*N° d'ordre :*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

# THESE DE DOCTORAT

*Présentée par* BENZIADI FATIMA

*Spécialité : Mathématiques*
*Option : Statistique*

*Intitulée*

## Estimation non paramétrique récursive du quantile conditionnel à variable explicative fonctionnelle ergodique

*Soutenue le............................*
*Devant le jury composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| *Président :* | **Gheriballah Abdelkader** | Professeur Université de Sidi Belabbes |
| *Examinateurs:* | **Attouch Mohammed** | MCA Université de Sidi Belabbes |
| | **Kandouci Abdeldjabar** | MCA Université de Saida |
| | **Guendouzi Touffik** | MCA Université de Saida |
| *Directeur de thèse :* | **Tebboune Fethalah** | MCA Université de Saida |
| *Co-Directeur de thèse :* | *Laksasi Ali* | Professeur Université de Sidi Belabbes |

À la mèmoire de mon père et mon frère Bouelam.
À la mémoire de professeur Benamar Chouaf.

# Remerciments

Avant tous, je tiens a remercier notre **Dieu** qui m'a aidé a mener ce travail jusqu'à la fin. Aprés avoir achevé ce modeste travail, je tiens à exprimer mes sincéres remerciements ainsi que ma vive gratitude à Monsieur le Professeur **Ali Laksaci** d'avoir dirigé ce projet, pour son entière disponibilité, il restera pour moi un modèle, pour ses grandes compétences scientifiques.
J'adresse mes remerciements à Monsieur **Tebboune Fethalah** d'avoir accépté de m'encadrer et de m'avoir fait profiter de son expérience et pour la confiance qu'il m'a accordé, ses encouragements et ses précieux conseils.
J'adresse aussi mes remerciements au Professeur **Gheriballah Abdelkader** qui m'a fait l'honneur de bien vouloir présider le jury. Je suis trés honorée que les Professeurs **Kandouci Abdeldjebbar** et **Guendouzi Toufik**, aient accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury et pour leur aide et ses conseils et pour ses encouragements, je les remercie vivement. Je remercie chaleureusement Monsieur le docteur **Attouch Mohamed** de me faire l'honneur de faire partie de mon jury et d'avoir bien voulu examiner ce travail.Je remercie infiniment Monsieur **Madani Fethi** pour son aide.
J'exprime mes remerciements sincères à mes chères amies Mademoiselle **Fatima Benziadi**, Madame **Fatiha Mokhtari**, Madame **Dalila Bouazza**, et Madame **Douini Hannia** et à tous les enseignants du département de Mathématiques ainsi qu'à tous les membres du laboratoire **LMSSA** de l'université de Saida. Mes remerciements vont à ceux et à celles qui m'ont aidé, conseilé et soutenue de prés ou du loin lors de l'élaboration de ma thèse.

# Table des matières


**1 Introduction générale** **11**

1.1 L'ACP fonctionnelle pour la régression . . . 18

1.1.1 La régression sur composantes principales . . . 20

1.1.2 Résultat de convergence . . . 21

1.2 Les quantiles conditionnels par la régression linéaire . . . 22

1.2.1 Estimation des paramètres . . . 23

1.3 Les quantiles conditionnels par les méthodes non paramétriques . . . 24

1.4 L'estimation récursive . . . 31

1.5 Quelques résultats asymptotiques . . . 32

1.5.1 Estimation récursive de la densité . . . 32

1.5.2 Estimation récursif de la fonction de régression . . . 35

1.6 Ergodicité . . . 38

**2 Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data** **51**

2.1 Introduction . . . 51

2.2 The functional ergodic data framework . . . 53

2.3 The $L^1$ recursive estimate . . . 54

2.4 The recursive double-kernel estimate . . . 57

2.5 Some special cases . . . 58

2.6 A simulation study . . . 60

2.7 Appendix . . . 63

**3 Asymptotique normality of recursive kernel estimate of the conditional quantile** **75**

3.1 Introduction . . . 75

3.2 The recursive estimation of conditional quantile . . . 76

3.3 Main results . . . 77

3.4 Results . . . 78

3.5 Appendix . . . 80

**4 Simulation, conclusion et perspectives** **91**

4.1 Simulation . . . 91

4.1.1 La fonction *far* . . . . . . . . . . 91
4.1.2 La fonction *simul.far* . . . . . . . . . . 92
4.1.3 Programme . . . . . . . . . . 94
4.2 Conclusion . . . . . . . . . . 95
4.3 Perspectives . . . . . . . . . . 95

**5 Bibliographie générale** **101**

# Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'estimation non paramétrique récursive du quantile conditionnel d'une variable aléatoire réelle $Y$ conditionnée par une variable aléatoire fonctionnelle $X$ prenant des valeurs dans un espace semi-métrique. On considère deux estimateurs, le premier est donné par l'inversion de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de répartition conditionnelle et le second est déterminé par l'approche robuste. Dans la première partie, on donne quelques méthodes d'estimations du quantile conditionnel et quelques résultats asymptotiques. Dans la deuxième partie, on étudie la convergence presque complète et sa vitesse des deux estimateurs récursifs du quantile conditionnel lorsque la variable explicative est de type ergodique. Dans les mêmes conditions et dans la troisième partie, on présente la normalité asymptotique de second estimateur (déterminé par l'approche robuste) du quantile conditionnel . Une étude de simulation est présentée dans la quatrième partie. Le sinquième chapitre est consacré à une bibliographie générale.

## Summary

In this thesis, we study the recursive kernel estimator of the conditional quantile of a scalar response variable $Y$ given a random variable (rv) $X$ taking values in a semi-metric space. Two estimators are considered. While, the first one is given by inverting the double kernels estimate of the conditional distribution function, the second estimator is obtained by using the robust approach. We establish the almost complete consistency of these estimates when the observations are sampled from functional ergodic process. In section three, we study the asymptotic normality of the second estimate (robust approach) of conditional quantile function, under a stationary ergodic process assumption. In section four we presente a simulation studie. The fifth chapter is devoted to a general bibliography.

# Liste de travaux

## Publications dans des revues à comités de lecture

1. F. Benziadi, A. Laksaci et F. Tebboune. Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data. Communications in statistics : Theory and Methods,DOI :10.1080/03610926.2014.901364.(2015).
2. F. Benziadi, A. Laksaci et F. Tebboune. Asymptotic normality of the recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data.(soumis)

## Communications dans des congrés

1. L'estimateur à noyau récursif du quantile conditionnel pour des variables ergodiques fonctionnelles. ICPM'2012 (28-29-30)mai 2012, université 8 mai 1945 Guelma.
2. L'estimation récursive du quantile conditionnel. $1^{ier}$ Colloque International sur la Statistique et ses Applications. ICSA1 (06-07) Mai 2015, Saïda
3. La normalité asymptotique de l'estimateur à double noyaux récursifs. $1^{ier}$ Colloque International sur la Statistique et ses Applications. ICSA1 (06-07) Mai 2015, Saïda

# Chapitre 1

# Introduction générale

L'axe principal de la statistique fonctionnelle est celui des données fonctionnelles qui sont des courbes construites par des mesures de phénoménes naturelles continues, ce sont des fonctions ou des vecteurs de points de mesure, de telles données apparissent dans nombreuses applications (médecine, économie, biostatistique,...). Ferraty et Vieu (2006)[46] ont défini les variables fonctionnelles par les variables qui prennent leur valeurs dans un espace infini et une observation d'une variable fonctionnelle est appelée donnée fonctionnelle.

$$X = \{X_{t,t\in T}, X_t : \Omega \to \mathbb{R}\}.$$

En pratique, une donnée fonctionnelle est observée dans un nombre fini d'instants (Figure1.1) :

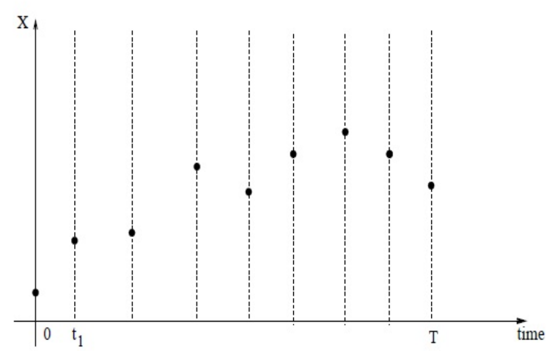


FIGURE 1.1 – Les données fonctionnelles

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$$

$$\{(t_0, X_0), (t_1, X_1), \cdots, (t_k, X_k)\}.$$

Costin Apostol et Cristian Preda (2010) [4] définissent les variables fonctionnelles comme étant des réalisations d'un processus stochastique continu $(X_t)_{t\in T}$, où $T$ est un ensemble continu, ils ont appliqué la méthode PLS [1] sur trois exemples des données fonctionnelles pour comparer entre les résultats donnés par la méthode PLS et les résultas donnés par des autres méthodes d'estimation de la fonction de régression.

Le premier exemple est La mesure de l'angle de flexion du genou. Une courbe de marche est représentée par une série de 51 mesures de l'angle de flexion (pied droit ou gauche) $X = \{X_{t_i}\}_{i=0,\ldots,50}$, qui correspondent à un cycle complet de marche (Figure1.2,Figure 1.3). Une partie de patients est traitée par voie médicamenteuse avec L-Dopa, d'autres patients sont traités par l'implantation d'un stimulateur au niveau cérébral. Il s'agit de comparer l'efficacité des deux types de traitement en utilisant comme indicateur les courbes de marche. On est ici devant un problème d'analyse discriminante sur des données fonctionnelles en considérant comme variable réponse Y , la variable qualitative correspondant au type du traitement reçu. Les données dont on dispose proviennent du centre de l'analyse du mouvement du service de Neurologie de CHRU de Lille .

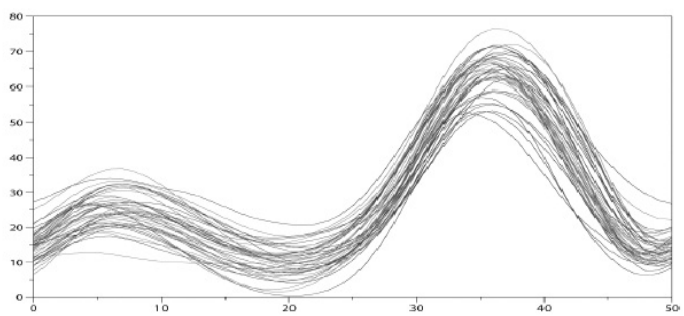


FIGURE 1.2 – Courbes de marche : angle du flexion du genou

1. PLS est la méthode de moindres carrés partiels (partial least squares).

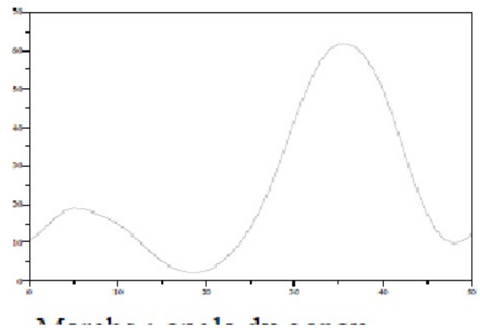

FIGURE 1.3 – Indice de marche : angle du flexion du genou

Le second exemple est issue du domaine indistruel, le centre de recherche de Danone Vitapole (Paris) est intéressé par la prédiction de la qualité des biscuits à partir de la courbe de pétrissage associée à la farine dont le biscuit est fabriqué. La courbe de pétrissage mesure durant 480 secondes la résistance de la pâte pendant le processus de pétrissage (Figure1.4). L'objectif ici est double : mesurer la capacité de prédiction des courbes de pétrissage pour la qualité des biscuits et d'anticiper sur la qualité du biscuit le plus tôt possible (avant 480s).

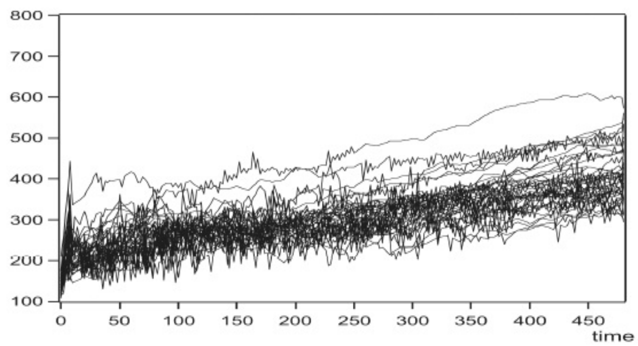


FIGURE 1.4 – Les données de pétrissage : la dureté des 115 farines observées durant 480 secondes.

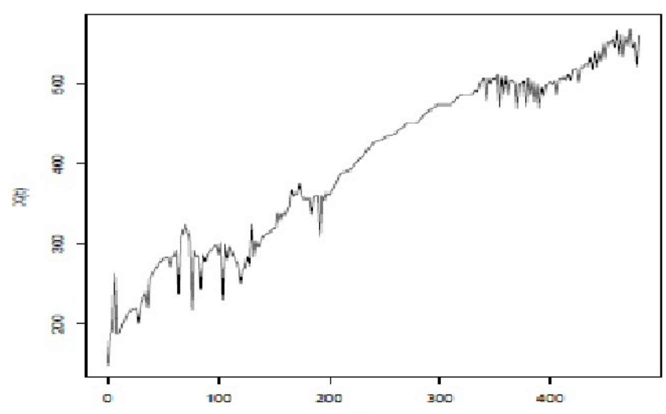


FIGURE 1.5 – Pétrissage : résistance de la pâte.

Les figures (1.6) et (1.7) présentent les graphes associées à la trosième exemple qui est issue dans la finance, il est constitué de l'observation des fluctuations de plusieurs actions cotées à la Bourse de Paris dans le but de réaliser une classification non-supervisée. La valeur d'une action est susceptible de changer toutes les secondes, son comportement pouvant être décrit par une fonction de temps évoluant par sauts .

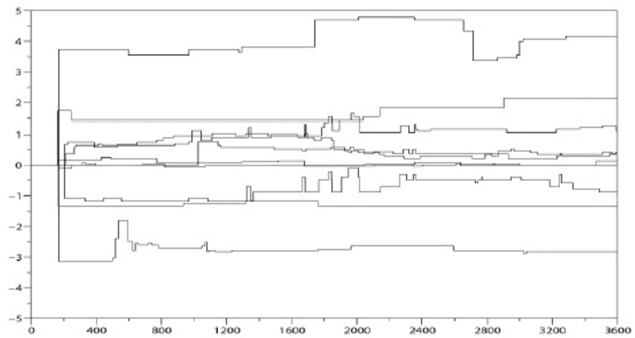


FIGURE 1.6 – Les données boursières : échantillon d'actions observéees à la bourse de Paris pendant une heure.

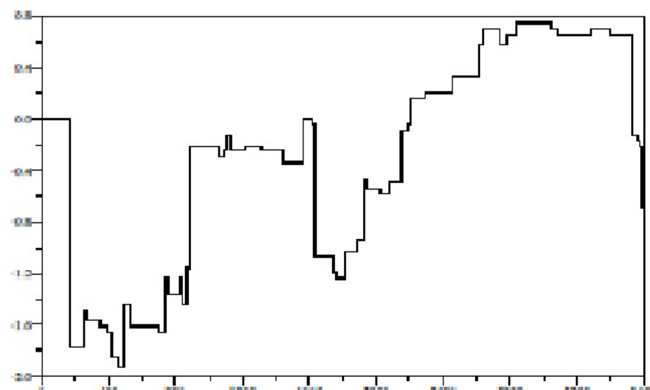

FIGURE 1.7 – Indice d'action boursière.

Les données fonctionnelles sont largement employées dans les problèmes non paramétriques. Historiquement, les premiers travaux dans ce domaine sont relativement anciens, l'analyse en composantes principales (ACP) et analyse factorielle (AF) fonctionnelles ont été étudiées par Rao (1958) [86] et Tucker (1958) [95]. Ramsay (1982) [81] developpe les métodes de la statistique multivariée à ce cadre fonctionnel. Deville (1974) [40] généralise l'ACP à des courbes, une autre généralisation de l'ACP dans un espace de Hilbert a été introduit par Dauxoi et Pousse (1976) [35]. Besse et Ramsay (1986) [12] montrent ensuite qu'une ACP fonctionnelle correspond à une norme. Besse, Cardot et Ferraty (1997) [10] réalisent une ACP fonctionnelle avec contraintes de lissage sur la norme.

Ferraty, Goia et Vieu (2002) [45] étudient le modèle non paramétrique fonctionnel pour les séries temporelles. Une estimation de quelques caractéristiques de la fonction de répartition fonctionnelle pour des modèles non-paramétriques fonctionnels, est donnée par Ferraty, Laksaci et Vieu (2006) [46]. Ferraty et vieu (2004) [51] appliquent des modèles non paramétriques pour des données fonctionnelles dans la régression, Un estimateur à noyau de la densité avec sa vitesse de convergence pour des données fonctionnelles, sont étudiés par Niangé (2003) [80].

Dans la littérature, on dénombre plusieurs travaux pour la statistique fonctionnelle. Dauxois, Pousse et Ramain (1982) [36] donnent un théorème asymptotique pour l'ACP fonctionnelle et quelques applications dans la statistique inférentielle .

Une situation particulière d'utiliser les données fonctionnelles, est celle où on décrit le lien entre une variable réponse et une variable explicative réelle par le modèle linéaire suivant :

$$Y_i = r(X_i) + \epsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

- $X_i$ : est la variable explicative a ses valeurs dans $\mathbb{H}([0,1])$ ;
- $Y_i$ : est la variable réponse réelle ;
- $\epsilon_i$ est le bruit indépendant de $X_i$ suit la loi normale centrée et réduite.

La réponse à ce problème est de chercher un estimateur $\widehat{r}$ de $r$ qui aproxime au mieux la valeur de $Y_i$. Ce problème est l'objet de travaux récents, Cardot, Ferraty et Sarda (1999,2003) [22] [23] donnent un estimateur de $r$ à l'aide de la régression sur composantes principales et de fonctions splines, avec sa vitesse de convergence, dans le cas d'une variable réponse réelle, Cuevas, Febriro et Fraiman (2002) [33] ont étudié le lien entre deux variables fonctionnelles et ont aussi travaillé dans le cadre d'un modèle à plan fixe [2]. Divers métodes d'éstimations ont été proposées par Müler (2005) [77] pour des modèles fonctionnels lorsque la variable réponse est réelle ou fonctionnelle et la variable explicative est vectorielle ou fonctionnelle. Müller et Stadtmüller (2005) [78] ont supposé que la loi conditionnelle de $Y_i$ sachant $X = x_i$ appartient à la famille exponentielle. Ferraty et Vieu (2002,2003) [49] [50] établient la vitesse de convergence d'un estimateur à noyau de $r$ pour des variables fonctionnelles indépendantes identiquement distribuées. Des modèles de régression pour une variable explicative fonctionnelle ont été proposés notamment lorsque la variable réponse est réelle, ces modèles sont construits dans le but d'estimer la moyenne conditionnelle, autrement dit, la régression classique ;

$$r(X) = \mathbb{E}(Y \setminus X = x) \tag{2}$$

2. un plan fixe signifie que $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas des variables aléatoires

Un autre estimateur de la fonction $r$ défini par une somme pondérée de la suite $(Y_n)_n$

$$\widehat{r}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) Y_i \tag{3}$$

où $\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) = 1$

Nadaraya (1984) [79] et Wotson (1964) [98] ont utilisé un noyau $K$ et une fenêtre de lissage $h_n$, ils ont remplacés $W_{n,i}(x)$ dans l'équation (3) par :

$$W_{n,i}(x) = \frac{K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)} 1\!\!1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) \neq 0\right\}} \tag{4}$$

La convergence uniforme presque sûre [3] de cet estimateur est étudiée par Devroye (1981) [42], Stone (1982) [90] a donné le taux de convergence optimal pour la régression classique non paramétrique. Les premiers résultats asymptotiques de l'estimateur à noyau de la régréssion classique pour des données $\alpha-$ mélanges [4], ont été proposés par Györfi et Al (1989). Lu et Chen (2004), Bian et Cardo (2004) , Carbon et Al (2007), Li et Tran (2009) soulèvent la régression classique à des données spatiales. Collomb (1981) [27] a étudié l'estimation non paramétrique de la régression. Collomb (1983,1984) [29] a posé l'idée de la prévision basée sur la régression. Ferraty et Vieu (2000) [48] ont dévelopé cette idée dans le cas vectoriel et en (2002) [50] ils ont généralisé la même idée pour des processus à temps continu, les résultats de la convergence en norme $(L^2)$ [5] de l'estimateur de la régression sont donnés par Dabo, Niang et Rohomani (2004), la normalité asymptotique de cet estimateur a été obtenue par Masry (2005) dans le cas dépendant.

Conmme l'espérance conditionnelle est sensible aux valeurs abérrantes [6], la robustesse de quantile conditionnel, nous permet de considérer le modèle (1) comme un point de vue de la régression sur quantile conditionnel. Elle offre également un autre avantage de la construction de l'intervalle de prédiction, la régression sur quantile est apparue dans les années 70. Les premiers qui ont lancé cette idée sont Mosteller et Tukey (1977) [76], ensuite elle a été développée par Kœker et Bassette (1978) [64] qui ont supposé que la fonction quantile $t_\alpha(x) = xQ(\alpha)$ tel que

3. Soit $(X_n)n$ une suite de variables aléatoires réelles définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_n$ converge vers $X$ uniforme presque sûre ssi $\sup_n \mathbb{P}(\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = X) = 1$

4. Soit $(X_n)n$ une suite de variables aléatoires réelles définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout couple $(i,j) \in Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ on note par $\sigma_i^j$ la tribu engendrée par $\{X_k, i < k < j\}$, on dit que la suite $(X_i)_i$ est $\alpha-$ mélange si $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha(n) = 0$ oú $\alpha(n) = \sup_{\{k \in Z, A \in \sigma_{-\infty}^k, B \in \sigma_{n+k}^{+\infty}\}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$

5. On dit que $X_n$ converge en norme $L^2$ ou en moyenne quadratique vers $X$ ssi $\mathbb{E}(|X_n|^2) < \infty$ , et $\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0$

6. Une donnée aberrante est une observation qui se trouve loin des autres observations .

$x \in \mathbb{R}$ *et* $Q(\alpha)$ est inconnue, il estiment $Q(\alpha)$ par l'estimateur suivant :

$$\widehat{Q}(\alpha) = \arg\min_{Q \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \rho_\alpha(Y_i - X_i Q)$$

Où $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ est un échantillon de taille $n$ de $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Kœker (2005) [63] a étudié cette idée dans le cadre d'une variable explicative multivariée. Meste et Averous (1997) [5] se sont intéréssés à l'estimation des quantiles pour des variables explicatives à valeurs dans un espace de Banach.

Une autre approche de l'estimation du quantile conditionnel a été proposée par He et Shi (1994) [58] qui donnent un estimateur spline, ils ont étudié sa convergence en norme $L^2$ et sa vitesse lorsque les variables explicatives sont réelles. Cristophe Crambes (2005) [30] donne des résultats généraux de cet estimateur dans le cas des données fonctionnelles.

L'objectif de cette thèse est de proposer un estimateur de $t_\alpha(x)$ par une méthode qui s'appelle la méthode à noyau récursive. Cette méthode est une généralisation de l'estimation à noyau classique. Elle est plus appliquable lorsqu' on travaille par des données qui nous arrivent d'une manière sequentielle et lorsque l'on prend un nombre élevé de données. L'avantage de la récursivité est exactement la réduction de temps des calculs. Si on dispose d'un échantillon de taille $n$ et un certain temps, on ajoute une $(n+1)-$ ième observation, au lieu de calculer notre estimateur, en utilisant toutes les observations, il suffit de le calculer juste pour la nouvelle observation. Les estimateurs récursifs peuvent s'avérer préférables aux versions non récursives du fait de leur plus faible variance asymptotique. cette approche est un sujet qui a donné lieu à un grand nombre de travaux. Wolverton et Wagner (1969)[100] sont les premiers qui ont proposé l'estimateur à noyau récursif de la densité. Son champ d'applications est très vaste. Devroye (1979) [41] a étudié la convergence $L^1$ de l'estimateur à noyau récursif de la densité de probabilité.

Laïb et Louaini (2010,2011)[69] [70] ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de la régression classique. Dans la thèse de Aboubaker Amiri (2012) [2], plusieurs types de convergences avec leur vitesse ont été étudiés dans le cas où les variables explicatives sont indépendantes et $\alpha$-méalangeantes d'une famille des estimateurs à noyaux récursifs.

Le principe de notre travail est d'étudier les propriétées asymptotiques des deux estimateurs récursifs du quantile conditionnel pour des variables explicatives fonctionnelles ergodiques, le premier est à noyau récursif et le deuxième à double noyau récursifs.

## 1.1 L'ACP fonctionnelle pour la régression

L'ACP fonctionnelle est un domaine fondamental de la statistique fonctionnelle, elle s'intérèsse à l'étude de la covariance d'un ensemble des données fonctionnelles, elle la représente dans un espace fini sous forme linéaire optimal. En pratique, on dispose de $n$ observations de $k$ variables fonctionnelles sur $n$ individus et on plaçons ces données $x_{ij}$ dans un tableau $X$

réctangulaire de dimenssion $n \times k$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

Les auteurs qui sont intérèssés par ce sujet se sont : Dauxois et Pousse (1976) [35]. Koenker et Basseett (1978) [64]. Breiman, Friedman, Olshen et Stone (1984) [14]. Dauxois, Pousse et Romain (1982) [36]. Besse et Ramsay (1986) [12]. Ramsay et Dalzell (1991) [82]. les articles de Ramsay et Silverman (2002,2005) [84] [85] Ainsi que Ramsay et Silverman (1997) [83] étudient un exemple du climat dans un pays donné par l'interemédiare des variations de la température mensuelle moyenne au cours de l'année en différents points de pays. Chaque station météo est alors un individu qui est décrit par une fonction qui au mois associe la température moyenne observée. Besse et Cardot (2000) [11] étudient l'évolution des diverses mesures géophysique sur une zone donnée pendant un an. Chaque année d'observations correspond à un individu et ils ont étudié la série temporelle des individus. Cardot (2000,2006)[18] [19] étudie l'analyse en composantes principales fonctionnelle conditionnelle.

