0.0535	0.0539	0.0544	0.0541	0.0496
		Quasi 3D MT-FGM	0.0578	0.0513	0.0518	0.0523	0.0527	0.0524	0.0496
2	2	Quasi 3D P-FGM	1.3777	1.3184	1.2870	1.2674	1.2445	1.2198	1.1838
		Quasi 3D MT-FGM	1.3777	1.2365	1.2147	1.2057	1.1976	1.1910	1.1838
	5	Quasi 3D P-FGM	0.5511	0.5274	0.5148	0.5070	0.4978	0.4879	0.4735
		Quasi 3D MT-FGM	0.5511	0.4946	0.4859	0.4823	0.4790	0.4764	0.4735
	10	Quasi 3D P-FGM	0.2755	0.2637	0.2574	0.2535	0.2489	0.2440	0.2368
		Quasi 3D MT-FGM	0.2755	0.2473	0.2429	0.2411	0.2395	0.2382	0.2368
3	2	Quasi 3D P-FGM	2.5774	2.4473	2.3815	2.3454	2.3078	2.2715	2.2147
		Quasi 3D MT-FGM	2.5774	2.2920	2.2535	2.2395	2.2289	2.2224	2.2147
	5	Quasi 3D P-FGM	1.0310	0.9795	0.9539	0.9398	0.9247	0.9095	0.8859
		Quasi 3D MT-FGM	1.0310	0.9179	0.9019	0.8964	0.8923	0.8894	0.8859
	10	Quasi 3D P-FGM	0.5155	0.4898	0.4770	0.4700	0.4625	0.4548	0.4429
		Quasi 3D MT-FGM	0.5155	0.4590	0.4510	0.4482	0.4462	0.4447	0.4429
4	2	Quasi 3D P-FGM	1.3777	1.3184	1.2870	1.2674	1.2445	1.2198	1.1838
		Quasi 3D MT-FGM	1.3777	1.2365	1.2147	1.2057	1.1976	1.1910	1.1838
	5	Quasi 3D P-FGM	0.5511	0.5274	0.5148	0.5070	0.4978	0.4879	0.4735
		Quasi 3D MT-FGM	0.5511	0.4946	0.4859	0.4823	0.4790	0.4764	0.4735
	10	Quasi 3D P-FGM	0.2755	0.2637	0.2574	0.2535	0.2489	0.2440	0.2368
		Quasi 3D MT-FGM	0.2755	0.2473	0.2429	0.2411	0.2395	0.2382	0.2368

**Tableau V.21:** Comparaison des quatre premières fréquences fondamentales adim. des plaques en FG  $ZrO_2$  avec la comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et P-FGM

#### V.4) Conclusion:

L'objectif souligné dans ce chapitre était de valider et d'éprouver à travers les exemples et les testes traités la pertinence, l'efficacité et la précision de notre nouveau modèle développé dans le titre de notre modeste travail, ce modèle avait évalué et présenté leur efficacité , à travers les résultats obtenus et exposés largement à l'aide de notre nouvelle théorie des plaques d'ordre supérieur et de déformation normale appelée Quasi-3D ,sur l'analyse du comportement statique et dynamique (vibration libre) des plaques épaisses et avec forte épaisseur en matériaux à gradient de propriétés.

La nouvelle théorie développée dans cette étude est une théorie d'ordre supérieur , basé aussi sur les hypothèses optés pour les théories raffinées d'ordre supérieur à quatre inconnues , et par conséquent , elle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement transversal ainsi qu'elle satisfait la condition de la nullité des contraintes de cisaillement dans la face supérieure et inférieure de la plaque , cette condition est validée par l'emploi d'une fonction de cisaillement hyperbolique vérifiée , et le plus important qui figure dans les cas des plaques épaisses ou avec forte épaisseur , l'effet de l'étirement de l'épaisseur est absolument pris en considération , cet effet est introduit dans cette théorie comme déformation normale en fonction de « z » , en effet , le principe de Hamilton est adopté pour décrire le comportement dynamique , afin d'utiliser la solution de Navier pour résoudre analytiquement les problèmes traités.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus par les autres est très satisfaisante et permet de conclure la validité de notre nouvelle théorie.

