N° d'ordre :

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DJILLALI LIABES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

THESE DE DOCTORAT

Présentée par BADREDDINE AZZOUZI

Spécialité : Mathématiques
Option : Probabilités et Statistiques.

Intitulée

ESTIMATION PARAMÉTRIQUE DE CERTAINES CARACTÉRISTIQUES POUR UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF. THÉORIE ET APPLICATION

Soutenue le 17 Décembre 2015
Devant le jury composé de :

Président :		
Dr. MECHAB Boubaker	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de S.B.A*
Examinateurs :		
Dr. DALI-KORSO Malika	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de Tlemcen*
Dr. KANDOUCI Abdeldjebbar	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de Saida*
Dr. MADANI Fethi	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de Saida*
Directeur de thèse :		
Dr. RABHI Abbes	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de S.B.A*
Co-Directeur de thèse :		
Dr. BENAISSA Samir	*Maître de conférence -A-*	*Univ. de S.B.A*
Année universitaire :	*2014-2015*	

Remerciements

C'est un plaisir pour moi que de débuter ce manuscrit en exprimant ma gratitude aux personnes ayant comptées pendant les années de ma thèse. J'espère n'oublier personne, mais si c'était le cas, je demande par avance aux intéressés de me le pardonner.

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné les forces qui m'ont permis de dépasser toutes les difficultés pour aboutir enfin à la réalisation de ce modeste travail.

En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Monsieur RABHI Abbes et BENAISSA Samir qui ont su me guider et me faire découvrir la voie de recherche . Merci à RABHI Abbes Il m'a réitéré sa confiance en acceptant d'encadrer ma thèse et je lui en suis très reconnaissant. Merci aussi à BENAISSA Samir qui a été d'un véritable soutien pendant ces années et sans qui cette expérience n'aurait pu avoir lieu.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

J'exprime ma trés grande reconnaissance à Boubaker MECHAB de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Messieurs Les Professeurs MADANI Fethi , KANDOUCI Abdeldjebbar et Mme. DALI-KORSO Malika ont accepté de juger mon travail et de me faire part de leurs remarques, je les remercie vivement de l'intérêt qu'ils portent ainsi à mon travail.

Un grand merci au Monsieur OUMANSOUR Abderrahmane pour son accueil et ses orientations malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie très amicalement tous mes collègues et mes amis qui m'ont soutenus et avec qui nous avons partagé des moments inoubliables.

Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à tous mes enseignants.

Je ne pourrais clôturer ces remerciements sans me retourner vers ma famille, mes parents, mes sœurs et mes frères. Vous qui m'avez toujours soutenue et poussée en avant faisant de mes doutes mes objections ; cette thèse, je suis fière de pouvoir vous l'offrir. Enfin à l'ensemble des présents à cette soutenance, j'adresse de tout mon cœur mes remerciements.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction général

Le principal souci en statistique est la modélisation pour expliquer le comportement de phénomènes aléatoires, et comprendre le hasard et réduire les incertitudes. Les processus aléatoires ont ainsi fourni des modèles pour analyser de nombreuses données issues de l'économie (time-series analysis of imports, exports and other economic variables , 1971), la biologie (the autocorrelation curves of schizophrenic brain waves and the power spectrum, 1960), la sociologie, la météorologie (time-series regression of sea level on weather, 1968)... En particulier, de nombreuses méthodes d'estimation ont été développées pour les séries chronologiques. Plusieurs méthodes ont plus récemment permis d'étudier des processus indexés par des espaces fonctionnel autres que l'espace de dimension fini.

Sont ces questions de statistiques en dimension infinie au centre d'une dynamique autour des statistiques fonctionnelles (voir notamment, Bosq D.(2000),...). leur motivation principal sont en particulier, l'estimation et la prévision à temps continu. Le fait de considérer des observations dans des espaces fonctionnels plusieurs auteurs se sont intéressé : Bosq (1981), Pumo (1993), Merlevéd F.(1995), Mourier (1953), Rozanov (1971) Allam-Mourid (2001) ,.... De nombreuses applications ont été menées dans différents domaines : Consommation d'électricité – Prévision du nombre annuel de voyageurs – Prévision d'un trafic routier a un carrefour – Etude des électrocardiogrammes de malades ... Ce qui amène à considérer la classe des processus autorégressifs-moyenne mobiles $ARMA(p, q)$ à valeurs dans un espace Banach ou Hilbert , qui généralise en dimension infinie les modèles classiques.

Les problèmes de la statistique impliqués dans la modélisation par des variables aléatoires à valeurs dans un espace de dimension infinie connaît un intérêt croissant dans les statistiques paramétriques et non paramétriques. L'étude des modèles non paramétrique et beaucoup plus récents que ceux des cas paramétrique. Pour le cas des modèles linéaires lorsque les observations sont à valeurs dans les espaces de dimension finie (habituellement $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2..$) il ya un grand nombre de travail sur le problème de l'estimation fonctionnelle non paramétrique par exemple : Ramsay et Silvrman (2002) , Bosq (2000) ou Mourid (1999, 2002). En statistique, toute quantité calculable à partir des observations est appelée estimateur. L'estimation d'une telle quantité relève donc des statistiques non paramétriques, qui ont pour but d'estimer une fonction, plutôt qu'un paramètre de$\mathbb{R}^d$, il s'agit ensuite de mesurer la qualité de cet estimateur.

Cette thèse a pour objet l'étude de certaines problème lié à la statistique des processus linéaires possédant une représentation autorégressive-moyenne mobile dans le cas indépendant et le cas dépendant. Ce qui amène à étudier le comportement asymptotique d'une moyenne mobile X_k dans le cas mélangeant, en effet nous nous proposons d'étendre certains résultats existants pour ce processus de cas indépendant au cas $\psi - m\acute{e}langeant$. Sous les hypothèses d'indépendance, de nombreux résultats ont été obtenus pour le processus moyenne mobile X_k par exemple, Ibragimov (1962) a établi le théorème central limite, Burton et Dehling (1990) ont obtenu un principe de grandes déviations pour X_k et Liet al. (1992) ont obtenu le résultat suivant sur la convergence complète. Sous l'hypothèse de la dépendance, peu de résultats pour X_k sont connus, Zhang (1996) a étendu un résultats importants de cas $i.i.d$ au ces $\phi - m\acute{e}langent$ et Baek, Kim, et Liang (2003) ont examiné la convergence complète des processus moyenne mobile X_k sous l'hypothèse Négativement Associé .

Dans cette thèse nous présentons des résultats sur un modèle linaire fonctionnel (ARH(1)) obtenus par D.bosq (2000) ,dont nous nous consacrons aux résultats d'estimation des operateurs linéaires lié a ce modèle, et leurs comportement asymptotique.

1.1 Variables fonctionnelles

La statistique fonctionnelle occupe désormais une place importante dans la recherche en statistique. Il s'agit de la modélisation statistique des données qui sont des courbes supposées observées sur toutes leurs trajectoires. Ceci est pratiquement possible en raison de la précision des appareils de mesures modernes et de l'importante capacité de stockage qu'offrent les systèmes informatiques actuels. Il est facile d'obtenir une discrétisation très fine d'objets mathématiques tels que des courbes, surfaces,..... Ce type de variables se retrouve dans de nombreux domaines, comme la météorologie, la chimie quantitative, la biométrie, l'économétrie ou l'imagerie médicale. Parmi les ouvrages de référence en la matière, on peut citer les monographies de Ramsay et Silverman (1997) pour les aspects appliqués, Bosq (2000) pour les aspects théoriques, Ferraty et Vieu (2006) pour une étude non paramétrique et Ferraty et Romain (2011) pour des développements récents.

1.2 Cadre général de la thèse

Notre thèse se présenté en quatre parties :

La première partie (chapitre 2), nous présentons des définitions et nous rappelons les modèles et quelques propriétés des processus $MA(q)$, $AR(p)$ et $ARMA(p,q)$. Ainsi, nous considérons deux classes d'estimateurs(estimateurs des moindres carrées et Maximum de vraisemblance) pour des modèles statistiques généraux .

La seconde partie (chapitre 3) nous présentons des résultats sur les processus autorégressifs d'ordre supérieur à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $ARB(p)$ obtenus par T.Mourid dans sa thèse. sous une condition sur le polynôme d'auto-régression , équivalente à une condition sur le rayon spectral d'un opérateur matriciel, on a l'existence d'un processus autorégressifs Banachiques strictement stationnaire. Nous donnons les propriétés principales des opérateurs de covariance et de covariances croisée d'un processus ARB(p).

La troisième partie (chapitre 4) nous nous intéressons à l'estimation et la prévision d'un processus autorégressifs d'ordre un dans un espace de Hilbert H directement issu des travaux de (D. Bosq). En rappelant les principaux résultat sur les processus linéaires hilbertiens, avec ses propriétés asymptotique. Et nous traitons l'estimation des opérateurs d'auto-covariance et d'Auto-corrélation et nous établissons leurs propriétés asymptotiques (théorèmes limites : loi des grands nombres, convergence...).

La dernière partie (qui contient les chapitres 5 et 6), nous démontrons la convergence complète et la Convergence complète du moment d'une moyenne mobile i.e. :

$$\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k}Y_i/n^{1/t}; n \geq 1\}$$

dans certaines conditions convenables. c.à.d : dans le cas mélangenat (le cas de depedance de $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$), dont le corps est constitué par les articles publiés “ Complete Convergence of Moving Average Processes Withψ-Mixing Sequences. ”[2].

1.3 Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse aux méthodes d'estimation paramétriques de certains caractéristiques pour un processus Autorégressifs ainsi qu'à leurs applications ce qui amène à étudier le comportement asymptotique d'une Moyenne mobile de ce processus dans le cas mélangeant. Nous introduisons dans un premier chapitre une famille d'estimateurs et quelques propriétés des processus $ARMA$. Ensuite nous représentons des résultats sur les processus Autorégressifs Banachique $ARB(p)$. Puis nous intéressons à l'estimation et la prévision d'un processus Autorégressifs dans un espace de Hilbert. Enfin nous démontrons quelque mode de convergence d'une Moyenne mobile dans le cas $\psi - mélangeant$.

1.4 Summary

We interested in this thesis to parametric estimation methods for a certain characteristic autoregressive processes and their applications which brings to study the asymptotic behavior of a moving average of this process in the mixing case. We introduce in the first chapter a family of estimators and some properties of $ARMA$. Then we represent the result on Banach autoregressive process $ARB(p)$. Then we are interested in estimating and predicting a autoregressive process in a Hilbert space. Finally we show how some convergence of moving average, in $\psi - mixing$ it appropriat.

1.5 Liste des travaux

Publications

1. AZZOUZI B., RABHI A., BENAISSA S.(2015) : Complete Convergence of Moving Average Processes With ψ-Mixing Sequences. International Journal of Statistics and Economics. Vol. 16, Issue 2, 1-6.
2. Complete Moment Convergence of Moving Average Processes Under $\psi-$Mixing Assumptions, (soumis.)

Communications

1. « 8th World Congress in Probability and Statistics», July 9-14 2012, Istanbul, Turkey :" Parametric estimation of moving average the ML method"
2. «Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena», 2013 22 - 29 June 2013, Gallipoli (Italy).
3. Roman Summer School and Workshop "KAM theory and dispersive PDE's" , September 1-11 2014 ,University of Roma "La Sapienza" (Italy).

Chapitre 2

Généralités sur les processus linéaires et estimateurs paramétriques

Dans ce chapitre nous présentons des définitions et nous rappelons les modèles et quelques propriétés des processus MA(q), AR(p) et ARMA(p,q). Ainsi, nous considérons deux classes d'estimateurs (estimateurs des moindres carrées et Maximum de vraisemblance) pour des modèles statistiques généraux .

Introduction

La théorie des séries temporelles (ou chronologiques) est appliquée de nos jours dans des domaines aussi divers que l'économétrie, la médecine ou la démographie, pour n'en cité qu'une petite partie. Une série chronologique est une suite de données formée d'observations au cours du temps : l'évolution du nombre de voyageurs utilisant le train, à l'accroissement relatif mensuel de l'indice des prix ou encore à des phénomènes naturels (comme le nombre de taches solaires). La définition mathématique d'une série chronologique est la donnée d'une famille de variables aléatoires $(X(t), \quad t \in T)$ définie sur un espace de probabilité, où T est un intervalle de temps qui est discret (dans ce cas T= $\{$1,2,3,. . . ,n $\}$).

Deux articles en 1927 ont ouvert une étude sur les processus auto-égressifs et les moyennes mobiles : l'article de Yule[69] et celui de Slutsky[62] . Yule a introduit dans la littérature les modèles autorégressifs, Les processus introduits par Yule deviendront les processus AR(p) et ceux introduits par Slutsky les processus MA(q). L'analogie entre les deux processus sera même poussée plus loin lorsqu'il sera montré que les processus AR(p) et MA(q) sont respectivement des processus MA(∞) et AR(∞), sous certains conditions. Plus généralement on peut montrer que tout AR(p) peut avoir une représentation MA(1) et de manière duale, en peut exprimer aussi toute MA(q) comme un AR(∞).

2.1 Processus stationnaires

Définition 2.1.1. le processus $(X(t), \quad t \in T)$ est dit strictement ou fortement stationnaire si pour toute partie définie $(t_2, t_2, ..., t_n) \in T$ et pour tout $s > 0$on a :

$$\mathscr{L}(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, ..., X_{t_n+s}) = \mathscr{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$$

où$\mathscr{L}(Y)$ désigne loi de probabilité de Y.

Un processus $(X(t), t \in T)$ est dit faiblement stationnaire (ou stationnaire) si
i) $E(X_t) = m < \infty \ \forall t$ (indépendant de t)
ii) $E({X_t}^2) < \infty \ \forall t$
iii) $cov(X_{s+h}, X_{t+h}) = cov(X_s, X_t) \ \forall t, s, h$

Lemme 2.1.2. *Si* (X_t) *est fortement stationnaire et* $E({X_t}^2) < \infty$*, alors* X_t *est faiblement stationnaire. La réciproque est fausse en général.*

Démonstration. Si (X_t) est fortement stationnaire alors
$\mathscr{L}(X_t) = \mathscr{L}(X_{t'})$ et donc $E(X_t) = E(X_{t'})$
d'autre part, on a aussi $\forall t, s, h \in T$
$\mathscr{L}(X_t, X_s) = \mathscr{L}(X_{t+h}, X_{s+h})$ .Donc $cov(X_t, X_s) = cov(X_{t+h}, X_{s+h})$
Donc $X_t$est faiblement stationnaire . □

2.1.1 Fonction d'auto-covariance et fonction d'auto-corrélation

Pour un processus (X_t) faiblement stationnaire on definit :
i) la fonction

$$\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t+h}) \quad h \in \mathbb{Z}$$

dite fonction d'autocovariance de processus (ACVF).
ii) la fonction

$$\rho_X(h) = \gamma_X(h)/\Upsilon_X(0)$$

est dite fonction d'autocorrelation (ACF)

Propriétés :

1. $\gamma_X(0) = {\sigma_X}^2$ et $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$
2. $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$
3. $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}, \quad t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma_X(t_i - t_j) \geq 0$

Démonstration. Supposons que $E(X_t) = 0$. On a :
1. $\gamma_X(0) = var(X_t) = {\sigma_X}^2 \geq 0$ et par l'inegalité de Cauchy-Shwartz :

$$|\gamma_X(h)| = |E(X_t X_{t+h})| \leq (E({X_t}^{\mathbf{2}}))^{1/2} (E({X_{t+h}}^{\mathbf{2}}))^{1/2} = E({X_t}^{\mathbf{2}}) = \gamma_X(0)$$

2. $\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t+h})$, on pose $t = t_0 - h$

$$\gamma_X(h) = cov(X_{t_0-h}, X_{t_0}) = cov(X_{t_0}, X_{t_0-h}) = \gamma_X(-h)$$

3. $0 \leq var(\sum_{j=1}^{n} a_j X_{tj}) = E(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j X_{ti} X_{tj}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma_X(t_i - t_j)$.

Dans la classe des processus stationnaires il existe des processus particuliers qui sont les processus bruit blanc (White noise). $\square$

Définition 2.1.3. Une suite de variable aléatoires (ε_t) constitue un bruit blanc faible (resp fort) si :

$$\begin{array}{l} E(\varepsilon_t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \\ E({\varepsilon_t}^{\mathbf{2}}) = \sigma^{\mathbf{2}} \quad \textit{est constante strictement positive} \\ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \ \textit{si} \ t \neq s \ (\textit{resp} \ \varepsilon_t \ \textit{sont iid}) \end{array}$$

Notation. :
Si (ε_t) un bruit blanc faible gaussien on notera $(\varepsilon_t) \hookrightarrow WN(0, \sigma^2)$
Si (ε_t)est bruit blanc fort gaussien $(\varepsilon_t) \hookrightarrow IID(0, \sigma^2)$

2.2 Processus linéaires

Deux exemples importants dans la classe de processus linéaires sont les processus autorégressifs (AR) et les processus moyennes mobiles (moving average MA). Les processus ARMA sont des généralisations de MA et AR et sont très importants dans la modélisation des séries chronologique

Définition 2.2.1. Une série temporelle $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$est un processus linéaire si elle admet une représentation

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad pour\ toutt, (\varepsilon_t) \hookrightarrow WN(0, \sigma^2)\ et \sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$$

on definit B l'opérateur du retard sur une suite (Y_t) par :

$$BY_t = Y_{t-1} \qquad et \qquad B^j Y_t = Y_{t-j}$$

le processus linéaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ peut s'écrire

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t \quad avec \quad \Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$$

Proposition 2.2.2. *Soit (X_t) un processus stationnaire centré et de fonction d'autocovariance $\gamma_X(.)$ et tel que $\sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$*

alors

$$\Psi(B)X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j X_{t-j}$$

où la série converge absolument (en prob) et en moyenne quadratique . Si $Y_t = \Psi(B)X_t$ alors le processus (Y_t) est stationnaire de centré et de fonction d'autocovariane

$$\gamma_Y(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \Psi_k \gamma_x(h - j + k)$$

Démonstration. : Des conditions sur le processus (X_t) on a :

$$E(X_t) = 0, \quad var(X_t) = \gamma_x(0) = \sigma^2 = E(X_t{}^2).$$

d'autre part,

$$E(\sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j||X_{t-j}|) = E(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |\Psi_j||X_{t-j}|)...(1)$$

d'après le théorème de convergence monotone

$$(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |\Psi_j| E(|X_{t-j}|) < \infty$$

en appliquant le critère de Cauchy

$$E|\sum_{j=0}^{p}\Psi_j X_{t-j}-\sum_{j=0}^{q}\Psi_j X_{t-j}|^2 = E|\sum_{j=p}^{q}\Psi_j X_{t-j}|^2 = \sum_{j=p}^{q}\sum_{k=p}^{q}\Psi_j\Psi_k E(X_{t-j}X_{t-k})..(2)$$

car

$$(\sum_{i=0}^{n}a_j)^2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_j a_i$$

$$(2)\leq E({X_t}^2)(\textstyle\sum_{j=p}^{q}|\Psi_j|)^2 \to 0qdp, q\to\infty$$

$$car \textstyle\sum_{j=p}^{q}|\Psi_j| < \infty.$$

$\Psi(B)Y_t$ converge en moyenne quadratique. Si S désigne la limite de moyenne quadratique donc d'après le Lemme de FATTOU

$$E|S-\Psi(B)X_t|^2 = E\liminf_{n\to\infty}|S-\sum_{j=0}^{n}\Psi_j X_{t-j}|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} E|S-\sum_{j=0}^{n}\Psi_j X_{t-j}|^2 = 0$$

on conclut que la limite S et $\Psi(B)X_t$ sont égales en probabilité d'où la 1ere condition de la stationnarité $(E({Y_t}^2) < \infty)$ est vérifiée

ii) $E(Y_t) = E(\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j X_{t-j}) = \sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j E(X_{t-j}) = 0$

iii) $E(Y_{t+h}Y_t) = E[(\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j X_{t+h-j})(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k X_{t-k})]$

$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_j\Psi_k E(X_{t+h-j}X_{t-k})$

$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_j\Psi_k\gamma_x(h-j-k) = \gamma_Y(h)$ □

2.3 Processus ARMA (p,q)

Définition 2.3.1. Un processus linéaire stationnaire (X_t)centré est appelée ARMA(p,q) $p \geq 0$,$q \geq 0$ s'il existe des constantes $\alpha_1, ..., \alpha_p(\alpha_p \neq 0)$ *et* $\theta_1, ..., \theta_q(\theta_q \neq 0)$ et un processus (ε_t) un bruit blanc (faible) tels que :

$$X_t - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_{t-k} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q}\theta_j\varepsilon_{t-j}.$$

Pour $p = q = 0$ on a

$$X_t = \varepsilon_t$$

un processus ARMA(0,0) est un bruit blanc faible. Deux classes de processus ARMA que nous étudierons dans un premier temps sont ceux pour les quels un des deux paramètres p ou q est nul.