Le principe de l'ACP fonctionnelle est la projection orthogonale d'un nuage de $n$ points fonctionnels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dans $L^2([0,1])$ sur un espace vectorielle fini engendré par $q$ , $(q < p)$ fonctions de $L^2([0,1])$ $\psi_1, \psi_2 \cdots, \psi_q$, sans perte aucune information, ces vecteurs vérifient que :

$$\xi(\psi_1, \psi_2 \cdots, \psi_q) = \sum_{i=1}^{q} \|x_i - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(x_i)\psi_i\|_2^2$$

soit minimale ;

- $\|.\|_2$ désigne la norme de $L^2$ ;
- $\alpha_i(x_i) = \langle x_i, \psi_i \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2$ qui est la coordonnée de la projection de $x_i$ sur l'espace engendré par $\psi_i$.

La recherche de ces vecteurs revient à faire une analyse spectrale de l'opérateur de la covariance suivant :

$$\Sigma(s,t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i(s) - \mu(s))(x_i(t) - \mu(t))$$

où $\mu$ est la fonction moyenne de $x_i$.

L'ACP des $X$ cherche les valeurs propres de l'opérateur défini par :

$$\Gamma(g) = \langle \Sigma, g \rangle.$$

La fonction propre $\psi_1$ associée à la plus grande valeur propre [7] $\lambda_1$ est la solution maximale du problème suivant :

$$\begin{cases} \max\langle \Gamma(\psi), \psi \rangle \\ \|\psi\|_2 = 1 \end{cases}$$

7. $\lambda$ est une valeur propre de la matrice carrée $A_n$ ssi $det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0$

### 1.1.1 La régression sur composantes principales

Les méthodes classiques de l'estimation (moindre carrée) de la fonction de la régression sont basées sur l'inversion de la matrice de variance-covariance $\Sigma_X = XX^t$. Ces méthodes ne sont pas applicables dans le cas fonctionnel. Parmi les solutions qui ont été proposées pour résoudre ce problème, la régression sur composantes principales fonctionnelles. Cette approche a pour but de réduire la dimension de $X$ , en travaillant par les $k$ premières composantes principales d'une ACP de $X$. les premiers travaux dans ce domaine sont les travaux de Ramsay (1982) [81], les travaux de Breiman, Freidman, Olshen et Stone (1984) [14]. Ferraty et Sarda (1999,2003) [22] [23], les travaux de Kneip et Utikal (2001) [62]. Benko, Müller et Stadtmüller (2005) [78]. Härd et Kneip (2005) [9] ainsi que les travaux de Yao, Müller et Wang (2005) [101].

L'idée de base de cette méthode est la diagonalisation de la matrice de la variance-covariance empirique $\Sigma_{(X,n)}$ associée à $X$, pour ce fait, on note par $(\psi_s)_{s\geq 1}$ les fonctions propres de $\Sigma_{(X,n)}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_s)_{s\geq 1}$ (ordonnées au sens décroissant)

$$\Sigma_{X,n}\psi_s = \lambda_s\psi_s$$

On introduisant les coéfficients :

$$\eta_{is} = \langle X_i, \psi_s\rangle \quad i = 1, \cdots n \quad , \quad s \geq 1$$

Pour déterminer les fonctions propres $(\psi_s)_{s\geq 1}$ de $\Sigma_{(X,n)}$, il faut pas passer par $\Sigma_{(X,n)}$ d'après Kneip et Utikal (2001) [62], ils ont utilisé une autre matrice $M$ carrée de dimenssion $n \times n$ définie par

$$M = (\frac{1}{n}\langle X_{i1}, X_{i2}\rangle)_{(i=1,\cdots,n)}$$

Ils ont montré que les valeurs propres de $\Sigma_{(X,n)}$ et de $M$ sont les mêmes. De plus, si on note par $P_s = (p_{1s}, \cdots, p_{ns})^t$ le vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre $\lambda_s$ on a

$$\eta_{is} = \sqrt{\lambda_s}p_{is}.$$

Pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $s \geq 1$ tel que $\lambda_s > 0$ , on obtient la fonction propre :

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}}\sum_{i=1}^{n} p_{is}X_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_{is}X_i}{\eta_{is}^2} \quad s \geq 1$$

Finalement, on construit l'estimateur de $r$ donné par l'approximation d'ordre $k \geq 1$, en utilisant les $k$ premières composantes principales, par :

$$\widehat{r}_k = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\lambda_s}\langle X_i, f\psi_s\rangle\psi_s.$$

### 1.1.2 Résultat de convergence

Christophe Crambes (2007) [31] a étudié le modèle linéaire de la régression fonctionrnelle sur composantes principales lorsque la variable explicative est bruitée. On considère que les observations disponibles pour la variable explicative $X$ sont $W_1, W_2, \cdots, W_n$ telles que :

$$W_i(t_j) = X_i(t_j) + \delta_{ij}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, p.$$

$(\delta_{ij})_{i,j}$ est la suite de variables aléatoires i.i.d représentant les erreurs faites en chaque point $t_1, \cdots, t_p$. Il commence par la construction d'un estimateur à noyau de $W_i$, qui est défini par :

$$\widetilde{W_i}(t) = \frac{\sum_{j=1}^{p} W_i(t_j) K\left(\frac{t-t_j}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{p} K\left(\frac{t-t_j}{h}\right)}$$

$K$ est une fonction définie sur $[-1, 1]$, paire et d'intégrale égale à 1, $h$ est le paramètre de lissage.

Ainsi, il donne un estimateur $\widehat{M}$ de la matrice $M$ de terme général :

$$\widehat{M}_{i_1,i_2} = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{j_1=1}^{p}\sum_{j_2=1}^{p} W_{i_1}(t_{j_1})W_{i_2}(t_{j_2}) \int_0^1 \frac{K\left(\frac{t-t_{j_1}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)K\left(\frac{t-t_{j_2}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)}{\left[\sum_{j_3=1}^{p} K\left(\frac{t-t_{j_3}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)\right]^2}dt & si\ i_1 = i_2 \\ \frac{1}{n}\sum_{j_1=1}^{p}\sum_{\substack{j_2=1 \\ j_1\neq j_2}}^{p} W_{i_1}(t_{j_1})W_{i_2}(t_{j_2}) \int_0^1 \frac{K\left(\frac{t-t_{j_1}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)K\left(\frac{t-t_{j_2}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)}{\left[\sum_{j_3=1}^{p} K\left(\frac{t-t_{j_3}}{h_{i_1}h_{i_2}}\right)\right]^2}dt & si\ i_1 \neq i_2 \end{cases}$$

Si on note par :

$\widehat{\lambda}_s = (\widehat{\lambda}_{1s}, \cdots, \widehat{\lambda}_{1s})$ les valeurs propres de $\widehat{M}$;

$\widehat{P}_s = (\widehat{p}_{1s}, \cdots, \widehat{p}_{1s})$ : les vecteurs propres de $\widehat{M}$ associés au $\widehat{\lambda}_s$,

On déduit $\widehat{\eta}_{is}$ l'estimateur de $\eta_{is}$ et $\widehat{\psi}_s$ l'estimateur de $\psi_s$. l'estimateur de la fonction de régression est donné par :

$$\widehat{r}_1(t) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\widehat{\lambda}_s}\langle X_{i,\widehat{\psi}_s}\rangle\widehat{\psi}_s(t)$$

et

$$\widehat{r}_2(t) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\widehat{\lambda}_s}\widehat{\eta}_{is}\widehat{\psi}_s(t)$$

on impose les hypothèses suivantes pour établir les résultas asymptotiques de ces estimateurs,

**Hypothèses**

$$(H_1)\ \exists\ C_1, C_2, C_3 < \infty \text{ telsque : } \begin{cases} \sup\limits_{s\geq 1} \sup\limits_{t\in[0,1]} |\psi_s(t)| \leq C_1 \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\langle X, \psi_s\rangle^2 \langle X, \psi_k\rangle^2\right) \leq C_2 \\ \sup\limits_{s\geq 1} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{q=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\langle X, \psi_s\rangle^2 \langle X, \psi_k\rangle \langle X, \psi_q\rangle\right) \leq C_3 \\ \sup\limits_{s\geq 1} \sup\limits_{t\in[0,1]} |\widehat{\psi}_s(t)| = \bigcirc_P(1) \end{cases}$$

$(H_2)$ Les valeurs propres de $\Sigma_{(X,n)}$ vérifient $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > 0$.

$(H_3)$ $X$ est presque sûre deux fois dérivable et $\exists\ C_4, C_5 < \infty$ telsque :

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}(X'(t)^4) \leq C_4 \ et \ \sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}(X''(t))^4 \leq C_5$$

$(H_4)$ $\exists\ 0 < C_6 < \infty, \sup\limits_{i=\overline{1,n}} |Y_i| \leq\ C_6$.

$(H_5)$ $h_{i_1 i_2} \sim l^{-\xi}, \xi \in [1/4, 1/2]$ et

$a_1 = 1/(\lambda_1 - \lambda_2)$ , $a_r = 1/\min(\lambda_{r-1} - \lambda_r, \lambda_r - \lambda_{r+1})$ et $S_L = \sum\limits_{r=1}^{L} a_r$

**Théorème 1.1.1.** *(Christophe Crambe(2007) [31])*
*Supposons qe $L$ est négligeable devant $S_L$ et $n < l$ et sous les hypothèses $(H_1 - H_5)$ on a :*

$$\sup_{t\in[0,1]} |\widehat{r}_1(t) - \widehat{r}_2(t)| =$$

$$\bigcirc_P \left[ \frac{1}{\lambda_L} \left( \frac{L}{\lambda_L n^{1/2} l^{1/2}} + \frac{S_L}{\lambda_L^{1/2} n^{1/2} l} + Lh^2 + \frac{L}{n^{1/2} l^{1/2} h^{1/2}} + \frac{S_L n^{1/2}}{\lambda_L^{3/2} l} \right) \right].$$

## 1.2 Les quantiles conditionnels par la régression linéaire

La méthode de régression sur quantile conditionnel a été proposée par Koenker et Bassett (1978) [64], ils formalisent la relation entre une variable aléatoire et une ou plusieurs variables aléatoires $X_i, i \geq 1$ comme étant les quantiles conditionnels d'ordre $\alpha$ de $Y$ sachant $X_i, i \geq 1$. Dans ce contexte on cite plusieurs travaux, par exemple : Lejeune et Sarda (1988) [71]. Antoch et Janssen (1989) [3]. Chauduri (1991) [24]. Chernozhkov (1998) [25]. Yu et Jones (1998) [102]. Beirlant, Gannoun et Matzner (2001) [7]. Beirlant et Mattys (2003) [8]. Beirlant, Dierckx et Guillou (2005) [6] et Cardot, Crambes et Sarda (2005) [21].

L'idée de la régression sur quantiles conditionnels est décrite par Buchinsky (1998) [15] comme suit :

$$t_\alpha(Y) = \beta_0(\alpha) + \beta_1(\alpha)x_1 + \cdots + \beta_p(\alpha)x_p + \widetilde{\epsilon}_i(\alpha)$$

$\alpha \in ]0,1[$ et les termes d'erreurs $\widetilde{\epsilon}_i, i = 1, \cdots, n$ sont indépendants et identiquement distribués.

### 1.2.1 Estimation des paramètres

la méthode de régression sur quantile conditionnel consiste à estimer les paramètres de modèle en utilisant l'ensemble des quantiles conditionnels qui est equivalent à l'estimation des coéfficients de régression. Ce problème revient à minimiser la somme pondérée des valeurs des termes des erreurs positives et négatives, respectivement par le $\alpha$ d'intérét et son complémentaire $(1-\alpha)$. Dans le cadre de la méthode régression sur quantile, un coéfficient de régression est donc une fonction de $\alpha$ , alors que dans la régression classique, le coéfficient de régression est une valeur unique pour toute la distribution.

Soit $\beta(\alpha)$, le vecteur des coéficients de régression à estimer,

$$\beta(\alpha) = (\beta_0(\alpha), \beta_1(\alpha), \cdots, \beta_p(\alpha))^t$$

et $\widehat{\beta}(\alpha)$ un estimateur de $\beta(\alpha)$,

$$\widehat{\beta}(\alpha) = (\widehat{\beta}_0(\alpha), \widehat{\beta}_1(\alpha), \cdots, \widehat{\beta}_p(\alpha))^t.$$

Ce vecteur est la solution minimale de la quantité suivante :

$$\sum_{i \in \{i \;\; y_i \geq x_i^t b(\alpha)\}} \alpha |y_i - x_i^t(\alpha)| + \sum_{i \in \{i \;\; y_i < x_i^t b(\alpha)\}} (1-\alpha)|y_i - x_i^t(\alpha)|$$

Formellement, cette somme peut être écrite comme :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_\alpha(\widetilde{\epsilon}_i)$$

où $\rho_\alpha(\widetilde{\epsilon}_i)$ est la fonction des termes d'erreurs définie par :

$$\rho_\alpha(\widetilde{\epsilon}_i) = \widetilde{\epsilon}_i(\alpha - \mathbb{1}_{\{\widetilde{\epsilon}_i < 0\}})$$

Le meilleur estimateur $\widehat{\beta}(\alpha)$ a la propriété suivante :

$$\arg \min_{\beta(\alpha) \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} \rho_\alpha(y_i - x_i^t \beta(\alpha))$$

## 1.3 Les quantiles conditionnels par les méthodes non paramétriques

Dans la littérature, on dénombre plusieurs méthodes non paramétriques d'estimation du quantiles conditionnels, on partage ces méthodes en deux calsses :

- La première classe contient des méthodes d'estimation indirectes, ces méthodes sont basées sur la définition de quantile conditionnel, pour calculer le quantile condtionnel d'ordre $\alpha$, on inversant la fonction de répartition conditionnelle.

  Toutes ces méthodes cherchent d'abord un estimateur de la fonction de la répartiton conditionnelle puis à l'inverser.

$$\widehat{t}_\alpha(x)(\alpha/x) = \inf\{y/\widehat{F}_n(y/x) \geq \alpha\} \tag{5}$$

  Un estimateur à noyau $\widehat{F}_n$ de $F_n$ est donné par :

$$\widehat{F_n}(y/x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) \mathbb{1}_{Y_i \leq y} \quad avec \quad \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) = 1. \tag{6}$$

  Plusieurs auteurs s'intérèssent à cet type d'estimation, tel que Yu et Jones (1998) [102], Cai (2002) [16], Cai et Wang (2006) [17], Knefatie et al (2011) [61]. Stone (1977) [89] a étudié La convergence ponctuelle en probabilité [8] de l'estimateur (6) lorsque les variables $(X_i, Y_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, dans le même cadre, Collomb (1980)[26] propose un estimateur à noyau de la fonction de répartition conditionnelle, il pose

$$W_{ni}(x) = \frac{K\left(\dfrac{x - X_i}{h_n}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(\dfrac{x - X_i}{h_n}\right)} \tag{7}$$

  où $K$ est une densité de probabilité appelée noyau, $h_n$ est le paramètre de lissage tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, il étudie les propriétées asymptotiques et la convergence presque complète de son estimateur. Un estimateur à noyau continu et borné sur $[-1, 1]$ a été proposé par Stute (1986) [91] est défini par :

$$\widehat{F}_n(y/x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K\left(\dfrac{G_n(x) - G_n(X_i)}{h_n}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(\dfrac{G_n(x) - G_n(X_i)}{h_n}\right)} \mathbb{1}_{Y_i \leq y} \tag{8}$$

  avec

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq x}.$$

8. on dit que la suite $X_n$ de variables aléatoires définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, converge vers $X$ en probabilité ssi $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

Il a établie la convergence uniforme et les résultats asymptotiques de l'estimateur des quantiles conditionnels associés. Les propriétées asymptotiques de l'estimateur de Collomb (7) de la médiane, dans le cas des variables $(X_i, Y_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sont $\alpha$-mélangeants, ont été étudié par Gannoun (1990) [53]. Hart (1991) [57] propose un estimateur plus général que l'estimateur de Stute (8), il prend un noyau continue et borné sur $[0,1]$ et

$$W_{ni}(x) = \frac{1}{h_n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K\left(\frac{G_n(x) - u}{h_n}\right) du. \tag{9}$$

Une modification de l'estimateur de Collomb (7) a été introduite par Feraty et Vieu (2000) [48] dans le cas où la variable $X$ est fonctionnelle, ils posent

$$W_{ni}(x) = \frac{K\left(\frac{d(x, X_i)}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{d(x, X_i)}{h_n}\right)} \tag{10}$$

où $d$ est une distance semi métrique et $K$ est un noyau positif et décroissant sur $[0,1]$. En 2005, Feraty, Rabhi et Vieu [47] donnent la vitesse de convergence presque complète [9] dans le cas où les variables $X_i$ sont indépendantes identiquement distribuées d'un estimateur à double noyaux de la fonction de répartition conditionnelle, définie par :

$$\widehat{F}_n(y/x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_0\left(\frac{d(x, X_i)}{h_{n,0}}\right) K_1\left(\frac{d(y, Y_i)}{h_{n,1}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K_0\left(\frac{d(x, X_i)}{h_{n,0}}\right)}. \tag{11}$$

$K_i, (i = 0, 1)$ est un noyau positif et décroissant sur $[0,1]$. Sous les conditions suivantes :

**Hypothŝes**

(C1) $\mathbb{P}\left(X \in B(x,r)\right) = \phi_x(r) > 0$,

(C2) $F^x$ est $k$- fois continûment differentiable par raport à $y$ sur $(t_\alpha - \xi, t_\alpha + \xi)$, vérifiant $F^{x(l)}(t_\alpha) = 0$, si $1 \le l < k$, et $0 < \left|F^{x(k)}(t_\alpha)\right| < \infty$,

(C3) $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\forall (x_1, x_2) \in N_{x_1} \times N_{x_2}$,
$|F^x(y_1) - F^x(y_2)| \le C_x \left(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}\right)$,

9. soit $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires. On dit que $X_n$ converge presque complètement (p.co.) vers 0 si et seulement si, $\forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty$. De plus, soit $(Z_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de nombres réels positifs. On dit que $X_n = \bigcirc(Z_n)$ p.co. si, et seulement si, $\forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon Z_n) < \infty$.

(C4) $\begin{cases} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |K_1(y_1) - K_1(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|, \\ \int |t|^{b_2} K_1^{(1)}(t)dt < \infty. \end{cases}$

(C5) $K_0$ est une fonction à support compact sur $[0,1]$ vérifiant $0 < C_1 < K_0(t) < C_2 < \infty$,

(C6) $\lim_{n\to\infty} h_{n,0} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n\phi_x(h_{n,0})}{\log n} = \infty.$

(C7) $\lim_{n\to\infty} h_{n,1} = 0, \quad \exists \alpha > 0 \ \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} h_{n,1} = \infty.$

**Théorème 1.3.1.** *(Feraty , Rabhi et Vieu (2005)[47])*
*Sous les hypothèses $C_1 - C_7$ on a :*

$$\widehat{t_\alpha} - t_\alpha = O\left(h_{n,0}^{\frac{b_1}{k}} + h_{n,1}^{\frac{b_2}{k}}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n h_{n,1}\, \phi_x(h_{n,0})}\right)^{\frac{1}{2k}}\right)$$

Un autre point de vue de l'estimation de la fonction de répartition, dans le cas du signe fixe, a été introduite par Anthoch et Janssen(1989) [3], ils posent dans l'estimateur (6) :

$$\begin{cases} W_{n_i}(x) &= \dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ W_{n_1}(x) &= \dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du \\ W_{n_n}(x) &= \dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_{n-1}}^{+\infty} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du \end{cases} \tag{12}$$

où $K$ est un noyau de probabilité.
Feraty et Al (2005) établissent la vitesse de convergence presque complète dans le cas des données non dépendantes d'un estimateur à noyau défini par :

$$\widehat{F_n}(y/x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K_0\left(\frac{d(x, X_i)}{h_{n,0}}\right) \int_{-\infty}^{y} K_1\left(\frac{(u - Y_i)}{h_{n,1}}\right) du}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K_0\left(\frac{d(x, X_i)}{h_n, 0}\right)} \tag{13}$$

où $d$ est une distance semi métrique, $K_1$ est un noyau positif et décroissant sur $[0,1]$, $K_0$ noyau symétrique et $h_{n,0},\ h_{n,1}$ sont des suites positives sous les hypothèses précédentes et les hypothèses suivantes :

(C8) $\sup_{i\neq k} \mathbb{P}\left((X_i, X_j) \in B(x,r) \times B(x,r)\right) = \phi_x(r)\psi_x(r) > 0,$

(C9) Le coéfficient de mélange vérifie

$$\exists\ a > (5+\sqrt{17})/2, \exists\ c > 0,\ \forall n,\ \alpha_n \leq cn^{-a},$$

(C10) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} h_{n,0} = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n\,\chi_x(h_{n,0})} = 0, \\ \exists \beta_2 > 0,\ c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_2 n^{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)+\beta_2} \leq \chi_x(h_{n,0}) \leq c_1\, n^{\frac{1}{1-a}-\beta_2} \end{cases}$

telle que, $\chi_x(h_{n,0}) = \max(\psi_x(h_{n,0}), \phi_x(h_{n,0}))$.

Cette vitesse est donnée par :

**Théorème 1.3.2.** *(Feraty et Al (2005))*

$$\widehat{t_\alpha} - t_\alpha = O\left(h_{n,0}^{\frac{b_1}{k}} + h_{n,1}^{\frac{b_2}{k}}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n h_{n,1}\, \phi_x(h_{n,0})}\right)^{\frac{1}{2k}}\right), \qquad p.co.$$

La convergence dans l'espace $L^p[0,1]$ [10] de cet estimateur a été étudiée par Dabo-Niang et Laksaci (2011) [34] dans le cas indépendant avec la vitesse suivante :

**Théorème 1.3.3.** *(Dabo-Niang et Laksaci (2011) [34] )*
*sous les conditions (C1-C7)*

$$\|\widehat{t_\alpha} - t_\alpha\|_p = O\left(h_{n,0}^{\frac{b_1}{k}} + h_{n,1}^{\frac{b_2}{k}}\right) + O\left(\left(\frac{1}{n\, \phi_x(h_{n,0})}\right)^{\frac{1}{2k}}\right)$$

et dans le cas dépendant et sous les hypothèses (C1-C7) et les conditions suivantes :

(C11) Le coéfficient de mélange vérifie $\exists a > 0, \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ \alpha(n) \leq cn^{-a}$.

(C12) $\forall i \neq j, 0 < \sup\limits_{i\neq j} P[(X_i, X_j) \in B(x,h) \times B(x,h)] = \bigcirc\left(\dfrac{(\phi_x(h))^{a+1/a}}{n^{1/a}}\right)$.

(C13) $\forall (y_1, y_2) \in N_x \times N_x, |F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C(d(x_1,x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2})$ , $b_1 > 0, b_2 > 0$.

On a :

10. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , on dit que la suite $X_n$ converge vers $X$ dans l'espace $L^p$ ssi $\mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$

**Théorème 1.3.4.** *(Dabo-Niang et Laksaci (2011)[34] )*

$$\|\widehat{t_\alpha} - t_\alpha\|_p = O\left(h_{n,0}^{\frac{b_1}{k}} + h_{n,1}^{\frac{b_2}{k}}\right) + O\left(\left(\frac{1}{n\,\phi_x(h_{n,0})}\right)^{\frac{1}{2k}}\right).$$

Tukey (1961) [96] donne un autre estimateur indirect du quantile conditionnel, dit *l'estimateur de la fenêtre mobile* ( médianogramme), il estime la fonction de répartition conditionnelle par (6), il pose

$$\begin{cases} W_{n_i}(x) & = \dfrac{1\!\!1_{\{X_i \in B(x,h_n)\}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{X_i \in B(x,h_n)\}}} \quad \text{plan aléatoire} \\ W_{n_i}(x) & = \dfrac{1\!\!1_{\{x_i \in B(x,h_n)\}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{x_i \in B(x,h_n)\}}} \quad \text{plan fixe} \end{cases}$$

où $B(x, h_n)$ est une boule de centre $x$ et de rayon $h_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, lorsque $K(.) = 1\!\!1_{x\in[-1,1]}$ cet estimateur est un estimateur à noyau. Truong (1989) [93] a étudié la vitesse de convergence optimale de l'estimateur de la fenêtre mobile de la médiane conditionnelle. La convergence uniforme presque complète de cet estimateur a été établie par Gannoun (1990) [53].

L' *Estimateurs au sens des plus proches voisins* de la fonction de répartition conditionnelle a été proposé par Bhattacharyya et Gangopadhyay (1990) [13], ils définissent cet estimateur comme étant la fonction de répartition empirique des observations aux $k$ points $X_i(x_i)$ les plus proches du point fixe $x$ c'est-à-dire

$$\widehat{F}_n(Y\backslash x) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\left\{Y_{\lfloor n_i \rfloor} \leq y\right\}} \tag{14}$$

$k \leq n$ et les $Y_{\lfloor n_i \rfloor}$ sont les concomitants des statistiques d'ordre $U_{n,1} < \cdots < U_{n,n}$ associés aux $U_i = |X_i - x|$.