L'existence des lois de l'homogénéisation utilisées pour les plaques en matériaux à gradient de propriétés [Akbar2015] offre une riche étude et permet d'étendre les perspectives et les prévisions multi- échelles pour simuler le comportement des plaques en FGM pour une grande variété des domaines d'application (statique, dynamique et le couplage thermomécanique).

En conclusion finale, nous avons également relevé les problèmes traités avec une exactitude et une précision conformes avec cette contribution exprimée par notre nouvelle théorie proposée, ce qui constitue un axe permet de l'extrapoler au d'autres problèmes sortant du cadre de cette étude de simulation des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

# Chapitre VI

## Conclusions et Recommandations

### VI.1) Introduction :

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et des structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate permettant d'analyser les plaques en FGMs avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Le sujet de notre thèse doctorale était l'étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses en FGMs, L'objectif fixé pour la thèse était, d'une part, de développer un nouveau modèle basé sur la théorie de déformation de cisaillement de plaque d'ordre supérieur et de déformation normale, et d'autre part, d'étudier l'influence des paramètres matériels par l'introduction des différents modèles de l'homogénéisation sur le comportement statique et dynamique des plaques en FGMs, essayons de dégager les acquis les plus importants.



La vérification et la validation des hypothèses de la nouvelle théorie développée dans cette thèse, et à travers un certain nombre de cas tests dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature, sont sans équivoque.

## VI.2) Remarques et conclusions :

La précision de la présente théorie a été prouvée dans les deux cas d'analyse, statique et dynamique, pour les plaques en FGMs simplement appuyées. La théorie tient en considération les effets de l'étirement de l'épaisseur « *stretching effect* » et les déformations de cisaillement sans recourir au facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en trois composants, la flèche due à la flexion, cisaillement et de l'étirement de l'épaisseur. Le nombre des inconnus et les équations gouvernantes de la présente théorie est réduit à cinq, et par conséquent, il est moins par rapport les autres théories existent dans la littérature scientifique.

La fonction de cisaillement utilisée est une fonction hyperbolique qui permet de donner une description correcte des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, néanmoins, elle satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque.

Les équations du mouvement sont dérivées à partir le principe d'Hamilton et elles sont résolus analytiquement basant sur la méthode de Navier, pour les problèmes de flexion et des vibrations libres des plaques en FGMs simplement appuyées.

À partir de la présente étude, c'est évident que l'effet de la déformation normale transversale à travers l'épaisseur est plus prononcé pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur et il doit être pris en considération dans la plupart des simulations mécaniques réelles.

Les résultats prédits par la théorie proposée présentent un agrément excellent avec les solutions tridimensionnelles et également pour les cas des plaques avec forte épaisseur de  $a/h=2$ .

Finalement, il a été remarqué que la théorie proposée d'ordre supérieur et de déformation normale n'est pas seulement précise, mais aussi elle prescrit une approche d'implantation excellente et facile pour la simulation du comportement à la flexion ainsi la vibration libre des plaques en FGM, surtout pour des applications dans le domaine de l'aéronautique et du nucléaire où la précision des résultats est cruciale, par exemple : la conception thermostructurelle d'un vaisseau spatial.

En définitive, l'originalité de notre travail réside dans les deux points suivants :

- Avoir proposé une nouvelle théorie à cinq inconnus adaptée pour décrire le comportement statique et dynamique des plaques épaisses en FGMs.
- Avoir introduit les trois modèles (Mori-Tanaka, loi des puissances et exponentielles) de l'homogénéisation des propriétés matériels à travers l'épaisseur de la plaque en FGMs.