Si $p = 0$ *et* $q > 0$, un processus ARMA(0,q) noté MA(q) est de la forme

$$X_t = \varepsilon_t + \sum\nolimits_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

où

$$\varepsilon_t \hookrightarrow N(0, \sigma^2)$$

ce processus est appelé processus moyenne mobile d'ordre q .

Si p>0 et q=0, un processus ARMA(p,0), noté AR(p), est de la forme

$$X_t = \varepsilon_t + \sum\nolimits_{k=1}^{p} \alpha_k X_{t-k}$$

où

$$\varepsilon_t \hookrightarrow N(0, \sigma^2)$$

ce processus est appelé processus autorégressif d'ordre p.

2.4 Processus AR(p)

Les processus AR(p) forment une classe de modèles pour de nombreux phénomènes observés, ils sont définis implicitement par la relation :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum\nolimits_{k=1}^{p} \alpha_k X_{t-k}.$$

Cette définition pose quelques problèmes : Le processus est-t-il stationnaire ? Quelle est sa forme explicite ?

Soit B l'opérateur du retard

$$BX_t = X_{t-1}, \forall t \in \mathbb{Z} \quad B^0 X_t = X_t \quad B^j X_t = X_{t-j}$$

nous avons

$$X_t - \sum\nolimits_{k=1}^{p} \alpha_k X_{t-k} = \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \alpha_1 B - ... - \alpha_p B^p) X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \alpha(B) X_t = \varepsilon_t$$

où

$$\alpha(B) = (1 - \alpha_1 B - ... - \alpha_p B^p)$$

2.4.1 Stationnarité et invisibilité

Un processus (X_t) satisfaisant une représentation AR est toujours inversible par définition, ce résultat indique que tout processus AR peut être inversé .

On va étudier la stationnarité et donné des conditions sur les paramètres α_k.

CAS :AR(1)

Proposition 2.4.1. *soit (X_t) un processus autorégressif d'ordre 1*

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.4.1}$$

avec (ε_t) un bruit blanc fort gaussien , $E(X_s\varepsilon_t) = 0$.
Si $|\alpha| < 1$
alors il existe une solution unique stationnaire de l'équation (2.4.1) donnée par :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j}$$

Démonstration. :
Existence :
Soit B l'opérateur du retard, on a d'aprés l'equation (2.4.1) on obtient
$X_t - \alpha X_{t-1} = \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\alpha B)X_t = \varepsilon_t$.
Si $|\alpha| < 1$ l'opérateur $(I - \alpha B)$ est inversible d'inverse $\sum_j \alpha^j B^j$:

$$(1-\alpha B)\lim_{\infty}(1+\alpha B+....+\alpha^j B^j) = \lim_{\infty}(1+\alpha B+...+\alpha^j B^j - \alpha B - \alpha^j B^j - \alpha^{j+1}B^{j+1})$$

$$= \lim_{j\to\infty}(1-\alpha^{j+1}B^{j+1})$$
$$= I \quad car \ \lim_{j\to\infty}\alpha^j = 0 \ quand \ |\alpha| < 1$$

donc

$$X_t = (1-\alpha B)^{-1}\varepsilon_t \tag{2.4.2}$$

$(1-\alpha B)^{-1}\varepsilon_t = \lim_{j\to\infty}(1+\alpha B + ... + \alpha^j B^j)\varepsilon_t$

d'aprés l'equation (2.4.2) on a $X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j B^j \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j \varepsilon_{t-j}$
et d'après la proposition 1.5 on a (ε_t) un processus stationnaire et $\sum_{j=0}^{\infty}|\alpha^j| < \infty$ c'est
une série geometrique $(|\alpha| < 1)$.
Finalement

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j \varepsilon_{t-j}$$

est stationnaire et de fonction d'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j\alpha^{j+h}\sigma^2 = ((\sigma^2\alpha^h)/(1-\alpha^2))$$

Unicité : Supposons qu'il existe un autre processus (Y_t) tq :

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} \\ &= \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + ... + \alpha^k\varepsilon_{t-k} + \alpha^{k+1}Y_{t-k-1} \end{aligned}$$

or (Y_t) est stationnaire, alors $E({Y_t}^2)$ est finie et indépendant de t

$$E(Y_t - \sum_{j=0}^{k} \alpha^j \varepsilon_{t-j})^{\mathbf{2}} = \alpha^{2(k+1)} E(Y_{t-k-1}) \to 0 \ quand\ k \to \infty$$

donc $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j}$
et alors $Y_t = X_t$ p.s □

Proposition 2.4.2. (X_t) *est un processus autorégressif d'ordre p stationnaire si et seulement si les racines du*

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k$$

sont en module supérieur strictement à 1.

Démonstration. Cas AR(1) :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \alpha B) X_t = \varepsilon_t$$

montrer que (X_t) est stationnaire ? si et seulement si la racine de $(1-\alpha z)$ supérieur stricte à 1. La racine de

$$A(z) = 1 - \alpha z \quad est \qquad z = (1/\alpha)$$

c.a.d (X_t) est stationnaire si et seulement si

$$|\alpha| < 1.$$

D'aprés la proposition1.2.2 on a la 1ére implication, il nous reste la 2éme implication c.a.d : si (X_t) est stationnaire alors $|\alpha| < 1$

$$\begin{array}{ll} on\ a: & X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow {X_t}^{\mathbf{2}} = \alpha^{\mathbf{2}} X_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\alpha X_{t-1}\varepsilon_t \\ donc & E({X_t}^{\mathbf{2}}) = \alpha^2 E({X_{t-1}}^{\mathbf{2}}) + E({\varepsilon_t}^{\mathbf{2}}) \Leftrightarrow (1-\alpha^2)\gamma_X(0) = \sigma^{\mathbf{2}} \\ & \Rightarrow (1-\alpha^2) > 0 \Rightarrow \alpha^2 < 1 \Rightarrow |\alpha| < 1. \end{array}$$

Cas AR(p) :

$$\begin{array}{ll} soit & X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \alpha(B) X_t = \varepsilon_t \\ o\grave{u} & \alpha(B) = 1 - \alpha_1 B - .... - \alpha_p B^p \\ \multicolumn{2}{l}{on\ ecrit\ X_t = \alpha^{-1}(B)\varepsilon_t \qquad si \qquad \alpha(B)\ est\ inversible} \end{array}$$

considérons $\alpha(z)$ tel que :

$$\begin{array}{l} \alpha(z) = (1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)....(1-\lambda_p z) = \prod_{i=1}^{p}(1-\lambda_i z) \\ \alpha^{-1}(z) = 1/\alpha(z) = \sum_{i=1}^{p} K_i/(1-\lambda_i z) \\ donc \quad X_t = \alpha^{-1}(B)\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{p} K_i (1-\lambda_i B)^{-1} \varepsilon_t \end{array}$$

comme dans le cas de AR(1) il faut et il suffit que $|\lambda_i| < 1$ pour la stationnarité. Et $1/\lambda_i$ sont des racines de

$$A(z) = (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)....(1 - \lambda_p z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k$$

ainsi

$$|1/\lambda_i| > 1.$$

□

2.4.2 Fonction d'auto-corrélation : les équations de Yule-Walker

De

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

on a, pour $h > 0$:

$$X_{t-h} X_t = \alpha_1 X_{t-h} X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-h} X_{t-p} + X_{t-h} \varepsilon_t$$

donc

$$EX_{t-h} X_t = \alpha_1 EX_{t-h} X_{t-1} + .. + \alpha_p EX_{t-h} X_{t-p} + EX_{t-h} \varepsilon_t$$
$$\Leftrightarrow \gamma_h = \alpha_1 \gamma_{h-1} + \alpha_2 \gamma_{h-2} + ... + \alpha_p \gamma_{h-p}$$

avec

$$E(X_{t-h} \varepsilon_t) = 0 \qquad et \qquad \rho_h = \gamma_h / \gamma_0$$

où ρ_h est la fonction d'autocorrection et γ_h est la fonction d'autocovariance ainsi

$$\rho_h = \alpha_1 \rho_{h-1} + \alpha_2 \rho_{h-2} + ... + \alpha_p \rho_{h-p} \; et \; \gamma_0 = E(X_t X_t).$$

De meme

$$X_t X_t = \alpha_1 X_t X_{t-1} + ... + \alpha_p X_t X_{t-p} + X_t \varepsilon_t$$

donc

$$E(X_t X_t) = \gamma_0 = \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_2 + ... + \alpha_p \gamma_p.$$

Les equations de Yule-Walker :

Si

$$\begin{gathered} h = 1, 2, ...p \\ \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + ... + \alpha_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p \rho_{p-2} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \rho_h = \alpha_1 \rho_{p-1} + \alpha_2 \rho_{p-2} + .. + \alpha_p. \end{gathered}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \\ \alpha_p \end{pmatrix} \qquad \varrho_p = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \\ \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & . & . & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & . & . & \rho_{p-2} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ \rho_{p-2} & \rho_{p-2} & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$\alpha = P_p^{-1}\varrho_p$. Elles relient les paramètres α_p du processus autoregressif a la fonction d'autocorrection théorique,qui définit ϱ_p et P_ρ

2.5 Processus MA(q)

Les processus MA(q) apparaissent naturellement comme un cas particulier d'un processus linéaire

Définition 2.5.1. Un processus à moyenne mobile d'ordre q est définit par :

$$X_t = \varepsilon_t - \sum\nolimits_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

où (ε_t) est Bruit Blanc Fort suit $N(0, \sigma^2)$ et $t \in \mathbb{Z}$ avec $\theta_0 = 1$ et $E(X_t) = 0$.

On peut ecrire :

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^p)\varepsilon_t \\ &= \theta(B)\varepsilon_t ....(2) \end{aligned}$$

où B est l'opérateur du retard $BY_t = Y_{t-1}$

2.5.1 Stationnarité et inversibilté

Un processus (X_t) MA(q) est toujours stationnaire car il n'est autre qu'une somme pondérée de bruits blanc (i.i.d).

Définition 2.5.2. Si (X_t) est un processus MA(q), on dit que X_t est inversible lorsqu'il existe une suite Ψ_j avec $\sum_j |\Psi_j| < \infty$ tel que

$$\varepsilon_t = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \Psi_j X_{t-j}.$$

Proposition 2.5.3. *Un processus (X_t) MA(q) est inversible lorsque toutes les racines du polynome $\theta(B)$ notées $\alpha_j \in \mathbb{C}\ \forall j \leq q$ sont en module strictement supérieur à 1.*

$$\theta(B) = \prod_{j=1}^{q}(1 - \frac{1}{\alpha_j}B) \quad et\ |\alpha_j| > 1\ \forall j$$

Démonstration. La démonstration est faite de la même façon que dans la section précédente (stationnaire de AR) en échangeant uniquement les ε_t par X_t alorsla relation (2) implique sous des conditions sur θ discutées

Cas MA(1) : Soit

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t$$

par inversion du polynôme $\theta(B)$, on peut exprimer X_t sous la forme d'un $AR(\infty)$:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(B)X_t.$$

De la même façon que précédente on montre que si $|\theta| < 1$, $\theta(B)$ inversible et son inverse

$$(1 - \theta B)^{-1} = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j$$

donc $\theta^j = \Psi_j$ avec $\sum_{j=0}^{\infty}|\Psi_j| < \infty \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}|\theta^j| < \infty$ C'est une série géométrique convergente ssi $|\theta| < 1$ .Donc

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(B)X_t = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j}$$

$\alpha_1 = 1/\theta$ est la racine du polynôme $\theta(z) = (1 - \theta z)$.

Cas MA(q) :

$$\theta(B) = \prod_{j=1}^{q}(1 - \frac{1}{\alpha_j}B),$$

posons

$$\frac{1}{\alpha_j} = \lambda_j \Rightarrow \theta(B) = \prod_{j=1}^{q}(1 - \lambda_j B),$$

donc si $|\lambda_j| < 1$, $\theta(B)$ inversible et son inverse :

$$\theta^{-1}(B) = \sum\nolimits_{j=1}^{q} M_j(1 - \lambda_j B)^{-1},$$

$\alpha_j = \frac{1}{\lambda_j}$ les racines de $\theta(z)$ sont strictement supérieur à 1 en module alors :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{q} M_j (1 - \lambda_j B)^{-1} X_t$$

□

Remarque. Ce résultat indique qu'un processus (X_t) de MA(q) peut être exprimé sous la forme $AR(\infty)$ si le polynôme $\theta(B)$ est inversible c'est-à-dire si les racines de $\theta(z)$ sont toutes supérieur à 1 en module.

2.5.2 Fonction d'auto-corrélation

La fonction d'autocovariance de MA(q) est :

$$\gamma_h = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-h} - \theta_1\varepsilon_{t-h-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-h-q})]$$

avec $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t'}) = 0$, $t \neq t'$

$$\begin{gathered} \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2.......... + \theta_{q-1}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_h = (-\theta_h + \theta_1\theta_h.......... + \theta_{q-h}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2 \end{gathered}$$

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{-\theta_h + \theta_1\theta_h .... + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2} \\ 0 \qquad\qquad si\ h > q \end{cases}$$

2.6 Estimateurs des moindres carrés

Soit $(z_1, y_1), ..., (z_n, y_n)$ un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. IL s'agit de trouver la meilleure droite

$$y = \theta_0 + \theta_1 z$$

pour approximer les observations $y_1, ..., y_n$ d'une variable dépendante y prise aux valeurs fixes $z_1, ..., z_n$ de la variable indépendante z .Les estimateurs des moindres carrés ordinaires (OLS) $\widehat{\theta}_0$, $\widehat{\theta}_1$de θ_0, θ_1 sont definis par la minimisation de la somme :

$$S(\theta_0, \theta_1) := \sum_{t=1}^{n} (y_t - \theta_0 - \theta_1 z_t)^2$$

la quantité $S(\theta_0, \theta_1)$ est identique à la distance carré euclidienne entre y et $\theta_0 I + \theta_1 z_t$ i.e :

$$S(\theta_0, \theta_1) = \|y - \theta_0 I + \theta_1 z_t\|^2$$

où

$$z = {}^t(z_1, ..., z_n)$$
$$I = {}^t(1, ..., 1)$$
$$y = {}^t(y_1, ..., y_n).$$

Posons les dérivées partielles de S par rapport à θ_0 et θ_1 égales à zéro, nous trouvons le vecteur $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1)$ qui satisfait « les équations normales » :

$${}^tZZ\widehat{\theta} = {}^tZy$$

où Z est la matrice de dimension (nx2) : Z=(I,z).

On a :

$$S(\theta){\geq}0 \; et \; S(\theta) \to \infty \; qd \; \|\theta\| \to \infty$$

donc les équations normales ont aux moins une solutions.

En effet : Si $\widehat{\theta}^{(1)}, \widehat{\theta}^{(2)}$ sont deux solutions de les équations normales alors un calcul simple

montre cela :

$$(\widehat{\theta}^{(1)} - \widehat{\theta}^{(2)})\,{}^tZZ(\widehat{\theta}^{(1)}, \widehat{\theta}^{(2)}) = 0 \; ie \; Z\widehat{\theta}^{(1)} = Z\widehat{\theta}^{(2)}$$

la solution des équations normales est unique si et seulement si la matrice ^{t}ZZ est non singulière. Mais les calculs précédents montrent cela même si ^{t}ZZ est singuliere le vecteur $y = Z\theta$ des valeurs adaptées est le même pour n'importe quel θ solution des équations normales. L'argument juste donné s'applique également bien à l'estimation des moindres carrées pour le modèle linéaire générale.