L'estimateur au sens des plus proches voisins du quantile conditionnel est alors défini par :

$$\widehat{t}_\alpha(x) = inf\left\{y/\widehat{F}_k(y\backslash x) \geq \frac{\lfloor k\alpha \rfloor}{k}\right\}. \tag{15}$$

- La seconde classe d'estimation des quantiles conditionnels regroupe les méthodes les plus directes, basées sur la recherche d'un estimateur du quantile conditionnel comme étant une solution minimale d'un problème de la forme suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_\alpha(Y_i - r_\alpha(X_i)) \tag{16}$$

Koenker (2005) [63] définit la fonction de perte ("check function") $l_\alpha$ par :

$$l_\alpha(u) = |u| + (2\alpha - 1)u. \tag{17}$$

Bassett et Kœnker (1978)[64] étudient ainsi un estimateur de la midiane conditionnelle en minimisant un critère du type moindres valeurs absolues, et prouvent sa convergence et sa normalité asymptotique. Koenker (2005) [63] a résoulu ce problème de minimisation, il utilise une méthode algorithmique, notament la méthode de simplexe.

Historiquement, il y a plusieurs approches directes d'estimations, parmis ces approches, on cite :

1. **La méthode de la constante locale** introduite par Tsybakov (1986) [94] et il estime le quantile conditionnel par :

$$\widehat{t}_\alpha(x) = \arg\min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} l_\alpha(Y_i - a) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \tag{18}$$

plusieurs auteurs s'intérèssent à l'étude du ses propriétés asymptotiques, notament Stone (1977) [89], Yu et Jones (1998) [102], Gardes, Girard et Lekina (2010) [54], Garrido (2002) [55]. Fan, Hu et Truong (1994) [44], Koenker et Portnoy (1992) [65].

2. **La méthode de polynômes locaux** est une méthode plus générale que la méthode de la constante locale, si on prend un noyau de type fonction indicatrice d'intervalles. Pour $k = 1$, elle approxime le quantile conditionnel par un polynôme de degré $k$, la déterminationtion de ce pôlynome revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{b_0,\ldots,b_k} \sum_{i=1}^{n} l_\alpha\left(Y_i - \sum_{j=0}^{k} b_j (X_i - x)^j\right) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right). \tag{19}$$

L'estimateur de quantile conditionnel est alors défini par :

$$\widehat{t}_\alpha(x) = \widehat{b}_0. \tag{20}$$

Chauduri (1991) [24] a démontré la convergence forte ponctuelle. He et Shi (1994) [58] proposent un estimateur de $t_\alpha(y)$ basé sur des splines de régression et obtiennent des vitesses de convergence usuelles en statistique nonparamétrique. Dans la littérature, on trouve d'autres estimateurs, comme par exemple l'estimateur de Koenker et Portnoy (1994) [65] basé sur des splines de lissage. D'un point de vue de l'estimation linéaire, Cardot, Christophe et Sarda (2003) [32] estiment le quantile conditionnel lorsque la variable explicative $X$ est fonctionnelle et $Y$ est réelle, ils posent un estimateur spline du coéfficients fonctionnel, ils suposent que pour tout $x \in L^2([0,1]), \alpha \in [0,1]$, la fonction quantile conditionnel $q_\alpha(x)$ est un opérateur linéaire continue sur $L^2([0,1])$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de Riesz [11] assure l'existence d'une

11. $H$ un sous espace de hilbert menu de son produit scaliare noté $\langle , \rangle$, $f \in H$ une forme linéaire continue sur $H$, alors il existe un unique $Y \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $f(x) = \langle Y, x \rangle$

unique fonction $\Psi_\alpha \in L^2([0,1])$ tel que :

$$t_\alpha(x) = \langle \Psi_\alpha, X \rangle = \int_0^1 \Psi_\alpha(t), X(t)dt. \tag{21}$$

Ce modèle est une généralisation de la régression sur quantile introduite par Koenker et Basset (1978) [64]. Le but est de définir un estimateur spline de la fonction $\Psi_\alpha$ pour ce faire,

Soit $q \in \mathbb{N}, k = k_n \in \mathbb{N}^*$, on donne une subdivision en $k$ sous-intervalle de $[0,1]$, l'estimateur spline $\widehat{\Psi}_\alpha$ de la fonction $\Psi_\alpha$ est défini comme une combinaison linéaire de vecteurs de bases de l'espace de fonctions B-spline $B_l, l = 1, \cdots, k+q$ (Figure 1.8), qui sont des fonctions polynômiales de degré $q$ par morceaux sur chaque sous-intervalle de $[0,1]$, cette base est notée $B_{k,q} =^t (B_1, \cdots, B_{k+q})$.

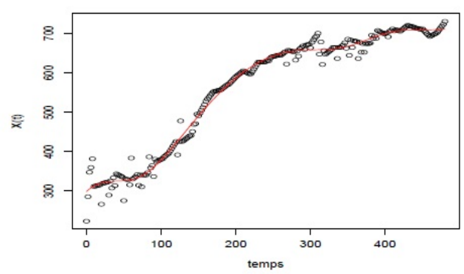


FIGURE 1.8 – Lissage utilisant une base de fonctions (B-splines cubiques).

Le problème devient la recherche d'un vecteur $\widehat{\theta} =^t (\widehat{\theta}_1, \cdots, \widehat{\theta}_{k+q}) \in \mathbb{R}^{k+q}$ tel que :

$$\widehat{\Psi}_\alpha =^t B_{k,q}\widehat{\theta}$$

$\widehat{\theta}$ est la solution minimale du problème suivant :

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^{k+q}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_\alpha \left( Y_i - \langle {}^t B_{k,q}\theta, X_i \rangle \right) + \rho \| {}^t B_{k,q}\theta)^{(m)} \|^2 \right\}$$

$({}^t B_{k,q}\theta)^{(m)}$ est la dérivée d'ordre $m$ de l$({}^t B_{k,q}\theta)$;

$\rho$ le paramètre de pénalisation.

Cardot, Crambes et Sardat(2003) [32] trouvent que cet estimateur converge en moyenne quadratique ver $\Psi_\alpha$, sous les hypotèses suivantes :

**Hypothèses**

$(H_1)$ $\exists 0 < C_0 < \infty$ *tel que*$\|X_i\| \leq C_0 \quad p.s.$
$(H_2)$ la fonction $\Psi_\alpha$ admet une dérivée d'ordre $p'$ et $\exists\ 0 < C_1 < \infty$ tel que

$$|\Psi_\alpha^{(p')}(t) - \Psi_\alpha^{(p')}(s)| \leq C_1 |t-s|^r, s, t, r \in [0,1]$$

$(H_3)$ Les valeurs propres de $\Sigma_X$ sont strictement positives.
$(H_4)$ $\forall x \in L^2([0,1])$ , la distibution conditionnelle de $\varepsilon_i$ sachant $X = x$ admet une densité continue et strictement positive en zéro.

## 1.4 L'estimation récursive

Le problème principal de l'estimateur à noyau classique est qu'il ne s'adapte pas bien au cas où les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ nous arrivent d'une manière séquentielle, supposons que l'on dispose des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ à un certain temps, et qui un peu plus tard on reçoit une (n+1)-iéme variable $X_{n+1}$, pour estimer notre fonction, on aimerait utiliser cette nouvelle observation, qui est équivalente á calculer notre estimateur en utilisant toutes les observations $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$, ce qui n'est pas très pratique. Une solution de ce problème est d'utiliser une version récursive de notre estimateur, pour réduire le temps de calcul. Les estimateurs récursifs peuvent s'averer préférables aux versions non récursives du fait de leurs faible variance asymptotique.

L'estimation de la densité est un sujet qui a donnée lieu à un grand nombre de travaux. Le premier estimateur à noyau récursif de la densité a été introduit par Wolverton et Wagner (1977) [100] défini par :

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Deheuvels (1973,1974) [37] [39] a proposé un autre estimateur séquentielle de la densité de probabilité dit l'estimateur de Deheuvels qui s'écrit en dimension $d$ sous la forme :

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{h_n^d}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{d/2}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right). \tag{22}$$

Historiquement, Deheuvels (1973) [37] a étudié la convergence en moyenne quadratique et a donné des conditions de la convergence presque sûre et uniforme presque sûre de leur estimateur, sa vitesse de convergence a été donnée par Roussas (1992) [87]. La normalité asymptotique de cet estimateur a été étudiée par Isogai (1984) [59] sous certaines conditions dans le cas des variables i.i.d et par Masry(1986) [77] et Tran (1989) [92] dans le cas des variables dépendantes. Isogai (1994) [60] a étudié l'estimateur récursif de la densité et ses dérivées. Masry et Györfi(1987) [75] établisent la vitesse de convergence presque sûre ponctuelle sous les conditions de $\rho$-mélange de l'estimateur de Deheuvels. La convergence presque complète de l'estimateur à noyau récursif de la densité pour des pressecus stationnaire a été donnée par Masry (1987) [74]. Lian et Baek (2004) [72] étudient la normalité asymptotique de l'estimateur de Deheuvels pour des variables négativement associées. Wegman et Davies (1979) [99] ont donné quelques remarques sur un ensemble d'estimateurs récursifs de la densité. Amiri (2009) [1] a étudié les prorpriétés asymptotiques d' une famille d'estimateurs séquentiels paramétriques de la densité. Devroys (1979) [41] a étudié la convergence $L^1$ de l'estimateur à noyau récursif de la densité.

La version récursive de l'estimateur de Nadarya et Watson (1) de la fonction de régression est définie par :

$$\widehat{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} K(\frac{X_i - x}{h_i}) Y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} K(\frac{X_i - x}{h_i})} \mathbb{1}_{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} K(\frac{X_i - x}{h_i}) \neq 0\right)}. \tag{23}$$

La liste de références sur l'estimation récursive de la régression devient trés longue mais nous nous référons aux Krzyżak et Pawlak (1984) [68] qui a établi la convergence presque complète de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de régression, an 1987 et dans ce cadre, Greblecki et Pawlak [56] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes assurent sa convergence. la convergence globale et une application dans le système d'estimation non-linéaire ont été réalisées par Krzyżak (1992) [67]. La normalité asymptotique de cet estimateur aété donnée par Roussas et Tran (1992) [88]. Ses propriétés asymptotiques sont énoncées par Walk (2001) [97]. Réviser(1977) a étudié la normalité asymptotique d' un autre éstimateur récursif de la fonction de régréssion qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ par :

$$\widehat{r}_n(x) = \widehat{r}_{n-1}(x) + \frac{1}{nh_n} K\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right) (Y_n - \widehat{r}_{n-1}(x))$$

## 1.5 Quelques résultats asymptotiques

Dans cette section, nous présentons quelques popriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de densité et l'estimateur à noyau récursif de la fonction de régréssion. (ces résultats issuent de la thèse de Aboubakeur Amiri [2]).

### 1.5.1 Estimation récursive de la densité

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire tel que $X_t \in \mathbb{R}^d$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$. Nous définissons l'estimateur à noyau récursif de la fonction de densité $f$ par :

$$f_n^l(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{dl}} K(\frac{x - X_i}{h_i}), \quad x \in \mathbb{R}^d, (l \in [0,1]) \tag{24}$$

**Hypothèses**

Le noyau $K$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\mathbf{H1 :}\begin{cases} i)K : \mathbb{R}^d :\to \mathbb{R} \text{ est strictement positive, symétrique et bornée,} \\ ii) \lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|x\|^d K(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ iii) \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |v_i v_j| K(v)dv < \infty, \quad i,j = 1,\cdots,d. \end{cases}$$

La fenêtre $h_n$ vérifie

$$\mathbf{H2 :}\begin{cases} i)h_n \downarrow_0 \ \ et\ nh_n^{d+2} \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty, \\ ii)\forall r \in ]-\infty, d+2] \ \beta_{n,r} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h_n}\right)^r \to \beta_r < \infty. \end{cases}$$

On suppose des hypothèses suplémentaires sur le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ pour établir la convergence de $f_n^l$ dans le cas des variables aléatoires dépendantes.

$$\mathbf{H3 :}\begin{cases} i)(X_t)_{t\in\mathbb{N}}\ est\ (2-\alpha) \text{ mélangeant avec } : \ \alpha^{(2)}(k) \le rk^{-\rho}, \quad k \ge 1, \quad r,\rho > 0 \\ ii)\forall(s,t), s \ne t \text{ le vecteur aléatoire } (X_t, X_s) \text{ admet une densité } f(X_t, X_s) \\ tel\ que\ \sup \|g_{s,t}\|_\infty < \infty \ \ , g_{s,t} = f(X_s, X_t) - f_{X_s} \otimes f_{X_t} \end{cases}$$

**Convergence en moyenne quadratique :**

(a) **Cas i.i.d**

**Théorème 1.5.1.** *Sous les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$ on a :*

*i.* $\forall l \in [0,1]$

$$h_n^{-4}[\mathbb{E}(f_n^l(x)) - f(x)]^2 \to_{n\to\infty} \left[\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}}\right]^2 b_{f(x)}^2$$

*ii.* $\forall l \in [0,1]$

$$nh_n^d Var(f_n^l(x)) \to \sigma_l^2(x)$$

*iii. Si* $h_n = C_n n^{-\frac{1}{d+4}}, \quad C_n \downarrow c > 0$ *alors :*

$$n^{\frac{4}{d+4}} \mathbb{E}\left[f_n^l(x) - f(x)\right]^2 \to c^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_{f(x)}^2 + \frac{(4+dl)^2 f(x)\|K\|_2^2}{2c^d(4+d)(2+dl)}$$

*lorsque $n \to \infty$ et pour tout $x$ où $f(x) > 0$*

$$\begin{cases} b_{f(x)} & = \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{1\le i,j\le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^d} v_i v_j K(v)dv. \\ \sigma_l^2(x) & = \dfrac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta_{d(1-l)}^2} f(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} K^2(x)dx \end{cases}$$

(b) **Cas dépendant**

**Théorème 1.5.2.** *Sous les hypothèses* $(\boldsymbol{H1}), (\boldsymbol{H3})$ *on a*

*(a)* $\forall l \in [\left(\frac{d-4}{2d}\right)^+, 1]$, *lorsque* $n \to \infty$, *et si* $\rho > 2$ *on a*

$$nh_n^d Var(f_n^l(x)) \to \sigma_l^2$$

*(b) Si* $d \geq 3$ *et* $l \in [0, \frac{d-2}{2d}]$ *la conclusion de (a) reste encore vraie si* $\rho > \frac{d+2}{2}$

*(c)* $\forall l \in [\left(\frac{d-4}{2d}\right)^+, 1]$ *(resp,* $l \in \left[0, \frac{d-4}{2d}\right[$, *si* $d \geq 5$*)*
*Si* $\rho > 2$ *(resp,* $\rho > \frac{d+2}{2}$*), le choix*

$$h_n = C_n n^{-\frac{1}{d+4}}, \ C_n \downarrow c > 0$$

*implique*

$$n^{\frac{4}{d+4}} \mathbb{E}\left[f_n^l(x) - f(x)\right]^2 \to c^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_f^2(x) + \frac{(4+dl)^2 f^2(x)}{2c^d(4+d(2+dl))} \|K\|_2^2$$

*lorsque* $n \to \infty$ *et en tout point* $x$ *tel que* $f(x) > 0$

**Convergence presque sûre ponctuelle :**

(a) **Cas i.i.d**

**Théorème 1.5.3.** *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$*, si por tout* $\alpha \geq 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nh_n^d}{(\ln\ln n)^{2(\alpha+1)} \ln n} = \infty \ et \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln h_n}{\ln n} < \infty$$

*i. alors pour tout* $x$ *tel que* $f(x) > 0$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt{\frac{nh_n^d}{\ln\ln n}} \left[f_n^l(x) - \mathbb{E}(f_n^l(x))\right] = \sigma_l \sqrt{2} p.s$$

*ii. de plus le choix* $h_n = C_n \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}$, $C_{n\downarrow c>0}$ *implique*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \left[f_n^l(x) - f(x)\right] = \sigma_l \sqrt{2c^d} + \frac{c^2 \beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_{f(x)} \ p.s$$

*pour tout point* $x$ *tel que* $f(x) > 0$

(b) **Cas dépendant**

**Théorème 1.5.4.** *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_3}$ *avec* $f$ *une fonction lipschitzienne et soient* $cd > 0$ *et* $\mu \geq 0$ *alors :*

*(a) Le choix* $h_n = C_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, C_n \downarrow c > 0$ *implique :*

$$\sup_{\|x\| \leq cdn^{\mu}} |f_n^l(x) - f(x)| = \bigcirc \left[ \left( \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{2}{d+4}} \right]$$

*(b) Si* $K$ *est à support compact,* $f(x)$ *décroissante à partir d'un certain* $x_0, \mathbb{E}(\|x_0\|) < \infty$ *et* $\mu > 2$ *alors :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_n^l(x) - f(x)| = \bigcirc \left[ \left( \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{2}{d+4}} \right]$$

### 1.5.2 Estimation récursif de la fonction de régression

La fonction de la régression $r(x)$ est estimée par :

$$r(x) = \frac{\varphi_n^l(x)}{f_n^l(x)} \text{ tel que } \varphi_n^l(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{(1-l)d}} \sum_{i=1}^d \frac{m(Y_i)}{h_i^{dl}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)$$

tels que :

- $(X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}, (d, d' \geq 1)$ ont la même densité $f^*$ ;
- $m$ est une fonction strictement positive , choisie par le statiticien, borélienne de $\mathbb{R}^{d'}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $w \mapsto m^2(Y_t(w))$ soit $P$-intégrable ;
- $f$ est la densité marginale de $X_i$, en se basant sur les observations $\xi_1, \cdots, \xi_n$

**Hypothèses**

$$H_4\begin{cases} i)\text{f},\varphi \in C_d^2(b), \\ ii)\text{la fonction } \mathbb{E}[m^2(Y_0)/X_0 = .]\, f(x) \;\; \text{est continue et bornée,} \\ iii)\exists\lambda > 0, \chi > 0 \text{ tel que } \mathbb{E}(exp(\lambda/|m(Y_0)|^{\chi})) < \infty; \\ iv)\forall \text{k}\neq k', (\xi_k, \xi_{k'}) \;\; \text{admet une densité de probabilité } f_{(\xi_k,\xi_{k'})} \text{ tel que} \\ G = \sup_{|k-k'|\geq 1} \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{d'}} |G_{k,k'}(s,u,t,v)|dudv < \infty \\ G_{k,k'} = f_{(\xi_k,\xi_{k'})}(s,u,v,t) - f^*(s,u)f^*(t,v), \\ v)(\xi_t)t \in \mathbb{N} \text{ est un procéssus géométriquement fortement méalangeante ,} \\ \;avec \\ \alpha_\xi(x) \leq \rho_0 e^{-\rho_1 u}, u \geq 1, \rho_1 > 0. \end{cases}$$

**Convergence presque sûre**

(a) **Cas i.i.d**

**Théorème 1.5.5.** *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ *et* $\mathbf{H_4(i)} - \mathbf{(iii)}$ *, si,* $\alpha \geq 0$ *alors :*

*i.* $\dfrac{nh_n^d}{(\ln n)^{1+\frac{2}{\chi}}(\ln\ln n)^{2(\alpha+1)}} \to \infty$ *et* $\lim \dfrac{\ln h_n}{\ln n} < \infty,$ *lorsque* $n \to \infty$ *;*

*ii. Si K vérifie* $\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^3 K(u) < \infty$
*alors le choix*

$$h_n = C_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, C_n \downarrow c > 0$$

*implique*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \left[r_n^l(x) - r(x)\right] = C_0(x, K, \varphi, f, l) \;\; p.s$$

$$\begin{cases} C_0(x,K,\varphi,f,l) = \dfrac{1}{f(x)}\left[c^{-\frac{d}{2}}\sigma_l(x)\sqrt{2V(x)} + c^2\dfrac{\beta_{d(1-l)}+2}{\beta_{d(1-l)}} b_{\varphi,l}(x)\right] \\ b_{\varphi,l}(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) - r(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right]\int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j K(z)dz \\ V(x) = \mathbb{E}\left[m^2(Y_0/X_0 = x)\right] - r^2(x) \end{cases}$$

(b) **Cas dépendant**

Pour étudier la convergence presque sûre [12] de l'estimateur $r_n^l(x)$ dans le cas des variables

12. On dit que $X_n$ converge presque sûrment vers $X$ si $\mathbb{P}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X\right) = 1$

aléatoitres dépendantes , on suppose que le processus $(\xi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est géométriquement fortement mélangeant et sous les hypothèses $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_4}$ et si $K$ vérifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^3 K(u) < \infty$ alors

Le choix $h_n = C_n \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}$ , $C_{n\downarrow c>0}$ implique

**Théorème 1.5.6.** *:*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right) \frac{2}{d+4} |r_n^l(x) - r(x)| \leq C_1(x, K, \varphi, f, l) \ p.s$$

*avec*

$$C_1(x, K, \varphi, f, l) = \frac{1}{f(x)} \left\{ 2c^{-\frac{d}{2}} \left[1 + \sigma_l^2 V(x)\right] + \frac{c^2 \beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_{\varphi,l}(x) \right\}$$

**Convergence en moyenne quadratique**

Dans cette partie, nous donnons la convergence en moyenne quadratiqe de l'estimateur $r_n^l(x)$ pour des variables dépendantes. Pour cela, on va supposer l'hypothèse suivante

$$\mathbf{H_5} \begin{cases} i)\text{Pour chaque k} \neq k' \ \text{ on a :} \\ \mathrm{G}_1 = \sup\limits_{|k-k'|\geq 1} \|f_{((X_k, X_{k'})/Y_{k'})}(s, t/v) - f(s) f_{X_{k'}/Y_{k'}}(t|v)\|_\infty < \infty \\ \mathrm{G}_2 = \sup\limits_{|k-k'|\geq 1} \|f_{((X_k, X_{k'})/(Y_k, Y_{k'})}(s/u, t/v) - f_{(X_k/Y_k)}(s/u) f_{(X_{k'}, Y_{k'})}(t/v)\|_\infty < \infty \\ ii)\xi_t \text{ est un processus } (2-\alpha) \text{ méalangeant, avec :} \\ \alpha_\xi^{(2)}(k) \leq \rho_0 k^{-\rho_1}, \ k \geq 1, \rho_0 > 0 \ et \ \rho_1 > \max(8, 2(d=2)) \end{cases}$$

**Théorème 1.5.7.** *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_4}, \mathbf{H_5}$ *et le choix*

$$h_n = C_n n^{-\frac{1}{d+4}}, C_n \downarrow c > 0$$

*implique*

$$\frac{4}{d+4} \mathbb{E}\left[r_n^l(x) - r(x)\right] \longrightarrow C_2(x, K, \varphi, f, l) \ lorsque \ n \to \infty$$

$$\begin{cases} C_2(x, K, \varphi, f, l) = \left\{ \dfrac{c^2(4+dl)\left[r(x) b_{f(x)} + b_{\varphi(x)}\right]^2}{f(x)(2+dl)} + \dfrac{(4+dl)^2 \|K\|_2^2 V(x)}{2c^d(4+d)(2+dl) f(x)} \right\} \\ b_{\varphi(x)} = \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^d} v_i v_j K(v) dv. \end{cases}$$

## 1.6 Ergodicité

Le physicien Lndwig Boltzamann était le premier qui a introduit la théorie ergodique en 1871 pour sa théorie cinétique de gaz, cette théorie est très appliquable dans la mécanique statistique, dans la théorie de maxwell et dans la théorie de Gibbs. Elle est utilisée pour montrer la convergence presque sûre de la moyenne de l'ensemble (moyenne spatial [13])d'un système dynamique unique (réalisation unique) vers la moyenne temporelle [14] de ce système. Mackey (1974) donne une théorie à part entière en mathématique. nous nous sommes intéressés au théorème ergodique, appliquée sur des processus stationnaires, notament le théorème de Birkhoff suivant :
Soit $X_0, X_1, \cdots, X_n$ un processus réel statinnaire et $X_0$ est intégrable et $\mathfrak{F}$ est le $\sigma-$algébre des ensembles invariants [15] alors :

**Théorème 1.6.1.** *(théoreme de birkhoff)*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mathbb{E}(X_0 \backslash \mathfrak{F}) \quad p.s \tag{25}$$

*Si le processus est ergodique la limite coïncide avec l'espérance $\mathbb{E}(X_0)$ de la variable $X_0$*

Peskir (1998) a étudié la convergence en $L^2$ de (25) pour des processus discrets. Nous nous référons au livre de Krengel [66] pour le détail des résultats sur la théorie ergodique. N.Laïb et D.Louani (2011)[70] étudient la normalité asymptotique de l'estimateur non paramétrique à noyau de la régression lorsque les variables explicatives sont fonctionnelles ergodiques,pour définir la propriété d'ergodicité , il ont posé les notations suivantes :
Soit $(S, \mathfrak{g})$ un espace mesurable, on note par $S^{\mathbb{N}}$ l'espace de toutes les fonction $s : \mathbb{N} \longrightarrow S$. Si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $s_j$ est la $j^{ime}$ composantes de la fonction $s$, On défini l'application $H_j$ tel que $H_j(s) = s_j$ et on considère $H_j^{-1}$ l'image inverse de $H_j$. Soit $\mathfrak{g}^{\mathbb{N}}$ la plus petite $\sigma-$algébre dans $S^{\mathbb{N}}$ contient tout les $\sigma-$ algèbre $H_j^{-1}(\mathfrak{g}),\ j \in \mathbb{N}$

13. Soit $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ , $n$ variables aléatoires observées aux même instant $t$, se reportant au même processus aléatoire. La moyenne spatial ou moyenne d'ensemble est définie par : $\mathbb{E}_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(t)$ On obtient une fonction qui varie avec le temps.