### **VI.3) Recommandations pour des travaux futurs :**

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre étude doctorale, nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique des plaques en FGMs. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans le domaine des matériaux à gradient de propriétés, et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut ce résumer dans les points suivants :

- Étendre cette étude à la formulation en éléments finis ou d'autres procédures numériques, car cette méthode nous offre un outil d'analyse très puissant pour les différentes simulations des problèmes de l'ingénieur [Cur2012], [Cur2013].
- Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques pour les cas des plaques épaisses en FGMs.
- Étendre cette théorie à analyser les structures de type coque épaisse ou avec forte épaisseur en analyse statique et dynamique (vibration libre), car elle fournit une cinématique Quasi3D très assimilable à la géométrie des coques épaisses [Red2004], [Cin2010 ], [Cin2012], [Tor2014].
- Adaptation de la présente formulation à étudier les plaques annulaires sectorielles en FGM [Tor2009].
- Effectuer une formulation numérique basée sur cette nouvelle théorie en considérant l'effet de la déformation normale transversale pour l'analyse non linéaire statique (Non-linéarité géométrique ou/et matérielle) et l'analyse non linéaire dynamique sur d'autres cas-tests dans le cas des plaques épaisses en FGMs [Ras2012], [Woo2001], [Fah2013], [Phu2014].
- Étudier d'autres cas d'analyse analytique tels que le flambement et le couplage thermomécanique des plaques en FGM [Red2001], [Zen2009].

Enfin, nous attribuons notre modeste travail intitulé « analyse du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes » dans l'actualité de la recherche scientifique dans le domaine des matériaux à gradient de propriétés soutenu par notre laboratoire.

# Références Bibliographique

## A

- [Akbar2015] A.H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z.T. Chen, Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 119 (2015) 598–609
- [Abr2008] S. Abrate, Functionally graded plates behave like homogeneous plates, *Composites Part B* 39 (1) (2008) 151–158.
- [Atm2010] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6 (2010) 113–121.
- [Ami2009] AminiMH, SoleimaniM, Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct* 2009;18(8):085015.
- [Amb1969] Ambartsumyan S.A., *Theory of anisotropic plate.*, Tech Publishing Co, 1969.
- [Abz2011] H.H. Abdelaziz, H.A. Atmane, I. Mechab, L. Boumia, A. Tounsi, E.A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory, *Chin. J. Aero.* 24 (2011) 434 – 448.

## B

- [Bar2009] B. Bary, M. Ben Haha, E. Adam, and P. Montarnal. Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes. *Cem. Concr. Res.*, 39(10):902–912, 2009.
- [Benven1987] Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mat.* 6 (1987) 147–157.
- [Bhi1984] A. Bhimaraddi, L. Stevens, A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates. *ASME J. Appl. Mech.* 51 (1984), 195–198.
- [Ben2010] S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi, A. Fekrar, H. Ait Atmane, E.A. Adda Bedia, Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mech. Comp. Mat.* 46 (2010) 425–434.
- [Bou2012] M. Bourada, A. Tounsi, M.S.A. Houari, E.A. Adda Bedia, A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates, *J. Sandwich Struct. Mat.* 14 (2012) 5 – 33.
- [Bou2013] B. Boudierba, M.S.A. Houari, A. Tounsi. Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Steel Comp. Struct.* 14(2013) 85 – 104.

**C**

- [Cho1971] T.S Chow, On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load, *Composite Mat*; 5,306-319,1971
- [Car2001] E. Carrera. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Revs.* 54 (2001) 301-329.
- [Car2003] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10 (2003) 215-296.
- [Car2005] E. Carrera, A. Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos. Struct.* 69 (2005) 271-293.
- [Car2008] E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA Journal* 46 (2008) 194-203.
- [Car2011a] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soave. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* 42 (2011)123-133.
- [Car2011b] E. Carrera, S. Brischetto, P. Nali. *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, Wiley, New York, USA (2011).
- [Car2011c] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*, Wiley, New York, USA (2011).
- [Cur2013] J.L. Curiel Sosa, O. Anwar Bég and J.M Liebana Murillo, Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique, *Int. J. Comp. Methods Eng. Sci. Mechs.*, 14 (2013) 452-464.
- [Cur2012] J.L. Curiel Sosa, J.J. Munoz, S.T. Pinho and O. Anwar Bég, (XFEM) Simulation of damage in laminates, *Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, J.Eberhardsteiner et .al. (eds.), Vienna, Austria, September 10-14 (2012) 1940 – 1946.
- [Cin2010] Cinefra M, Carrera E, Brischetto S, Belouettar S. Thermo-mechanical analysis of functionally graded shells. *J Therm Stress* 2010;33(10):942–63
- [Cin2012] Cinefra M, Carrera E, Croce LD, Chinosi C. Refined shell elements for the analysis of functionally graded structures. *Compos Struct* 2012;94(2):415–22.