Donné un ensemble de point

$$(z_{t1}, ..., z_{tm}, y_t) \quad t = 1, ..., n \quad tq \quad m{\leq}n$$

les estimateurs des moindres carrées

$$\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_m) \; de \; \theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$$

rendent maximum

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \textstyle\sum_{t=1}^{n}(y_t - \theta_1 z_{t1} - ..... - \theta_m z_{tm})^2 \\ &= \left\| y - \theta_1 z^{(1)} - ..... - \theta_m z^{(m)} \right\|^2 \end{aligned}$$

où

$$y = {}^t(y_1, ..., y_n)$$
$$z^{(j)} = {}^t(z_{1j}., z_{nj})$$
$$j = 1, ..., m$$

comme dans le cas spécial précédent le $\widehat{\theta}$satisfait les équations :

$${}^tZZ\widehat{\theta} = {}^tZy$$

où Z la matrice (n×m) ,$Z = (z^{(1)}, .., z^{(m)})$. La solution de cette équation est unique si et seulement si le ^{t}XX est non singulière. Dans ce cas :

$$\widehat{\theta}_{OLS} = ({}^tZZ)^{-1}\,{}^tZy$$

si ^{t}ZZ est singulier, il ya infinité de solutions $\widehat{\theta}$ mais le vecteur des valeurs adaptée $Z\widehat{\theta}$ est le même pour tous.

Exemple. Pour illustrer le cas général, adaptons la fonction quadratique

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^{\mathbf{2}}$$

aux données

$$\begin{cases} x = 0\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ y = 1\ 0\ 3\ 5\ 8 \end{cases}$$

on pose $z_{t1} = x_t$ et $z_{t2} = {x_t}^{\mathbf{2}}$

donc

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t1} + \theta z_{t2},\ t = 1, ..., 5$$

avec

$$z = {}^t(z^{(1)}, z^{(2)})\ tq \begin{cases} z^{(1)} = (0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ \\ z^{(2)} = (0, 1, 4, 9, 16) \end{cases}$$

la matrice Z pour ce problème est

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = (I, z)$$

$$({}^tZZ)^{-1} = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 124 & -108 & 20 \\ -108 & 174 & -40 \\ 20 & -40 & 10 \end{pmatrix}$$

l'estimation des moindres carrées $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)'$est donc unique et donné par

$$\widehat{\theta} = ({}^tZZ)^{-1}\,{}^tZy = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

le vecteur des valeurs est donnée par :

$$\widehat{y} = Z\widehat{\theta} = (0.6, 1, 2.4, 4.8, 8.2)$$

par rapport aux valeurs observées y=^{t}(1,0,3,5,8).

2.6.1 Théorème de Gauss-Markov

Supposons que les observations $y_1, ..., y_n$ sont des réalisations des variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$:

$$Y_t = \theta_1 x_{t1} + .. + \theta_m x_{tm} + V_t$$

$$tq\ V_t \hookrightarrow WN(0, \sigma^2)\ un\ b.b.fort,$$

posons :

$$Y = {}^t(Y_1, ..., Y_n)$$

$$V = {}^t(V_1, ..., V_n)$$

nous pouvons écrire ces équations comme :

$$Y = Z\theta + V$$

Supposons pour la simplicité que la matrice ${}^tZZ$est non singuliere (pour le cas général voir ; ex : SILVEY 1975) alors l'estimation des moindres carrés de θest :

$$\widehat{\theta}_{OLS} = ({}^tZZ)^{-1}\, {}^tZY.$$

L'estimateur des moindres carrés de paramètre σ^2est l' estimateur sans biais :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-m} \left\| Y - Z\widehat{\theta} \right\|^2.$$

Il est facile de voir que le θ est également sans biais ie : $E(\widehat{\theta}) = \theta$ il suit que si ${}^tC\theta$ est une combinaison linéaire des paramètres θ_i , i=1,...,m, alors ${}^tC\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de ${}^tC\theta$. Le Théorème de Gauss Markov indique que tous les estimateurs sans biais de ${}^tC\theta$ de la forme $\sum_{t=1}^{n} a_t Y_t$ de la forme ${}^tC\widehat{\theta}$ ont la plus petite variance. Dans le cas particulier où $V_1, ..., V_n$ sont $IIDN(0, \sigma^2)$, l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\theta}$ suit une loi $N(\theta, \sigma^2({}^tZZ)^{-1})$et $\frac{(n-m)\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2}$ Suit une loi χ^2 de degré de liberté (n-m).

2.6.2 Les moindres carrés généralisé [GLS]

Le Théorème de Gauss Markov utilise l'hypothèse que le vecteur $V = {}^t(V_1, ..., V_n)$ est centré et de matrice de covariance non singulière $\sigma^2\Sigma$;$\Sigma \neq I$, et les V_i sont non correlées. Considérons le vecteur transformé d'observation :

$$U = R^{-1}Y$$

où R est une matrice non singulière tel que

$$RR^{-1} = \Sigma,$$

alors

$$U = R^{-1}Z\theta + R^{-1}V = M\theta + W,$$

$$où \;\; M = R^{-1}Z \;\; , W = R^{-1}V,$$

et W centré de matrice de covarience $\sigma^2 I$car :

$$cov(W) = E(W\,{}^tW) = E(R^{-1}V\,{}^t(R^{-1}V))$$

$$= R^{-1}E(V\,{}^tV)\,{}^tR^{-1} = R^{-1}\sigma^2 R\,{}^tR\,({}^tR)^{-1} \;\; ,$$

$$= \sigma^2 I \; on \; utilise \qquad (\,({}^tA)^{-1} = \,{}^tA^{-1}).$$

Théorème de Gauss Markov implique maintenant que la meilleure estimation linéaire de n'importe quelle combinaison linéaire ${}^tC\theta$est ${}^tC\widehat{\theta}$ .Où $\widehat{\theta}$ est l'estimateur des moindres carrés généralisé (GLS) qui réduit au minimumla quantité :

$$\|U - M\theta\|^2 .$$

Dans le cas où $V_1, .., V_n$ sont non-corrélées et $V_i$centré , $var(V_i) = \sigma^2 {r_i}^2$, l'estimateurs des moindres carrés généralisé (GLS) minimisent la somme suivante :

$$\sum\nolimits_{t=1}^{n} \frac{1}{r^2}(Y_t - \theta_1 z_{t1} - ... - \theta_m z_{tm})^2.$$

Dans le cas général, si ${}^tZZ$et Σ sont tous les deux non singuliere. L'estimateur des moindres carré généralisé (GLS) est donné par :

$$\widehat{\theta}_{GLS} = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMU,$$

encore :

$$\widehat{\theta}_{GLS} = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMU = ({}^t(R^{-1}Z)R^{-1}Z)^{-1}\,{}^t(R^{-1}Z)R^{-1}Y$$

$$= ({}^tZ(R\,{}^tR)^{-1}Z)^{-1}\,{}^tZ(R\,{}^tR)^{-1}Y \; car(\,({}^tA)^{-1} = \,{}^tA^{-1})$$

$$\widehat{\theta}_{GLS} = (\,{}^tZ\Sigma^{-1}Z)^{-1}\,{}^tZ\Sigma^{-1}Y.$$

2.7 Méthode du maximum de vraisemblance

Les techniques d'estimations comme les moindres carrés, sont applicable aux modèles de régression. Dans quelques cas les moindres carrés et autres estimateurs sont tout simplement pas appropriés. Nous introduisons une méthode d'estimation qui est beaucoup plus largement applicable que les moindres carrés mais qui nécessite également d'assez fortes hypothèses. Il s'agit de l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (ML). L'idée fondamentale de l'estimation par maximum de vraisemblance est de trouver un ensemble d'estimation de paramètres $\widehat{\theta}$, telle que la vraisemblance de l'échantillon que nous utilisons soit maximale. La densité de probabilité jointe ou vraisemblance pour le modèle que l'on estime est évaluée aux valeurs observées de la (des) variable(s) dépendante(s) et traitée comme une fonction de paramètres du modèle. Le vecteur $\widehat{\theta}$ des estimateurs ML donne alors le maximum de cette fonction. Ce principe d'estimation est très largement applicable : si nous pouvons écrire la densité jointe de l'échantillon, nous pouvons en principe utilisé l'estimateur ML, sous certaines conditions de régularité. Soit y un échantillon de taille n , la densité jointe sera désigné sous le nom de fonction de vraisemblance est noté $L(y, \theta)$ tel que :

$L : A \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $y \in A$, et $\theta \in \Theta$, $y = (y_1, .., y_n)$.
A : un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$
Θ : Espace paramétrique et est un sous ensemble de $\mathbb{R}^k$.

Si les observations y_t sont indépendantes et de densité de probabilité $L_t(y_t, \theta)$, la fonction de vraisemblance est :

$$L(y, \theta) = \prod_{t=1}^{n} L_t(y_t, \theta) \tag{2.7.1}$$

il est usage de maximiser $logL(y, \theta) := l(y, \theta)$, car le log est une fonctioncroissante. $l(y, \theta)$ est appelé fonction de log-vraisemblance, si θ maximise $l(y, \theta)$, il maximise $L(y, \theta)$. Si on ne peut pas écrire $L(y, \theta)$ sous la forme (2.7.1), il est parfois possible de la factoriser sous :

$$L(y, \theta) = \prod_{t=1}^{n} L_t(y_t \setminus y_{t-1}, ..., y_1, \theta)$$

$$= L_1(y_1, \theta) L_2(y_2 \setminus y_1, \theta)..L_n(y_n \setminus y_{n-1}, ., y_1, \theta),$$

donc

$$l(y, \theta) = \sum_{t=1}^{n} l_t(y_t \setminus y_{t-1}, ..., y_1, \theta),$$

où

$$l_t(y_t \setminus y_{t-1}, .., y_1, \theta) = logL_t(y_t \setminus y_{t-1}, .., y_1, \theta).$$

Nous donnons la définition de l'estimation par maximum de vraisemblance

nous disons que $\widehat{\theta} \in \Theta$ est une estimation par maximum de vraisemblance (ML) pour les observations y si

$$l(y, \widehat{\theta}) = \underset{\theta \in \Theta}{max} l(y, \theta)$$

c'est a dire

$$l(y, \widehat{\theta}) \geq l(y, \theta) \ \forall \theta \in \Theta.$$

Si $l(y,\widehat{\theta}) > l(y,\theta)$ $\forall\theta \in \Theta$ alors $\widehat{\theta}$ est unique , Dans ce cas θ est dit estimateur ML de type1.

Il est souvent commode d'utiliser une autre définition de ML ; lorsque la fonction de vraisemblance L est deux fois continûment différentiable parrapport à θ et la matrice Hessienne $H(y,\theta)$ d'element :

$$H_{ij}(y;\theta) = \frac{\partial^2 l(y,\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j},$$

est une matrice definie négative.

Dans ce cas ,$\forall\theta \in \Theta$, $\widehat{\theta}$ est l'esimateur de maximum de vraisemblance est solution du système suivant :

$$g(y,\widehat{\theta}) = 0, \tag{2.7.2}$$

et $\widehat{\theta}$ est de type2 , où g est le vecteur gradient , $g \in \mathbb{R}^k$, défini par :

$$g^T(y,\theta) \equiv D_\theta l(y,\theta) = \sum\nolimits_{t=1}^{n} D_\theta l_t(y,\theta)$$

puisque $D_\theta l$ est un vecteur ligne, g est le vecteur colonne des dérivées partielles de la fonction de log-vraisemblance l par rapport aux paramètres θ. Nous pouvons définir une matrice $G(y,\theta)$ de dimension n×k , d'éléments :

$$G_{ti}(y,\theta) := \frac{\partial l(y,\theta)}{\partial\theta_i}$$

$G_{ti}(y,\theta)$: Matrice des contributions au gradient (CG) tel que g^T est un vecteur de G .

T :désigne le transposé.

La matrice Hessienne $H(y,\theta)$ associée à la fonction de vraisemblance $\ell(y,\theta)$ est la matrice de dimension $k \times k$ d'element :

$$H_{ij}(y,\theta) := \frac{\partial^2 l(y,\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}.$$

L'espérance de la Hessienne pour un échantillon de taille n est définie par :

$$\mathbb{H}^n(\theta) := E_\theta(n^{-1} H(y,\theta)),$$

la limite de la Hessienne ou Hessienne asymptotique si elle existe est définie par :

$$\mathbb{H}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{H}^n(\theta),$$

cette matrice symétrique, et en générale semi définie négative.

Nous définissons la matrice $I_t(\theta)$ d'information contenue dans y_t la matrice $k \times k$ d'element

$$(I_t(\theta))_{ij} := E_\theta(G_{ti}(\theta)G_{tj}(\theta)).$$

La matrice d'information moyenne pour un échantillon y de taille n est définie par

$$\Gamma^n(\theta) := \frac{1}{n}\sum\nolimits_{t=1}^{n} I_t(\theta) = n^{-1}I^n.$$

La matrice d'information asymptotique si elle existe est définie par

$$\Gamma(\theta) := \underset{n\to\infty}{lim}\,\Gamma^n(\theta).$$

La matrice $I_t(\theta)$ mesure la quantité d'information contenue dans l' observation $y_t.I^n = n\Gamma^n$: mesure la quantité d'information contenue dans l'échantillon y.

Nous commençons notre analyse par le lemme suivant ,en démontrant un résultat simple mais fondamental concernant le gradient g et la matrice G.

Lemme 2.7.1. *Supposons que y_t à une densité $L_t(y_t, \theta)$, et $l_t(y_t, \theta) = logL_t(y_t, \theta)$ et $G_{ti}(\theta) := \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i}$ Alors :*

$$E_\theta\left[G_{ti}(\theta)\right] := E_\theta\left[\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right] = 0,$$

ainsi

$$E_\theta(g(\theta)) = 0 et E_\theta(G(\theta)) = 0.$$

Démonstration. On a

$$E_\theta(G_{ti}(y_t, \theta)) = \int \frac{\partial logL_t(y_t,\theta)}{\partial\theta_i} L_t(y_t, \theta)dy_t = \int \frac{1}{L_t(y_t,\theta)}\frac{\partial L_t(y_t,\theta)}{\partial\theta_i} L_t(y_t, \theta)dy_t$$

$$= \int \frac{\partial L_t(y_t,\theta)}{\partial\theta_i} dy_t = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\int L_t(y_t, \theta)dy_t = \frac{1}{\partial\theta_i} = 0.$$

□

Remarque 2.7.2. Ce Lemme permet d' appliquer le Théorème central limite à la quantité

$$n^{-(1/2)}g(\theta).$$

Le résultat suivant donne des propriétés asymptotiques des estimateurs de maximum de vraisemblance (ML).

2.7.1 Théorème

Sous les conditions suivantes :

i) $l_t(y, \theta)$ sont au moins deux fois continûment différentiables en $\theta \in \Theta$ et les dérivés
sont integrable

ii) $E\left[\frac{\partial^2 l_t(y,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right] < 0$

Nous avons

1) $\widehat{\theta}_n \to \theta$ p.s

2) $n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, \Gamma^{-1}(\theta))$

Preuve :
On admet 1). Pour 2) nous commençons par le développement de Taylor des équations de vraisemblance (3.1.7) autour de θ pour obtenir (avec $g(y, \theta) = g(\theta)$) :

$$0 = g(\widehat{\theta}) = g(\theta) + H(\widetilde{\theta})(\theta - \theta) \; où \; \widetilde{\theta} \in (\widehat{\theta}_n, \theta)$$

ce qui implique

$$n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \underbrace{-(n^{-1}H(\widetilde{\theta}))^{-1}}_{matrice(k\times k)}\underbrace{(n^{1/2}g(\theta))}_{vecteur(k)}.$$

Asymptotiquement la matrice est non aléatoire et le vecteur suit une loi normale. Ce qui implique que $n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ asymptotiquement normal . Montrons que $n^{-1}H(\widetilde{\theta})$ tend vers une matrice déterministe quand n tend vers l'infini. Rappellons que le (i,j)éme élément de $n^{-1}H(\widetilde{\theta})$ est :

$$(n^{-1}H(\widetilde{\theta}))_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 l_t(y,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \; evalué \; en \; \theta = \widetilde{\theta},$$

posons

$$Z_t = \frac{\partial^2 l_t(y,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j},$$

donc

$$(n^{-1}H(\widetilde{\theta}))_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t = \overline{Z_n} \; et \; E(Z_t) < \infty.$$

On applique la loi forte des grands nombre pour avoir : $\overline{Z_n} \longrightarrow \mu = E(Z)$.

Par suite

$$\frac{1}{n}H(\widetilde{\theta}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{H}(\widetilde{\theta}),$$

et on a pour 1)

$$\widehat{\theta} \longrightarrow \theta \; et \; \widehat{\theta} \leq \widetilde{\theta} \leq \theta,$$

donc

$$\frac{1}{n}H(\widetilde{\theta}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{H}(\theta),$$

alors

$$n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta) \approx -\mathbb{H}^{-1}(\theta)n^{1/2}g(\theta). \tag{2.7.3}$$

L' élément stochastique dans le membre droite est $n^{1/2}g(\theta)$ donné par

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial logL_t(y_t,\theta)}{\partial\theta_i} = n^{-1/2}\sum\nolimits_{t=1}^{n}G_{ti}(\theta).$$

Nous avons d'après le Lemme 2.7.1 : $E(G_{ti}(\theta)) = 0$. On applique le T.C.L ($E{G_{ti}}^2(\theta) < \infty$) $n^{1/2}g(\theta)$ converge en loi vers une loi normale. Par suite$n^{1/2}(\widehat{\theta}-\theta)$ est asymptotique normale. La matrice de covariance asymptotique de $n^{1/2}(\widehat{\theta}-\theta)$ est l'espérance asymptotique de $n(\widehat{\theta}-\theta)(\widehat{\theta}-\theta)^T$:

$$V(n^{1/2}(\widehat{\theta}-\theta)) = E_\theta(n(\widehat{\theta}-\theta)(\widehat{\theta}-\theta)^T),$$

en utilisant (2.7.3), nous avons

$$V(n^{1/2}(\widehat{\theta}-\theta)) = \left[-\mathbb{H}^{-1}(\theta)\right]\left[\tfrac{1}{n}E_\theta(g(\theta)g^T(\theta))\right]\left[-\mathbb{H}^{-1}(\theta)\right]^T,$$

on a $\left[\mathbb{H}^{-1}\right]^T = \mathbb{H}^{-1}$ car $\mathbb{H}$ symetrique .