14. La moyenne temporelle est donnée par : $m_{X_i}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X_i(u)du.$

15. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $g$ une fonction défini sur $\mathcal{A}$, on dit que l'ensemble $A \in \mathcal{A}$ est invariante de $g$ ssi $g(A) = A$

**Définition 1.6.1.** *Un processus* $(X = X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *peut être considéré comme une suite de variables aléatoires sur l'espace* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(S^{\mathbb{N}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{N}})$*. Le processue est dit ergodique, si pour tout ensemble invariant* $B \in \mathfrak{F}$*, on a* $\mathbb{P}(B) = 0$ *ou* $\mathbb{P}(\Omega\backslash B) = 0$ *et de plus si le processus* $X$ *est stationnaire on a :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1) \quad p.s \tag{26}$$

M.Chaouche et al ont utilisés la propriété d'ergodicité défini pour d'endomorphise de la transformation $T$ [16]suivante :

**Définition 1.6.2.** *On dit que le système* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ *est ergodique ssi pour tout* $A, B$ *dans* $\mathcal{A}$ *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(A \cap T^{-n}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)) = 0$$

16. Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus a temps continu prenant ses valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{X})$ .$T$ est une transformation si $(T(x))_s = x_{s+1}$

# Bibliographie

[1] A. Amiri (2009). Sur une famille paramétrique d'estimateurs séquentiels de la densité pour un processus fortement mélangeant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 347, 309-314.

[2] A. Amiri (2012). Estimateurs fonctionnels récursifs et leurs applications à la prévision,thèse de doctorat, académie d'aix-marseille université d'avignon et des pays de vaucluse. Ecole Doctorale ED 536 Sciences et Agrosciences Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Géométrie (EA 2151).

[3] J. Antoch et P. Janssen (1989). Nonparametric regression m-quantiles. Statistics and Probability Letters, 8(4) :355â362. 46.

[4] C. Apostel, C. Preda (2010). Méthode PLS pour l'analyse des données fonctionnelles, REV.ROUAINE MATH.PVRES APPL, 55 (2010), 6, 431-445.

[5] J. Averous and M. Meste (1997). Median balls : an extension of the interquartile intervals to multivariate distributions. Journal of Multiva- riate Analysis, 63, 222-241.

[6] J. Beirlant, G. Dierckx et A. Guillou (2005). Estimation of the extreme value index and regression on generalized quantile plots. Annals of Statistics, 11(6) :949 à 970.

[7] J. Beirlant, A. Gannoun et E. Matzner-Lober (1998). Proprétés asymptotiques des estimateurs des quantiles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 326(5) :611 à 614.

[8] J. Beirlant et G. Matthys (2003). Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. Statistica Sinica, 13(3) :853 à 880.

[9] M. Benko, W. Härdle and A. Kneip (2005). Common functional principal components. SFB 649 Economic Risk Discussion Paper, 2006-2010.

[10] P. Besse, H. Cardot and F. Ferraty (1997). Simultaneous nonparametric regression of unbalanced longitudinal data. Computational Statistics and Data Analysis, 24, 255-270.

[11] P. Besse, H. Cardot, et D. Stephenson (2000). Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. Scandinavian Journal of Statistics, 4 :673à 688, 2000.

[12] P. Besse and J.O. Ramsay (1986). Principal components analysis of sampled functions. Psychometrika, 51, 285-311.

[13] P.K. Bhattacharyya et A.K. Gangopadhyay (1990). Kernel and nearest-neighbor estimation of a conditional quantile. Annals of Statistics, 8(3) :1400 à 1415.

[14] L. Breiman, J.H. Friedman, R.A. Olshen and J.C. Stone (1984). Clas- sification and regression trees. Wadsworth Statistics and Probability Series, Wadsworth Advanced Books and Software, Belmont.

[15] M. Buchinsky (1998). Recent Advances in Quantile Regression Models : A Practical Guideline for Empirical Research, journal of Human Resoureces, 1998, vol. 33, issue 1, pages 88-126 .

[16] Z. Cai (2002). Regression quantiles for time series data.Economitric Theory, **18**, 169-192.

[17] Z. Cai et X. Wang. (2006).*Non parametric methodes for estimating conditional VAR and expected shortfull,Wise Working Paper Series WISEWP0604,Wang Yanan Institute for Economic Studies, Xiamen Univercity.*

[18] H. Cardot (2000). Nonparametric estimation of smoothed principal components analysis of sampled noisy functions. Nonparametric Statistics, 12, 503-538.

[19] H. Cardot (2006). Conditional functional principal components analysis. Scandinavian Journal of Statistics, to appear.

[20] H. Cardot (2006). Conditional functional principal components analysis. Scandinavian Journal of Statistics, to appear.

[21] H. Cardot, C. Crambes and P. Sarda (2005). Quantile regression when the covariates are functions. Journal of Nonparametric Statistics, 17, 841-856.

[22] H. Cardot, F. Ferraty and P. Sarda (1999). Functional linear model. Statistic and Probability Letters, 45, 11-22.

[23] H. Cardot, F. Ferraty and P. Sarda (2003). Spline estimators for the functional linear model. Statistica Sinica, 13, 571-591.

[24] P. Chauduri (1991). Nonparametric estimates of regression quantiles and their local Bahadur representation. Annals of Statistics, 19(2) :760 à 777.

[25] V. Chernozhukov (1998). Nonparametric extreme regression quantiles. Rapport technique, Department of Economics, Stanford University.

[26] G. Collomb (1980). Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 291 :427 à 430. 45, 46, 88, 92, 114.

[27] G. Collomb (1981). Estimation non-paramétrique de la régression : Révue bibliographique. Int. Statist. Rev. 49 (1), 75-93.

[28] G. Collomb(1981). From nonparametric regression to nonparametric prediction : Survey of the mean square error and original results on the predictogram, Lecture notes in statistcs 16, 182-204.

[29] G. Collomb (1984). Propriétés de convergence presque complète du prédicteur à noyau, Z. Wahrschein. Verw. Get. 66, 44

[30] C. Crombes (2005). Total least squares for functional data. Invited paper in ASMDA 2005 Proceedings, 619-626.

[31] C. Crombes (2007). Régression fonctionnelle sur composantes principales pour variable explicative bruitée, Science Direct,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 519 à 522.

[32] C. Crombes, H. Cardot et P. Sarda (2004), Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

[33] A. Cuevas, M. Febrero and R. Fraiman (2002). Linear functional regression : the case of a fixed design and functional response. Canadian Journal of Statistics, 30, 285-300.

[34] S. Dabo-Niang, A. Laksaci, (2011). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Comm in Statist. Theory &*; *Methods*, **41** , 1254-1268.

[35] J. Dauxois et A. Pousse (1976). Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

[36] J. Dauxois, A. Pousse and Y. Romain (1982). Asymptotic theory for the principal component analysis of a random vector function : some applications to statistical inference. Journal of Multivariate Analysis, 12, 136-154.

[37] P. Deheuvels (1973). Sur l'Estimation séquentielle de la densité, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A, 276, 1119-1121.

[38] P. Deheuvels (197). Estimation séquentielle de la densité, Thèse de doctorat, uni- versité Paris 6.

[39] P. Deheuvels (1974). Conditions n'ecessaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité, C. R. Acad. Sci., Paris, 278, 1217-1220.

[40] J.C. Deville (1974). Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. Annales de l'I.N.S.E.E., 1, 3-101.

[41] L. Devroye (1979). On the pontwise and the integral convergence of recursive kernel estimates densities, Util. Math. 15, 113-128.

[42] L. Devroye (1981). On the almost everywhere convergence of nonparamertic regression fuction estimates, Ann. Statist. 9, 1310-1319.

[43] L. Devroye, L. Györfi and G. Lugosi (1996). A probabilistic theory of pattern recognition. Applications of Mathematics, Springer, New York.

[44] J. Fan, T.C. Hu and Y. Truong (1994). Robust nonparametric function estimation. Scandinavian Journal of Statistics, 21, 433-446.

[45] F. Ferraty ,A. Goia, P. Vieu (2002).Functional nonparamrtcic model for time series.*TEST*, **11**,317-344.

[46] F. Ferraty, A. Laksaci and P. Vieu, (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, *Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, **9**, 47–76.

[47] F. Ferraty, A. Rabhi et P. Vieu (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic el niño phenomenon. Indian Journal of Statistics, 67(2) :378 à 398. 48, 124.

[48] F. Ferraty et P. Vieu (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 330 :403 à 406. 46.

[49] F. Ferraty and P. Vieu (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data. Computational Statistics, 17, 545-564.

[50] F. Ferraty and P. Vieu (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. Special issue in honour of Stan Azen : a birthday celebration. Computational Statistics and Data Analysis, 44, 161-173.

[51] F. Ferraty et P. Vieu (2004), Nonparametric models for functional data with applications in regression, time series prediction and curve discrimination. *Nonparametriqc Statistics*,**16**,111-125.

[52] F. Ferraty and P. Vieu (2006). Nonparametric functional data analysis : theory and practice. Springer, New York.

[53] A. Gannoun (1990). Prédiction non paramétrique de la médiane conditionnelle : médianogramme et méthode du noyau. Application à la prévision des processus. Ann. I.S.U.P. XXXV, 1, 11-22.

[54] L. Gardes, S.Girard et A. Lekina (2010). Functional nonparametric estimation of conditional extreme quantiles. Journal ofMultivariate Analysis, 101(2) :419 à 433.

[55] M. Garrido (2002). Modélisation des évenements rares et estimation des quantiles extrêmes, méthodes de sélection de modèles pour les queues de distribution. Thèse de doctorat, Université Grenoble .

[56] W. Greblecki and M. Pawlak (1987). Necessary and sufficient consistency conditions for a recursive kernel regression estimate, J. Multivariate Anal. 23, 67-76.

[57] J.D. Hart (1991). Comment to "choosing a kernel regression estimator". Statistical Sciences, 6(4) :425 à 427. 46.

[58] X. He and P. Shi (1994). Convergence rate of B-spline estimators of nonparametric conditional quantile functions. Nonparametric Statistics, 3, 299-308.

[59] E. Isogai (1984). Joint asymptotic normality of nonparametric recursive density estimators at a finite number of distinct points, J. Japan Statist. Soc. 14 (2), 125-135.

[60] E.Isogai (1994). A Berry-Esseen-type bound for recursive estimators of a density and its dÂ´erivatives, J. Statist. Plann. Inference 40, 1-4.

[61] M.A. Knefati, A. Oulidi, M. Delecroix et B. Abdous (2011). Régression Quantile : comparaison du quelques estimateurs non paramétriques à noyau du quantile conditionnel. scds 2011.

[62] A. K.J. Kneip and Utikal (2001). Inference for density families using functional principal component analysis. Journal of the American Sta- tistical Association, 96, 519-542.

[63] R. Koenker (2005). Quantile regression. Econometric Society Monographs, Cambridge.

[64] R. Koenker and G. Bassett (1978). Regression quantiles. Econometrica, 46, 33-50.

[65] R. Koenker and S. Portnoy (1992). Nonparametric estimation of conditional quantile. L1-Statistical analysis and related methods, pages 217 à 229. ed Y. Dodge, Elsevier : Amsterdam.

[66] U. Kregel (1985). Ergodic Theorems, Walter de Gruyter et C0., Berlin, 1985.

[67] A. Kržyżak (1992). Global convergence of the recursive kernel regression estimates with applications in classification and nonlinear system estimation, IEEE Trans. In- form. Theory 38, 1323-1338.

[68] A. Krzyżak and M. Pawlak (1984). Almost everywhere convergence of a recursive regression function estimate and classification, IEEE Trans. Inform. Theory. 30, 91- 93.

[69] N. Laïb, and D. Louani, (2010). Nonparametric kernel regression estimate for functional stationary ergodic data : Asymptotic properties. *J. Multivariate Anal.*, **101**, 2266-2281.

[70] N. Laïb, and D. Louani, (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data *J. Statist. Plan. and Inference* , **141**, 359-372.

[71] M. Lejeune and P. Sarda (1988). Quantile regression : a nonparametric approach. Computational Statistics and Data Analysis 6, 229-239.

[72] H.Y. Liang and J. Baek (2004). Asymptotic normality of recursive density estimates under some dependence assumptions, Metrika 60, 155-166.

[73] E. Masry (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes, IEEE Trans. Inform. Theory 32, no 2, 254-267.

[74] E. Masry (1987). Almost sure convergence of recursive density estimators for stationary mixing processes, Statist. Probab. Lett. 5, 249-254.

[75] E. Masry and L. Györfi (1987). Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes, J. Multivariate Anal. 22, 79- 93.

[76] F. Mosteller and J. Tukey (1977). Data analysis and regression : a se- cond course in statistics. Addison-Wesley, Reading.

[77] H.G. Müller (2005). Functional modeling and classification of longitudinal data. Scandinavian Journal of Statistics, 32, 223-240.

[78] H.G. Müller and U. Stadtmüller (2005). Generalized functional linear models. Annals of Statistics, 33, 774-805.

[79] E. Nadaraya. (1964). On estimating regression, Theory Probab. Appl. 9, 141-142.

[80] S. Niang (2003). Kernel density estimator in an infinite dimension with a rate of convergence in the case of diffusion processes.*Applied Math.lettres*, IN PRINT.

[81] J.O. Ramsay (1982). When the data are functions. Psychometrika, 47, 379-396.

[82] J.O. Ramsay and C.J. Dalzell (1991). Some tools for functional data analysis. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 53, 539-572.

[83] J.O. Ramsay et B.W. Silverman (1997). Functional Data Analysis. Springer Series in Statistics. Springer Verlag, June 1997.

[84] J.O. Ramsay and Silverman, B.W. (2002). Applied functional data ana- lysis. Springer, New York.

[85] J.O. Ramsay and B.W. Silverman (2005). Functional data analysis (Second Edition). Springer, New York.

[86] C.R. Rao (1958). Some statistical methods for comparison of growth curves. Biometrics, 14, 1-17.

[87] G.G. Roussas (1992). Ecxact rates of almost sure convergence of a recursive kernel estimate of a probability density function : Application to regression and hazard rate estimation, J. Nonparametr. Stat. 1, 171-195.

[88] G.R. Roussas, L.T. Tran, (1992) . Asymptotic normality of the recursive kernel regression estimate under dependence conditions. *Ann. Statist.*, **20**, 98–120.

[89] C.J. Stone (1977). Consistent nonparametric regression. Annals of Statistics, 5(4) :595 à 645.

[90] C.J. Stone(1982). Optimal rates of convergence for nonparametric models. Annals of Statistics, 10, 1040-1053.

[91] W. Stute (1986). Conditional empirical processes. Annals of Statistics, 14(2) :638 à 647. 44, 45, 46.

[92] L.T. Tran (1989). Recursive density estimation under dependence. IEEE Trans. In- form. Theory 35 (5), 1103-1008.

[93] Y.K. Truong (1989). Asymptotic properties of kernel estimators based on local medians. Annals of Statistics, 17(2) :606 à 617.

[94] A. Tsybakov (1986). Robust reconstruction of functions by the local-approximation method. Problems of Information Transmission, 22(2) :133 à 146.

[95] L.R. Tucker (1958). Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. Psychometrika, 23, 19-23.

[96] J.W. Tukey (1961). Curves as parameters, and touch estimation. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium onMathematical Statistics and Probability, 1 :681 à 694.

[97] H. Walk (2001). Strong universal pointwise consistency of recursive regression estimates, Ann. Inst. Statist. Math. 53 (4), 691-707.

[98] G.S Watson (1964). Smooth regression analysis. Sankhya, Series A, 26, 359-372.

[99] E.J. Wegman and Davies, H. I. (1979). Remarks on some recursive estimators of a probability density, Ann. Statist. 7 (2), 316-327.

[100] C. Wolverton and T.J. Wagner (1969). Recursive estimates of probability densities, IEEE Trans. Syst. Cybern. 5, 307-308.

[101] F. Yao, H.G. Müller and J.L. Wang (2005). Functional linear regression analysis for longitudinal data. Annals of Statistics, 33, 2873-2903.

[102] K. Yu et M. Jones (1998). Local linear quantile regression. Journal of the American Statistical Association, 93 :228 à 237. 50 tel-00529476,

# Chapitre 2

# Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data

F. Benziadi [1], A. Laksaci [2] et F. Tebboune [3]

(À paraître dans Communications Statistics- Theory and Methods, 2015)

**Abstract :** In this paper, we study the recursive kernel estimator of the conditional quantile of a scalar response variable $Y$ given a random variable (rv) $X$ taking values in a semi-metric space. Two estimators are considered. While the first one is given by inverting the double-kernel estimate of the conditional distribution function, the second estimator is obtained by using the robust approach. We establish the almost complete consistency of these estimates when the observations are sampled from a functional ergodic process. Finally, a simulation study is carried out to illustrate the finite sample performance of these estimators.

**Keywords** Almost complete convergence · Conditional quantile · Ergodic data · Functional data · Recursive estimate.

**AMS Subject classification** Primary, 62G20 ; secondary 62G08 · 62G35 · 62E20.

## 2.1 Introduction

Let $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ be a sequence of strictly stationary dependent random variables valued in $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric space equipped with a semi-metric $d(.,.)$. For $x \in \mathcal{F}$ and $\alpha \in ]0,1[$, the conditional quantile of order $\alpha$, denoted $t_\alpha(x)$ is defined by

$$t_\alpha(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y_1 \leq y | X_1 = x) \geq \alpha\}. \tag{1}$$

1. Laboratoire des modèles Stochastiques, Statistique et Applications Univ Dr.Moulay Tahar de Saïda e-mail proba-stat@yahoo.fr

2. Lab. Statistique et Processus Stochastiques, Univ. Djillali Liabès, BP 89, S. B. A. 22000, Algeria, E-mail alilak@yahoo.fr

3. Univ Dr.Moulay Tahar de Saïda, E-mail fethi.tebboune@gmail.com

In this paper, we deal with the nonparametric estimation of this model by using a recursive kernel method when the observations are strictly stationary ergodic data. It is well known that the recursive estimation method permits to update the estimate for each additional information. This feature is very useful in this area of functional data analysis. Because the observations are available by real-time monitoring which implies a real time update of the information.

It is well documented that the conditional quantile estimation is useful in prediction setting. Indeed, it provides an alternative approach to classical regression estimation. The first results in this topic date back to Stone (1977) and have been widely studied, when the explanatory variable lies in a finite dimensional space (see for instance Samanta (1989) for previous results and Dabo-Niang and Thiam (2010) for more recent advances). This model was introduced in functional statistics by Cardot et al. (2004). They established the $L_2$-convergence rate of the conditional quantile as a linear regression model with explanatory variable taking values in a Hilbert space. The nonparametric treatment of this model was considered by Ferraty et al. (2006). They established the almost complete convergence of the kernel estimator in the independent, identically distributed (i.i.d.) case. The asymptotic normality of this estimator was studied in both i.i.d. and strong mixing conditions by Ezzahrioui and Ould-Saïd (2008a, 2008b). Laksaci et al. (2009, 2011) proposed an alternative estimate based on the $L^1$-method. Recently, Dabo-Niang and Laksaci (2011) stated the convergence in $L^p$-norm under less restrictive hypotheses. Among the wide literature on functional data analysis, we only refer to the overviews for parametric models given by Bosq (2000), Ramsay and Silverman (2002, 2005) and to the monograph of Ferraty and Vieu (2006) for the prediction problem in functional nonparametric statistics. It should also be noted that the literature on nonfunctional nonparametric modelization of ergodic data is quite extensive, we refer the reader to Delecroix and Rosa (1996) or Laib and Ould-Said (2000) and the references therein.

Our main purpose in this paper is to study the almost complete convergence [4] of a functional kernel estimate of the conditional quantile $t_\alpha(x)$ under the ergodicity condition. More precisely, we establish this asymptotic property for two recursive kernel estimates of $t_\alpha(x)$. The first estimate is obtained by the $L^1$-norm method, while the second one is based on a double-kernel estimate of the conditional distribution function. We point out that the results of this work generalize those of Ferraty et al. (2005) and Laksaci et al. (2011) in two different directions (estimation method and data correlation). Indeed, firstly, the classical kernel method can be viewed as a particular case of the present study. Secondly, the ergodicity hypothesis, considered here, is implied by the mixing conditions studied in these cited works. It should be noted that, although the statistical modeling for functional ergodic data has a great importance in various domains such as statistical physics, thermodynamics or signal processing, it has not yet been fully explored. As far as we know, only the papers by Laib and Louani (2010 and 2011) have paid attention to study the kernel estimation of the classical regression function. On the other hand, as noticed by Roussas and Tran (1992) the recursive estimate is more relevant than the classical kernel method in time series analysis. So, we can say that the adaptation of the

4. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real r.v.'s ; we say that $z_n$ converges almost completely (a.co.) to zero if, and only if, $\forall\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|z_n| > \epsilon) < \infty$. Moreover, we say that the rate of almost complete convergence of $z_n$ to zero is of order $u_n$ (with $u_n \to 0$) and we write $z_n = O_{a.co.}(u_n)$ if, and only if, $\exists\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|z_n| > \epsilon u_n) < \infty$. This kind of convergence implies both almost sure convergence and convergence in probability.

recursive estimate in ergodic functional time series is very motivating. It is worth noting that this work is the first contribution that considers a recursive estimate in ergodic statistic.

The outline of this paper is as follows : we present our general framework in Section 2. The asymptotic properties of the recursive $L^1$-estimate are given in Section 3. Section 4 is dedicated to the asymptotic properties of the double-kernel estimate. We study in detail some particular cases in Section 5. A simulation study is given in Section 6. Finally, the proofs of the auxiliary results are given in the Appendix.

## 2.2 The functional ergodic data framework

As indicated earlier, the general framework of our study is nonparametric modeling in functional ergodic data. Such dependence structure is an alternative to the strong mixing condition usually assumed in functional time series analysis. The ergodicity condition is easier to handle than the mixing one which needs to calculate the supremum over two sigma algebras. Moreover, it is well known that ergodicity is less restrictive than the mixing hypothesis. Recall that, in multivariate statistics, the ergodicity assumption is defined with respect to an ergodic transformation. In our functional context, we adopt the definition introduced by Laib and Louani (2010). In addition, as usually for nonparametric modeling in functional statistic, the contribution of the functional component in our asymptotic study is controlled by the concentration property of the probability measure of the functional variable. Specifically, in addition to the classical concentration hypothesis, we have to take into account the dependency setting, modeled by the ergodic condition. Thus, our functional ergodic data is carried out by the following considerations : for $k = 1, \ldots, n$, we put $\mathfrak{F}_k$ the $\sigma$-field generated by $((X_1, Y_1), \ldots (X_k, Y_k))$, we set $\mathfrak{G}_k$ the $\sigma$-field generated by $((X_1, Y_1), \ldots (X_k, Y_k), X_{k+1})$ and we suppose that the strictly stationary ergodic process $(X_i, Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ satisfies

(H1)

$$\begin{cases} \text{(i) The function } \phi(x,r) := \mathbb{P}(X \in B(x,r)) \text{ is such that } \phi(x,r) > 0, \ \ \forall\, r > 0 \\ \quad \text{where } B(x,h) = \{x' \in \mathcal{F} / d(x',x) < h\}. \\ \text{(ii) For all } i = 1, \ldots, n \text{ there exists a deterministic function } \phi_i(x,\cdot) \text{ such that} \\ \quad \text{almost surely } 0 < \mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r) | \mathfrak{F}_{i-1}\right) \le \phi_i(x,r), \ \forall\, r > 0, \\ \text{and } \phi_i(x,r) \to 0 \text{ as } r \to 0. \\ \text{(iii) For all sequence } (r_i)_{i=1,\ldots n} > 0, \ \dfrac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r_i)|\mathfrak{F}_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^n \phi(x,r_i)} \to 1 \qquad a.co. \end{cases}$$

We point out that, this assumption is a quite milder than that considered by Laib and Louani (2011). Indeed, unlike in Laib and Louani (2011), it is not necessary to assume an approximation of the concentration function $\mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r)\right)$ and the conditional concentration function $\mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r)|\mathfrak{F}_{i-1}\right)$ as a product of two independent nonnegative functions of the center and of the radius. Recall that this asymptotic decomposition of these small-ball probability functions requires the boundedness of its associated Onsager-Machlup function (see Bogachev (1999)) but, here it is not necessary to employ this function.

From now on, $x$ will stand for a fixed point in $\mathcal{F}$ and $C$ or $C'$ denote some generic constant in $\mathbb{R}^{*+}$. The second principal axis of our study is the nonparametric character of the model. The latter is specified by the following consideration : for a fixed neighborhood $N_x$ of $x$, we assume that the regular version $F^{x'}$ of the conditional distribution function of $Y$ given $X = x'$ exists for all $x' \in N_x$ and we suppose that $F^x$ has a continuous density $f^x$ with respect to (w.r.t.) Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$ and is such that

(H2) There exists $\delta > 0$, such that $\forall (t_1, t_2) \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]^2$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x^2$,

$$|F^{x_1}(t_1) - F^{x_2}(t_2)| \leq C' \left( d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |t_1 - t_2|^{\beta_2} \right) \quad \text{and} \quad \inf_{y \in [t_\alpha(x) - \delta,\, t_\alpha(x) + \delta]} f^x(y) > C$$

with $\quad C > 0$, $C' > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$.

Although there are several ways to define this nonparametric concept, this Hölderian condition is more adequate for the semi-metric structure considered here. Furthermore, the functional feature of the model has a great influence on our asymptotic result in the sense that a strong smoothness of the model gives a rapid convergence rate.

## 2.3 The $L^1$ recursive estimate

The first recursive estimate of the conditional quantile is based on the M-regression definition of the $\alpha^{th}$ conditional quantile $t_\alpha(x)$. Indeed, the latter can be uniquely defined as

$$t_\alpha(x) = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} L_\alpha(x, y)$$

where

$$L_\alpha(x, y) = \mathbb{E}\left[ l_\alpha(Y - y) \, | X = x \right]$$

with $l_\alpha(t) = (2\alpha - 1)t + |t|$. Therefore, we estimate the conditional quantile $t_\alpha(x)$ by

$$\widehat{t}_\alpha(x) := \arg\min_{y \in \mathbb{R}} \widehat{L}_\alpha(x, y).$$

where

$$\widehat{L}_\alpha(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i)) l_\alpha(Y_i - y)}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i))}, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

with the convention $\frac{0}{0} = 0$. $K$ is a kernel and $(a_n)_n$ is a sequence of positive real numbers such that $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Note that by using a similar proof to that given by Laksaci et al. (2009), this estimator can be expressed as

$$\widehat{t}_\alpha(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \widehat{F}^x(y) \geq \alpha\}$$

where $\widehat{F}^x$ is an estimator of $F^x$ defined by

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i)) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}}}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i))}$$

with $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ being the indicator function.
In order to establish the almost complete convergence (a.co.) of $\widehat{t_\alpha}(x)$ to $t_\alpha(x)$ we need the following hypotheses :

(H3) $K$ is a function with support $(0,1)$ such that
$C\mathbb{1}_{(0,1)} < K(t) < C'\mathbb{1}_{(0,1)}$.