**D**

- [Del2004] L. Della Croce, P. Venini, Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193 (2004) 705–725.
- [Dem2009a] L. Demasi.  $\infty^6$  Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* 87 (2009) 1-11.

[Dem2009b] L. Demasi. ∞6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos. Struct.* 87 (2009) 183-194.

[Dem2009c]L. Demasi. ∞6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos. Struct.* 87 (2009)195-205.

[Dem2009d]L. Demasi. ∞6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. *Compos. Struct.* 88 (2009) 1-16.

[Dem2009e]Demasi L. ∞6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation.: Part II: Layerwise theories. *Compos. Struct.* 87 (2009) 12-22.

### E

[El M2011] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *Int. J. Mech. Sci.* 53 (2011) 237 – 247.

### F

[Feld1997] E. Feldman, J. Aboudi, Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading, *Compos. Struct.* 38 (1-4) (1997) 29–36.

[Far2008]Fares ME, Elmarghany M. Kh. A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. *Compos Struct* 2008;82(1):71–83.

[Faz2013] F.A. Fazzolari, E. Carrera. Free vibration analysis of sandwich plates with anisotropic face sheets in thermal environment by using the hierarchical trigonometric Ritz formulation, *Composites Part B Engineering*, 50 (2013) 67-81.

[Fah2013] Fahsi B, Kaci A, Tounsi A, Adda Bedia EA. A four variable refined plate theory for nonlinear cylindrical bending analysis of functionally graded plates under thermomechanical loadings. *J Mech Sci Technol* 2013;26(12):4073–9

### H

[Hos2010]Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* (2010) ;34(5):1276–91.

[Hos2011a] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. *Compos. Struct.* 93 (2011) 722-735.

[Hos2011b] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.* 2011 53(1):11-22.

[Hou2011] M.S.A. Houari, S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi, E.A. Adda Bedia, Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, *J. Thermal Stresses* 34 (2011) 315 – 334.

[Ham2012] A. Hamidi, M. Zidi, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading, *Comp: Part B* (2012) **in press**.

[Hua2008] Z.Y. Huang, C.F. Lu, W.Q. Chen, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* 85 (95) (2008) 104

[Had2011] L. Hadji, H.A. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory, *Appl. Math. Mech.* 32 (2011) 925 – 942.

### **J**

[Jha2013] D.K. Jha, Tarun Kant, R.K. Singh, A critical review of recent research on functionally graded plates , *Compos. Struct.* 96 (2013) 833–849

### **K**

[Koi1993] M. Koizumi, The concept of FGM, *Ceramic Transactions. Functionally Gradient Materials* 34 (1993) 3–10.

[Kiy 2001] Kiyoshi Ichikawa ,FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS IN THE 21ST CENTURY A Workshop on Trends and Forecasts , Springer Science+Business Media , New York (2001)

[Kieb2003] B. Kieback, A. Neubrand , H. Riedel, Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105

[Kan1988] T. Kant, B. Pandya, A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. *Compos. Struct.* 9 (1988) 215–246.

[Kan1997] T. Kant, R.K. Khare, A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40 (1997) 4477–4499.

[Kit2006] S. Kitipornchai, J. Yang, K.M. Liew. Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 1075-1095.

### **L**

[Lo1977] K.H. Lo, R.M. Christensen, E.M. Wu, A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates. *ASME J. Appl. Mech.* 44 (1977) 669-674.

[Li2008] Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008;311(1–2):498–515.

[Lev1980] Levinson M. ,An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates,. Mechanics Research Communication, vol. 7, pages 343-50, 1980.