Un élément de l'espérance dans le facteur central est

$$(1/n)E_\theta(\sum\nolimits_{t=1}^{n}G_{ti}(\theta))(\sum\nolimits_{s=1}^{n}G_{sj}(\theta)),$$

et

$$G_{ti}(\theta)G_{sj}(\theta) = \tfrac{\partial logL_t}{\partial\theta_i}\tfrac{\partial logL_s}{\partial\theta_j},$$

$$E_\theta(G_{ti}(\theta)G_{sj}(\theta)) = \begin{cases} = 0 \; si \; t \neq s \\ \neq 0 \; si \; t = s \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n}E_\theta((\textstyle\sum_{t=1}^{n}G_{ti}(\theta))(\sum_{s=1}^{n}G_{sj}(\theta)) \\ &= \tfrac{1}{n}E_\theta(\textstyle\sum_{t=1}^{n}G_{ti}(\theta)G_{tj}(\theta)). \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

On a

$$\begin{cases} I_t(\theta)_{ij} = E_\theta(G_{ti}(\theta)G_{tj}(\theta)) \\ \Gamma^n(\theta) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_t(\theta) = n^{-1}I^n. \end{cases}$$

Nous voyons que le membre droite de (2.7.4) correspond à $\Gamma^n(\theta)$ et $\Gamma^n(\theta) \longrightarrow \Gamma(\theta)$

$$V^\infty(n^{1/2}(\widehat{\theta} - \theta)) = \mathbb{H}^{-1}(\theta)\Gamma(\theta)\mathbb{H}^{-1}(\theta) \tag{2.7.5}$$

on va simplifier l'expression (2.7.5) et on a :

$$\mathbb{H}(\theta) = -\Gamma(\theta).$$

En effet

$$E_\theta\left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) = -E_\theta\left(\frac{\partial l_t \partial l_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)$$

$$\mathbb{H}_{ij}(y,\theta) = \frac{\partial^2 l(y,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$\mathbb{H}(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E_\theta\left(\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E_\theta\left(\frac{\partial l_t \partial l_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)\right)$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\Gamma^n(\theta) = -\Gamma(\theta)$$

on aboutit à

$$V^\infty(n^{1/2}(\widehat{\theta} - \theta)) = \Gamma^{-1}(\theta) = -\mathbb{H}^{-1}(\theta)$$

2.7.2 Fonction de Log-vraisemblance concentrée

Souvent les paramètres dans une fonction de log-vraisemblance sont partitionnés en deux ensemble de façon à rendre l'écriture de l'estimation ML d'un groupe de paramètres comme une fonction des valeurs de l'autre groupe. Nous rencontrons un exemple en connexion avec l'estimation ML dans des modèles de régression. Dans la suite il peut être très pratique d'exprimer la fonction de log-vraisemblance comme une fonction d'un seul des deux groupe de paramètre.

Soit $l(y,\theta) = l(y,\theta_1,\theta_2)$ donc $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ sont solution de :

$$D_1 l(y,\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial l(y,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = 0$$

$$D_2 l(y,\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial l(y,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = 0.$$

Supposons qu'il soit possible de résoudre la seconde équation afin de pouvoir écrire $\theta_2 = \tau(y,\theta_1)$ ceci implique que identiquement en θ_1

$$D_2 l(y,\theta_1,\tau(y,\theta_1)) = 0,$$

donc la fonction logvraisemblance concentrée

$$l^c(y,\theta_1) := l(y,\theta_1,\tau(y,\theta_1)).$$

Si $\widehat{\theta_1}$ maximise celle ci alors on a :

$$\widehat{\theta_2} = \tau(y,\widehat{\theta_1})$$

et de plus

$$l^c(y,\widehat{\theta_1}) \equiv l(y,\widehat{\theta}).$$

2.8 Généralités sur les propriétés de mélange des processus stochastiques

Dans cette section nous présentons les propriétés de mélanges des processus stochastique, et quelques inégalités fondamentale pour la covariance. Pour plus d'informations a ce qui concerne les propriétés de mélanges, vous pouvez consulter Paul Doukhan [23]

Considérons (Ω, A, P) un espace de probabilité et U , V, deux sous σ-algébre de A, avec u , v deux v.a.r non independant (resp). Divérses mesures de dependance entre U , V, ont été definis :

1) $\alpha(U,V) = sup\{|P(u)P(v) - P(u\cap v)|\,;\ u\in U,\ v\in V\}$

2)$\beta(U,V) = Esup\{|P(v\setminus U) - P(v)|\,;\ v\in V\}$

3)$\phi(U,V) = sup\left\{\left|P(v) - \frac{P(u\cap v)}{P(u)}\right|;\ u\in U,\ v\in V\ P(u)\neq 0\right\}$

4)$\psi(U,V) = sup\left\{\left|P(1 - \frac{P(u\cap v)}{P(u)P(v)}\right|;\ u\in U,\ v\in V,\ P(u)\neq 0,\ P(v)\neq 0\right\}$

5)$\rho(U,V) = sup\left\{|Corr(X,Y)|\,;\ X\in L^2(U),\ v\in L^2(V)\right\}$

Le coefficient (1) est le coefficient fortement mélangeant introduit par Rosemblatt(1956)

Le coefficient (2) est absolument régulier mélangeant introduit par

Kolmogorov & Rosonov(1960)

Le coefficient (3) est le coefficient uniforme mélangeant introduit par Ibragimov(1962)

Le coefficient (4) est le coefficient ψ-mélangeant introduit par Blum et Hanson et

Koopmans(1963)

Le coefficient (5) est la corrélation maximale mélangeant introduit par Hirschfled(1935)

et Gebelein(1941).

Définition 2.8.1. Nous supposons $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ est une suite identiquement distribués et de v.a ψ-melangenat. i.e,

$$\psi\,(n) = \sup_{k\geq 1}\psi(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

où

$$\mathcal{F}_n^m = \sigma(Y_k, n \leq k \leq m) \; and \; \psi(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sup_{\substack{A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B} \\ P(A).P(B)>0}} \left| \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(A)P(B)} \right|$$

Proposition 2.8.2. *(Voir Paul Doukhan[23])*

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité et U et V deux sous tribus σ-algébre de A , et α ,β , ϕ, ψ , ρ des coefficients de mélanges définis ci-dessus , alors

$$2\alpha(U, V) \leq \beta(U, V) \leq \phi(U, V) \leq \frac{1}{2}\psi(U, V)$$

$$4\alpha(U, V) \leq \rho(U, V) \leq 2\phi^{1/2}(U, V)$$

Et

$$\rho(U, V) \leq \psi(U, V)$$

Inégalités de covariance :

Nous présentons des inégalités fondamentale pour la covariance de v.a. mélangeant. Un théorème essentielle des coefficients de mélanges est donné par le théorème ci-dessous.

Théorème 2.8.3. *(Paul Doukhan)*

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité et U , V, deux sous σ-algébre de A , avec X, Y deux v.a mesurable resp de U, V avec α , ϕ, ψ , ρ des coefficients de mélanges. On note $\|X\|_p = (E\,|X|^p)^{\frac{1}{P}}$ pour $p < \infty$, et $\|X\|_\infty = ess - sup\,|X|$ alors

1) $|cov(X, Y)| \leq 8\alpha^{1/r}(U, V)\,\|X\|_p\,\|Y\|_q$ *pour tout* $p, q, r \geq 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$

2) $|cov(X,Y)| \leq 2\phi^{1/q}(U,V)\left\|X\right\|_p \left\|Y\right\|_q$ *pour tout* $p,q \geq 1$ *et* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
3)$|cov(X,Y)| \leq \psi(U,V)\left\|X\right\|_1 \left\|Y\right\|_1$
4)$|cov(X,Y)| \leq \rho(U,V)\left\|X\right\|_1 \left\|Y\right\|_1$.

Voici Le chema suivant pour les propriétés de processus mélangeant :

$$\psi - mixing \Rightarrow \phi - mixing \Rightarrow \begin{cases} \beta - mixing \Rightarrow \alpha - mixing \\ \\ \rho - mixing \Rightarrow \alpha - mixing \end{cases}$$

2.9 Préliminaires-Définitions

Nous rappelons maintenant les définitions des principaux mode de convergence stochastique, pour plus de détail voir Bosq et Lecoutre [8]

2.9.1 Mode de convergence

Définition 2.9.1. Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité , H un espace Métrique séparable muni de sa distance d et de sa Tribu borélienne B, $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a A-B mesurables. La séparabilité assure que $d(X_n, X_0)$ est une v.a.r

$$X_n \xrightarrow{L} X_0 \Leftrightarrow \forall B \in \beta : \ P(X_0 \in \partial B) = 0, \ P(X_n \in B) \longrightarrow P(X_0 \in B)$$

$$X_n \xrightarrow{P} X_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ P(d(X_n, X_0) \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$$

$$X_n \xrightarrow{p.s} X_0 \Leftrightarrow: \ P(d(X_n, X_0) \longrightarrow 0) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{p.co} X_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ \sum_{n \geq 1} P(d(X_n, X_0) \geq \varepsilon) < \infty$$

$$X_n \xrightarrow{m.q} X_0 \Leftrightarrow: \ P(d(X_n, X_0)^q) \longrightarrow 0$$

Voici le tableau De Convergence

$$cv\ p.co \Rightarrow cv\ p.s \Rightarrow \underset{cv\ \overset{\Uparrow}{m.q}}{cv\ en\ Prob} \Rightarrow cv\ en\ Loi$$

Dans la suite nous donnons une propriétés utile et importante.

2.9.2 Inégalités de Markov

Soit X une v.a.r definie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et supposée p.s positive ou nule Alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Corollaire 2.9.2. *Soit une fonction croissante $f \geq 0$ sur l'intervalle I et soit X une v.a.r definie sur un espace (Ω, A, P) et tq $P(X \in I) = 1$, Alors $\forall b \in I$ tq $f(b) > 0$*

$$P(X \geq b) \leq \frac{E(f(X))}{f(b)}.$$

Chapitre 3

Processus autorégressifs banachiques d'ordre supérieur ARB(p)

Dans ce chapitre nous présentons des résultats sur les processus autorégressifs d'ordre supérieur à valeurs dans un espace de Banach réel séparable (ARB(p)) obtenus par T.Mourid dans sa thèse. En particulier sous une condition sur le polynôme d'autorégression , équivalente à une condition sur le rayon spectral d'un opérateur matriciel, l'auteur montre l'existence d'un processus autorégressifs Banachiques d'ordre p strictement stationnaire . cette condition coïncide avec la condition classique connue dans le cas de processus AR à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Citons par exemple ([3], [4], [17]). Nous reprenons les propriétés des opérateurs de covariance et de covariances croisée d'un processus ARB(p) et des exemples de représentations ARB(p) .

3.1 Processus ARB(p)

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé complet et $(B, \|.\|)$un espace de Banach réel séparable muni de sa Tribu borélienne β. On note $\mathcal{L}(B)$ l'algébre de Banach des opérateur lineaire bornés définis sur B et à valeurs dans B, muni de la norme usuelle $\|.\|_{\mathcal{L}}$(cf. [32]) Un bruit blanc banachique $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$est une suite de v.a définies sur (Ω, A, P) et à valeurs dans (B, β) i.i.d et telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$E\varepsilon_n = 0 \qquad 0 < E\left\|\varepsilon_n\right\|^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty \tag{3.1.1}$$

Nous posons la définition suivante

Définition 3.1.1. une suite $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ définie sur Ωet à valeurs dans B est processus autorégréssif Banachique d'ordre p : ARB(p), $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe des opérateurs $\rho_1, \rho_2, ...\rho_p$ dans $\mathcal{L}(B)$, un bruit blanc banachique $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ et un element $a \in B$ tels que

$$X_n - a = \rho_1(X_{n-1} - a) + \rho_2(X_{n-2} - a) + ... + \rho_p(X_{n-p} - a) + \varepsilon_n \; p.s, \quad n \in \mathbb{Z}) \tag{3.1.2}$$

où $\rho_p \neq 0$ et 0 l'opérateur nul.

Remarque 3.1.2. Si $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est solution de (3.1.2) et si les opérateur adjoints $\rho_1^*, \rho_2^*, ...\rho_p^*$ ont un vecteur propre commun $v^* \in B^*$, alors $(v^*(X_n - a),\ n \in \mathbb{Z})$ est un processus autorégressif réel d'ordre p et de bruit blanc $v^*(\varepsilon_n)$, éventuellement dégénéré . Ceci découle directement du fait que par définition $v^*\rho_i^* = \alpha_i v^*$pour i=1,...,p.

3.1.1 Représentation markovienne du processus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$

On note B^p le produit cartésien de p copies de B. C'est un espace de Banach séparable , si on le muni de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_1^p \|x_i\|, \qquad si\ x = (x_1, ..., x_p) \in B^p$$

(cf. ex [25] p.225).

D'autres normes sont utilisées dans la litérature

$$\|x\|_\alpha = \left(\sum_1^p \|x_i\|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \ \alpha > 1$$

$$\|x\|_\infty = max\left\{\|x_i\|, i = 1, 2, .., p\right\}$$

On note A l'opérateur matriciel $(p \times p)$ de B^p , $p \geq 2$ défini par

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \ldots\ldots & \rho_{p-1} & \rho_p \\ I & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & \\ 0 & \ldots. & \ldots & I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

I désigne l'opérateur identité de B. L'opérateur A est lineaire et borné de B^p de norme

$$\|A\| = \sup_{x \in B^p, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_1 .$$

Posons

$$Y_n = {}^t(X_n - a, X_{n-1} - a, \ldots\ldots\ldots., X_{n-p+1} - a)$$

et

$$e_n = {}^t(\varepsilon_n, 0, 0\ldots\ldots\ldots, 0, 0)$$

les vecteurs aléatoires Y_n, e_n sont alors des v.a à valeurs dans l'espace de Banach B^p muni de la Tribu produit $\beta \otimes \beta .... \otimes \beta$ qu'on notera β^p.

L'equation (3.1.2) se tronsforme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en

$$Y_n = AY_n + e_n. \tag{3.1.4}$$

Ainsi le processus $Y = (Y_n, n \in \mathbb{Z})$ est un $ARB^p(1)$. De plus

$$E \|e_n\|_1^2 = E \|\varepsilon_n\|^2 = \sigma_\varepsilon^2 > 0 \tag{3.1.5}$$

et la suite $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc banachique dans B^p

Dans toute la suite , les propriétés du processus $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ se déduisent de celles du processus $Y = (Y_n, n \in \mathbb{Z})$ comme proprietés martingales.

3.1.2 Existence

La proposition suivante établit l'existence d'une solution strictement stationnaire de l'equation (3.1.4).

Proposition 3.1.3. *Si les v.a $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ sont centrés i.i.d et de norme de carré intégrable et si la condition*

$$R := \sum_{i=0}^{\infty} \|A^i\| < \infty,$$

est réalisée alors l'equation (3.1.4) admet une solution strictement stationnaire, presque surement unique. De plus , pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$Y_n = \sum_{i=0}^{\infty} A^i e_{n-i}, \tag{3.1.6}$$

où la serie converge presque surement et dans $L^2_{B^p}$, et la suite $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ constitue l'innovation du processus $Y = (Y_n, n \in \mathbb{Z})$.

La suite $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ est une chaine de Markov ergodique de mesure invariante la loi commune des Y_n et de Probabilité de transition définie par

$$p(y, B) = P(Y_n \in B/Y_0 = y) = P(Ay + e_0 \in B),$$

où $B \in \beta^p$, $y \in B^p$, et $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour tout n la v.a $(A^i e_{n-i}, i \in \mathbb{N})$ sont independantes. La serie (3.1.6) converge presque surement dés qu'elle converge dans $L^2_{B^p}$ ([32],[38]).

Posons pour $m, q \in \mathbb{Z}$ et $m \leq q$

$$\Delta_{m,q} = E \left\| \sum_{i=m}^{q} A^i e_{n-i} \right\|_1^2 .$$

De la stationnarité des $(e_n, n \in \mathbb{N})$, $E\|e_0\| = \sigma_\varepsilon^2$ et de cauchy-Schwarz, on a de (3.1.5)

$$\Delta_{m,q} \leq E \left(\sum_{i=m}^{q} \left\| A^i e_{n-i} \right\|_1 \right)^2$$

$$\leq E \left(\sum_{i=m}^{q} \sum_{j=m}^{q} \left\| A^i \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} \|e_{n-i}\|_1 \left\| A^j \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} \|e_{n-j}\|_1 \right)$$

$$\leq \sum_{i=m}^{q} \sum_{j=m}^{q} \left\| A^i \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} \left\| A^j \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} E \left(\|e_{n-i}\|_1 \|e_{n-j}\|_1 \right)$$

$$\leq \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=m}^{q} \sum_{j=m}^{q} \left\| A^i \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} \left\| A^j \right\|_{\mathcal{L}(B^p)}$$

$$\leq \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{i=m}^{q} \left\| A^i \right\|_{\mathcal{L}(B^p)} \right)^2 .$$

Comme $R = \sum_{i=0}^{\infty} \left\| A^i \right\| < \infty$ donc $\underset{m,q \to \infty}{lim} \Delta_{m,q} = 0$, D'où la convergence de la série (3.1.6) dans $L^2_{B^p}$.

Si (Y_n) est donnée par (3.1.6), alors

$$AY_{n-1}+e_n = A\left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i e_{n-1-i}\right)+e_n$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} A^{i+1} e_{n-1-i}+e_n$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} A^{i} e_{n-i}+e_n$$
$$= Y_n,$$

d' où la relation (3.1.4) . La stricte stationnarité de $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ découle de celle $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ et de la représentation (3.1.6) .

Pour l'unicité p.s , on suppose qu'il existe deux solutions (Y_n^1), (Y_n^2) distinctes vérifiant (3.1.4). On a alors

$$Y_n^1 = e_n + Ae_{n-1} + ... + A^k e_{n-k} + A^{k+1} Y_{n-k-1}^1,$$
$$Y_n^2 = e_n + Ae_{n-1} + ... + A^k e_{n-k} + A^{k+1} Y_{n-k-1}^2.$$

Donc, de la stationnarité de (Y_n^i) et de $E\left\|Y_n^i\right\|_1^2 < \infty$, i=1,2 on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left\|Y_n^1 - Y_n^2\right\|_1 > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\|Y_n^1 - Y_n^2\right\|_1^2$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\|A^{k+1}\left(Y_{n-k-1}^1 - Y_{n-k-1}^2\right)\right\|_1^2$$
$$\leq \frac{2}{\varepsilon^2}\left\|A^{k+1}\right\|^2\left(E\left\|Y_{n-k-1}^1\right\|_1^2 + E\left\|Y_{n-k-1}^2\right\|_1^2\right)$$
$$\leq \frac{K}{\varepsilon^2}\left\|A^{k+1}\right\|^2 \qquad K > 0.$$

Comme R est fini, $\left\|A^{k+1}\right\| \longrightarrow 0$ qd $k \to \infty$, par suite

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad Y_n^1 = Y_n^2 \quad p.s,$$

d' où l'unicité.