(H4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)} = 0 \quad \text{where} \quad \varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x,a_i) \quad \text{and} \quad \psi_n(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \phi(x,a_i).$$

It is clear that Condition (H4) is closely related to our functional ergodic framework characterized by assumption (H1). In particular, it links the concentration property of both probability measures (the conditional and the unconditional law of $X$). We point out that this condition is considered in a general form in order to exploit the effects of the topological structure and the correlation of our functional data in the convergence rate. Nevertheless, Assumption (H4) can be made simpler for several particular cases (see Section 5 ).

**Proposition 2.3.1.** *Assume that (H1)-(H4) are satisfied, then, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi_i(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

The following theorem gives the almost-complete convergence of the estimate $\widehat{t_\alpha}(x)$

**Theorem 2.3.2.** *Under the hypotheses of Proposition 2.3.1, we have*

$$\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi_i(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

**Proof of Theorem 2.3.2 :** Since the estimator $\widehat{F}^x(y)$ is monotone then for any small $0<\epsilon<\delta$, we have

$$\begin{aligned}\widehat{t_\alpha}(x) > t_\alpha(x)+\epsilon &\Longrightarrow \widehat{F}^x(\widehat{t_\alpha}(x)) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon) > \widehat{F}^x(t_\alpha(x)+\epsilon) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon)\\ &\Longrightarrow 0 > F^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon) > \widehat{F}^x(t_\alpha(x)+\epsilon) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon).\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{array}{l}\sum_n \mathbb{P}\left(\widehat{t_\alpha}(x) > t_\alpha(x)+\epsilon\right)\\ \leq \sum_n \mathbb{P}\left(|\widehat{F}^x\left(t_\alpha(x)+\epsilon\right) - F^x\left(t_\alpha(x)+\epsilon\right)| \geq |F^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon)|\right)\\ \leq \sum_n \mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq |F^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x)+\epsilon)|\right)\end{array}. \qquad (2)$$

In the same fashion

$$\begin{array}{l}\sum_n \mathbb{P}\left(\widehat{t_\alpha}(x) < t_\alpha(x)-\epsilon\right)\\ \leq \sum_n \mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq |F^x(t_\alpha(x)) - F^x(t_\alpha(x)-\epsilon)|\right)\end{array}. \qquad (3)$$

Since $F^x(\cdot)$ is continuously differentiable with $\inf_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} f^x(y) > C > 0$, then,

$$\sum_n \mathbb{P}\left(|\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x)| > \epsilon\right) \leq \sum_n \mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq C\epsilon\right) < \infty. \tag{4}$$

So, the result of the theorem is an easy consequence of Proposition 2.3.1.

**Proof of Proposition 2.3.1** We start by writing

$$\widehat{F}^x(y) - F^x(y) = \widehat{B}_n(x,y) + \frac{\widehat{R}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)} + \frac{\widehat{Q}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)}$$

where

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_n(x,y) &:= (\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)),\\
\widehat{B}_n(x,y) &:= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - F^x(y) \quad \text{and} \quad \widehat{R}_n(x,y) := -\widehat{B}_n(x,y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x))
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i)) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}},\\
\bar{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[K(a_i^{-1} d(x, X_i))) \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} | \mathfrak{F}_{i-1}\right],\\
\widehat{F}_D(x) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i)),\\
\bar{F}_D(x) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[K(a_i^{-1} d(x, X_i)) | \mathfrak{F}_{i-1}\right].
\end{aligned}$$

Thus, Proposition 2.3.1 is a consequence of the following intermediate results which proofs are given in the Appendix.

**Lemma 2.3.3.** *Under Hypotheses (H1), (H3) and (H4), we have*

$$\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

**Lemma 2.3.4.** *Under the hypotheses of Lemma 2.3.3, we have*

$$\exists\, C > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\widehat{F}_D(x) \leq C\right) < \infty.$$

**Lemma 2.3.5.** *Under Hypotheses (H1)-(H3), we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{B}_n(x,y)| = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)\right).$$

**Lemma 2.3.6.** *Under the hypotheses of Theorem 2.3.2, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)| = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

## 2.4 The recursive double-kernel estimate

In this section, we consider another recursive estimate which is smoother than the previous. It is based on a recursive double-kernel estimate of the conditional distribution function defined by

$$\widetilde{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x,X_i))H(b_i^{-1}(y-Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x,X_i))} \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

The function $H$ is a strictly increasing distribution function and $b_n$ is a sequence of positive real numbers such that $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
According to Definition (1) the natural recursive double-kernel estimator, denoted by $\widetilde{t}_\alpha(x)$, of the conditional quantile of order $\alpha$ is

$$\widetilde{t}_\alpha(x) = \inf\left\{y \in \mathbb{R} : \ \widetilde{F}^x(y) \geq \alpha\right\}.$$

Now, for the almost complete convergence of the estimate $\widetilde{t}_\alpha(x)$ we need the following additional assumptions :

(H5) The function $H$ is of class $\mathcal{C}^1$ such that

$$\begin{cases} \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, \ |H(y_1)-H(y_2)| \leq C|y_1-y_2| \\ \int |t|^{\beta_2} H^{(1)}(t)dt < \infty, \ \text{where } \beta_2 \text{ is given in (H2).} \end{cases}$$

(H6) There exists $\gamma > 0$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\gamma}\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{b_i} = 0.$

We obtain the following theorem which deals with the pointwise a. co. convergence of of $\widetilde{t}_\alpha(x)$ to $t_\alpha(x)$.

**Theorem 2.4.1.** *Assume that (H1)-(H6) are satisfied, then, we have*

$$\widetilde{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi_i(x,a_i)\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n b_i^{\beta_2}\phi_i(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

**Proof of Theorem 2.4.1** By following the same steps as for Theorem 2.3.2 we show that the proof of this result is based on a similar inequality of (4) and the following Proposition.

**Proposition 2.4.2.** *Under the hypotheses of Theorem 2.4.1, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widetilde{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi_i(x,a_i)\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n b_i^{\beta_2}\phi_i(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

**Proof of Proposition 2.4.2**
Similarly to Proposition 2.3.1, the claimed result is based on the following decomposition

$$\widetilde{F}(y) - F^x(y) = \widetilde{B}_n(x,y) + \frac{\widetilde{R}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)} + \frac{\widetilde{Q}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)}$$

where

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}_n(x,y) &:= (\widetilde{F}_N^x(y) - \ddot{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)),\\
\widetilde{B}_n(x,y) &:= \frac{\ddot{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - F^x(y) \quad \text{and} \quad \widetilde{R}_n(x,y) := -\widetilde{B}_n(x,y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x))
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n K(a_i^{-1} d(x, X_i)) H(b_i^{-1}(y - Y_i)),\\
\ddot{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\psi_n(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[K(a_i^{-1} d(x, X_i))) H(b_i^{-1}(y - Y_i)) | \mathfrak{F}_{i-1}\right].
\end{aligned}$$

Thus, Proposition 2.4.2 can be deduced from Lemma 2.3.3, Corollary 2.3.4 and the following lemmas.

**Lemma 2.4.3.** *Under Hypotheses (H1)-(H3) and (H5), we have we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widetilde{B}_n(x,y)| = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)\right) + O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{i=1}^n b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)\right).$$

**Lemma 2.4.4.** *Under the hypotheses of Theorem 2.4.1, we have*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widetilde{F}_N^x(y) - \ddot{F}_N^x(y)| = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

## 2.5 Some special cases

Although the expression of the convergence rate is not classic in functional data analysis, this convergence rate is identifiable to the classical one for several special cases. In this section we specify the almost complete convergence rate in some particular cases such as the classical kernel case, independence case and finite dimensional case.

- *The classical kernel case :* As noted earlier the classical kernel method studied by Laksaci at al. (2009) is a particular case of our work with $a_i = a_n$, for all $1 \le i \le n$. Therefore, Condition (H4) is replaced by

  $$\frac{\varphi(x, a_n)\log n}{n^2\phi^2(x, a_n)} \to 0 \tag{5}$$

  where $\varphi(x, a_n) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, a_n)$. The convergence rate is given by the following corollary.

**Corollary 2.5.1.** *Under Hypotheses (H1)-(H3) and (5), we have*

$$\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(a_n^{\beta_1}\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi(x,a_n)\log n}{n^2\phi^2(x,a_n)}}\right).$$

*Furthermore, if in addition (H5)-(H6) are verified we have*

$$\widetilde{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(a_n^{\beta_1}\right) + O\left(b_n^{\beta_2}\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi(x,a_n)\log n}{n^2\phi^2(x,a_n)}}\right)$$

*where $\widetilde{t_\alpha}$ (resp. $\widehat{t_\alpha}$) is the classical double-kernel estimator (resp. the classical $L^1$ kernel estimator).*

**Remark 1.**
We point out that, as far as we know, there is no work in the literature on the conditional quantile estimation in functional ergodic data. Therefore, we can advance that, our results are also new in this area.

– *The independence case :* in this situation, Condition (H1) reduces to $\phi(x,r) > 0$, and, for all $i = 1, \dots n$, $\phi_i(x,r) = \phi(x,r)$. Thus, $\varphi_n(x) = n\psi_n(x)$ and our theorems lead to the next corollary.

**Corollary 2.5.2.** *Under Hypotheses (H1)-(H4), we have*

$$\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{\varphi_n(x)}}\right).$$

*Moreover, if in addition (H5)-(H6) are verified we have*

$$\widetilde{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1}\phi(x,a_i)\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^n b_i^{\beta_2}\phi(x,a_i)\right) + O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{\varphi_n(x)}}\right).$$

**Remark 2.**
We note that, because the recursive estimate in functional data has never been previously considered, these results are also new in this area. However, our results are identifiable to those given by Laksaci et al. (2009) and Ferraty et al. (2005) if we combine the two previous cases (the independent case with the kernel method).

– *The real case* ($\mathcal{F} = \mathbb{R}$) *:* If the probability density of the random variable $X$ (resp. the conditional density of $X$ given $\mathfrak{F}_{i-1}$ ) denoted by $f$ (resp. by $f_i^{\mathfrak{F}_{i-1}}$), is of $\mathcal{C}_0$ class, then $\phi(x,h) = f(x)h + o(h)$ and $\mathbb{P}\left(X_i \in [x-h, x+h] | \mathfrak{F}_{i-1}\right) = f_i^{\mathfrak{F}_{i-1}}(x)h + o(h)$. We recall that the ergodic theorem ensures that

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i^{\mathfrak{F}_{i-1}} - f\| \to 0, \qquad \text{almost surely (a.s.)}$$

where $\|.\|$ is the classical norm in a separable Banach space $\mathcal{C}_0$. Thus, Condition (H1) is verified and Theorems 2.3.2 and 2.4.1 can be reformulated in the following way.

**Corollary 2.5.3.** *Under Hypotheses (H2)-(H4) we have :*

$$\widehat{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta_1+1}\right) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}}\right).$$

*Furthermore, if in addition (H5)-(H6) are verified we have*

$$\widetilde{t_\alpha}(x) - t_\alpha(x) = O\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta_1+1}\right) + O\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\beta_2} a_i\right)$$

$$+O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}}\right).$$

**Remark 3.**
We observe that these convergence rates are comparable to those given by Gannoun et al (2003) if we limit ourselves to the real case with the kernel method.

## 2.6 A simulation study

In this section we present the results of a simulation study which evaluates the finite sample performance of the two estimators discussed in the previous sections. More precisely, our main aim is to compare the efficiency of the recursive estimation method studied, here, to the classical kernel method discussed in the first part of Section 5. For this purpose, we consider the following functional nonparametric model :

$$Y_i = r(X_i) + \epsilon_i \text{ for } i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

where the $\epsilon_i$'s are generated independently according to a normal mixture distribution $(1-\lambda) * \mathcal{N}(0,1) + \lambda * N(4,5)$. In this simulation study, we have considered three values of the contamination parameter $\lambda = 0, 0.3, 0.8$ and we have fixed $n = 100$.

Let us now describe how our functional data are generated. Firstly, we use the R-routine *simul.far* of the *far* package in **R** to generate the functional explanatory variables $(X_i)_{i=1,\ldots n}$.

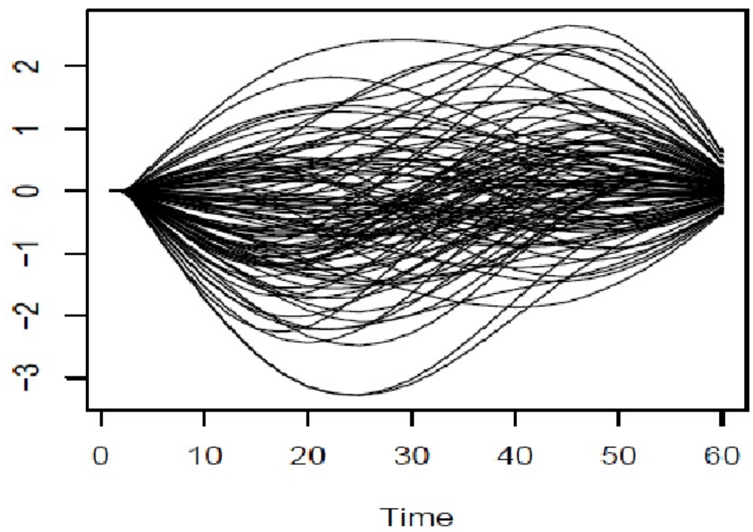


FIGURE 2.1 – A sample of 100 curves

This routine simulates a functional autoregressive process with a strong white noise. For this simulation experiments, we have considered a sinusoidal basis, with five functional axes, of the continuous functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$. The linear operator is defined by the diagonal matrix $(0.45, 0.9, 0.34, 0.45)$ and the perturbation coefficient 0.05. It is shown in Laib and Louani (2011) that this type of process satisfies the ergodicity condition. The $X_i$'s curves are discretized in the same grid which is composed of 60 points and are plotted in Figure 2.1.

Secondly, the scalar response $Y_i$ is computed by considering the following operator :

$$r(x) = 5 \int_0^1 \exp\{x(t)\}\, dt.$$

We note that, with this model definition, the conditional distribution of $Y$ given $X = x$ is explicitly given by the distribution of $\epsilon_i$ shifted by $r(x)$ which permits the determination of the theoretical quantile $t_\alpha(x)$.

Now, we specify the different parameters of both methods. To give a fair comparison between the two methods we must treat each one under its optimal conditions. Unfortunately, to the best of our knowledge, there is no automatic data-driven method available for selecting bandwidths when estimating a conditional quantile function with functional regressors. Thus, for our comparison study we consider a similar bandwidth selector to that used by Ferraty and Vieu (2006). Specifically, the bandwidths $(a_i, b_i)$ in the recursive method are selected by the following leave-out-one-curve cross-validation procedure

$$\arg \min_{(a_i,b_i)\in A_n\times B_n} = \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \check{t}_{0.5}^{-j}(X_j, a_i, b_i))^2$$

where $\check{t}_{0.5}^{-j}(X_j, a_i, b_i)$ denotes both $L^1$ and double-kernel recursive estimators of the conditional median in the curve $X_j$ and computed by the bandwidths $(a_i, b_i)$. The subset $A_n \times B_n$ is a set of $(a(k), b(k))$ such that, for $a(k)$ (respectively, for $b(k)$) the ball centered at $X_i$ (respectively, the interval centered at $Y_i$) with radius $a(k)$ (respectively, with radius $b(k)$) contains exactly $k = 1, \ldots n$ neighbors of $X_i$ (respectively, of $Y_i$), while for the kernel method we adapt the R-routine named *funopare.quantile.lcv*[5]. Finally, we point out that we considered a quadratic kernel on $(0,1)$ and used the $L^2$ metric.
The performance of these four estimation procedures is tested by comparing its average absolute error :

$$ASE(DKM) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widetilde{t_{\alpha KM}}(X_i) - t_\alpha(X_i)\right| \quad \text{(for the double-kernel method)}$$

$$ASE(L1KM) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{t_{\alpha KM}}(X_i) - t_\alpha(X_i)\right| \quad \text{( for the } L^1 \text{ kernel method )}$$

$$ASE(RDKM) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widetilde{t_\alpha}(X_i) - t_\alpha(X_i)\right| \quad \text{(for the recursive double-kernel method)}$$

$$ASE(RL1M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{t_\alpha}(X_i) - t_\alpha(X_i)\right| \quad \text{(for the recursive } L^1 \text{ method ).}$$

The most significant results are presented in Table 1. We point out that the results of our simulation study are evaluated over 100 independent replications and its sensitivity to grid sizes or to the sample sizes is not very substantial.

| $\lambda$ | Quartile | ASE(DKM) | ASE(L1KM) | ASE(RDKM) | ASE(RL1M) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda = 0$ | Q1 | 4.41 | 2.02 | 1.88 | 1.69 |
| | Q2 | 1.94 | 1.55 | 1.44 | 1.23 |
| | Q3 | 3.74 | 1.97 | 2.04 | 1.67 |
| $\lambda = 0.3$ | Q1 | 5.98 | 3.36 | 2.94 | 2.77 |
| | Q2 | 3.33 | 3.09 | 2.85 | 2.57 |
| | Q3 | 8.04 | 4.08 | 5.11 | 3.26 |
| $\lambda = 0.8$ | Q1 | 8.89 | 5.29 | 3.88 | 3.45 |
| | Q2 | 5.02 | 4.18 | 4.60 | 4.03 |
| | Q3 | 9.17 | 5.65 | 7.24 | 4.37 |

Table 1 $ASE$-Results.

Table 1 presents the $ASE$ values of both estimates of the quartiles $Q_1(\alpha = 0.25)$, $Q_2(\alpha = 0.5)$ and $Q_3(\alpha = 0.75)$ . It is clear from Table 1 that the recursive method gives a better result than the kernel method. In other words the $ASE$ value increases more substantially (with respect to the value of $\lambda$) in the kernel method than in the recursive one. In the same sense, the $L^1$ method is more robust than the double-kernel method in both (recursive or classical kernel method). Overall, both methods give a satisfactory level of accuracy and compute the results faster in the standard situation $(\lambda = 0, \alpha = 0.5)$.

5. available at the website : *"www.lsp.ups-tlse.fr/staph/npfda"*

## 2.7 Appendix

We first state the following exponential inequality for partial sums of martingale differences.
**Lemma 2.7.1.** *(see, Laib and Louani (2011, P.365)) Let* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *be a sequence of real martingale differences with respect to the sequence of* $\sigma$*- fields* $\mathfrak{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)_{n\geq 1}$*, generated by the random variables* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$*. Set* $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$*. For any* $p \geq 2$ *and for any* $n \geq 1$*, assume that there exist some nonnegative constants* $C$ *and* $d_n$ *such that*

$$\mathbb{E}\left[Z_n^p|\mathfrak{F}_{n-1}\right] \leq C^{p-2}p!d_n^2 \qquad \textit{almost surely.}$$

*Then, for any* $\epsilon > 0$*, we have*

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > \epsilon\right) \leq 2\exp\left\{\frac{-\epsilon^2}{2(D_n + C\epsilon)}\right\}$$

*where* $D_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$*.*

**Proof of Lemma 2.3.3**

For all $i = 1, \ldots, n$ we put $K_i(x) = K(a_i^{-1}d(x, X_i))$ and $\Delta_i(x) = K_i(x) - \mathbb{E}\left[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}\right]$. Then, it can be seen that

$$\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) = \frac{1}{n\psi_n(x)}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(x)$$

where $\Delta_i(x)$ is a triangular array of martingale differences according to the $\sigma$-fields $(\mathfrak{F}_{i-1})_i$.
Next, by (H1)(ii) and (H3) we have, for $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta_i(x)^p|\mathfrak{F}_{i-1}\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\Delta_i(x)^2|\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\ &\leq C\mathbb{E}\left[K_i^2(x)|\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\ &< C\mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})\\ &\leq C\phi_i(x, a_i).\end{aligned}$$

Now, applying the exponential inequality of Lemma 2.7.1 (with $d_i^2 = \phi_i(x, a_i)$) to get for all $\varepsilon > 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\left|\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)\right| > \varepsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n\psi_n(x)}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(x)\right| > \varepsilon\right\}\\ &\leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^2\psi_n^2(x)}{2(\varphi_n(x) + C\varepsilon n\psi_n(x))}\right\}\\ &= 2\exp\left\{\frac{-\varepsilon^2 n^2\psi_n^2(x)}{2\varphi_n(x)}\left(\frac{1}{1 + \frac{C\varepsilon n\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Taking $\varepsilon = \epsilon_0\dfrac{\sqrt{\varphi_n(x)\log n}}{n\psi_n(x)}$, then,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)\right| > \epsilon_0\frac{\sqrt{\varphi_n(x)\log n}}{n\psi_n(x)}\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-\epsilon_0^2\log n}{2}\left(\frac{1}{1 + \frac{C\epsilon_0\sqrt{\log n}}{\sqrt{\varphi_n(x)}}}\right)\right\}.$$

Now using the fact that, under (H1) ((ii) and (iii)) we have, for all $n$ $\varphi_n(x) \geq Cn\psi_n(x)$ which implies that

$$\frac{\log n}{\varphi_n(x)} \leq \frac{\log n}{Cn\psi_n(x)} \leq C' \frac{\log n}{n\psi_n(x)} \frac{\varphi_n(x)}{n\psi_n(x)}.$$

Therefore, under (H4), we have

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{\log n}{\varphi_n(x)} = 0.$$

It follows that

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) \right| > \epsilon_0 \frac{\sqrt{\varphi_n(x)\log n}}{n\psi_n(x)} \right\} \leq 2\exp\left\{ \frac{-\epsilon_0^2 \log n}{2C} \right\} \leq 2n^{-C'\epsilon_0^2}.$$

Consequently an appropriate choice of $\epsilon_0$ completes the proof of this lemma.

**Proof of Lemma 2.3.4**

Observe that, under (H1)(iii) and (H3), there exists $C > 0$ such that

$$0 < C \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i))} \leq \bar{F}_D(x) \leq \left| \bar{F}_D(x) - \widehat{F}_D(x) \right| + \widehat{F}_D(x).$$

Therefore,

$$C \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i))} - \left| \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) \right| < \widehat{F}_D(x).$$

So,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\widehat{F}_D(x) \leq \tfrac{C}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left( C \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i))} - \left| \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) \right| < \frac{C}{2} \right) \\ &\leq \mathbb{P}\left( \left| C \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i))} - \left| \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) \right| - C \right| > \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

It is obvious that Lemma 2.3.3 and (H1)(iii) allow to get

$$\sum_n \mathbb{P}\left( \left| C \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i))} - \left| \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) \right| - C \right| > \frac{C}{2} \right) < \infty$$

which gives the result.

■

**Proof of Lemma 2.3.5**

Clearly

$$\widehat{B}_n(x, y) \leq \frac{1}{n\psi_n(x)\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[ K_i(x) |F^{X_i}(y) - F^x(y)| |\mathfrak{F}_{i-1} \right].$$

Under (H2), we get, for all $y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]$

$$\mathbb{1}_{\{B(x,a_i)\}}(X_i) |F^{X_i}(y) - F^x(y)| \leq C a_i^{\beta_1}.$$

Moreover, under (H1) and (H3), we have

$$n\psi_n(x)\bar{F}_D(x) \geq C\varphi_n(x).$$

Hence

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} |\widehat{B}_n(x,y)| \leq C\left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\beta_1}\phi_i(x,a_i)\right)\right).$$

■

**Proof of Lemma 2.3.6**

The compactness of $[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]$ permits to write $[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{d_n}(y_j-l_n, y_j+l_n)$ with $l_n = n^{-1/2\beta_2}$ and $d_n = O\left(n^{1/2\beta_2}\right)$. Let

$$\mathcal{G}_n = \{y_j - l_n, y_j + l_n, 1 \leq j \leq d_n\}.$$

The monotony of $\widehat{F}_N^x$ and $\bar{F}_N^x$ leads to write, for all $1 \leq j \leq d_n$

$$\widehat{F}_N^x(y_j - l_n) \leq \sup_{y\in(y_j-l_n, y_j+l_n)} \widehat{F}_N^x(y) \leq \widehat{F}_N(x, y_j + l_n)$$

and

$$\bar{F}_N(x, y_j - l_n) \leq \sup_{y\in(y_j-l_n, y_j+l_n)} \bar{F}_N^x(y) \leq \bar{F}_N(x, y_j + l_n).$$

Now, from (H2) we deduce, by the same arguments, as in Lemma 2.3.5 that, for any $y_1, y_2 \in [t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]$

$$\left|\bar{F}_N^x(y_1) - \bar{F}_N^x(y_2)\right| \leq C|y_1 - y_2|^{\beta_2}\bar{F}_D(x).$$

It follows that

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\left|\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)\right| \leq \max_{1\leq j\leq d_n}\max_{z\in\{y_j-l_n, y_j+l_n\}}\left|\widehat{F}_N^x(z) - \bar{F}_N^x(z)\right| + 2^{\beta_2}Cl_n^{\beta_2}\bar{F}_D(x).$$

Concerning $l_n^{\beta_2}$, we write

$$\begin{aligned}
\frac{l_n^{\beta_2}}{\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}} &= \frac{l_n^{\beta_2} n\psi_n(x)}{\sqrt{\varphi_n(x)\log n}} \\
&= \frac{n\psi_n(x)}{\sqrt{n\varphi_n(x)\log n}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \phi(x,a_i)}{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \phi(x,a_i)}{\sum_{i=1}^n \phi_i(x,a_i)}}\sqrt{\frac{1}{\log n}}.
\end{aligned}$$

Furthermore, as $\phi(x,a_i) \leq 1$ we have, for all $n$,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \phi(x,a_i)}{n} \leq 1,$$

and by (H1)(iii)

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\phi(x,a_i)}{\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x,a_i)}\leq\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\phi(x,a_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\in B(x,r_i)|\mathfrak{F}_{i-1}\right)}=1.$$

Finally, we can write

$$l_n^{\beta_2}=O\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

Thus, to complete the proof of this lemma, it suffices to show that

$$\max_{1\leq j\leq d_n}\max_{z\in\{y_j-l_n,y_j+l_n\}}\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|=O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

To do that, we use the fact that

$$\mathbb{P}\left(\max_{z\in\mathcal{G}_n}\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\varepsilon\right)\leq\sum_{z\in\mathcal{G}_n}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\varepsilon\right).$$

Now, for any $z\in\mathcal{G}_n$ set

$$\Lambda_i(x,z)=K_i(x)1\!\!1_{\{Y_i\leq z\}}-\mathbb{E}\left[K_i(x)1\!\!1_{\{Y_i\leq z\}}|\mathfrak{F}_{i-1}\right].$$

The rest of the proof is based on the same exponential inequality used in previous Lemma 1 and by using the fact that $1\!\!1_{\{Y_i\leq z\}}\leq 1$

$$\mathbb{E}[\Lambda_i^2(x,z)|\mathfrak{F}_{i-1}]\leq C\phi_i(x,a_i).$$

Thus, we get : for all $\eta>0$ and for all $z\in\mathcal{G}_n$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\leq C'n^{-C\eta^2}.$$

Then, as $d_n\leq Cl_n^{-1}$, we have

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathcal{G}_n}\mathbb{P}&\left(\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\\&\leq 2d_n\max_{z\in\mathcal{G}_n}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\\&\leq C'n^{-C\eta^2+1/2\beta_2}.\end{aligned}$$

Thus, by choosing $\eta$ such that $C\eta^2=1+1/\beta_2$, we obtain

$$\sum_{z\in\mathcal{G}_n}\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(z)-\bar{F}_N^x(z)\right|>\eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\ \leq\ C'n^{-1-1/2\beta_2}$$

which completes the proof of lemma.