### M

[Miya1997] Miyamoto, Y. Shiota, I, Functionally Graded Materials, ELSEVIER, (1997)

[Mori1973] T. Mori, K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metall. 21 (1973) 571-574.

[Mah2009] M. Mahdavian, Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading, J. Solid Mech. 1 (3) (2009) 213–225.

[Moh2010] M. Mohammadi, A.R. Saidi, E. Jomehzadeh, Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, Appl. Compos. Mater. 17 (2) (2010) 81–93.

[Mind1951] R.D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. ASME J Appl Mech 18 (1951) 31–38.

[Mor2012] S. Moradi, M.H. Mansouri, Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature. Steel Compos Struct 12 (2012) 129-147.

[Men2012] R. Mena, A. Tounsi, F. Mouaici, I. Mechab, M. Zidi, E.A. Adda Bedia, Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 19 (2012) 641–652.

[Mat2009] H. Matsunaga. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. Compos. Struct. 87 (2009) 344-357.

[Man2012a] J.L. Mantari, C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. Compos. Struct. 94 (2012) 1991-2000.

[Man2012b] J.L. Mantari, C. Guedes Soares. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. Compos. Struct. 94 (2012) 2561-2575.

[Man2013a] J.L. Mantari, C. Guedes Soares. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. Comp. Part B: Eng. 45 (2013) 268 – 281.

[Man2013b] J.L. Mantari, C. Guedes Soares. Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates. Composite Structures 96 (2013) 545–553.

[Mal2009] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. Compos Struct 2009;89(3):367–73.

[Mur1981] Murthy .M.V.V., An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate,. Rapport technique, NASA, 1981.

[Mat2008] H. Matsunaga. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos. Structs.* 82 (2008) 499-512.

[Mer2011] S. Merdaci, A. Tounsi, M.S.A. Houari, I. Mechab, H. Hebali, S. Benyoucef, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, *Arch. Appl. Mechs.* 81 (2011) 1507 – 1522.

### **N**

[Ngu2008] Nguyen TK, Sab K, Bonnet G. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Compos Struct* 2008;83(1):25–36.

[Nel1977] R.B. Nelson, D.R. Lorch, A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME J. Appl. Mech.* 41 (1974) 177-184.

[Nev2012a] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* 43 (2012) 711-725.

[Nev2012b] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al.. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 94 (2012) 1814-1825.

[Nev2013] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Comp. Part B: Eng.* 44 (2013) 657-674.

### **P**

[Pan1975] Panc V. ,Theories of elastic plates,. Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.

[Phu2014] Phung-Van.P,Nguyen-Thoi.T,Luong-Van H, Lieu-Xuan Q. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C0-HSDT. *ComputMeth Appl Mech Eng* 2014;270:15–36.

### **Q**

[Qia2004] L.F. Qian, R.C. Batra, L.M. Chen. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Comp. Part B: Eng.* 35 (2004) 685-697.

### **R**

[Reis1945a] E. Reissner, Reflection on the theory of elastic plates. *ASME J Appl Mech* 38 (1945) 1453–1464.



- [Reisb] Reissner E. ,The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69-77, 1945.
- [Ras2012] M.M. Rashidi, A. Shooshtari and O. Anwar Bég, Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates, Computers and Structures, 106/107 (2012) 46-55.
- [Red1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME J. Appl. Mech. 51 (1984) 745 – 752.
- [Red2000] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates. Int. J. Num. Meth. Eng. 47 (2000) 663-684.
- [Red2011] J.N. Reddy. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. Int. J. Aerospace Lightweight Structures 1 (2011) 1-21.
- [Red1985] Reddy, J.N., Phan, N.D. “Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory.” J. Sound Vib., (1985). ,98 157–170.
- [Red2001] Reddy JN, Cheng ZQ. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. Eur J Mech – A/Solids 2001;20(5):841–55.
- [Red2004] J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, CRC Press, Baton Rouge, Florida, USA, (2004).
- [Ras2012] M.M. Rashidi, A. Shooshtari and O. Anwar Bég, Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates, Computers and Structures, 106/107 (2012) 46-55.