Dans le modéle (3.1.4) on associe une chaine de markov strictement stationnaire dans B^p, puisque Y_n est independant de e_i, i>n , .Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $y \in B^p$, représentant l'état initial de la chaine :$Y_0 = y$, l'état de la chaine à l'instant n est Y_n et la probabilité de transition est donnée, pour tout B appartenant à la tribu borélienne β^psur B^p , par

$$p(y, B) = P\left(Y_n \in B/Y_0 = y\right) = P\left(AY_{n-1} + e_n \in B/Y_0 = y\right)$$

$$= P\left(AY_0 + e_1 \in B/Y_0 = y\right)$$
$$= P\left(Ay + e_0 \in B\right).$$

La chaine de Markov $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ admet une mesure P-invariante sur β^pqui est la loi commune des Y_n . En effet , soit ν la loi de Y_0 . Alors pour tout $B \in \beta^p$, on a

$$\nu(B) = P\left(Y_1 \in B\right) = P\left(AY_0 + e_1 \in B\right)$$

$$= \int P\left(AY_0 + e_1 \in B/Y_0 = y\right)\nu(dy)$$
$$= \int p(y, B)\nu(dy),$$

d' où l'invariance de ν. L'ergodidité de la chaine de Markov Y découle de celle $(e_n, n \in \mathbb{N})$ de la représentation (3.1.6) et de la proposition 6.31 dans [13] $\square$

Corollaire 3.1.4. *Si la suite $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})$ vérifie les hypothéses de la proposition 3.1.3 et*

$$R := \sum_{i=0}^{\infty} \left\|A^i\right\| < \infty,$$

alors il existe une solution strictement stationnaire $(X_n, n \in \mathbb{N})$, presque surement unique vérifiant (3.1.2). Dans ce cas

$$X_n = a + \sum_{i=0}^{\infty} A_{11}^i \varepsilon_{n-i},$$

où A_{11}^i est l'élément 1×1 de la matrice A^i et X_n est independante des v.a $(\varepsilon_p, p > n)$.

Démonstration. On note $P = [I, 0, 0, ...0]$ l'opérateur défini par :

$$P: \qquad B^p \longrightarrow B$$

$$(x_1, .., x_p)' \longrightarrow x_1$$

donc

$$X_n - a = PY_n = \sum_{i=0}^{\infty} PA^i e_{n-i},$$

puisque $e_n = {}^t(\varepsilon_n, 0, ..., 0)$ on en déduit alors

$$X_n - a = \sum_{i=0}^{\infty} A_{11}^i \varepsilon_{n-i},$$

où A_{11}^i est l'élément 1×1 de la matrice A^i . Lasuite $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ étant strictement stationnaire et p.s unique , on en déduit que la suite $(X_n, n \in \mathbb{Z})$, ($X_n - a = PY_n$1ere coordonnée de Y_n) est strictement stationnaire et p.s unique. $\square$

La proposition suivante donne une condition suffisante sur les opérateur ρ_i $i = 1, .., p$, pour que (3.1.2) admette une solution strictement stationnaire .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, le corps des réels , on pose

$$P(\lambda) = \lambda^p I - \lambda^{p-1}\rho_1 - .... - \lambda\rho_{p-1} - \rho_p,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda)$ est un opérateur lineaire borné . On note I_{B^p} l'operateur identité de B^p.

Proposition 3.1.5. *Si la suite $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie les conditions de la proposition 3.1.3 et si la condition*

$$\{\lambda \in \mathbb{R}/P(\lambda)\ n'est\ pas\ inversible\ dans\ \mathcal{L}(B)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R}/\, |\lambda| < 1\} \tag{3.1.7}$$

est réalisée , alors l'équation (3.1.2) admet une solution strictement stationnaire presque surement unique donnée dans le corollaire 3.1.4

Démonstration. On montre l'identité suivante valable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$(pour le cas matriciel voir par ex. [3],[17]) :pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M(\lambda)(\lambda I_{B^p} - A)N(\lambda) = \begin{pmatrix} I_B & 0 & 0 & .... & 0 & 0 \\ & I_B & 0 & & 0 & 0 \\ . & 0 & I_B & & & 0 \\ . & & & & & \\ 0 & & & & I_B & \\ 0 & . & . & . & . & P(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.1.8}$$

où

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & -I_B & 0 & .... & . & 0 \\ 0 & 0 & -I_B & . & . & 0 \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ 0 & & & & & -I_B \\ P_0(\lambda) & P_1(\lambda) & . & . & . & P_{p-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$N(\lambda) := \begin{pmatrix} I_B & \lambda I_B & \lambda^2 I_B & .... & & \lambda^{p-1} \\ 0 & I_B & \lambda I_B & .... & & \lambda^{p-2} I_B \\ . & & I_B & & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & .... & I_B & \lambda I_B \\ 0 & . & . & . & 0 & I_B \end{pmatrix}$$

où les opérateurs P_j sont définis par les relations suivantes :

$$P_0(\lambda) := I_B, \quad P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - \rho_{j+1},$$

donc

$$P_j(\lambda) := \lambda^j I_B - \lambda^{j-1}\rho_1 - ... - \lambda\rho_{j-1} - \rho_j, \quad j = 1...p.$$

L'opérateur matriciel $N(\lambda)$ est triangulaire supérieur avec $I_B$sur la diagonale. Donc il est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour la meme raison et en faisant une pérmutation des colonnes de l'opérateur matriciel $M(\lambda)$, on déduit que $M(\lambda)$ est un opérateur inversible de B^p. Par conséquent , de l'équation (3.1.7) , on en déduit que :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}/P(\lambda) \; n'est \; pas \; inversible\} = \{\lambda \in \mathbb{R}/\lambda I - A \; n'est \; pas \; inversible\}$$

$$=: sp(A),$$

où $sp(A)$ désigne le spectre de A.

Par l'hypothese (3.1.7) , on déduit que

$$sp(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}/ \, |\lambda| < 1\} \, ,$$

où $sp(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$ ([25]).

Notons $r_A$le rayon spectral de l'opérateur A . De la propriété $r_A = \underset{n\to\infty}{limsup} \left\|A^n\right\|^{1/n}$([25]) on conclut qu'ils existent $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$et $K > 0$, tq

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \|A^n\| \leq K\alpha^n,$$

d'où la convergence de la série $R = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$. Par conséquent , la proposition découle du corollaire 3.1.4 □

Remarque 3.1.6. .

1) Si B est de dimention finie, donc isomorphe à $\mathbb{R}^m$, la condition (3.1.7) est exactement

la condition classique sur le polynome matriciel $P(\lambda)$:

$$\{\lambda \in \mathbb{R}/P(\lambda) \; n'est \; pas \; inversible\} = \{\lambda \in \mathbb{R}/detP(\lambda) = 0\}$$

$$\subset \{\lambda \in \mathbb{R}/ \, |\lambda| < 1\}$$

c'est à dire les racines du détérminant de $P(\lambda)$ noté $detP(\lambda)$, sont dans l'intervalle $]-1,1[$ .cette condition est nécessaire et suffisante à l'existance de solution strictement stationnaire ([17]).

2) De la preuve de la proposition 3.1.5 on a l'équivalence :

$$(3.1.7) \Leftrightarrow r_A < 1 \Rightarrow R < \infty$$

où r_A désigne le rayon spectral de A.

Le lemme suivant donne une condition simple pour vérifier (3.1.7)

Lemme 3.1.7. *Si* $\sum_{i=1}^{p} \|\rho_i\| < 1$, *alors*

a) la condition (3.1.7) est vérifiée.

b)

$$\{\lambda \in \mathbb{R}/P(\lambda) = 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R}/\, |\lambda| < 1\},$$

où 0 est l'opérateur nul.

Démonstration. a)Supposons que $|\lambda| \geq 1$ on a

$$P(\lambda) = \lambda^p I - \lambda^{p-1}\rho_1 - ..... - \rho_p$$

$$= \lambda^p \left(I - \tfrac{\rho_1}{\lambda} - \tfrac{\rho_2}{\lambda^2} - .. - \tfrac{\rho_p}{\lambda^p}\right).$$

Or pour $|\lambda| \geq 1$:

$$\left\|\tfrac{\rho_1}{\lambda} + .. + \tfrac{\rho_p}{\lambda^p}\right\| \leq \left\|\tfrac{\rho_1}{\lambda}\right\| + ... + \left\|\tfrac{\rho_p}{\lambda^p}\right\|$$

$$\leq \|\rho_1\| + ... + \|\rho_p\|,$$

comme $\sum_{i=1}^{p} \|\rho_i\| < 1$, l'opérateur $I - \frac{\rho_1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\lambda^2} - .. - \frac{\rho_p}{\lambda^p}$ est donc inversible , et par quenséquent , $P(\lambda)$ est inversible. D'où l'inclusion (3.1.7) est vérifiée.

b) Supposons qu'il existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$, et $|\lambda_0| \geq 1$. Donc

$$\rho_p = \lambda_0^p I - \lambda_0^{p-1}\rho_1 - ..... - \lambda_0\rho_{p-1}$$

$$= \lambda_0^p \left(I - \tfrac{\rho_1}{\lambda_0} - \tfrac{\rho_2}{\lambda_0^2} - .. - \tfrac{\rho_{p-1}}{\lambda_0^{p-1}}\right) ,$$

ou encore

$$\frac{1}{\lambda_0^p}\rho_p = \left(I - \frac{\rho_1}{\lambda_0} - \frac{\rho_2}{\lambda_0^2} - .. - \frac{\rho_{p-1}}{\lambda_0^{p-1}}\right) .$$

Commme $|\lambda_0^p| \geq 1$, donc

$$\|\rho_p\| \geq \frac{1}{|\lambda_0^p|}\|\rho_p\| = \left\|I - \frac{\rho_1}{\lambda_0} - ... - \frac{\rho_{p-1}}{\lambda_0^{p-1}}\right\|,$$

d'où

$$\|\rho_p\| \geq 1 - \tfrac{1}{|\lambda_0|}\|\rho_1\| - ... - \tfrac{1}{|\lambda_0^{p-1}|}\|\rho_{p-1}\|$$

$$\geq 1 - \|\rho_1\| - ... - \|\rho_{p-1}\|,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{p} \|\rho_i\| \geq 1.$$

Ce qui est contraire à l'hypothése. □

3.2 Opérateur de covariance et de covariance croisée d'un ARB(p)

Rappelons que X est une v.a centrée à valeurs dans un espace de Banach B séparable et telle que $E\|X\|^2 < \infty$, alors il existe un opérateur lineaire C_X de B^* , dual topologique de B, dans B^{**} bidual de B, tel que pour $x^* \in B^*$:

$$C_x(x^*) = E < X, x^* > X,$$

où $< .,. >$est le crochet de dualité entre B et $B*$. C'est un opérateur positif, symétrique nucléaire et continu de B^{**}([]) :

$$\|C_X\|_{\mathcal{L}} \leq E\|X\|^2, \; et \; trace(C_X) = E\|X\|^2.$$

Si de plus Y désigne une v.a centrés à valeurs dans B, telle que $E\|Y\|^2 < \infty$, il existe alors un opérateur linéaire R_{XY} de B^*dans B^{**} tel que pour tout $x^* \in B^*$:

$$R_{YX}(x^*) = E < Y, x^* > X,$$

R_{XY} est l'opérateur de covariance croisé de X et Y ([? ?]). Notons que $R^*_{YX} = R_{XY}$ et

$$\|R^*_{YX}\|_{\mathcal{L}} \leq E(\|X\| \|Y\|).$$

Dans la suite $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie l'equation (3.1.4)

3.2.1 Equation de Yule-Walker

Proposition 3.2.1. *Si la condition (3.1.7) de la proposition 3.1.5 est vérifiée et si les v.a.* (ε_n) *sont i.i.d et* $E\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$*, alors*

$$EX_n = a, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$R_{X_{n-k}X_n} = \sum_{j=1}^{p} \rho_j R_{X_{n-k}X_{n-j}}, \; \forall k = 1, 2 .... \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$C_{X_n} = \sum_{j=1}^{p} \rho_j R_{X_n X_{n-j}} + C_{\varepsilon_n}, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2.2. On peut supprimer l'indice n dans les formules précédentes par la stricte stationnarité des processus (X_n) et (ε_n) .

Démonstration. Si $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie (3.1.2) alors la suite

$$(Y_n = (X_{n-a}, ..., X_{n-p+1} - a)', n \in \mathbb{Z})$$

vérifie (3.1.4) . Posons : $m = EX_n - a$ et $M = (m, m, ...m)' \in B^P$. De l'equation (3.1.4), On a $M = AM$. D'autre part , la condition (3.1.7) implique que 1 n'est pas dans le spectre de l'opérateur A. (cf. remarque 3.1.6). Par conséquent , A-I est inversible . Donc A-I est injectif, et de l'équation M=AM : (A-I)M=0 , on a donc M=0. par suite $EX_n = a$. D'où la premiére relation. Soit $x^* \in B^*$. On suppose que a=0 . De la définition de l'opérateur croisé et comme l'opérateur espérance E commute avec les ρ_i, on a pour tout k=1,2,... :

$$\begin{aligned}
R_{X_{n-k}X_n}(x^*) &:= E(x^*(X_{n-k})X_n) \\
&= E(x^*(X_{n-k})(\rho_1 X_{n-1} + .. + \rho_p X_{n-p} + \varepsilon_n)) \\
&= \rho_1 E(x^*(X_{n-k})X_{n-1}) + .. + \rho_p E(x^*(X_{n-k})X_{n-p}) \\
&= \rho_1 R_{X_{n-k}X_{n-1}}(x^*) + .. + \rho_p R_{X_{n-k}X_{n-p}}(x^*).
\end{aligned}$$

D'où la deuxiéme relation.

Pour la troisiéme relation , on écrit pour $x^* \in B^*$:

$$\begin{aligned}
C_{X_n}(x^*) &= E < X_n, x^* > X_n \\
&= E < \rho_1 X_{n-1}, ..., \rho_p X_{n-p} + \varepsilon_n, x^* > X_n \\
&= E < X_{n-1}, \rho_1^* x^* > X_n + . + E < X_{n-p}, \rho_p^* x^* > X_n + E < \varepsilon_n, x^* > X_n \\
&= R_{X_{n-1}X_n}(\rho_1^* x^*) + ... + R_{X_{n-p}X_n}(\rho_p^* x^*) + E < \varepsilon_n, x^* > X_n
\end{aligned}$$

Comme la v.a $\varepsilon_n$est indépendante des v.a $(X_{n-i}, i \geq 1)$, et $E\varepsilon_n = 0$, alors

$$\begin{aligned}
E < \varepsilon_n, x^* > X_n &= E < \varepsilon_n, x^* > (\textstyle\sum_{i=1}^p \rho_i X_{n-i} + \varepsilon_n) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^p \rho_i E < \varepsilon_n, x^* > X_{n-i} + E < \varepsilon_n, x^* > \varepsilon_n \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^p \rho_i x^*(E\varepsilon_n) E X_{n-i} \\
&= E < \varepsilon_n, x^* > \varepsilon_n \\
&= C_{\varepsilon_n}(x^*)
\end{aligned}$$

donc

$$R_{X_n}(x^*) = R_{X_{n-1}X_n}(\rho_1^* x^*) + ... + R_{X_{n-p}X_n}(\rho_p^* x^*) + R_{\varepsilon_n}(x^*).$$

Par conséquent

$$C_{X_n} = R_{X_{n-1}X_n}\rho_1^* + ... + R_{X_{n-p}X_n}\rho_p^* + C_{\varepsilon_n}.$$

En passant aux opérateurs conjugués, et du fait que $C_{X_n}^* = C_{X_n}$ et $R_{X_{n-i}X_n}^* = R_{X_n X_{n-i}}$, i=1,...p, on obtient :

$$C_{X_n} = \rho_1 R_{X_n X_{n-1}} + ... + \rho_p R_{X_n X_{n-p}} + C_{\varepsilon_n}.$$

□

3.3 Exemples de processus AR(p) à temps continu

Exemple1

Soit $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ un processus réel du second ordre centré et à accroissements indépendants et strictement stationnaires et a trajectoires localement intégrables. On définit un bruit blanc dans $L^2_{[0,1]}$, en posant :

$$\varepsilon_n(t) = Y(t+n) - Y(n) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $k_1, ..., k_p$ des noyaux définis et continus sur $[0,1]^2$. On pose :

$$\rho_i f(t) = \int_0^1 k_i(s,t) f(s) ds \quad 0 \leq t \leq 1 \quad f \in L^2_{[0,1]},$$

avec

$$\sum_{i=1}^{p} \int \int k_i^2(s,t) ds dt < 1.$$

Donc $\sum_{i=1}^{p} \|\rho_i\| < 1$ puisque $\|\rho_i\|_L \leq \|k_i\|_{L^2}$. Ainsi la condition du lemme 3.1.7 est vérifiée. On obtient alors un ARH(p), en posant (cf. corollaire 3.1.4) :

$$X_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i_{11} \varepsilon_{n-i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

où A est la matrice $p \times p$ définie par (3.1.3) et A^i_{11}est l'element 1×1 de A^i et $H = L^2_{[0,1]}$

Exemple 2 :

On considére une équation différentielle stochastique dans un Hilbert H par :

$$dX_t = b(t, X.)dt + dW_t \qquad t \geq 0, \quad X_0 = 0,$$

où $(W_t, t \geq 0)$, est un processus de Wiener à valeurs dans H, et b(.,.) une application de $\mathbb{R}^+ \times C_H(\mathbb{R}^+)$ ($C_H(\mathbb{R}^+)$est l'espace des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans H), dans H mesurable et non anticipative . Soit $(t_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de réeles positifs strictement croissante telle que $t_0 = 0$ et $\rho_1 ....., \rho_p$ des opérateurs linéaire bornés sur H vérifiant la condition (3.1.7) (voir la proposition 3.1.5) ou $\sum_{i=1}^{p} \|\rho_i\| < 1$ (lemme 3.1.7) . On utilise le drift de Tsirel's ([] []) pour poser :

$$b(t, X.) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\rho_1 \left(\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right) + .. + \rho_p \left(\frac{X_{t_{k-P+1}} - X_{t_{k-p}}}{t_{k-p+1} - t_{k-p}} \right) \right] I_{]t_k, t_{k+1}[}(t).$$

En intégrant l'equation de diffusion entre t_n et t_{n+1} on a :

$$X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = \left[\rho_1 \left(\frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} \right) + .. + \rho_p \left(\frac{X_{t_{n-p+1}} - X_{t_{n-p}}}{t_{n-p+1} - t_{n-p}} \right) \right] (t_{n+1} - t_n) + (W_{t_{n+1}} - W_{t_n}),$$

posons

$$Y_n = \frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} \qquad et \qquad \varepsilon_n = \frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}},$$

alors

$$Y_{n+1} = \rho_1 Y_n + .. + \rho_p Y_{n-p+1} + \varepsilon_{n+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

on obtient donc un ARH(p).