■

**Proof of Lemma 2.4.3**

This proof follows the same steps as the proof of Lemma 2.3.5. Indeed, for all $i = 1, \dots, n$, we put $H_i(y) = H(b_i^{-1}(y - Y_i))$ and we write

$$\begin{aligned}
|\widetilde{B}_n(x,y)| &= \left| \frac{1}{n\psi_n(x)\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E}\left(K_i(x)\mathbb{E}[H_i(y)|\mathfrak{G}_{i-1}]|\mathfrak{F}_{i-1}\right) - F^x(y)\mathbb{E}\left[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}\right] \right\} \right| \\
&= \left| \frac{1}{n\psi_n(x)\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E}\left(K_i(x)\mathbb{E}[H_i(y)|X_i]|\mathfrak{F}_{i-1}\right) - F^x(y)\mathbb{E}\left[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}\right] \right\} \right| \\
&\leq \frac{1}{n\psi_n(x)\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E}\left(K_i(x)\left|\mathbb{E}[H_i(y)|X_i] - F^x(y)\right| \mathfrak{F}_{i-1}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Next, an integration by parts and a change of variable allow to get

$$E\left(H_i(y)|X\right) = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) F^{X_i}(y - b_i t) dt.$$

Thus, we have

$$\left|\mathbb{E}\left[H_i(y)|X_i\right] - F^x(y)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) \left|F^{X_i}(y - b_i t) - F^x(y)\right| dt.$$

Moreover, it follows by (H2) that

$$\mathbb{I}_{\{B(x,a_i)\}}(X_i) \left|\mathbb{E}\left[H_i(y)|X_i\right] - F^x(y)\right| \leq C \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) \left(a_i^{\beta_1} + |t|^{\beta_2} b_i^{\beta_2}\right) dt.$$

This last inequality is uniform on $y$ which achieves the proof of lemma.

■

**Proof of Lemma 2.4.4**

Similarly to Lemma 2.3.6 we use the compactness of $[t_\alpha(x) - \delta,\, t_\alpha(x) + \delta]$ and we consider the same covering with $l_n = n^{-\gamma}$. Furthermore, we consider the following decomposition

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} \left|\widetilde{F}_N^x(y) - \ddot{F}_N^x(y)\right| \leq\ & \underbrace{\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} \left|\widetilde{F}_N^x(y) - \widetilde{F}_N^x(t_y)\right|}_{T_1} + \\
& \underbrace{\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} \left|\widetilde{F}_N^x(t_y) - \ddot{F}_N^x(t_y)\right|}_{T_2} \\
& + \underbrace{\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} \left|\ddot{F}_N^x(t_y) - \ddot{F}_N^x(y)\right|}_{T_3} \qquad (7)
\end{aligned}$$

where $t_y = \arg\min_{t\in\{y_1,\dots,y_{d_n}\}} |y - t|$.

- Firstly, concerning $(T_1)$ :

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\left|\widetilde{F}_N^x(y)-\widetilde{F}_N^x(t_y)\right| &\leq \frac{1}{n\,\psi_n(x)}\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\sum_{i=1}^n |H_i(y)-H_i(t_y)|\,K_i,\\
&\leq \frac{C}{n\,\psi_n(x)}\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}|y-t_y|\left(\sum_{i=1}^n\frac{K_i}{b_i}\right),\\
&\leq C\frac{l_n}{n\,\psi_n(x)}\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{b_i}\right).
\end{aligned}$$

Since $l_n = n^{-\gamma}$ we obtain that

$$\frac{l_n}{n\,\psi_n(x)}\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{b_i}\right) = o\left(\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right).$$

So, for $n$ large enough, we can find a $\eta>0$ such that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\left|\widetilde{F}_N^x(y)-\widetilde{F}_N^x(t_y)\right| > \eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right) \;=\; 0. \tag{8}$$

- Secondly, for $(T_2)$ we use the same arguments as for the proof of Lemma 2.3.6 with $\mathbb{I}_{\{Y_i\leq\cdot\}}$ is replaced by $H\left(\frac{\cdot-Y_i}{b_i}\right)$. As $H\leq 1$, we deduce that $\mathbb{E}\left[K_i^2H^2\left(\frac{\cdot-Y_i}{a_i}\right)|\mathfrak{F}_{i-1}\right]\leq C\phi_i(x,a_i)$. It follows that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\left|\widetilde{F}_N^x(t_y)-\ddot{F}_N^x(t_y)\right| > \eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\\
&\quad\leq \mathbb{P}\left(\max_{t\in\{y_1,y_2,\dots y_{d_n}\}}\left|\widetilde{F}_N^x(t)-\ddot{F}_N^x(t)\right| > \eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\\
&\quad\leq d_n\max_{t\in\{y_1,y_2,\dots y_{d_n}\}}\mathbb{P}\left(\left|\widetilde{F}_N^x(t)-\ddot{F}_N^x(t)\right| > \eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)\\
&\qquad\leq 2C'l_n^{-1}\exp\{-C\eta^2\log n\}\leq 2C'n^{-C\eta^2+\gamma}.
\end{aligned}$$

Consequently, an appropriate choice of $\eta$ gives

$$\sum_n\mathbb{P}\left(\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]}\left|\widetilde{F}_N^x(t_y)-\ddot{F}_N^x(t_y)\right| > \eta\sqrt{\frac{\varphi_n(x)\log n}{n^2\psi_n^2(x)}}\right)<\infty. \tag{9}$$

- Finally, concerning $(T_3)$ : Using analogous arguments as for $T_1$, we obtain under the fact that

$$\mathbb{E}\left[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}\right] < C\mathbb{P}(X_i\in B(x,h_i)|\mathfrak{F}_{i-1})\leq C\phi_i(x,a_i)$$

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} \left|\ddot{F}_N^x(t_y) - \ddot{F}_N^x(y)\right| \leq C\frac{l_n}{n\,\psi_n(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right). \tag{10}$$

Now, Lemma 2.4.4 can be easily deduced from (7)-(10).

## Acknowledgments.

The authors would like to thank the Editor, the Associate-Editor and two anonymous reviewers for their valuable comments and suggestions which improved substantially the quality of an earlier version of this paper.

# Bibliographie


[1] V.I. Bogachev, (1999). Gaussian measures. Math surveys and monographs, **62**, Amer. Math. Soc.

[2] D. Bosq, *Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications,* Lecture Notes in Statistics, 149, Springer, 2000.

[3] H. Cardot, C. Crambes and P. Sarda, (2004). Estimation spline de quantiles conditionnels pour variables explicatives fonctionnelles, *C. R. Math. Paris,***339**, 141-144.

[4] S. Dabo-Niang, A. Laksaci, (2011). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Comm in Statist. Theory* &; *Methods*, **41** , 1254-1268.

[5] S. Dabo-Niang and B. Thiam, (2010). $L_1$ consistency of a kernel estimate of spatial conditional quantile. *Statist. Probab. Lett*, **80**, 1447-1458.

[6] M. Delecroix and A.C Rosa, (1996). Nonparametric estimation of a regression function and its derivatives under an ergodic hypothesis. *J. Nonparametr. Statist.*, **6**, 367-382.

[7] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008a). Asymptotic results of a nonparametric conditional quantile estimator for functional time series, *Comm in Statist. Theory* &; *Methods*, **37**, 2735-Ã¯ØÂ½2759.

[8] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008b). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space, *Far East J. Theoretical Statist*, **25**, 15–38.

[9] F. Ferraty, A. Laksaci and P. Vieu, (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, *Statist. Inf. for*

*Stoch. Proc.*, **9**, 47–76.

[10] F. Ferraty, A. Rabhi and P. Vieu, (2005). Conditional quantiles for functional dependent data with application to the climatic El Niño phenomenon, *Sankhyā* , **67**, 378–398.

[11] F. Ferraty and P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and Practice,* Springer-Verlag, New York, 2006.

[12] A. Gannoun, J. Saracco and K. Yu, (2003). Nonparametric prediction by conditional median and quantiles, *J. Statist. Plann. Inference* **117**, 207–223.

[13] N. Laïb, and and E. Ould-Saïd, (2000). A robust nonparametric estimation of the autoregression function under an ergodic hypothesis. *Canad. J. Statist.*, **28**, 817-828.

[14] N. Laïb, and D. Louani, (2010). Nonparametric kernel regression estimate for functional stationary ergodic data : Asymptotic properties. *J. Multivariate Anal.*, **101**, 2266-2281.

[15] N. Laïb, and D. Louani, (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data *J. Statist. Plan. and Inference* , **141**, 359-372.

[16] A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2009). $L^1$-norm kernel estimator of conditional quantile for functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 1065-1073.

[17] A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2011). Asymptotic results for an $L^1$-norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology. *Sankhya*, **A 73** 125–141.

[18] J.O. Ramsay, B.W. Silverman, *Applied functional data analysis ; Methods and case studies.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[19] J.O. Ramsay, B.W. Silverman,*Functional Data Analysis,* Second Edition, Springer, New York, 2005.

[20] G.R. Roussas, L.T. Tran, (1992) . Asymptotic normality of the recursive kernel regression estimate under dependence conditions. *Ann. Statist.*, **20**, 98–120.

[21] M. Samanta, (1989). Non-parametric estimation of conditional quantiles, *Statist. Probab. Lett.*, **7**, 407–412.

[22] C.J. Stone, (1977). Consistent nonparametric regression. Discussion, *Ann. Statist.* , **5** , 595–645.

# Chapitre 3

# Asymptotique normality of recursive kernel estimate of the conditional quantile

F. Benziadi [1], A. Laksaci [2] et F. Tebboune [3]

Ce chapitre fait l'objet d'une publication soumettre.

**Abstract :** In this paper, we study the asymptotic normality of the recursive kernel estimate of conditional quantiles function, under a stationary ergodic process assumption.

**Keywords** Recursive estimate · conditional quantile · functional data · ergodic data · Asymptotic normality

## 3.1 Introduction

Conditional quantile estimation is an important probleme in no-parametric statistic, it may be found in many applications, such as agronomy, in medcine, in economie...Various no-parametrics estimators of this function hase been proposed in the leterature. Kœker and Bassett (1978) proposed a direct estimator of conditional quantile $t_\alpha(x)$ defined by $\widehat{t_\alpha}(x) = \arg\min_{t_\alpha} \sum_{i=1}^{n} \rho_\alpha(Y_i - t_\alpha)$ where $(X_i, Y_i) \in \mathbb{R}^2$, this estimator hase been investigated by many authors (see Kœker (2005) and Cardot (2004)).Samanta (1989) studied non-parametric estimation of conditinal quantile, the asomptotic properties of no-parametric conditional quantile estimator for functional times series was estqablished by Ezzahrioui and Ould said (2008), Lemdani, Ould said and Pou-

1. Laboratoire des modèles Stochastiques, Statistique et Applications Univ Dr.Moulay Tahar de Saïda, e-mail proba-stat@yahoo.fr

2. Lab. Statistique et Processus Stochastiques, Univ. Djillali Liabès, BP 89, S. B. A. 22000, Algeria , e-mail alilak@yahoo.fr

3. Univ Dr.Moulay Tahar de Saïda
e-mail fethi.tebboune@gmail.com

lin (2008) studied the asimptotic normality of conditional quantile estimator with randomly truncated data.

One of the most important application of the conditional quantile estimation is in predection setting and in estimation of regression function.There is an extensive works on regression quantile, the firste idea for this subject, was proposed by Stone (1977). Cardo and Al (2004) established the $L_2-$convergence rate of the conditional quantile as a lineaer regression model for functional data.Ferraty and Al (2006) proposed a kernel estimator of this model and they established the almost complete convergence of this estimator for the i.i.d case.The asymptotic normality of a generalized $L^1$ approache for a kernel estimator of conditional quantile with functional regressor , was studied by Laksaci and Lemdani (2009).

In this paper we consider the recursive estimation of conditional quantile. The first result, in this topic, was given by Wolverton and Wagner (1969), they studied the asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification. Masry (1986) studied the recursive estimator of probability density for weakly dependence stationary process . Amiri (2012) establishe the asymptotic propreties of the recursive regression estimator with application in the non-parametric predection, in the same aim, Amiri, Cramb and Thiam (2014) establishe the asymptotic properties of the recursive estimator of regression with functional covariate.Laksaci, Tebboune and benziadi (2012) studie the almoste complete rate convergence of functional recursive kernel of the conditional quantile for ergodic data.

In this paper, we consider, the conditional quantile estimation when the data are ergodic. to allow the maximum possibl generality in regard to the dependence setting .It should be noted that, the asymptotic normality for i.id functional data, hase been established bu Bouadjmi (2014). Recently, the non-parametric kernel estimation for functional stationnary ergodic data was cosidered by Laib and Louani (2010), they studied the asymptotic properties of this estimator and his almost complete convergence.

The outline of this paper is as follows :we presente the double-recursive kernel estimator, in section 2.We establishe the asymptotic normality of this estimator in section 3 and section 4. We studie some particular cases in section 5.Finelly, in appendix, we present the proofs of the axxiliary results .To prove our results, our methodology is based on the martingale approximation which allows to launch a systematic study for dependent data.

## 3.2 The recursive estimation of conditional quantile

Let $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ be a sequence of strictly stationary dependent random variables valued in $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric space. For $\alpha \in [0,1]$, the conditional quantile of ordre $\alpha$ of the conditinnal distribution of $Y$ given $X = x$ denoted $t_\alpha(x)$ is a solution of the equation :

$$F^x_{t_\alpha(x)} = \alpha \Leftrightarrow t_\alpha(x) = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} L_\alpha(x, y) \tag{1}$$

Where

$$L_\alpha(x, y) = \mathbb{E}\left(l_\alpha(Y - y)/X = x\right)$$

Withe

$$l_\alpha = (2\alpha - 1)t + |t|$$

There for, we estime the conditional quantile $t_\alpha(x)$ by :

$$\widehat{t_\alpha}(x) = \arg\min_{y\in\mathbb{R}} \widehat{L}_\alpha(x,y)$$

Note that by using a simular proof to that given by Laksaci et Al(2009), this estimator can be expossed a

$$\widehat{t_\alpha}(x) = \inf\left\{y \in \mathbb{R}/\widehat{F^x}(y) = \alpha\right\}$$

Where the recursive estimate of $F^x(y)$ is defined as :

$$\widehat{F^x}(y) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(a_i^{-1}d(x,X_i)\right) H\left(b_i^{-1}(Y_i - y)\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(a_i^{-1}d(x,X_i)\right)}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Where $K$ is a kernel strictly increasing distribution and $(a_i)$ (resp $(b_i)$ is a sequence of positive real numbers such that $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$ ( $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = 0$). The adventage of this estimation method is to umpdate the estimate for each additional observation becomes without resorting to past data.

## 3.3 Main results

Our functional ergodic data is carried out by the following considiration : for all $k = 1, \cdots, n$, we put $\mathfrak{F}_k$ the $\sigma$-field generated by $((X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k))$ , and we pose $\mathfrak{B}_k$ the $\sigma$-field generated by $((X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k),X_{k+1})$, we will denote by $C'$ some strictly positive generic constante, $x$ is a fixed point in $\mathcal{F}$ , and $N_x$ denote a fixed neighbohood of x.

In ordre to establish our asymptotic results , we need the following hypotheses :

(H1) Te strictely stationary ergodic process $(X_i,Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ satisfies :

$$\begin{cases}
\text{(i) The function } \phi(x,r) := \mathbb{P}(X \in B(x,r)) \text{ is such that } \phi(x,r) > 0, \ \forall\, r > 0 \\
\quad \text{where } B(x,h) = \{x' \in \mathcal{F}/d(x',x) < h\}. \\
\text{(ii) For all } i = 1,\ldots,n \text{ there exists a deterministic function } \phi_i(x,\cdot) \text{ such that} \\
\quad \text{almost surely } 0 < \mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r)|\mathfrak{F}_{i-1}\right) \le \phi_i(x,r),\ \forall\, r > 0, \\
\text{and } \phi_i(x,r) \to 0 \text{ as } r \to 0. \\
\text{(iii) For all sequence } (r_i)_{i=1,\ldots n} > 0,\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in B(x,r_i)|\mathfrak{F}_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \phi(x,r_i)} \to 1 \qquad a.co.
\end{cases}$$

we suppose that $F^x$ has a continuous density $f^x$ with respect to (w.r.t.) Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$ and is such that

(H2) There exists $\delta > 0$, such that $\forall (t_1, t_2) \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]^2$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x^2, \forall y \in \mathbb{R}$

$$|F^{x_1}(t_1) - F^{x_2}(t_2)| \leq C' \left( d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |t_1 - t_2|^{\beta_2} \right) \quad \text{and} \quad \inf_{y \in [t_\alpha(x)-\delta,\, t_\alpha(x)+\delta]} f^x(y) > C$$

with $\quad C > 0,\ C' > 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0.$

(H3) The bandwidths $(a_i, b_i)$ satisfie : $\forall t \in [0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\phi(x, t a_n)}{\phi(x, a_n)} = \beta_x(t)$$

and

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n \phi_n(x)} \left( \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i) + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i) \right) = 0$$

(H4) $K$ is a function with support $(0, 1)$ such that $C \mathbb{1}_{(0,1)} < K(t) < C' \mathbb{1}_{(0,1)}$.

(H5) The function $H$ is of class $\mathcal{C}^1$ such that

$$\begin{cases} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ |H(y_1) - H(y_2)| \leq C|y_1 - y_2| \\ \int |t|^{\beta_2} H^{(1)}(t) dt < \infty, \text{ where } \beta_2 \text{ is given in (H2).} \end{cases}$$

*Comments four the hypotheses*

Our assumption are quite mild.Indeed, the ergodicity of functional data in assumption $H(1)ii$ wich is less restuctive to the conditions imposed by Laib and Louani (2001), it is note necessary to assume an approximation of the concentration function ($\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))$ and the conditional concentration function ($\mathbb{P}(X_i \in B(x, r)/\mathfrak{F}_{i-1})$ as a product of two independant nonegative functions of the center and of the radius.

The assumption $H(2)$ specifie for a fixed neighborhood $N_x$ of $x$, we assume that the regular version $F^{x'}$ of the coditional distribution function of $Y$ given $X = x'$ exists for alle $x' \in N_x$. Although there are several ways to define this nonparametric concept, this Hölderian condition is more adequate for the semi-metric structure considered here.The function $\beta_x$ definedin condition $H(3)$ plays a fundamental rol in the asymptotic normality result. It permits to give the variance term explicity and $H(4)$ is fulfilled. The condition $H(5)$ is usfull in order to explicit asymptoticaly the bias term.

## 3.4 Results

Our main result is given in the folling theorem

**Theorem 3.4.1.** *Under hypothes $H(1) - H(5)$, we have for any $x \in \mathcal{A}$*

$$\left( \frac{n \varphi_n(x)}{\sigma^2(x)} \right)^{1/2} (\widehat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)) \longrightarrow_D N(0, 1) \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

*where*

$$\sigma^2(x) = \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{(f^x(t_\alpha))^2}\right)\left[\frac{\left(K^2(1) - \int_0^1 (K^2(s))'\beta_x(s)ds\right)}{\left(K(1) - \int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}\right]$$

*and* $\mathcal{A} = \{x/\sigma^2(x) \neq 0\}$

**Proof of theorem 3.4.1**

In the following , we put , for any $x \in \mathcal{F}$, and $i = 1, \cdots, n$,
$K_i = K(a_i^{-1}d(x, X_i)$, and $H_i = H(b_i^{-1}(Y_i - y)$
We start by writing

$$\widehat{F}^x(y) = \widehat{B}_n(x, y) + \frac{\widehat{R}_n(x, y)}{\widehat{F}_D(x)} + \frac{\widehat{Q}_n(x, y)}{\widehat{F}_D(x)}$$

where

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n(x, y) &:= (\widehat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)), \\ \widehat{B}_n(x, y) &:= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} \quad \text{and} \quad \widehat{R}_n(x, y) := -\widehat{B}_n(x, y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \widehat{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\varphi_n}\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))H(b_i^{-1}(Y_i - y), \\ \bar{F}_N^x(y) &:= \frac{1}{n\varphi_n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[K(a_i^{-1}d(x, X_i)))H(b_i^{-1}(Y_i - y))|\mathfrak{F}_{i-1}\right], \\ \widehat{F}_D(x) &:= \frac{1}{n\varphi_n}\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i)), \\ \bar{F}_D(x) &:= \frac{1}{n\varphi_n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[K(a_i^{-1}d(x, X_i))|\mathfrak{F}_{i-1}\right]. \end{aligned}$$

we define, for all $u \in \mathbb{R}$ $\tau_\alpha(u, x) = t_\alpha(x) + u\left[n\varphi_n(x)\right]^{-1/2}\sigma(x)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sqrt{n\varphi_n(x)}\sigma^{-1}(x)(\widehat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)) < u\right\} &= \mathbb{E}\left(\widehat{t}_\alpha(x) < \tau_\alpha(u, x)\right) \\ &= \mathbb{P}\left[\widehat{F}^x(\tau_\alpha(u, x)) > \alpha\right] = \mathbb{P}\left(\widehat{F}^x(\tau_\alpha(u, x)) > 0\right) \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\widehat{F}^x(\tau_\alpha(u, x)) > 0\right) &= \mathbb{P}\left(0 < \widehat{B}_n(x, y) + \tfrac{\widehat{R}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)} + \tfrac{\widehat{Q}_n(x,y)}{\widehat{F}_D(x)}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\widehat{F}_D(x)\widehat{B}_n(x, \tau_\alpha(u, x)) - \widehat{R}_n(x, \tau_\alpha(u, x)) - \widehat{Q}_n(x, \tau_\alpha(u, x)) < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\widehat{F}_D(x)\widehat{B}_n(x, \tau_\alpha(u, x)) - \widehat{R}_n(x, \tau_\alpha(u, x)) < \widehat{Q}_n(x, \tau_\alpha(u, x))\right) \end{aligned}$$

Thus, theorem 3.4.1 is a consequence of the following intermediate results which proofs are given in the Appendix.

**Lemma 3.4.2.** *Under hypothjese of theorem 3.4.1, we have for any $x \in \mathcal{A}$*

$$\left( \frac{n\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha})\right)^{1/2} \widehat{Q}_n(x,\tau_\alpha(u,x))) \longrightarrow N(0,1) \ as\ n \longrightarrow \infty$$

*in distribution*

**Lemma 3.4.3.** *Under hypotheses $H(1)$ an $H(6)$ , we have :*

$$\widehat{F}_D^x - 1 = \circ_p(1)$$

**Lemma 3.4.4.** *Under hypotheses $H(1)$, $H(2)$ and $H(3)$ we have*

$$\left( \frac{n\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha})\right)^{1/2} \widehat{B}_n(x,\tau_\alpha(u,x))) = u + \circ_p(1) \ as\ n \longrightarrow \infty$$

**Lemma 3.4.5.** *Under hypothese $H(1)$, $H(2)$ and $H(6)$ we have*

$$\left( \frac{n\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha})\right)^{1/2} \widehat{R}_n(x,\tau_\alpha(u,x))) = \circ(1) \ a.co\ as\ n \longrightarrow \infty$$

## 3.5 Appendix

**Proof of Lemma 3.4.2**

We use the same ideas in Laïb and Louani (2011).

For all $i = 1, \ldots, n$ , we define

$$\eta_{n_i} = \left( \frac{\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha})\right)^{1/2} \left(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\right)\frac{K_i(x)}{n\varphi_n(x)}$$

and, we define $\xi_{n_i} = \eta_i - \mathbb{E}(\eta_{n_i} \setminus \mathfrak{F}_{i-1})$.