### S

- [Shi2003] Shimpi, R.P., Arya, H., Naik, N.K. “A Higher Order Displacement Model for the Plate Analysis.” Journal of Reinforced Plastics and Composites, (2003). ,22(22), 1667 – 1688.
- [Sri1970a] Srinivas S., Joga, C.V., Rao, A.K. (1970). “Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates.” International Journal of Solids and Structures, (1970), 6, 1463 – 1481.
- [Sri1970b] S. Srinivas, C. V. Joga Rao and A. K. Rao, An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, J. Sound Vib. 12 (1970) 187–199.
- [Sib1991] Siboni, G., Benveniste, Y.,A micro-mechanics model for the effective thermomechanical behavior of multiphase composite media. Mechanics of Materials 11, 1991, 107– 122.

**T**

[Thai2013a] Thai HT, Choi DH. A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;101:332–40.

[Tha2013b] H.T. Thai, S.E. Kim. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Compos. Struct.* 99 (2013) 172-180.

[Thai2013c] H.T. Thai, S.E. Kim. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 96 (2013) 165-173.

[Thai2014] Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014;225(3):951–64.

[Tan2000] R. Tanov, A. Tabiei, A simple correction to the first-order shear deformation shell finite element formulations, *Finite Elements in Analysis and Design* 35 (2000) 189-197

[Tor2009] F. Tornabene, Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2009) 2911–2935.

[Tor2013] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, A.J.M. Ferreira, Radial basis function method applied to doubly-curved laminated composite shells and panels with a General Higher- order Equivalent Single Layer formulation. *Composites Part B: Engineering*, 55 (2013) 642- 659.

[Tor2014] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, E. Carrera, Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method, *Composite Structures*, 107 (2014) 675 – 697.

[Tou2013] A Tounsi, M S A Houari, S Benyoucef, E A Adda Bedia, A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aero. Sci. Tech.* 24 (2013) 209–220.

[Tal2010] M. Talha, B.N. Singh. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 (2010) 3991-4011.

**U**

[Uym2007] Uymaz B, Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos* 2007;26(18):1847–63.

**V**

[Vio2013a] E. Viola, F. Tornabene and N. Fantuzzi, General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*, 95 (2013), 639-666.

[Vio2013b] E. Viola, F. Tornabene and N. Fantuzzi, Static analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories. *Composite Structures*, 101 (2013) 59-93.

[Vel2004] Vel S.S, Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 2004;272(3–5):703–30.

**W**

[Whi1970] Whitney, J. M., Pagano, N.J.. “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates.” *Journal of Applied Mechanics.*, (1970) ,37, 1031-1036.

**Y**

[Yan2005] J. Yang, K.M. Liew, S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol.* 65 (2005) 65–1175.

[Yag2013] H. Yaghoobi, P. Yaghoobi, Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach, *Meccanica* 48 (2013) 2019–2035.

[Yan2005] J. Yang, K.M.Liew, S. Kitipornchai. Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading. *Int. J. Mech. Sci.* 47 (2005) 1519-1541.

**W**

[Woo2001] Woo J, Meguid SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct* 2001;38(42–43):7409–21

**Z**

[Zha2009] X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 90 (2) (2009) 161–171.

[Zen2006] A.M. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl. Math. Modell.* 30 (2006) 67-84.