3.4 Théorèmes limites pour les ARB(p)

La géométrie d'un espace de Banach joue un rôle important dans les calculs des probabilités des somme de v.a indépendantes à valeurs dans cet espace. La notion de type ou cotype d'un espace de Banach est primordial dans certains résultats de convergences et des vitesse . Dans cette partie nous présentons des théorèmes limites obtenus dans la thèse de T.Mourid (cf.[65]) :la loi forte des grands nombres et la convergences en moyenne d'ordre $\alpha > 0$ pour la moyenne empirique d'un processus ARB(p), des vitesse de convergence , un théorème central limite et une loi du logarithme itéré compacte .

Soit un processus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifiant (3.1.2). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \qquad \overline{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_1 + .. + \varepsilon_n}{n}.$$

Théorème 3.4.1. *Si les v.a $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ sont centrés i.i.d , $E\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$ et si la condition (3.1.7) est vérifiée , alors la suite $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie la loi forte des grands nombres dans B.*

$$\overline{X_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \;\; p.s$$

Le Théorème suivant fournit une vitesse de convergence dans la LFGN

Théorème 3.4.2. *On suppose que les v.a $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ sont centrés indépendantes et vérifient pour tout $m \geq 2$:*

a)

$$E\|\varepsilon_j\|^m \leq \frac{m!}{2} b_j^2 H^{m-2} \qquad \forall j,$$

où $H > 0$, (b_j) est une suite bornée de réels strictement positives et $B_n := \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$

b)

$$E\left(\|\varepsilon_1 + ...\varepsilon_n\|\right) \leq \beta_n,$$

où (β_n)est une suite de reéls positifs.

Alors , sous la condition (3.1.7) et pour tout $r > 0$ et pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$P\left(\left\|\bar{X}_n - a\right\| > r\right) \leq 2exp\left(-\frac{\bar{r}_n^2}{8}\frac{1}{1 + \frac{\bar{r}_n HK}{B_n}}\right) + C_1 exp(-C_2 nr),$$

où K, C_1, C_2sont des constantes strictemnt positives et

$$\bar{r}_n = \frac{r}{3\left\|(I-A)^{-1}\right\|} n^{1/2} - \frac{\beta_n}{B_n}.$$

Le Théorème suivant donne une LGN en moyenne d'ordre $\alpha > 0$ et une vitesse de convergence.

Théorème 3.4.3. *On suppose que la condition (3.1.7) est vérifiée et que les v.a $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ sont centrées i.i.d et du second ordre , alors*

a) Si B est un espace de Banach de type α , $1 < \alpha \leq 2$, on a

$$E\left\|\bar{X}_n - a\right\|^{\alpha} \leq C_1 \frac{1}{p}\left(\frac{R}{n}\right)^{\alpha}\left(nE\left\|\varepsilon_0\right\|^{\alpha} + pE\left\|X_n - a\right\|^{\alpha}\right),$$

où $C_1 > 0$ et $R = \sum_{i \geq 0}\|A_i\|$.

b) Si B est un espace de Banach de type β , $\beta \geq 2$, $E\|\varepsilon_0\|^{\alpha} < \infty$ et si les opérateurs

$\left(\sum_{j=0}^{n} A^j, n \geq 0\right)$ sont uniformement coersifs de constante $r > 0$, alors

$$E\left\|\bar{X}_n - a\right\|^{\beta} \geq C_2 \frac{1}{p}\left(\frac{r}{n}\right)^{\beta}\left(nE\left\|\varepsilon_0\right\|^{\beta} + pE\left\|X_n - a\right\|^{\beta}\right),$$

où $C_2 > 0$.

c) Si B est un espace de Hilbert et si les opérateurs $\left(\sum_{j=0}^{n} A^j, n \geq 0\right)$ vérifiant la condition de b) , alors

$$\frac{1}{pn} C_2^{'} r^2 \sigma_{\varepsilon}^2 \leq E\left\|\bar{X}_n - a\right\|^2 \leq C_1^{'} \frac{1}{pn^2}\left(n\sigma_{\varepsilon}^2 + pE\left\|X_0 - a\right\|^2\right),$$

où $C_1^{'} > 0$, et $C_2^{'} > 0$.

La condition de coercivité signifie qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in B,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left\|\sum_{j=0}^{n} A^j x\right\| \geq r\,\|x\|.$$

Le théorème suivant donne une convergence en moyenne d'ordre $r > 0$ dans un espace de Banach quelconque.

Théorème 3.4.4. *On suppose que la suite $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ verifie les conditions du théoreme 3.4.2 et que la condition (3.1.7) est réalisée. Alors pour tout $r > 0$:*

$$\lim_{n \to \infty} E\left\|\bar{X}_n - a\right\|^{r} = 0.$$

Le théorème suivant donne un théorème central limite (TCL).

La suite $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie le Théoréme central limite dans B (TCL) si la suite $\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}\right)$ converge en loi dans B.

Théorème 3.4.5. *On suppose que les v.a.* $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ *est centrées i.i.d ,* $E\left\|\varepsilon_0\right\|^2 < \infty$ *, et que la condition (3.1.7) est réalisé . Alors le processus* $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ *vérifie le TCL dans B si et seulement si le processus* $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ *le vérifie. Dans ce cas :*

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - a) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N,$$

où la v.a N est gaussienne centrée dans B, d'opérateur de covariance

$$(I - \rho_1 - \rho_2 - .. - \rho_p)^{-1} R_{\varepsilon_0} {}^t (I - \rho_1 - \rho_2 - .. - \rho_p)^{-1} .$$

Le corollaire suivant donne des conditions suffisantes pour le TCL .

Corollaire 3.4.6. *Si les v.a* (ε_n) sont centrées i.i.d du second ordre , alors chacune des conditions suivantes est suffisante pour que ARB(p) $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie le TCL dans B :

a) B est un espace de Banache de type 2.

b) B est un espace de Banache de type 2 et ε_0 *est prégaussienne.*

c) B est l'espace $C_{[0,1]}$ *et* ε_0 *est sous gaussienne.*

d) $B = C_{[0,1]}$ *et il existe une v.a. positive M de carrée intégrable telle que*

$$|\varepsilon_0(w, s) - \varepsilon_0(w, t)| \leq M(w) |s - t| ,$$

pour $w \in \Omega$ *, et s et t dans* $[0, 1]$.

Chapitre 4

Estimation et prévision d'un processus autorégressifs Hilbertien d'ordre 1 ARH(1)

Dans ce chapitre , nous présentons des résultats sur un modèle (ARH(1)) linéaire fonctionnel obtenus par D. Bosq [10], dont nous nous consacrons aux résultats asymptotiques obtenus dans le cadre du modèle processus autorégressif hilbertien. Notons que les problèmes théoriques posés par ARH(1) se traduisent en termes d'estimation d'un opérateur linéaire. C'est pour quoi, la première section rappelle quelques éléments de théorie des opérateurs linéaires. Dans la deuxième section on donne des rappels et/ou compléments concernant des notions élémentaires autour des variables aléatoires hilbertien (v.a.h), et la Troisième section nous présentons le processus Autorégressifs Hilbertien d'ordre 1 ARH(1) avec ses propriétés asymptotique, et les dernières section nous intéressons à étudier les estimateurs des opérateurs et leurs théorèmes limites.

4.1 Eléments de la théorie des opérateurs linéaires

Cette section est consacré à des rappels sur des notions élémentaires de théorie des opérateurs linéaires. Nous nous en tiendrons à des notions basiques mais néanmoins nécessaires pour pouvoir appréhendes les problèmes statistiques posés par le processus autorégressif hilbertien. Toutefois, pour plus d'information sur la théorie des operateurs linéaires, voir Dunford et Schwartz [24], Gohberg et Krejn [33], Chatelin [19], Kato [39] et Nagy et Riesz [52].

4.1.1 Espaces de Hilbert

Définition 4.1.1. On appelle espace de Banach B tout espace vectoriel normé complet.

Définition 4.1.2. On appelle espace de Hilbert tout espace de Banach muni d'un produit scalaire.

Soit H un espace de Hilbert (ou hilbertien) ; on note $< .,. >_H$, le produit scalaire (p.s.) dans H et $\|.\|_H$ la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 4.1.3. Une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de H est une base hilbertienne (ou dénombrable) orthonormale de H si :
i) $\forall (k,k') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, < v_k, v_{k'} >_H = \delta_{kk'}$
ii) $\forall x \in H, \exists (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k v_k$

Définition 4.1.4. H est dit séparable s'il existe une base dénombrable de H.

4.1.2 Opérateurs linéaires

H, H_1 et H_2 désignent des espaces de Hilbert réels.

Définition 4.1.5. On appelle opérateur linéaire toute application linéaire de H_1dans H_2.

Définition 4.1.6. Soit $(x,y) \in H_1^* \times H_2^*$, prouduit tensoriel de x par y ; noté $x \otimes y$ est défini par :

$$x \otimes y = \begin{cases} H_1 \longrightarrow H_2 \\ u \rightarrow x \otimes y(u) =< u, x > y \end{cases}$$

il est clair que $x \otimes y$ est un opérateur linéaire.

Définition 4.1.7. A est un opérateur borné de H_1 dans H_2 si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout x appartenant à H_1, on a $\|A(x)\|_{H_2} \leq M \|x\|_{H_1}$.

Proposition 4.1.8. *Tout opérateur linéaire est borné si et seulement si il est continu.*

Valeurs propres

Soit H un $\mathbb{C}$ -espace hilbertien et $\mathcal{L}(H)$ le $\mathbb{R}$-e :v : des opérateurs linéaires continus de H dans H et muni de la norme $\|.\|_{\infty}$, appelée norme de la convergence uniforme et dénie par :

$$\forall A \in \mathcal{L}(H) \;\; \|A\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_H = 1} \|A(x)\|_H = \sup_{x \in H^*} \frac{\|A(x)\|_H}{\|x\|_H}.$$

Définition 4.1.9. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On note $sp(A)$ l'ensemble déni par :

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\exists x \in H - \{0\}, A(x) = \lambda x\},$$

i) Tout élément de$sp(A)$ est appelé valeur propre de A alors que $sp(A)$ est dit spectre de A.

ii) Soit un élément de $sp(A)$; $E_\lambda = ker(A - I)$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ ; tout élément non nul de E_λ est appelé vecteur propre de A.

Définition 4.1.10. On appelle valeur singulière de A, toute valeur de l'opérateur $(A^* \circ A)^{\frac{1}{2}}$; si $S(A)$ est ensemble des valeurs singulières de A, on a par dénition :

$$S(A) = sp\left((A^* \circ A)^{\frac{1}{2}}\right).$$

4.1.3 Opérateurs compacts

Définition 4.1.11. $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit compact (ou complètement continu) si l'image par A de toute partie bornée de H_1 est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) dans H_2.

Définition 4.1.12. (équivalente pour des espaces hilbertiens) A est compact si et seulement si il transforme toute suite faiblement convergente dans H_1 en une suite fortement convergente dans H_2.

propriétés pour des opérateurs compacts, auto-adjoints, positifs (ocap) :

Soit A (resp. S) un ocap de H :
1. $sp(A)$ est fini ou dénombrable et $sp(A) \subset \mathbb{R}^+$,
2. le seule point d'accumulation de $sp(A)$ est 0,
3. toute valeur propre λ non nulle est de multiplicité finie ($dimE_\lambda < \infty$),
4. $S(A) = sp(A)$
5. E_λ est orthogonal à E_μ dès que $\lambda \neq \mu$,
6. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ la suite strictement décroissante des valeurs propres de A (i.e. chaque valeurs propre apparaît une seule fois) ; alors

$$\lambda_1 = \sup_{\|u\|_{H=1}} < Au, u >_H,$$

et

$$\lambda_k(A) = \sup_{\left\{u \in H / \|u\|_H = 1, u \in \left(\otimes_{j=1}^{k-1} E_{\lambda_j}\right)^\perp\right\}} < Au, u >_H .$$

7. A ocap $\Rightarrow \|A\|_\infty = \lambda_1(A)$
8. Si S et A sont deux ocap alors $|\lambda_k(S) - \lambda_K(A)| \leq \|S - A\|_\infty (= \lambda_1(S - A))$
9. Soit S et A deux ocap et soit $v_k(s)$ (resp :$\lambda_k(A)$) le vecteur propre S (resp. A) associé à la valeur propre $\lambda_k(S)$ (resp. $\lambda_k(A)$). Alors on a :

$$\|v_k(S) - v_k(A)\|_H \leq \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1(S) - \lambda_1(A)} \|S - A\|_\infty .$$

On appelle suite pleine décroissante des valeurs propres (non nulles) de l'ocap A toute énumération $(\lambda_i(A))_{i \in I}$; où $I \subset \mathbb{N}^*$; chaque valeur propre gurant autant de fois
que son ordre de multiplicité, la suite étant donnée par ordre décroissant.

Définition 4.1.13. Décomposition de Schmidt.
Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ la suite pleine décroissante de valeurs propres ($\neq$) de l'ocap A, $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormal de vecteurs propres (e_i est un vecteur propre unitaire associé à λ_i). Alors, on a :

$$A = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \otimes e_i \quad dans\ \mathcal{L}(H).$$

Conséquences :

i) $A^{1/2} = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes e_i$
ii) si A^{-1}existe alors $A^{-1} = \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) e_i \otimes e_i$

Proposition 4.1.14. ***Caractérisation d'un opérateur compact.*** *$A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto adjoint positif ; A est compact si et seulement si il existe une suite pleine décroissante de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in I}$ tendant vers 0 avec i et une base e_i orthonormale telle que*

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Proposition 4.1.15. *(Dunford et schwartz) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite uniformément convergente vers A d'opérateurs compacts sur H et $(\lambda_i(A))_{i\in I}$ la suite pleine décroissante des valeurs propres non nulles de A. Alors, il existe des énumérations $(\lambda_i(A_n))_{i\in I}$ des valeurs propres non nulles des T_n (chaque valeur propre étant répétée suivant sont ordre de multiplicité) telles que l'on ait, uniformément en i :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in I} |(\lambda_i(A_n) - \lambda_i(A)| = 0.$$

Soit $\Phi_p(A)$ l'application définie par :

$$\Phi_p(A) = \begin{cases} \left(\sum_{i\in I} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & si\ p \in [1, \infty[\\ \\ \sup\limits_{i\in I} |\lambda_i| & si\ p = \infty \end{cases}$$

et on note $\sigma_p(H) = \{A \in \mathcal{L}(H);\ \Phi_p(A) < \infty\}$ et pour tout A appartenant à $\sigma_p(H)$, on pose

$$\|A\|_p = \Phi_p(A)$$

Propriété 4.1

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ on a :

$$\sigma_1(H) \subset \sigma_p(H) \subset \sigma_q(H) \subset \sigma_\infty(H),$$

ce qui revient à écrire de manière équivalente que

$$\|A\|_1 \geq \|A\|_p \geq \|A\|_q \geq \|A\|_\infty .$$

Définition 4.1.16. Opérateur nucléaire. Tout élément de$\sigma_1(H)$ est appelé opérateur nucl éaire sur H et la norme $\|.\|_1$ est dite norme trace $\left(\|A\|_1 = \sum_{i\in I} |\lambda_i| = tr(A)\right)$.

Proposition 4.1.17. Caractérisation d'unopérateur nucléaire . *A est un ocap nucléaire si et seulement si il existe une suite pleine de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in I}$ avec $\sum_{i\in I} |\lambda_i| < \infty$ et une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ telles que*

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Proposition 4.1.18. *Soit A un opérateur autoadjoint positif. A est un opérateur nucléaire si et seulement si il existe une base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ de H telle que $\sum_{i\in I} < A(e_i), e_i >< \infty$; cette somme ne dépendant pas de la base choisie.*

Définition 4.1.19. Opérateur de Hilbert − Schmidt . Tout élément de $\sigma_2(H)$ est appelé opérateur de Hilbert-Schmidt et la norme $\|.\|_2$ est dite norme de Hilbert-Schmidt $\left(\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2}\right)$.

Définition. On appelle produit scalaire de Hilbert-Schmidt, noté $<,>_2$, le p.s. défini par

$$<,>_2: \begin{cases} \sigma_2(H) \times \sigma_2(H) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, A) \rightarrow < S, A >_2 = \sum_{i\in I} < S(e_i), A(e_i) >_H = tr(S^* \circ A) \end{cases}$$

où $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormée de H.

Remarque. Pour tout A appartenant à $\sigma_2(H)$, on a $\|A\|_2 = (< A, A >_2)^{\frac{1}{2}}$.

Proposition. *$(\sigma_2(H), < .,. >_2)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Proposition. Caractérisation desopérateurs de Hilbert − Schmidt. *A est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si pour toute base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H on a $\sum_{i\in I} \|A\|_H^2 < \infty$.*

4.2 Variables aléatoires hilbertiennes

L'objectif de ce paragraphe est donner un certain nombre d'outils nécessaires à la manipulation des variables aléatoires hilbertiennes (v.a.h.).

4.2.1 Notations et définition

Soit H un espace de Hilbert réel séparable (i.e. il existe une base dénombrable) muni du produit scalaire $< .,. >$ On note $\|.,\|$ la norme associée à ce produit scalaire. β_H désigne la tribu borélienne de H ; H' désigne le dual topologique (ensemble des formes linéaires continues) de H. Enfin, (Ω, A, P) est un espace probabilisé.

Définition 4.2.1. Variable aléatoire hilbertienne. Toute application mesurable de (Ω, A) dans (H, β_H) est dite variable aléatoire hilbertienne (v.a.h).

Intégration de v.a.h. :

Soit : $Z : (\Omega, A, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}})$ On pose

$$L^1_{\mathbb{R}} = \left\{ Z : \int_{\Omega} |Z(w)| \, dP(w) < \infty \right\},$$

et on rappelle que Z est $P-$intégrable si, par définition, Z appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, A, P)$. Soit X une v.a.h. et y un élément de H ; si $\|X\|$ est $P-$intégrable, l'application qui à tout élément w de Ω associe le réel $< X(w), y >$ est $P-$intégrable puisque $< X(w), y > \leq \|X(w)\| \, \|y\|$: Par ailleurs, l'application

$$\phi \begin{cases} H \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \phi(y) = \int_{\Omega} < X(w), y > dP(w) \end{cases}$$

est une forme linéaire continue sur H ; d'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément de H, noté EX, tel que

$$\phi(y) = < EX, y > \left(= \int_{\Omega} < X(w), y > dP(w) \right).$$

Définition 4.2.2. Espérance d'une v.a.h.. EX est appelée intégrale de X sur Ω ou encore espérance de X ; EX est aussi notée $\int_{\Omega} X(w) dP(w)$.