It is easily seen that

$$\left( \frac{n\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha})\right)^{1/2} \widehat{Q}_n(x,\tau_\alpha(t_\alpha(x)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \xi_{n_i}$$

As $\xi_{n_i}$ is a triangular array of martingale differencs[4] according the $\sigma-$ fields $\mathfrak{F}_{i-1}$, we are in position to applay the central limit theorem based on unconditional lindeberg condition to establish the asymptotic normality of $\widehat{Q}_n(x)$. This can be done if we establish the following statements :

$$\text{a)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_{n_i}^2\setminus\mathfrak{F}_{i-1})\longrightarrow 1 in\ probabilite;$$

$$\text{b) }\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_{n_i}^2\mathbb{1}_{\xi_{n_i}^2>\epsilon n})\longrightarrow 0 \text{ holds for any } \epsilon>0 \text{ (lindeberg condition)}$$

**Proof of part (a)**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_{n_i}^2\setminus\mathfrak{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}((\eta_{n_i}-\mathbb{E}(\eta_{n_i}\setminus\mathfrak{F}_{i-1}))^2)\\ &= \mathbb{E}(\eta_{n_i}^2\setminus\mathfrak{F}_{i-1})-\mathbb{E}^2(\eta_{n_i}\setminus\mathfrak{F}_{i-1})\end{aligned}$$

The statement $(a)$ follows then if we show that :

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}^2(\eta_{n_i}\setminus\mathfrak{F}_{i-1}) =_p 0 \quad ;$$

$$\text{(b)}\quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n_i}^2\setminus\mathfrak{F}_{i-1}) =_p 1$$

To pove (1), we put $A=\left(\dfrac{\varphi_n(x)\left(K(1)-\int_0^1K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2}{\left(K^2(1)-\int_0^1(K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)\alpha(1-\alpha}\right)^{1/2}$, we have :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta_{n_i}\setminus\mathfrak{F}_{i-1}) &= \frac{A}{n\varphi_n(x)}\mathbb{E}\left[[(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x))))K_i(x)]\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\ |\mathbb{E}(\eta_{n_i}\setminus F_{i-1})| &= \frac{A}{n\varphi_n(x)}|\mathbb{E}\left[[[\mathbb{E}(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x))/\setminus\mathcal{B}_{i-1})-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))]\,K_i(x)]\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right|\\ &= \frac{A}{n\varphi_n(x)}|\mathbb{E}\left[[(\mathbb{E}(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))/X_i))-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x))K_i(x)]\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]|\end{aligned}$$

Under $H(1)$ and $H(4)$, we have :

$$C\phi_i(x,a_i)\le\mathbb{E}(K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1})\le C'\phi_i(x,a_i)$$

Nexte , an integration by parts and a change of variable allow to get

$$\mathbb{E}(H_i)(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))/X_i)=\int_{\mathbb{R}}H^{(1)}(t)F^{X_i}(y-b_it)dt.$$

4. Consider an adapted sequence $\{X_t,\mathfrak{F}_t\}_{-\infty}^{+\infty}$ on a probability space $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$. $X_t$ is a martingale difference sequence (MDS) if it satisfies the following two conditions :

$\mathbb{E}[X_t]<\infty$ and $\mathbb{E}[X_t\ \mathfrak{F}_{t-1}]=0, a.c$

for all $t$. By construction, this implies that if $Y_t$ is a maringale, then $X_t=Y_t-Y_{t-1}$ will be an MDS-name.

Thus, we have

$$|(\mathbb{E}(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))/X_i)) - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))| \leq C' a_i^{\beta_1}$$

combining this results , we have

$$|\mathbb{E}(\eta_{n_i} \setminus \mathfrak{F}_{i-1})| \quad \leq \frac{AC'' a_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{n\varphi_n(x, a_i)}$$

We put $M_1 = \left(K(1) - \int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds\right)^2$ and $M_2 = \left(K^2(1) - \int_0^1 (K^2(x))'\beta_x(s)ds\right)$
so $A = \dfrac{\varphi_n(x) M_1 2}{M_2(\alpha(1-\alpha))}$
We can write

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\eta_{n_i} \setminus \mathfrak{F}_{i-1})| \quad &\leq \left(\frac{\varphi_n(x) M_1^2}{M_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{1/2} \frac{\phi_i(x, a_i)}{\varphi_n(x, a_i)} a_i^{\beta_2} \\
\tfrac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\eta_{n_i} \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right)^2 \quad &\leq a_i^{2\beta_1} \tfrac{M_1^2}{M_2(\alpha(1-\alpha))} \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i))^2}{n\varphi_n(x, a_i)} \to 0 (Under \mathrm{H}(3))
\end{aligned}$$

Now, we prove (2), to do this , we observe that

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(\eta_{n_i}^2 \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right) \quad &= \frac{A^2}{n\varphi_n^2(x, a_i)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x))))^2 K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right] \\
&= \frac{A^2}{n\varphi_n^2(x, a_i)} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(H_i^2(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right)\right. \\
&-2F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\mathbb{E}\left(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right) \\
&+(F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x))))^2 \mathbb{E}\left(K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

W e put :

$$\begin{aligned}
I_1 \quad &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(H_i^2(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right) \\
I_2 \quad &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x))) K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right) \\
I_3 \quad &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(K_i^2(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

We write :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[H_i^2(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\big)\right]\\
&-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\
&= F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(H_i^2(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))/X_i)K_i^2(x))\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\big)\right]\\
&-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(H_i^2(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))/X_i)K_i^2(x))\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\big)\right]-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]
\end{aligned}
$$

Using the same argement as those used in proof of part (1), then we have :

$$\frac{1}{n\varphi_n(x,a_i)}I_2=\circ(1)$$

For $I_3$, we use the same ideas in Ferraty and Al (2002) to get :

$$\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]=K^2(1)\phi_i(x,a_i)-\int_0^1(K^2(u))'\phi_i(x,ua_i)du$$

so under H1 we have :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n\varphi(x,a_i)}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right] &= \frac{1}{n\varphi(x,a_i)}K^2(1)\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x,a_i)\\
&-\frac{1}{n\varphi(x,a_i)}\int_0^1(K^2(u))'\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x,ua_i)du\\
&= K^2(1)-\int_0^1(K^2(u))'\frac{\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x,a_i)}{n\varphi(x,a_i)}du=\circ(1)
\end{aligned}
$$

and by the conbining this results, we deduce that $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_{n_i}^2\setminus\mathfrak{F}_{i-1})=1$ wich complet the proof of part (a).

**Proof of part (b)**

The lindeberg condition in chow wich implies that

$$\mathbb{E}\left[\xi_{n_i}^2\mathbb{1}_{\xi_{n_i}>n\epsilon}\right]\leq 4\mathbb{E}\left[\eta_{n_i}^2\mathbb{1}_{\eta_{n_i}>n\epsilon/2}\right]$$

Let $a>1$ and $b>1$ such that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

Making use the hölder and markove inequalities one can write for all $\varepsilon\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}\left[\eta_{n_i}^2 \mathbb{I}_{\eta_{n_i} > n\epsilon/2}\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left(\eta_{n_i}\right)^{2a}}{(n\epsilon/2)^{2a/b}}$$

Taking $C_0 \in \mathbb{R}_+^*$ and $2a = 2+\delta$, forme some $\delta > 0$, such that
$\mathbb{E}\left(|Y_i|^{2+\delta}\right) < \infty$ and $\mathbb{E}\left(|H_i - F^x|^{2+\delta} \setminus X_i = u\right) = \overline{W}_{2+\delta}(u)$ is a continuous function , we obtain

$$\begin{aligned}
4\mathbb{E}\left[\eta_{n_i}^2 \mathbb{I}_{\eta_{n_i} > n\epsilon}\right] &\leq C_0 \left(\frac{n\varphi_n(x,a_i)\beta_1^2}{\beta_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{(2+\delta)} \frac{1}{(\varphi_n(x,a_i))^{2+\delta}} \left[(|H_i - F^x|^{2+\delta} K_i^{2+\delta}(x))^{2+\delta}\right] \\
&\leq C_0 \left(\frac{n\varphi_n(x,a_i)\beta_1^2}{\beta_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{(2+\delta)} \frac{1}{(\varphi_n(x,a_i))^{2+\delta}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|H_i - F^x|^{2+\delta} K_i^{2+\delta}(x) \setminus X_i\right]\right] \\
&\leq C_0 \left(\frac{n\varphi_n(x,a_i)\beta_1^2}{\beta_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{(2+\delta)} \frac{1}{(\varphi_n(x,a_i))^{2+\delta}} \mathbb{E}\left[K_i^{2+\delta}(x)\overline{W}_{2+\delta}(X_i)\right] \\
&\leq C_0 \left(\frac{n\varphi_n(x,a_i)\beta_1^2}{\beta_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{(2+\delta)} \frac{1}{(\varphi_n(x,a_i))^{2+\delta}} \mathbb{E}\left[K_i^{2+\delta}(x)|\overline{W}_{2+\delta}(X_i) - \overline{W}_{2+\delta}(x)|\right. \\
&\left. + |\overline{W}_{2+\delta}(x)\mathbb{E}(K_i^{2+\delta}(x))|\right. \\
&\leq C_0 \left(\frac{n\beta_1^2}{\beta_2(\alpha(1-\alpha))}\right)^{(2+\delta)} (n\mathbb{E}(K_i^{2+\delta}(x))\left(|\overline{W}_{2+\delta}(x)| + \circ(1)\right)
\end{aligned}$$

Consequently $\frac{1}{n}\sum_{i=1} n\mathbb{E}\left[\xi_{n_i}^2 \mathbb{I}_{\xi_{n_i} > n\epsilon}\right] \longrightarrow 0 \ as \ n \longrightarrow \infty$ wigh complets the proof of lemma.

**Proof of Lemma 3.4.3**

Observe that :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_D(x) - 1 &= \frac{1}{\varphi_n(x,a_i)} \sum_{i=1}^n \left[\left[K_i(x) - \mathbb{E}(K_i(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right] + \left[\mathbb{E}(K_i(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right] - 1\right] \\
&= \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x,a_i)} \sum_{i=1}^n \left[K_i(x) - \mathbb{E}(K_i(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right]}_{T_1} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x,a_i)} \sum_{i=1}^n \left[\mathbb{E}(K_i(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1}) - 1\right]}_{T_2}
\end{aligned}$$

The proof of the lemma follows then if show that :

(a) $T_1 = \circ(1) \ as \ n \longrightarrow \infty$ ;

(b) $T_2 \longrightarrow 0 \ in \ probabilite \ as \ n \longrightarrow \infty$

for $T_2$ ,and under H3 and H1 we prove that :

$$\frac{1}{\varphi_n(x,a_i)} \sum_{i=1}^n \left[\mathbb{E}(K_i(x) \setminus \mathfrak{F}_{i-1})\right] = 0(1) \ as \ n \longrightarrow \infty$$

So, it is easily seen that $T_2 \longrightarrow 0$ *in probabilite as* $n \longrightarrow \infty$ .

For the firste term $T_1$, observe thet $T_1(x) = \sum_{i=1}^{n} L_{n_i}(x)$ where $\{L_{n_i}(x)\}$ is a triangular array of martingal differences with respect to the $\sigma-$field $\mathfrak{F}_{i-1}$

Combining the Burkholder inequalite (see P.H. All and C.Heyde p(23), 1980) and Jensen inequalite (see Laib and Laouni p(365),2011), we obtain for any $\epsilon > 0$ , there existe a constant $C_0 > 0$ such that

$$\mathbb{P}\left(|T_1 > \epsilon|\right) \leq C_0 \frac{\mathbb{E}\left(K_1^2(x)\right)}{\epsilon^2 n(\varphi_n(x,a_i))^2} = \circ\left(\frac{1}{\epsilon^2 n\varphi_n(x)} + \circ(1)\right)$$

Since $n\varphi_n(x) \longrightarrow \infty_{n\longrightarrow\infty}$, we conclude then that $T_1(x) = \circ(1)$ in probabilite as $n \longrightarrow \infty$

Wich complete the proof of lemma 3.4.3

**Proof of Lemma 3.4.4**

We have

$$\widehat{B}_n(x,\tau_\alpha(t_\alpha(x))) = \frac{\overline{F}_N(x,\tau_\alpha(t_\alpha(x)))}{\overline{F}_D(x,\tau_\alpha(t_\alpha(x)))}$$

We write

$$\begin{aligned}
|\widehat{B}_n(x,\tau_\alpha(t_\alpha(x)))| &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left[K_i(x)\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\mathfrak{B}_{i-1}\right]\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right.\\
&\left.-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\mathbb{E}\left[K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right.\\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left[K_i(x)\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\ X_i\right]\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right.\\
&\left.-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\mathbb{E}\left[K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right.
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left[K_i(x)|\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\ X_i\right]-F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))|\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right.$$

Next, an integration by parts and change of variable allow to get :

$$\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\ X_i\right] = {}_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^{X_i}(\tau_\alpha(t_\alpha(x)) - b_i t)dt$$

Thus, we have

$$|\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\ X_i\right] - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))| \leq \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)|F^{X_i}((\tau_\alpha(t_\alpha(x))) - b_i t) - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))|dt \tag{3}$$

Under $H(2)$, we obtain that

$$\mathbb{I}_{B(x,a_i)}(X_i)|\mathbb{E}\left[H_i(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))\setminus\ X_i\right] - F^x(\tau_\alpha(t_\alpha(x)))| \leq C\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)(a_i^{\beta_1} + |t|\beta_2 b_i^{\beta_2})dt \tag{4}$$

and under $H(4)$ we prove that :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K_i(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]=\circ(1) \tag{5}$$

By combining 4 and 5 we achive the proof of lemma.

**Proof of Lemma 3.4.5**

We put $t=\tau_\alpha(t_\alpha(x)$ and we write

$$\begin{aligned}\widehat{R}_n(x,t) &= -\left(\widehat{B}_n(x,t)-F^x(t)\right)\left(\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)\right)\\ &= -\left(\frac{\overline{F}_N(x,t)-F^x(t)\overline{F}_D(x,t)}{\overline{F}_D(x,t)}\right)\left(\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)\right)\end{aligned}$$

Clearly, it is suffies to show that :

(a) $\left(\dfrac{\overline{F}_N(x,t)-F^x(t)\overline{F}_D(x,t)}{\overline{F}_D(x,t)}\right)=\circ(1),$

(b) $\left(\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)\right)=\circ(1)$

The proof of the first hand uses arguments similar to those used in the proof of lemma3.4.4. Of the second part, will be established

**i** $\mathbb{E}\left(\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)\right)=0,\text{var}\left(\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)\right)\longrightarrow 0$ as $n\longrightarrow\infty$

For all $i=1,\cdots,n$, we put

$$\triangle_i(x,t)=\frac{1}{n\varphi_n(x,a_i)}\left[K_i(x)H_i(t)-\mathbb{E}\left[K_i(x)H_i(t)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\right]$$

where $\triangle_i(x,t)$ is a tringular array of martingale differernces according to the $\sigma-$ fields $\mathfrak{F}_{i-1}$, next by $H(1)(ii)$ and $H(4)$ we obtain

$$\widehat{F}_N(x,t)-\overline{F}_N(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\triangle_i(x,t)$$

$\mathbb{E}(\triangle_i(x,t))=0$ by definition of $\triangle_i(x,t)$

For(ii) we write

$$[\sum_{i=1}^{n}(\triangle_i^2(x,t))]\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\triangle_i^2(x,t))\right]$$

Furthermore, by Jensens inqualite we have :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\triangle_i^2(x,t))\right] &\le \tfrac{1}{(n\varphi_n(x,a_i))^2}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)H_i^2(t)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\ &\le \tfrac{1}{(n\varphi_n(x,a_i))^2}\mathbb{E}\left[K_i^2(x)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right]\\ &\le \tfrac{1}{(n\varphi_n(x,a_i))^2}\mathbb{P}\left(X_i(x,a_i)\setminus\mathfrak{F}_{i-1}\right)\\ &\le \tfrac{1}{(n\varphi_n(x,a_i))^2}\phi_i(x,a_i)\end{aligned}$$

so,we obtain
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\triangle_i^2(x,t))\right] \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x,a_i)}{n^2\varphi_n^2(x,a_i)}$$
We deduce that $var\left(\widehat{F}_N(x,t) - \overline{F}_N(x,t)\right) \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$ since $H(1)(ii)$

## Acknowledgments.

The authors would like to the referees for their constructive crititisms and suggestions that have led to improve the representation of this paper.

# Bibliographie


[1] A. Amiri, Ch. Cromb and B.Thiam (2014), Recursive estiation of no-parametric regression with functional covariate, Computational statistics  Data analysis 69,pages 154-172.

[2] D. Bosq (200), *Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications,* Lecture Notes in Statistics, 149, Springer, 2000.

[3] F. Benziadi, A. Laksaci et F. Tebboune. Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data. Communications in statistics : Theory and Methods,DOI :10.1080/03610926.2014.901364.(2015).

[4] Y.S. Chow and H.Teicher(1998), Probability theory ,ended, Springer, New York.

[5] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008). Asymptotic results of a nonparametric conditional quantile estimator for functional time series, *Comm in Statist. Theory & Methods*, **37**, 2735-â2759.

[6] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space, *Far East J. Theoretical Statist*, **25**, 15–38.

[7] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space, *Far East J. Theoretical Statist*, **25**, 15–38.

[8] F. Ferraty, A. Laksaci and P. Vieu, (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, *Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, **9**, 47–76.

[9] F. Ferraty and P. Vieu (2006), Non-parametric functional data analysis theory and parctice.Springer,New York.

[10] F. Ferraty (2010), High dimensional data : a fascinating statistical challenge.J.Multivariate Anal.101,305-306.

[11] P. Hall and C.Heyd (1980), Martingal limit theory and its application. Academic Press, New York.

[12] N. Laïb, and D. Louani, (2010). Nonparametric kernel regression estimate for functional stationary ergodic data : Asymptotic properties. *J. Multivariate Anal.*, **101**, 2266-2281.

[13] A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2009). $L^1$-norm kernel estimator of conditional quantile for functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 1065-1073.

[14] A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2011). Asymptotic results for an $L^1$-norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology. *Sankhya*, **A 73** 125–141 .

[15] J.O. Ramsay, B.W. Silverman (2002) *Applied functional data analysis ; Methods and case studies.* Springer-Verlag, New York.

[16] M. Samanta, (1989). Non-parametric estimation of conditional quantiles, *Statist. Probab. Lett.*, **7**, 407–412.

[17] C.J. Stone, (1977). Consistent nonparametric regression. Discussion, *Ann. Statist.* , **5** , 595–645.

# Chapitre 4

# Simulation, conclusion et perspectives

## 4.1 Simulation

Dans cette partie, nous allons donner quelques fonctions de $R$ utiles pour réaliser la simulation de deuxième chapitre.

### 4.1.1 La fonction *far*

#### Description

Estimation des paramètres du processus *FAR(1)* (moyenne et opérateur d'autocorrélation).

#### Usage

*far(data,y,x,kn,center=TRU,na.rm=TRUE,joined=TRUE)*

#### Arguments

*data* : Objet de données *fdata*.

*y* : Un vecteur donnant les noms des variables réponces de modèle.

*x* : Un vecteur donnant les noms des variables explicatives de modèle.

*kn* : Un vecteur donnant les valeurs des différents nœds (vdimension de plug-in dans l'algorithme). Si elle n'est pas fournie, la valeur par défaut est un.

*centre* : Est-ce que l'observation doit être centré ?

*na.rm* : Est- ce que une valeur de N.A a besoin d'être enlevé ?

#### Détails

Un modèle autorégréssif fonctionnel d'ordre 1 (FAR(1)) est défini par l'équation suivante :

$$T_n = \rho(T_{n-1})\epsilon_n, n \in \mathbf{Z}$$

où $T_n$ et $\epsilon_n$ prennent leurs valeurs dans un espace fonctionnel (par exemple un hilbertien d'ordre un), et $\rho$ est un opérateur linéaire et $\epsilon_n$ est un bruit blanc fort.
Considérons maintenant le vecteur d'observations , par exemple :

$$(T_{1,n}, \cdots, T_{i,n}, \cdots, T_{m,n})$$

où chaque $T_{i,n}$ est un élément dans un espace fonctionnel.

#### Valeurs

Estimation de l'opérateur $\rho$. Cette estimation est éffectuée dans un sous-espace de dimension $k_n$. Une façon de choisir cette dimension est d'utiliser d'abord la fonction *far.cv* (validation croisée).

### 4.1.2 La fonction *simul.far*

#### Description

Simulation d'un processus *FAR* en utilisant une base de **Gram-Schmidt**.

#### Arguments

*m* : le nombre de points de discrétisation.

*n* : le nombre d'observations.

*base* : une base fonctionnelle exprimée comme une matrice (comme la matrice crée par la fonction *base.simul.far* ou la fonction *orthonormalization*.

*d.rho* : matrice numérique, l'expression du premier bloc de l'opérateur linéaire dans la base de **Gram-Schmidt.**

*alpha* :matrice numérique, l'exprission du premier bloc de l'opérateur covariance dans la base de **Gram-Schmidt.**

*cst* : le coéfficient de pertubation de l'opérateur linéaire.

#### Détails

Cette fonction simule un processus *FAR(1)* avec un bruit blanc fort.
La simulation est réalisée en deux étapes :

Étape 1 : La fonction calcule un processus *FAR(1)* noté $T_n$, dans un espace fonctioonel( que nous appellons dans la suite $H$) on utilisant une équation simple et les paramètres *d.rho, alpha, cst*.

Étape 2 : Le processus $(T_n)$ est projeté dans la base canonique, en utilisant le projecteur linéaire *base*.

La base *base* doit être une base orthonormée . La taille de cette matrice correspond à la dimension de l'espace de modélisation $H$ (on le prend le m2).

Dans $H$, l'opérateur linéaire *d.rho* est exprimé par

$$\begin{pmatrix} d.rho & 0 \\ 0 & d.rho \end{pmatrix}$$

où *eps.rho* est une matrice. Les deux 0 sont en fait deux blocs de 0, et *eps.rho* est la matrice diagonale ayant pour diagonale les termes suivants :

$$\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \cdots, \epsilon_{m2}$$

où

$$\epsilon_i = \frac{cst}{i^2} + \frac{1 - cst}{e^i}$$

et $k$ est la longueur de la diagonale de *d.rho*.

La norme de *eps.rho* doit être plus petite que la norme de *d.rho*.

Dans $H$, l'opérateur de la covariance de $T_n$, est défini par

$$m2 \begin{pmatrix} alpha & 0 \\ 0 & eps.alpha \end{pmatrix}$$

où *alpha* est une matrice, les deus 0 sont en fait deus blocs de 0et *eps.alpha* est la matrice diagonale ayant pour diagonale les termes suivants :

$$\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \cdots, \epsilon_{m2}$$

où

$$\epsilon_i = \frac{cst}{i}.$$

### Valeurs

Un objet *fdata* contenant une variable *Var* qui est le processus *FAR(1)* de taille $n$ avec $p$ points de discritisation.

Pour simuler le processus $T_n$ , la fonction crée un bruit blanc , en ayant l'opérateur de covariance suivant :

$$(CT - \rho)CT(CT)^t$$

L'opérateur $T_n$ est défini par :

$$T_{n+1} = \rho T_n + \epsilon_n, n \in \mathbf{Z}.$$

### 4.1.3 Programme

$library(nlme)$
$library(far)$
$far1 = simul.far(m = 60, n = 100, base = base.simul.far(24, 5),$
$d.rho = diag(c(0.45, 0.9, 0.34, 0.45)), alpha = diag(c(0.5, 0.23, 0.018)), cst1 = 0.05)$
$X = far1\S var$
$library(boot)$
$library(MASS)$
$library(mixtools)$
$abs.Reg.err = 0$
$abs.quant.err = 0$
$abs.quant1.err = 0$
$n = 100$
$m = 60$
$lambda1 = c(0, .3, .8)$
$count1 = 0\ for(jin1 : 3)$
$count1 = count1 + 1$
$lambda = lambda1[count1]$
$count = 0$
$Reg.err = 0$
$quant.err = 0$
$quant1.err = 0$
$for(iin1 : 100)\ \{$
$count = count + 1$
$far1 = simul.far(m = 60, n = 100, base = base.simul.far(24, 5),$
$d.rho = diag(c(0.45, 0.9, 0.34, 0.45)), alpha = diag(c(0.5, 0.23,$
$0.018)), cst1 = 0.05)$
$X = far1\S var$
$llambda = c(1 - lambda, lambda)$
$mu = c(0, 4)$
$sigma = c(1, 5)$
$epsilon = rnormmix(n, llambda, mu, sigma)$
$t = seq(0, 1, length = m)$
$Y < -0$
$for(iin1 : n)$
$Y[i] = 5 * integrate(splinefun(t, exp(X[, i])),$
$0, 1)\S value$
$Y < -Y + epsilon$

$nlearning = c(1:90)$
$ntest = c(91:100)$
$CURVES = t(X)[nlearning,]$
$TEST = t(X)[ntest,]$
$Response = Y[nlearning]$
$Resp.test = Y[ntest]$
$Method1 = funopare.knn.lcv(Response, CURVES, PRED = TEST, 0, 20, c(0,1), kind.of.kernel = "quadratic", semimetric = "deriv")$
$Method2 = funopare.quantile.lcv(Response, CURVES, PRED = TEST, 0, 20, c(0,1), alpha = c(0.05, 0.5, 0.95), kind.of.kernel = "quadratic", semimetric = "deriv")$
$Method3 = funopare.L1quantile.lcv(Response, CURVES, 0, 20, c(0,1), alpha = 0.5, PRED = TEST, kind.of.kernel = "quadratic", semimetric = "deriv")$
$Se.knn < -abs((Resp.test - Method1\S Predicted.values))Reg.err[count] = mean(Se.knn)$
$Se.quant < -abs((Resp.test - Method2\S Predicted.values[,2]))quant.err[count] = mean(Se.quant)$
$Se.quant1 < -abs((Resp.test - Method3\S Predicted.values))$
$quant1.err[count] = mean(Se.quant1)$
$abs.Reg.err[count1] = mean(Reg.err)$
$abs.quant.err[count1] = mean(quant.err)$
$abs.quant1.err[count1] = mean(quant1.err)$

## 4.2 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons traité l'estimation récursive fonctionnelle du quantile conditionnel. Dans la première partie, nous avons présenté les différentes approches non-paramétriques d'estimation du quantile conditionnel avec quelques résultas asymptotiques. Dans la deuxième partie, nous avons travallé sur des données fonctionnelles ergodiques et nous avons donné la vitesse de convergence presque complète des deux estimateurs récursifs (à noyau et à double noyaux) du quantile condtionnel dans les mêmes conditions. Dans la troisième partie, nous avons etabli la normalité asymptotique de l'estimateur à double noyaux récursifs du quantile conditionnel. Les détailles de la sumilation de la deuxième chapitre et est proposée dans la quatrième partie.