[Zen2007] Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006;77(4):197–214

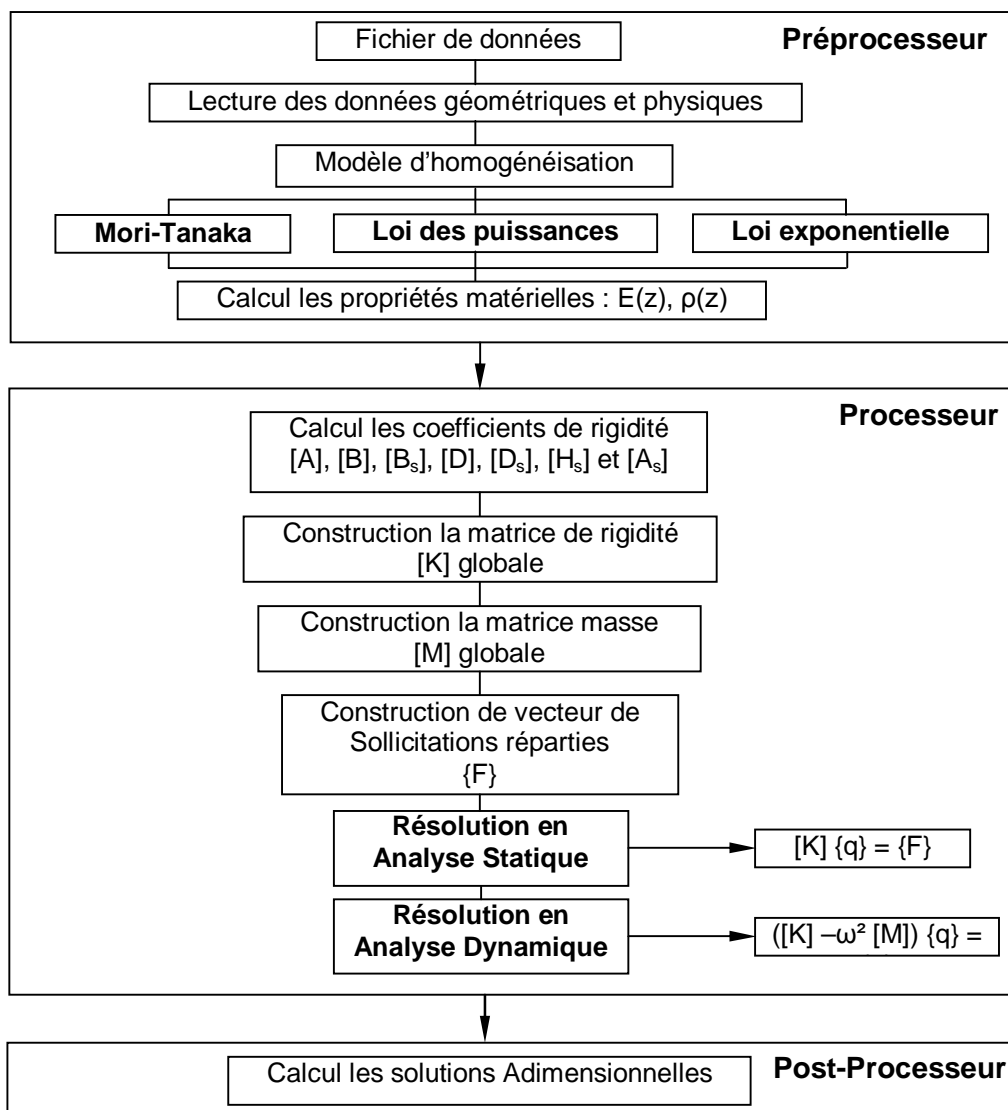
[Zen2013] Zenkour AM. A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(20–21):9041–51.

[Zen2009] Zenkour AM. The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Int J Appl Mech* 2009;1(4):667–707.

# Annexe 1

## Mise en œuvre du programme de calcul :

Le programme développé ici, est écrit sous langage de programmation MatLab<sup>(1)</sup> pour l'analyse des plaques en matériaux à gradient de propriétés, Le programme utilise en analyse statique et dynamique la nouvelle théorie développée dans cette étude. Le résultat du programme inclus les propriétés matérielles présentées dans le chapitre III, en utilisant la méthode de Navier pour déterminer la solution en termes de : la flèche maximale, les contraintes et les fréquences propres. L'organigramme suivant présente la structure générale de notre programme développé dans cette étude :



<sup>1</sup> MATLAB est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel (MATrix LABoratory). Il est utilisé dans les calculs scientifiques et les problèmes d'ingénierie parce qu'il permet de résoudre des problèmes numériques complexes en moins de temps requis par les langages de programmation et cette grâce à une multitude de fonctions intégrées et à plusieurs programmes outils testés et regroupés selon usage (boîtes à outils ou Toolbox).