Proposition 4.2.3. *Si X est une v.a.h. telle que $\|X\|$ est $P-$intégrable, alors*

$$\|EX\| \leq E \, \|X\| \, .$$

Définition 4.2.4. V.a.h.intégrable. X est une v.a.h. $P-$intégrable si et seulement si $\|X\| \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, A, P)$.

4.2.2 Outils asymptotiques pour v.a.h.

1. Loi des Grands nombres pour des v.a.h.

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.h. dénies sur (Ω, A, P) et à valeurs dans (H, β_H), indépendantes et identiquement distribuées et posons $\overline{X}(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(w)$.

i) **Convergence forte** : Si $E \, \|X_1\| < +\infty$, Alors

$$P \left(\left\{ w \in \Omega / \left\| \overline{X}(w) - X_1(w) \right\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \right) = 1$$

ii) **Convergence enmoyenne quadratique**. Si $E \, \|X_1\|^2 < +\infty$, alors

$$E \left(\left\| \overline{X}(w) - X_1(w) \right\|^2 \right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Théorème de la limite central pour v.a.h :

Soit (H, β_H, Q) un espace probabilisé, H étant un espace de Hilbert réel séparable.

Définition 4.2.5. fonction caractéristique . On appelle fonction caractéristique de Q, notée $\widehat{Q}$, la fonction de H dans $\mathbb{C}$ dénie par :

$$\forall x,\ x \in H,\ \widehat{Q}(x) = \int_H exp\{i < x, y >\} \, dQ(x).$$

Proposition 4.2.6. .
i) $\widehat{Q}$*, est uniformément continue*
ii) Si pour tout x élément de H, $\widehat{Q}_1(x) = \widehat{Q}_2(x)$ *, alors*

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{Q}_2 (ie\ \widehat{Q}\ caractérise\ Q).$$

iii) Si, pour tout f continue bornée, $\int_H f(x)dQ_n(x)$ *converge vers* $\int_H f(x)dQ(x)$ *quand*
n tend vers $+\infty$ *; alors*

$$pour\ tout\ x \in H\ \widehat{Q}_n\ converge\ vers\ Q(x)\ quand\ n\ tends\ vers\ +\infty.$$

Définition 4.2.7. Produit de convolution. On appelle produit de convolution de Q_1 et Q_2, noté $Q_1 \star Q_2$; l'unique mesure de probabilité qui vérie pour toute fonction f continue bornée :

$$\int_H f(x)dQ_1(x) \star dQ_2(x) = \int_H f(x+y)dQ_1(x)dQ_2(y).$$

Propriété $\widehat{Q_1 \star Q_2}(x) = \widehat{Q_1}(x)\widehat{Q_2}(x)$.

On dispose maintenant des notions nécessaires à la dénition d'une variable aléatoire hilbertienne gaussienne :

Définition 4.2.8. La v.a.h. X est une v.a.h. gaussienne dénie sur (H, β_H) si et seulement si, sa loi de probabilité Q est telle que

$$\forall h \in H,\ \widehat{Q}(x) = exp\left\{ i < h, EX > -\frac{1}{2} < \Gamma_X h, h > \right\},$$

où $\Gamma_X = E\left((X - EX) \otimes X\right)$ est appelé opérateur de covariance de la v.a.h. X.

Notation et terminologie : on dit alors que X suit la loi $N_H(EX, \Gamma_X)$; c-à-d la loi
gaussienne d'espérance EX et d'opérateur de covariance Γ_X.

Remarque. X centrée (i.e. $EX = 0 \in H$) implique que $\Gamma_X = E\left(X \otimes X\right)$.

3. Théorème de la limite centrale :

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.h. définies sur (Ω, A, P) et à valeurs dans (H, β_H), indépendantes et identiquement distribuées et posons Alors, la suite $\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi quand n tends vers l'inni vers la loi gaussienne $N_H(0, \Gamma_X)$ (definie sur (H, β_H))

Inégalité de type Bernstein pour des v.a.h.

Soit $X_1, X_2, ...X_h$ n v.a.h. indépendantes telles que :
_ $\forall i = 1, ..., n\ EX_i = 0$,
_ $\forall i = 1, ..., n\ \exists(a_i, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / E\left(\|X_i\|^m\right) \leq \frac{m!}{2} a_i^2 b^{m-2},\ \forall m \geq 2$
Alors , en posant $A_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ on a

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\right\| \geq \varepsilon A_n\right) \leq 2exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(1 + c\frac{\varepsilon b}{A_n})}\right\}.$$

4.3 Processus autorégressifs hilbertiens d'ordre 1

Dans cette section nous rappelons certains résultats de la théorie des processus auto égressifs fonctionnels introduits par Bosq (1991). Nous présentons le processus Autorégressifs Hilbertien d'ordre 1 ARH(1) avec ses propriétés asymptotique .

Soit H un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $< .,. >$ associé à la norme $\|.,\|$, et sa tribu borélienne β. Et ρ un opérateur linéaire borné sur H .

4.3.1 Préliminaires - définitions

Définition 4.3.1. une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$de v.a.H est dite un H-bruit blanc (WN) si :
1)

$$0 < E\left\|\varepsilon_n\right\|^2 = \sigma^2 < \infty,\ E\varepsilon_n = 0$$

et
2) ε_n est orthogonal à ε_m ; $n, m \in \mathbb{Z}$; $n \neq m$ ie :

$$E(< \varepsilon_n, x >< \varepsilon_m, y >) = 0\ x, y \in H \tag{4.3.1}$$

ε est dite un H bruit blanc fort (SWN) si elle satisfait 1)
2') ε_n est une suite i.i.d H-v.a .

Définition 4.3.2. Une suite $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ est H-v.a est appelé un processus **Autorégressifs Hilbertien d'ordre1 ARH(1)** associé à (μ, ε, ρ) si elle est stationnaire et de sorte que

$$X_n - \mu = \rho(X_{n-1} - \mu) + \varepsilon_n \tag{4.3.2}$$

tel que $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ est un H bruit blanc, $\mu \in H$, $\rho \in \mathcal{L}$.

Afin d'etudier l'existence de X, nous introduisons les condtions suivantes :

C0) : $\exists$un entier $j_0 \geq 1$ tq :

$$\left\|\rho^{j_0}\right\|_{\mathcal{L}} < 1.$$

C1) : $\exists a > 0$ et $0 < b < 1$ tq :

$$\left\|\rho^{j_0}\right\|_{\mathcal{L}} \leq a.b^j \quad j \geq 0.$$

Lemme 4.3.3. *C0 et C1 sont equivalentes.*

Théorème 4.3.4. *Si C0 vérifiée Alors (4.3.2) à une solution unique Stationnaire donnée par*

$$X_n = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j(\varepsilon_{n-j}), \tag{4.3.3}$$

où la série converge dans $L^2(\Omega, A, P)$ p.s ,De plus εest le processus d'innovation

Propriété basique de ARH(1) :

Dans la suite nous dirons que ARH(1) est **STANDARD**si $\mu = 0$ et C0 vérifie nous présentons un theoreme de base. C désigne l'opérateur de covariance de X_0

Théorème 4.3.5. *Si X est un standart ARH(1) les relations suivantes sont satisfaites :*

$$C = \rho C \rho^* + C_\varepsilon \text{...............}1,$$

$$C = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j C_\varepsilon \rho *^j \text{.........}2,$$

où la série converge dans sens$\|.\|_N$.

$$C_{X_n,X_m} = C\rho *^{(n-m)} \quad n > m\text{...}3,$$

$$C_{X_m,X_n} = C\rho^{(n-m)} \quad n > m\text{.....}4.$$

4.3.2 Theorémes limites pour les ARH(1)

Dans ce paragraphe , nous allons étudier le comportement asymptotique de $S_n = X_1 + .. + X_n$ où (X_n) est ARH(1).

Lemme 4.3.6. *Si X ARH(1) de moyenne nulle avec l'innovation ε alors*

$$|E < X_0, X_h >| \leq \left\|\rho^h\right\|_{\mathcal{L}} E \left\|X_0\right\|^2 \; h > 0. \tag{4.3.4}$$

Théorème 4.3.7. LFGN.. *Soit X est ARH(1) standard, alors lors $n \longrightarrow \infty$*

$$E \left\|\frac{S_n}{n}\right\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.3.5}$$

et pour tous $B > \frac{1}{2}$

$$\frac{n^{1/4}}{(logn)^B} \frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \; p.s. \tag{4.3.6}$$

Dans la suite on donne le taux exacte de convergence .

Théorème 4.3.8. *Soit X est ARH(1) standard, alors nous avons*

$$\begin{gathered} \left\|nC_{S_n/n} - \textstyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{X_0,X_h}\right\|_N \longrightarrow 0, \\ et \\ nE \left\|\frac{S_n}{n}\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \textstyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} E < X_0, X_h > . \end{gathered}$$

.

Théorème 4.3.9. *Soit X est ARH(1) associé avec (μ, ε, ρ) tel que εest un bruit blanc fort et ρ satisfaisant (C0) alors si $\varepsilon_0 \in \zeta$ ie : $\exists\gamma > 0$ tq $E\left(e^{\gamma\|X_0\|}\right) < \infty$il existe $\alpha_0 > 0$ et $\beta_0 > 0$, qui depend seulement en ρ et ε_0 :*

$$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - \mu\right\| \geq \eta\right) \leq 4exp\left(-\frac{n\eta^2}{\alpha_0 + \beta_0}\right); \; \eta > 0. \tag{4.3.7}$$

Corollaire. $\left\|\frac{S_n}{n}\right\| = O\left(\left(\frac{logn}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s$

Théorème 4.3.10. TCL . *Soit X est ARH(1) associé avec (μ, ε, ρ) tel que εest un bruit blanc fort et ρ satisfaisant (C0) alors :*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) \xrightarrow{D} N(0, \Gamma) \tag{4.3.8}$$

tel que $\Gamma = (I - \rho)^{-1} C_\varepsilon (I - \rho^*)^{-1}$.

4.4 Estimation de l'opérateur d'Auto-covariance pour ARH(1)

4.4.1 Estimation des opérateurs de covariance et de covariance croisée

Estimateur de l'operateur de covariance

Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ est ARH(1) standard associé avec (ε, ρ) tel que εest un bruit blanc fort et :

$$E\|X_0\|^4 < \infty. \tag{4.4.1}$$

dans cette partie est consacrée à l'estimation de l'opérateur de covariance C défini par :

$$C(x) = E\left(< X_0, x > X_0\right). \quad x \in H \tag{4.4.2}$$

Si $X_1, ..., X_n$ sont des obsevations , l'estimation naturel de C est **Operateur de Covariance Emperique** definie comme :

$$C_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} < X_i, x > X_i, \qquad x \in H, \tag{4.4.3}$$

ou de façon plus compacte :

$$C_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \otimes X_i, \qquad x \in H, \tag{4.4.4}$$

$C_n$est de dimension finie , il se ensuite que qu'il est nucleaire et donc est de Hilbetr-Schmid.

Estimateur de l'operateur de covariance croisée

Soit X est ARH(1) de moyenne nulle son opérateur de covarinace croisée de l'ordre h est définie cmme :

$$C_h(x) = C_{X_0, X_h}(x) = E\left(< X_0, x > X_h\right), \tag{4.4.5}$$

ou encore

$$C_h = E\left(X_0 \otimes X_h\right); \qquad h \geq 1. \tag{4.4.6}$$

Un estimateur naturel de $C_h$est **Operateur de Covariance Croisée Emperique** d'ordre h , est définie comme

$$C_{h,n}(x) = \frac{1}{n-h}\sum_{i=1}^{n-h} X_i \otimes X_{i+h}, \qquad x \in H \tag{4.4.7}$$

avec $1 \leq h \leq n-1$. Si $h > n-1$ nous avons fixé $C_{h,n} = 0$, il est claire que $C_{h,n}$ est un operateur nucleaire donc il est de Hilbert-Shmid.

De plus

$$EC_{h,n} = C_h, \qquad 1 \leq h \leq n-1,$$

par commidité nous ecrivons $D_n$au lieu de $C_{1,n}$.

4.4.2 Estimation des valeurs propres de C

Estimation des valeurs propres de C est on un grand interet car elles sonr relié a **Analyse Des Données** du processus observée (voir : Ramsay et Sliverman (1997)).

Rappelons que C admet la décomposition Spectrale

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j v_i \otimes v_i \tag{4.4.8}$$

tel que (v_j) est un systeme orthogonal complet dans H et (λ_j) est une suite décroissante de nombre réels positifs tel que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$, nous avons donc

$$C(v_j) = \lambda_j v_j, \qquad j \geq 1. \tag{4.4.9}$$

L'estimateur de ces paramétres sont Les **Valeurs Propre Emperique** définies par :

$$C_n(v_j) = \lambda_{jn} v_{jn}, \qquad j \geq 1 \tag{4.4.10}$$

avec $\lambda_{1n} \geq ... \geq \lambda_{nn} \geq \geq 0 = \lambda_{n+1,n} = \lambda_{n+2,n} = ...$ et (v_{jn}) constitues un systeme orthonormé complet dans H.

4.5 Estimation de l'opérateur d'Auto-corrélation ρ pour ARH(1)

Dans ce paragraphe on va introduire un estimateur de ρ basé sur la relation :

$$D = \rho C \tag{4.5.1}$$

En effet , on va traiter deux cas

1er Cas : Si C^{-1}existe

2eme Cas : Si C n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$ (ie, le cas général).

4.5.1 Estimation et analyse asymptotique de l'opérateur ρ cas C^{-1} existe

Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ est un processus ARH(1) standard et si $\exists\ j_0$ tel que $\left\|\rho^{j_0}\right\|_{\mathcal{L}} < 1$ dans cette section nous supposons que H est de **Dimention finie** ie : $dimH = k$. Ainsi H est **isomorphe** à $\mathbb{R}^k$ son produit scalaire

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$$

avec $x = (x_1, ..., x_k)$ et $y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$.

Le debut est d'estimer ρ a partir de données $X_1, ...X_n$, de (4.5.1) on a

$$D = \rho C,$$

si C est inversible nous avons :

$$\rho = DC^{-1}, \tag{4.5.2}$$

on définit l'estimateur $\widehat{\rho}_n$ de ρ à travers les estimateurs C_n de C et D_n de D qui sont donnés par :

$$C_n = \frac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} < X_i, . > X_i$$
$$Et$$
$$D_n = \frac{1}{n-1} \textstyle\sum_{i=1}^{n} < X_i, x > X_{i+1}$$

ainsi

$$\widehat{\rho}_n = D_n C_n^{-1} \tag{4.5.3}$$

sous l'hypothése que C_n est inversible.

Etude Asymptotique le cas C^{-1}existe :

Nous allons précisé le comportement de $\widehat{\rho}_n$ par rapport a ρ quand n tend vers l'infini. Nous avons besoin de l'hypothes générale suivante :

HypothéseA :

A1 : X est un standard ARH(1) avec $dimH < +\infty$
A2 : $E\left\|X\right\|^4 < \infty$
A3 : (ε_n) est un bruit blanc fort
A4 : C est inversible
A5 : C_n est p.s sure inversible pour $n \geq k$

Théorème 4.5.1. *Si A verifiée , alors :*

$$\frac{n^{1/4}}{(logn)^B} \left\|\widehat{\rho}_n - \rho\right\|_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0,\ p.s \quad B > \frac{1}{2}. \tag{4.5.4}$$

Théorème 4.5.2. *Si A est vérifiée et $\|X_0\|$ est bornée , alors pour tout $\eta > 0$*

$$P\left(\|\widehat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{L}} \geq \eta\right) \leq 16exp\left(-\frac{n\lambda_k^2\eta'^2}{a + b\lambda_k\eta'}\right) \tag{4.5.5}$$

avec $\eta' = min\left(\eta, \frac{\eta}{\|D\|_{\mathcal{L}}\|C^{-1}\|_{\mathcal{L}}}, 2\right)$ *et* $a > 0, b > 0$.

Théorème 4.5.3. *Si A vérifiée , alors*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n - \rho\right) \xrightarrow{Loi} N', \tag{4.5.6}$$

avec N' est un opérateur aleatoire Gaussien de moyenne nulle.

4.5.2 Estimation et analyse asymptotique de ρ le cas général

Dans ce cas C n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$ (ie : C^{-1} n'est pas bornée). En effet ,en utilisant la décomposition de Schmidt de C :

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j v_i \otimes v_i,$$

il vient que

$$C^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} v_i \otimes v_i, \quad avec \lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0.$$

L'estimateur que nous allons introduire est inspiré de celui **Bosq(1991)** dans le cadre de processus autoregressifs Hilbertien. Par ailleur il est clair que $dim(ImC_n) \leq n$, on note $\widehat{\lambda}_1 \geq \widehat{\lambda}_2 \geq ....\widehat{\lambda}_n \geq 0 = \widehat{\lambda}_k \ k \geq n+1$ les valeurs propres de C_n, et $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, ...,$, les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres .

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entier positifs tq $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ avec $q_n \leq n$ et soit $\widehat{H}_{q_n}$ le sous espace vectoriel de H engendré par $\{\widehat{v}_j,\ j = 1, ..., q_n\}$ et $\widehat{\Pi}_{q_n}$ etant la projection orthogonal sur $\widehat{H}_{q_n}$:

$$\widehat{\Pi}_{q_n} = \sum_{j=1}^{q_n} \widehat{v}_j \otimes \widehat{v}_j$$

Définition 4.5.4. On suppose que :

B1 : $\lambda_1 > \lambda_2 > .. > \lambda_j > .. > 0$

B2 : $\widehat{\lambda_{q_n}} > 0$

on définit :

$$\widehat{C}_n = \widehat{\Pi}_{q_n} C_n = \sum_{j=1}^{q_n} \widehat{\lambda}_j < \widehat{v}_j, . > \widehat{v}_j,$$

ainsi

$$\widehat{C}_n^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \widehat{\lambda}_j^{-1} < x, \widehat{v}_j > \widehat{v}_j, \quad x \in \widehat{H}_{q_n},$$

l'estimateur $\widehat{\rho}_n$ de ρ est donné par :

$$\widehat{\rho}_n = \widehat{\Pi}_{q_n} D_n \widehat{C}_n^{-1} \widehat{\Pi}_{q_n}. \tag{4.5.7}$$

Etude asymptotique de ρ :

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés asymptotique de $\widehat{\rho}_n$ dans le cas général . Soit (X_n) est un standard ARH(1) , on cosidére le cas général , Bosq a montré la convergence de $\widehat{\rho}_n$ en norme linéaire.