## 4.3 Perspectives

Pour conclure les travaux de cette thse, nous exposons dans ce qui suit, quelques développements futurs possibles en vue d'améliorer et d'étendre nos résultats.

L'estimation récursive du quantile conditionnel pour varibles réponse et explicatives fonctionnelles.

L'estimation récursive de la fonction de répartition conditionnelle et du quantile conditionnel pour des données de type spatial

L'estimation récursive de la fonction de répartition conditionnelle et du quantile conditionnel pour des données de type associes.

L'estimation récursive de la fonction de répartition conditionnelle et du quantile conditionnel pour des données de type tronqué.

L'estimation à noyau classique du quantile fonctionnel pour des données fonctionnelles ergodiques

La normalité asymptotic de l'estimateur à noyau classique du quantile condtionnelle pour des données fonctionnelles ergodiques.

Notre application ouvre un perspective naturel de notre travail est de faire une comparaison à l'aide de données simulées ou réelles par l'estimateur linéaire de la fonction quantile conditionnel en utilisant la méthode spline. Cette dernière méthode d'estimation a été devloppée par Cardot, Crambes et Sarda (2004)[21], ils ont utilisé le code de R suivant :

### La fonction *Mci.gcv*

#### Usage

Mci.gcv=function(Y,X,vecrho,k,q,m,alpha,eps,erreur).

#### Arguments

$Y$ :observations (max de O3 chaque jour),

$X$ :variable explicative :$n$ courbes discrétisées en $p$ points

vecrho :vecteur de paramètres de lissage de taille $r$

$k$ :nombre de noeuds îtem[]$q$ :degré des Bsplines

$m$ :ordre de dérivation dans la pénalisation

alpha :ordre du quantile

eps :quantité positive pour éviter un dénominateur nul

erreur :valeur d'arrêt de la boucle.

#### Valeurs

gcvf :vecteur des erreurs GCV selon les valeurs de $\rho$

tetaf :estimation du vecteur $\theta$ pour le $\rho$ optimal

psi :estimation de la fonction psi aux points de discrétisation

mini :min(gcv)

qu :estimation de la constante dans le modèle

residu1 :premier vecteur de résidus []residu2 :second vecteur de résidus

iter :nombre d'itérations

### Le programme

$Mci.gcv = function(Y, X, vecrho, k, q, m, alpha, eps, erreur)\ \ n = nrow(X)$
$p = ncol(X)$
$r = length(vecrho)$
$vtest = 10^5$
$gcv = matrix(0, nrow = r, ncol = 50)$
$rss = matrix(0, nrow = r, ncol = 50)$
$df = matrix(0, nrow = r, ncol = 50)$
$gcvf = matrix(0, nrow = r, ncol = 1)$
$valpha = rep(1, n) * alpha$
$res = Bspline.ini(t(X), k, q, m)$
$B = t(res\S A)$
$G = res\S G$
$D = cbind(matrix(1, nrow = n, ncol = 1), B)$
$K = rbind(matrix(0, nrow = 1, ncol = k + q + 1), cbind(matrix(0, nrow = k + q, ncol = 1), G))$
$W = matrix(0, n, n)$
$teta = matrix(0, k + q, 50)$
$residu1 = matrix(0, 50, 1)$
$residu2 = matrix(0, 50, 1)$
$beta = matrix(0, k + q + 1, 50)$
$initialisationdel'algorithme :$
$for(jin1 : r)$
$rho = vecrho[j]$
$Gamma = t(D)/ * /D/n + rho * K$
$H = D/ * /solve(Gamma)/ * /t(D)/n$
$rss[j, 1] = mean((Y - H/ * /Y)^2)$
$df[j, 1] = (1 - sum(diag(H))/n)^2$
$gcv[j, 1] = rss[j, 1]/df[j, 1]if(vtest > gcv[j, 1])$
$beta[, 1] = solve(Gamma)/ * /t(D)/ * /Y/n$
$residu1[1, ] = ((t(Y - D/ * /beta[, 1]))/ * /(Y - D/ * /beta[, 1]))/n + rho * t(beta[, 1])/ * /K/ * /beta[, 1]$
$residu2[1, ] = mean(abs(Y - D/ * /beta[, 1]) + (2 * alpha - 1) * (Y - D/ * /beta[, 1])) + rho * t(beta[, 1])/ * /K/be/ta[, 1]vtest = gcv[j, 1]\ \ vtest = 10^5$

$tape2del'algorithme : a = Y - D/*/beta[,1]$
$W = diag(as.vector((2*valpha*(a >= 0)+2*(1-valpha)*(a < 0))/sqrt(a^2+eps^2)))$
$for(jin1 : r)$
$rho = vecrho[j]Gamma = t(D)/*/W/*/D/n + rho*K$
$H = D/*/solve(Gamma)/*/t(D)/*/W/n$
$rss[j,2] = mean((Y - H/*/Y)^2)$
$df[j,2] = (1 - sum(diag(H))/n)^2$
$gcv[j,2] = rss[j,2]/df[j,2]$
$if(vtest > gcv[j,2])$
$beta[,2] = solve(Gamma)/*/t(D)/*/W/*/Y/n$
$residu1[2,] = ((t(Y - D/*/beta[,2]))/*/W/*/(Y - D/*/beta[,2]))/n + rho*t(beta[,2])/*/K/*/beta[,2]$
$residu2[2,] = mean(abs(Y - D/*/beta[,2]) + (2*alpha - 1)*(Y - D/*/beta[,2])) + rho*t(beta[,2])/*/K/*/beta[,2]$
$vtest = gcv[j,2]$
$vtest = 10^5$
$tapel + 1del'algorithme :$
$l = 2$
$while((l < 50)(max(abs(residu2[l,] - residu2[l-1,])) > erreur))$
$a = Y - D/*/beta[,l]$
$W = diag(as.vector((2*valpha*(a >= 0)+2*(1-valpha)*(a < 0))/sqrt(a^2+eps^2)))$
$for(jin1 : r)\ rho = vecrho[j]$
$Gamma = t(D)/*/W/*/D/n + rhoK$
$H = D/*/solve(Gamma)/*/t(D)/*/W/n$
$rss[j,l+1] = mean((Y - H/*/Y)^2)$
$df[j,l+1] = (1 - sum(diag(H))/n)^2$
$gcv[j,l+1] = rss[j,l+1]/df[j,l+1]$
$if(vtest > gcv[j,l+1])$
$beta[,l+1] = solve(Gamma)/*/t(D)/*/W/*/Y/n$
$residu1[l+1,] = ((t(Y - D/*/beta[,l+1]))/*/W/*/(Y - D/*/beta[,l+1]))/n + rho*t(beta[,l+1])/*/K/*/beta[,l+1]$
$residu2[l+1,] = mean(abs(Y - D/*/beta[,l+1]) + (2*alpha - 1)*(Y - D/*/beta[,l+1])) + rho*t(beta[,l+1])/*/K/*/beta[,l+1]$
$vtest = gcv[j,l+1]$
$if(residu2[l+1,] > residu2[l,])$
$beta[,l+1] = beta[,l]$
$residu2[l+1,] = residu2[l,]$
$vtest = 10^5$
$l = l + 1$

$list(gcvf = gcv[,l], tetaf = beta[2 : (k + q + 1), l], psi = (res\mathrm{B})/*/beta[2 : (k + q + 1), l], mini = min(gcv[,l]), qu = beta[1, l], residu1 = residu1, residu2 = residu2, iter = l)$

# Chapitre 5

# Bibliographie générale

A. Amiri (2009). Sur une famille paramétrique d'estimateurs séquentiels de la densité pour un processus fortement mélangeant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 347, 309-314.

A. Amiri (2012). Estimateurs fonctionnels récursifs et leurs applications à la prévision,thèse de doctorat,académie d'aix-marseille univercité d'AVignion et des payes de vaucluse.Ecole Doctorale ED 536 Sciences et Agrosciences Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Géométrie (EA 2151).

A. Amiri, Ch. Cromb and B. Thiam (2014),Recursive estiation of no-parametric regression with functional covariate, Computational statistics Data analysis 69, pages 154-172.

C. Apostel, C. Preda. Méthode PLS pour l'analyse des données fonctionnelles, Rev.Roumaine Math.Pûres et Appl, 55 (2010), 6, 431-445.

J. Averous and M. Meste (1997). Median balls : an extension of the interquartile intervals to multivariate distributions. Journal of Multiva- riate Analysis, 63, 222-241.

J. Beirlant, G. Dierckx et A. Guillou (2005). Estimation of the extreme value index and regression on generalized quantile plots. Annals of Statistics, 11(6) :949â970.

J. Beirlant, A. Gannoun et E. Matzner-Lober (1998). Proprétés asymptotiques des estimateurs des quantiles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 326(5) :611â 614.

J. Beirlant et G. Matthys (2003). Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. Statistica Sinica, 13(3) :853â880.

M. Benko, W. Härdle and A. Kneip (2005). Common functional principal components. SFB 649 Economic Risk Discussion Paper, 2006-010.

F. Benziadi, A. Laksaci et F. Tebboune (2015). Recursive kernel estimate of the conditional quantile for functional ergodic data. Communications in statistics : Theory and Methods,DOI :10.1080/03610926.2014.901364.(2015).

P. Besse, H. Cardot and F. Ferraty (1997). Simultaneous nonparametric regression of unbalanced longitudinal data. Computational Statistics and Data Analysis, 24, 255-270.

P. Besse, H. Cardot, et D. Stephenson. Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. Scandinavian Journal of Statistics, 4 :673à 688, 2000.

P. Besse, and J.O. Ramsay (1986). Principal components analysis of sampled functions. Psychometrika, 51, 285-311.

P.K. Bhattacharyya et A.K. Gangopadhyay (1990). Kernel and nearest-neighbor estimation of a conditional quantile. Annals of Statistics, 8(3) :1400â1415. 49.

V.I. Bogachev, (1999). Gaussian measures. Math surveys and monographs, **62**, Amer. Math. Soc.

D. Bosq, *Linear Processes in Function Spaces : Theory and Applications,* Lecture Notes in Statistics, 149, Springer, 2000.

M. Buchinsky (1998). Recent Advances in Quantile Regression Models : A Practical Guideline for Empirical Research, journal of Human Resoureces, 1998, vol. 33, issue 1, pages 88-126 .

Z. Cai (2002). Regression quantiles for time series data.Economitric Theory, **18**, 169-192.

Z. Cai et X.Wang. (2006).*Non parametric methodes for estimating conditional VAR and expected shortfull,Wise Working Paper Series WISEWP0604,Wang Yanan Institute for Economic Studies, Xiamen Univercity.*

H. Cardot (2000). Nonparametric estimation of smoothed principal components analysis of sampled noisy functions. Nonparametric Statistics, 12, 503-538.

H. Cardot (2006). Conditional functional principal components analysis. Scandinavian Journal of Statistics, to appear.

H. Cardot, C. Crambes and P. Sarda, (2004). Estimation spline de quantiles conditionnels pour variables explicatives fonctionnelles, *C. R. Math. Paris,***339**, 141-144.

H. Cardot, C. Crambes and P. Sarda (2005). Quantile regression when the covariates are functions. Journal of Nonparametric Statistics, 17, 841-856.

H. Cardot, F. Ferraty and P. Sarda (2003). Spline estimators for the functional linear model. Statistica Sinica, 13, 571-591.

P. Chauduri (1991). Nonparametric estimates of regression quantiles and their local Bahadur representation. Annals of Statistics, 19(2) :760â777.

V. Chernozhukov (1998). Nonparametric extreme regression quantiles. Rapport technique, Department of Economics, Stanford University.

Y.S. Chow and H. Teicher(1998), Probability theory ,ended, Springer, New York.

G. Collomb (1980). Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 291 :427â430. 45, 46, 88, 92, 114.

G. Collomb (1981). Estimation non-paramétrique de la régression : Révue bibliographique. Int. Statist. Rev. 49 (1), 75-93.

G. Collomb(1981). From nonparametric regression to nonparametric prediction : Survey of the mean square error and original results on the predictogram, Lecture notes in statistcs 16, 182-204.

G. Collomb (1984). Propriétés de convergence presque compl'ete du prédicteur à noyau, Z. Wahrschein. Verw. Get. 66, 44

C. Crambes (2005). Total least squares for functional data. Invited paper in ASMDA 2005 Proceedings, 619-626.

C. Crombes (2007). RÃ©gression fonctionnelle sur composantes principales pour variable explicative bruitÃ©e, Science Direct,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 519â522.

C. Crombes, H. Cardot et P. Sarda (2004), Spline estimation of conditional quantiles for functional covariates,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

A. Cuevas, M. Febrero and R. Fraiman (2002). Linear functional regression : the case of a fixed design and functional response. Canadian Journal of Statistics, 30, 285-300.

S. Dabo-Niang, A. Laksaci, (2011). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Comm in Statist. Theory & Methods*, **41** , 1254-1268.

S. Dabo-Niang and B. Thiam, (2010). $L_1$ consistency of a kernel estimate of spatial conditional quantile. *Statist. Probab. Lett*, **80**, 1447-1458.

J. Dauxois et A. Pousse (1976). Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

J. Dauxois, A. Pousse and Y. Romain (1982). Asymptotic theory for the principal component analysis of a random vector function : some applications to statistical inference. Journal of Multivariate Analysis, 12, 136-154.

P. Deheuvels (1973). Sur l'Estimation séquentielle de la densité, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A, 276, 1119-1121.

P. Deheuvels (1974). Estimation séquentielle de la densité, Thèse de doctorat, uni- versité Paris .

P. Deheuvels (1974). Conditions n'ecessaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité, C. R. Acad. Sci., Paris, 278, 1217-1220.

M. Delecroix and A.C Rosa (1996). Nonparametric estimation of a regression function and its derivatives under an ergodic hypothesis. *J. Nonparametr. Statist.*, **6**, 367-382.

J.C. Deville (1974). Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. Annales de l'I.N.S.E.E., 1, 3-101.

L. Devroye (1979). On the pontwise and the integral convergence of recursive kernel estimates densities, Util. Math. 15, 113-128.

L. Devroye (1981). On the almost everywhere convergence of nonparamertic regression fuction estimates, Ann. Statist. 9, 1310-1319.

L. Devroye, L. Györfi and G. Lugosi (1996). A probabilistic theory of pattern recognition. Applications of Mathematics, Springer, New York.

M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008). Asymptotic results of a nonparametric conditional quantile estimator for functional time series, *Comm in Statist. Theory & Methods*, **37**, 2735-2759.

M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, (2008). Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional quantile in the normed space, *Far East J. Theoretical Statist*, **25**, 15–38.

J. Fan, T.C. Hu and Y. Truong (1994). Robust nonparametric function estimation. Scandinavian Journal of Statistics, 21, 433-446.

F. Ferraty (2010), High dimensional data : a fascinating statistical challenge.J.Multivariate Anal.101,305-306.

F. Ferraty , A. Goia, P. Vieu (2002).Functional nonparamrtcic model for time series.*TEST*, **11**,317-344

F. Ferraty, A. Laksaci and P. Vieu, (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, *Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, **9**, 47–76.

F. Ferraty, A. Rabhi et P. Vieu (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic el niño phenomenon. Indian Journal of Statistics, 67(2) :378â398. 48, 124.

F. Ferraty et P. Vieu (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 330 :403â 406. 46.

F. Ferraty and P. Vieu (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data. Computational Statistics, 17, 545-564.

F. Ferraty and P. Vieu (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. Special issue in honour of Stan Azen : a birthday celebration. Computational Statistics and Data Analysis, 44, 161-173.

F. Ferraty et P. Vieu (2004), Nonparametric models for functional data with applications in regression, time series prediction and curve discrimination. *Nonparametriqc Statistics*,**16**,111-125.F.

F. Ferraty and P. Vieu (2006). Nonparametric functional data analysis : theory and practice. Springer, New York.

A. Gannoun (1990). Prédiction non paramétrique de la médiane conditionnelle : médianogramme et méthode du noyau. Application à la prévision des processus. Ann. I.S.U.P. XXXV, 1, 11-22.

A. Gannoun, J. Saracco and K. Yu, (2003). Nonparametric prediction by conditional median and quantiles, *J. Statist. Plann. Inference* **117**, 207–223.

L. Gardes, S.Girard et A. Lekina (2010). Functional nonparametric estimation of conditional extreme quantiles. Journal ofMultivariate Analysis, 101(2) :419â433.

M. Garrido (2002). Modélisation des événements rares et estimation des quantiles extrêmes, méthodes de sélection de modèles pour les queues de distribution. Thèse de doctorat, Université Grenoble .

W. Greblecki and M. Pawlak (1987). Necessary and sufficient consistency conditions for a recursive kernel regression estimate, J. Multivariate Anal. 23, 67-76.

P. Hall and C. Heyd (1980), Martingal limit theory and its application. Academic Press, New York.

J.D. Hart (1991). Comment to "choosing a kernel regression estimator". Statistical Sciences, 6(4) :425â427. 46.

X. He and P. Shi (1994). Convergence rate of B-spline estimators of nonparametric conditional quantile functions. Nonparametric Statistics, 3, 299-308.

E. Isogai (1984). Joint asymptotic normality of nonparametric recursive density estimators at a finite number of distinct points, J. Japan Statist. Soc. 14 (2), 125- 135.

E.Isogai (1994). A Berry-Esseen-type bound for recursive estimators of a density and its dÂ´erivatives, J. Statist. Plann. Inference 40, 1-4.

M.A. Knefati, A. Oulidi, M. Delecroix et B. Abdous (2011). Régression Quantile : comparaison du quelques estimateurs non paramétriques à noyau du quantile conditionnel. scds 2011.

A. K.J. Kneip and Utikal (2001). Inference for density families using functional principal component analysis. Journal of the American Sta- tistical Association, 96, 519-542.

R. Koenker (2005). Quantile regression. Econometric Society Monographs, Cambridge.

R. Koenker and G. Bassett (1978). Regression quantiles. Econometrica, 46, 33-50.

R. Koenker and S.Portnoy (1992). Nonparametric estimation of conditional quantile. L1-Statistical analysis and related methods, pages 217â229. ed Y. Dodge, Elsevier :

Amsterdam.

U. Kregel (1985). Ergodic Theorems, Walter de Gruyter et C0., Berlin, 1985.

A. Krzyżak and PawlakM. (1984). Almost everywhere convergence of a recursive regression function estimate and classification, IEEE Trans. Inform. Theory. 30, 91- 93.

A. Kržyżak (1992). Global convergence of the recursive kernel regression estimates with applications in classification and nonlinear system estimation, IEEE Trans. In- form. Theory 38, 1323-1338.

N. Laïb, and D. Louani, (2010). Nonparametric kernel regression estimate for functional stationary ergodic data : Asymptotic properties. *J. Multivariate Anal.*, **101**, 2266-2281.

N. Laïb, and D. Louani, (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data *J. Statist. Plan. and Inference* , **141**, 359-372.

N. Laïb, and and E. Ould-Saïd, (2000). A robust nonparametric estimation of the autoregression function under an ergodic hypothesis. *Canad. J. Statist.*, **28**, 817-828.

A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2009). $L^1$-norm kernel estimator of conditional quantile for functional regressors : consistency and asymptotic normality. *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 1065-1073.

A. Laksaci, M. Lemdani and E. Ould-Saïd, (2011). Asymptotic results for an $L^1$-norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology. *Sankhya*, **A 73** 125–141.

M. Lejeune and P. Sarda (1988). Quantile regression : a nonparametric approach. Computational Statistics and Data Analysis 6, 229-239.

Liang and J. Baek (2004). Asymptotic normality of recursive density estimates under some dependence assumptions, Metrika 60, 155-166.

E. Masry(1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes, IEEE Trans. Inform. Theory 32, no 2, 254-267.

E. Masry and L. Györfi (1987). Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes, J. Multivariate Anal. 22, 79- 93.

F. Mosteller and J. Tukey (1977). Data analysis and regression : a se- cond course in statistics. Addison-Wesley, Reading.

H.G. Müller (2005). Functional modeling and classi
cation of longitudinal data. Scandinavian Journal of Statistics, 32, 223-240.

H.G. Müller and U. Stadtmüller (2005). Generalized functional linear models. Annals of Statistics, 33, 774-805.

E. Nadaraya. (1964). On estimating regression, Theory Probab. Appl. 9, 141-142.

S. Niang (2003). Kernel density estimator in an infinite dimension with a rate of convergence in the case of diffusion processes.*Applied Math.lettres*, IN PRINT.

J.O. Ramsay (1982). When the data are functions. Psychometrika, 47, 379-396.

J.O. Ramsay and C.J. Dalzell (1991). Some tools for functional data analysis. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 53, 539-572.

J. Ramsay et B.W. Silverman (1997). Functional Data Analysis. Springer Series in Statistics. Springer Verlag, June 1997.

J.O. Ramsay, B.W. Silverman (2002). *Applied functional data analysis ; Methods and case studies.* Springer-Verlag, New York.

J.O. Ramsay, B.W. Silverman (2005). *Functional Data Analysis,* Second Edition, Springer, New York, 2005.

C.R. Rao (1958). Some statistical methods for comparison of growth curves. Biometrics, 14, 1-17.

G.G. Roussas (1992). Ecxact rates of almost sure convergence of a recursive kernel estimate of a probability density function : Application to regression and hazard rate estimation, J. Nonparametr. Stat. 1, 171-195.

G.R. Roussas, L.T. Tran, (1992) . Asymptotic normality of the recursive kernel regression estimate under dependence conditions. *Ann. Statist.*, **20**, 98–120.

M. Samanta, (1989). Non-parametric estimation of conditional quantiles, *Statist. Probab. Lett.*, **7**, 407–412.

C.J. Stone (1977). Consistent nonparametric regression. Annals of Statistics, 5(4) :595â 645. 45, 50.

C.J. Stone(1982). Optimal rates of convergence for nonparametric models. Annals of Statistics, 10, 1040-1053.

W. Stute (1986). Conditional empirical processes. Annals of Statistics, 14(2) :638â647. 44, 45, 46.

L.T. Tran (1989). Recursive density estimation under dependence. IEEE Trans. In- form. Theory 35 (5), 1103-1008.

Y.K. Truong (1989). Asymptotic properties of kernel estimators based on local medians. Annals of Statistics, 17(2) :606â617. 49.

A. Tsybakov (1986). Robust reconstruction of functions by the local-approximation method. Problems of Information Transmission, 22(2) :133â146. 50.

L.R. Tucker (1958). Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. Psychometrika, 23, 19-23.

J.W. Tukey (1961). Curves as parameters, and touch estimation. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium onMathematical Statistics and Probability, 1 :681â694. 48.

H. Walk (2001). Strong universal pointwise consistency of recursive regression estimates, Ann. Inst. Statist. Math. 53 (4), 691-707.

G.S Watson (1964). Smooth regression analysis. Sankhya, Series A, 26, 359-372.
Wegman, E.J. and Davies, H. I. (1979). Remarks on some recursive estimators of a probability density, Ann. Statist. 7 (2), 316-327.

C. Wolverton and T.J. Wagner (1969). Recursive estimates of probability densities, IEEE Trans. Syst. Cybern. 5, 307-308.

F. Yao, H.G. Müller and J.L. Wang (2005). Functional linear regression analysis for longitudinal data. Annals of Statistics, 33, 2873-2903.

K.Yu et M.C.Jones (1998). Local lineaire Quantile Regression.J.Amer.Statist.Assoc.**93**, 228-237.

## Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'estimation non paramétrique récursive du quantile conditionnel d'une variable aléatoire réelle $Y$ conditionnée par une variable aléatoire fonctionnelle $X$ prenant des valeurs dans un espace semi-métrique. On considère deux estimateurs, le premier est donné par l'inversion de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de répartition conditionnelle et le second est déterminé par l'approche robuste. Dans la première partie, on donne quelques méthodes d'estimations du quantile conditionnel et quelques résultats asymptotiques. Dans la deuxième partie, on étudie la convergence presque complète et sa vitesse des deux estimateurs récursifs du quantile conditionnel lorsque la variable explicative est de type ergodique. Dans les mêmes conditions et dans la troisième partie, on présente la normalité asymptotique de second estimateur (déterminé par l'approche robuste) du quantile conditionnel . Une étude de simulation est présentée dans la quatrième partie. Le sinquième chapitre est consacré à une bibliographie générale.



## Summary

In this thesis, we study the recursive kernel estimator of the conditional quantile of a scalar response variable $Y$ given a random variable (rv) $X$ taking values in a semi-metric space. Two estimators are considered. While, the first one is given by inverting the double kernels estimate of the conditional distribution function, the second estimator is obtained by using the robust approach. We establish the almost complete consistency of these estimates when the observations are sampled from functional ergodic process. In section three, we study the asymptotic normality of the second estimate (robust approach) of conditional quantile function, under a stationary ergodic process assumption. In section four we presente a simulation studie. The fifth chapter is devoted to a general bibliography.