Soit :

$$a_j = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} & si\ j = 1 \\ \\ \frac{2\sqrt{2}}{min(\lambda_{j-1} - \lambda_j, \lambda - \lambda_{j+1})} & si\ j > 1 \end{cases}$$

Théorème 4.5.5. *Supposons que $E\|X\|^4 < \infty$ et $\lambda_1 > \lambda_2 > .. > \lambda_j > .. > 0$ et $\widehat{\lambda}_{q_n} > 0$ et ρ est de Hilbert-Chmidt. Alors si pour tout $B > 1$*

$$\lambda_{q_n}^{-1} \sum_{j=1}^{q_n} a_j = O\left(\frac{n^{1/4}}{(logn)^B}\right),$$

on a

$$\|\widehat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0,\ p.s, \tag{4.5.8}$$

si de plus $\|X_0\|$ bornée alors

$$P\left(\|\widehat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{L}} \geq \eta\right) \leq C_1(\eta) exp\left(-C_2(\eta) n \lambda_{q_n}^2 \left(\sum_{j=1}^{q_n} a_j\right)^{-2}\right), \tag{4.5.9}$$

$\eta > 0$, $n \geq \eta(n)$,et $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$ sont deux constante positifs .

Ainsi

$$\frac{n\lambda_{q_n}^2}{logn\left(\sum_{j=1}^{q_n} a_j\right)} \to 0 \ implique\ \|\widehat{\rho}_n - \rho\|_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0,\ p.s.$$

Théorème 4.5.6. *Si les hypothéses suivant*

- $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_2 > ....\widehat{\lambda}_{q_n} > 0$, p.s
- $\lambda_1 > \lambda_2 > .. > \lambda_j > .. > 0$
- $E \|X\|_H^4 < \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda_{q_n}^4 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda_{q_n}^2 \left(\sum_{j=1}^{q_n} a_j\right)^{-2} = +\infty$

sont satisfaites, alors

$$\|\widehat{\rho}_n - \rho\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,. \qquad \textit{en Proba} \tag{4.5.10}$$

Le probléme de la convergence faible pour $\widehat{\rho}_n$ est assez complexe nous indiquons un resultat établit par **Mas(1999)** :

Théorème 4.5.7. *Supposons que A1, B1, B2, sont vérifiées et si les conditions ci-dessous*

- C_n^{-1} existe sur $\widehat{H}_{q_n}$
- $E \left\|C^{-1}(\varepsilon_0)\right\|^2 < \infty$
- $n\lambda_{q_n}^2 \longrightarrow \infty$, et $n^{-1} \sum_{j=1}^{q_n} a_j \lambda_j^{-2} < \infty$
- $\lambda_j \hat{\lambda}_j^{-1}$ est bornés en Probabilité pour tout j

sont satisfaites, alors on a

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n - \widehat{\Pi}_{q_n}\rho\right) \xrightarrow[H-S]{Loi} N$$

où N v.a Gaussienne.

Chapitre 5

Complete convergence of moving average processes with ψ-mixing sequences

Ce chapitre fait l'objet d'une publication paru dans International Journal of Statistics and Economics ; [Formerly known as the "Bulletin of Statistics & Economics "] , 2015, Vol. 16 (2).

ABSTRACT

Let $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ be a doubly infinite sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables and $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ an absolutely summable sequence of real numbers. In this paper, we prove the complete convergence of $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i / n^{1/t}; n \geq 1\}$ under some suitable conditions.

Keywords :

Complete convergence, moving average ,ψ-mixing.

5.1 Introduction

We Assume that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a doubly infinite sequence of identically distributed random variables. Let $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ be an absolutely summable sequence of real numbers and

$$X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i, k \geq 1. \tag{5.1.1}$$

Under independence assumptions, i.e., $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of independent random variables, many limiting results have been obtained for the moving average process $\{X_k, k \geq 1\}$. For example, Ibragimov(1962) has established the central limit theorem for $\{X_k, k \geq 1\}$. Burton and Dehling(1990) have obtained a large deviation principle for $\{X_k, k \geq 1\}$ with $Eexp(tY_1) < \infty$ for all t and Liet al.(1992) have obtained the following result on complete convergence.

Théorème 5.1.1. *Suppose $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables. Let $\{X_k, k \geq 1\}$ be defined as (5.1.1) and $1 \leq t < 2$. Then $EY_1 = 0$ and $E \mid Y_1 \mid^{2t} < \infty$ imply*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} X_k \right| \geq n^{\frac{1}{t}} \varepsilon \right\} < \infty \, for \, all \, \varepsilon > 0$$

5.2 Main results

Under dependence assumption, few results for $\{X_k, k \geq 1\}$ are known. In this paper, we shall extend Theorem 5.1.1 to the case of ψ-mixing dependence. We suppose that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables. i.e,

$$\psi(n) = \sup_{k \geq 1} \psi(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

where

$$\mathcal{F}_n^m = \sigma(Y_k, n \leq k \leq m) and \psi(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sup_{\substack{A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\\ P(A).P(B)>0}} \left| \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(A)P(B)} \right|$$

The consepts of ψ-mixing random variables were introduced by J.R. Blum, D.L. Hanson, L. Koopmans (1963).

Théorème 5.2.1. *Suppose that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables with $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi(n) < \infty$ and that $\{X_k, k \geq 1\}$ is defined as in (5.1.1). Let $h(x) > 0 (x > 0)$ be a slowly varying function and $1 \leq t < 2$, $r \geq 1$. Then $EY_1 = 0$ and $E(|Y_1|^{rt}h(|Y_1|^t) < \infty$ imply*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq n^{\frac{1}{t}}\varepsilon\right\} < \infty \; for\; all\; \varepsilon > 0.$$

Throughout the sequel, C will represent a positive constant although its value may change from one appearance to the next, and $a_n \lll b_n$ will mean $a_n = O(b_n)$

Observe that

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{j+i}Y_i$$

set $a_{ni} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j+n}$ then

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}Y_i$$

The following lemma comes from Burton and Dehling(1990)

Lemme 5.2.2. *Let $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ be an absolutely convergent series of real numbers with $a = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ and $k \geq 1$. Then*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right|^k = |a|^k.$$

The following lemma will be useful. A proof appears in (Wang and Yang 2010).

Lemme 5.2.3. *Let $\{Y_n, n \geq 1\}$ be a sequence of ψ-mixing random variables satisfying $\sum\limits_{n=1}\psi(n) < \infty$, $\quad q \geq 2$ Assume that $EY_n = 0$ and $E|Y_n|^q < \infty \; for\; each\; n \geq 1$.*

Then there exists a constant C, depending only on q and $\psi(.)$ such that

$$E\left(\max_{1\le j\le n}\left|\sum_{i=a+1}^{a+j} Y_i\right|^q\right)\le C\left[\sum_{i=a+1}^{a+n} E\left|Y_i\right|^q+\left(\sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]$$

for every $a\ge 0$ and $n\ge 1$. In particular, we have

$$E\left(\max_{1\le j\le n}\left|\sum_{i=1}^{j} Y_i\right|^q\right)\le C\left[\sum_{i=1}^{n} E\left|Y_i\right|^q+\left(\sum_{i=1}^{n} EY_i^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]. \tag{5.2.1}$$

Démonstration. [Proof of Theorem 5.2.1] Recall that $\sum_{k=1}^{n} X_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k}Y_i=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}Y_i$

From Lemma 5.2.2, we can assume, without loss of generality, that

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|\le n,\ n\ge 1 \quad\text{and}\quad \widetilde{a}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\le 1.$$

Let $S_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}Y_iI\left\{|a_{ni}Y_i|\le n^{1/t}\right\}$ Then

$$\begin{aligned}
n^{-1/t}\mathbb{E}|S_n| &= n^{-1/t}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}\mathbb{E}Y_iI\left\{|a_{ni}Y_i|>n^{1/t}\right\}\right| \\
&\le n^{-1/t}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|\mathbb{E}|Y_1|I\left\{|a_{ni}Y_i|>n^{1/t}\right\} \\
&\le n^{-1/t}n\mathbb{E}|Y_1|I\left\{\widetilde{a}|Y_1|>n^{1/t}\right\} \\
&\le n^{-1/t}n\mathbb{E}|Y_1|I\left\{|Y_1|>n^{1/t}\right\} \\
&\le \mathbb{E}|Y_1|^tI\left\{|Y_1|>n^{1/t}\right\}\longrightarrow 0 \quad\text{as}\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

So, for large enough n we have $n^{-1/t}E\left|S_n\right|<\varepsilon/2$. Then

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|\ge n^{1/t}\varepsilon\right\} &\le C\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)\mathbb{P}\left\{\max_i|a_{ni}Y_i|>n^{1/t}\right\}\right. \\
&\quad\left.+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)\mathbb{P}\left\{|S_n-\mathbb{E}S_n|\ge n^{1/t}\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right] \\
&= I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Set $I_{nj} = \left\{ i \in \mathbb{Z}; (j+1)^{-1/t} < |a_{ni}| \leq j^{-1/t} \right\}$, $j = 1, 2, \ldots$. Then $\cup_{j\geq 1} I_{nj} = \mathbb{Z}$. Note that(cf. Li et al. 1992)

$$\sum_{j=1}^{k} (\sharp I_{nj}) \leq n(k+1)^{1/t}$$

– • For I_1, we have

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(|a_{ni} Y_i| > n^{1/t} \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} \mathbb{P}\left(|Y_1| > (jn)^{1/t} \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) \sum_{k \geq jn} \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{[k/n]} (\sharp I_{nj}) \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + 1 \right)^{1/t} n \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} h(n) n^{-1/t} \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/t} \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&< C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} n^{r-1} h(n) n^{-1/t} k^{1/t} \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&< C \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1/t} h(k) k^{1/t} \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{r} h(k) \mathbb{P}\left(k \leq |Y_1|^t < k+1 \right) \\
&\leq C \mathbb{E} |Y_1|^{rt} h(|Y_1|^t) < \infty.
\end{aligned}$$

– • For I_2, we have for $q \geq 2$, by Lemma 2 and markov's inequality,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} n^{1/t}\right\} &\leq Cn^{-q/t}\mathbb{E}\left|S_n - \mathbb{E}S_n\right|^q \\
&\leq Cn^{-q/t}\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 \mathbb{E}Y_1^2 I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq n^{1/t}\right\}\right)^{q/2}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}|a_{ni}Y_1|^q I\left\{|a_{ni}Y_1| < n^{1/t}\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 \mathbb{E}Y_1^2 I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq n^{1/t}\right\}\right)^{q/2} \\
&\quad + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}|a_{ni}Y_1|^q I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq n^{1/t}\right\} \\
&= I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

If $r \geq 2$, we choose q large enough such that $q(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}) > r - 2$, then

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 \mathbb{E}Y_1^2\right)^{q/2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})} < \infty,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}} \mathbb{E}|a_{ni}Y_1|^q I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq n^{1/t}\right\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/t}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{|Y_1|^t \leq n(j+1)\right\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/t}\sum_{0\leq k\leq (j+1)n} \mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_1|^t < k+1\right\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/t}\sum_{k=0}^{2n} \mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_1|^t < k+1\right\} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-q/t}\sum_{k=2n+1}^{(j+1)n} \mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_1|^t < k+1\right\} \\
&= I_5 + I_6.
\end{aligned}$$

Note that for $q \geq 1$ and $m \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}| \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} |a_{ni}| \geq \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-1/t} \\ &\geq \sum_{j=m}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-1/t} \geq \sum_{j=m}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-q/t}(m+1)^{(\frac{q}{t}-\frac{1}{t})}. \end{aligned}$$

So,

$$\sum_{j=m}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-q/t} < Cnm^{-(q-1)/t}.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t}.n\sum_{k=0}^{2n} \mathbb{E}|Y_1|^q I\{k \leq |Y_i|^t < k+1\} \\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[\frac{k}{2}]}^{\infty} n^{r-1}h(n)n^{-q/t}\mathbb{E}|Y_1|^q I\{k \leq |Y_i|^t < k+1\} \\ &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} k^{r-\frac{q}{t}}h(k)\mathbb{E}|Y_1|^q I\{k \leq |Y_i|^t < k+1\} \\ &\leq C\mathbb{E}|Y_1|^{rt}h(|Y_1|^t) < \infty, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} I_6 &< C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \sum_{j \geq \frac{k}{n}-1} (\sharp I_{nj}) j^{-q/t}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_1|^t < k+1\right\} \\ &< C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}h(n)n^{-q/t} \sum_{k=2n+1}^{\infty} n(\frac{k}{n})^{-(q-1)/t}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_i|^t < k+1\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}h(n)n^{-1/t} \sum_{k=2n+1}^{\infty} k^{-\frac{q-1}{t}}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_i|^t < k+1\right\} \\ &< C\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{[k/2]} n^{r-1}h(n)n^{-1/t}k^{-\frac{q-1}{t}}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_i|^t < k+1\right\} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k^r h(k)k^{-1/t}k^{-\frac{q-1}{t}}\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_i|^t < k+1\right\} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k^{r-\frac{q}{t}}h(k)\mathbb{E}|Y_1|^q I\left\{k \leq |Y_i|^t < k+1\right\} \\ &\leq C\mathbb{E}|Y_1|^{rt}h(|Y_i|^t) < \infty. \end{aligned}$$

So, $I_4 < \infty$ and then $I_2 < \infty$. If $r < 2$, we choose $q = 2$. Then

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} h(n) n^{-2/t} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}|a_{ni}Y_1|^2 I \left\{ |a_{ni}Y_1| \leq n^{1/t} \right\}.$$

Similary to I_4, we have $I_2 < \infty$.

□

Bibliography

1. Burton, R. M. and Dehling, H. Large deviation for some weakly dependent random process, Statist. Probab. Lett., Vol. 9, (1990), pp. 397-401.
2. Hsu, P. L. and Robbins, H. Complete convergence and the law of large numbers, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 33, (1947), pp. 25-31.
3. Ibragimov, I. A. Some limit theorems for stationary processes, Theory Probab. Appl., Vol. 7, (1962), pp. 349-382.
4. Li, D. L. Rao M. B. and Wang, X. C. Complete convergence of moving average processes, Statist, Probab. Lett., Vol. 14, (1992), pp. 111-114.
5. Blum, J. R. Hanson, D. L. and Koopmans, L. On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes, Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, (Springer-Verlag). Vol. 2(1), (1963), pp. 1-11.
6. Wang, X. Hu, S. Shen, Y. and Yang, W. Maximal inequality for -mixing sequences and its applications, Appl. Math. Lett., Vol. 23, (2010), pp. 1156-1161.

Chapitre 6

Complete moment convergence of moving average processes under ψ-mixing assumptions

Ce chapitre fait l'objet d'un travail soumis au International Journal of Statistics and Economics ; [Formerly known as the "Bulletin of Statistics & Economics "].

ABSTRACT

Let $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ be a doubly infinite sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables with zero means and finite variance and $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ an absolutely summable sequence of real numbers. In this paper, we prove the complete moment convergence of $\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k}Y_i/n^{1/p}; n \geq 1\}$ under some suitable conditions, i.e., we extend Theorem 1.1 of Li and Zhang [Li, Y.X., Zhang, L.X., Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions. Statist. Probab. Lett. 70(2004), 191–197] to the ψ-mixing case.

Keywords :

Complete moment convergence, moving average ,ψ-mixing.

6.1 Introduction

We Assume that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a doubly infinite sequence of identically distributed random variables with zero means and finite variance. Let $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ be an absolutely summable sequence of real numbers and

$$X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k}Y_i,\ k \geq 1 \tag{6.1.1}$$

Under independence assumptions, i.e., $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of independent random variables, many limiting results have been obtained for the moving average process $\{X_k, k \geq 1\}$. Zhang (1996) extended Theorem 5.1.1 to the ϕ-mixing case and Baek, Kim, and Liang (2003) discussed the complete convergence of moving average processes under negative association assumption and Liang (2000) obtained some general results on the complete convergence of weighted sums of negatively associated random variables, including moving average processes.

When $\{X_k, k \geq 1\}$ is a sequence of i.i.d random variables with mean zeros and positive finite variances, Chow (1988) obtained the following result on the complete moment convergence :

Théorème 6.1.1. *Suppose that $\{X_k, k \geq 1\}$ is a sequence of i.i.d random variables with $EX_1 = 0$. For $1 \leq p < 2$ and $r > p$, if $E\{|X_1|^r + |X_1|\log(1+|X_1|)\} < \infty$, then for any $\varepsilon > 0$, we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} E\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right| - \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^{+} < \infty.$$

Recently Li and Zhang (2004) showed that this kind of result also holds for moving average processes under negative association as follows :

Théorème 6.1.2. *Suppose $\{X_k, k \geq 1\}$ is defined as (6.1.1), where $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of real numbers with $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ and $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of identically distributed and negatively associated random variables with $EY_1 = 0$, $EY_1^2 < \infty$ Let $h(x) > 0 (x > 0)$ be a slowly varying function and $1 \leq p < 2$, $r \geq 1 + p/2$. Then $E\left(|Y_1|^r h\left(|Y_1|^p\right)\right) < \infty$ implies*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\left\{|S_n| - \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^+ < \infty$$

where

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \ n \geq 1.$$

In this paper we shall extend Theorem 6.1.2 to the ψ-mixing case.

6.2 Main results

We suppose that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables. In this part, we study the complete moment convergence of $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i / n^{1/t}; n \geq 1\}$ in some suitable conditions. We extend Theorem 6.1.2 from Li and Zhang [44].

Our main result is as follows :

Théorème 6.2.1. *Set $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$,where $\{X_k, k \geq 1\}$ is defined as (6.1.1). Suppose that $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables with $EY_1 = 0$, $E(|Y_1|^q) < \infty$ for some $q \geq 2$, and $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi(n) < \infty$, where $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ is a sequence of real numbers with $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$. Let $h(x) > 0 (x > 0)$ be a slowly varying function and $1 \leq p < 2$, $r \geq 1 + p/2$. Then $E\left(|Y_1|^r h\left(|Y_1|^p\right)\right) < \infty$ implies*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\left\{|S_n| - \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^+ < \infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{6.2.1}$$

Remarque. let $a_{i+k} = 1, i = k$; $a_{i+k} = 0, i \neq k, 1 \leq k \leq n$. Then $X_k = Y_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Hence Theorem 26.2.1 holds when $\{X_k, k \geq 1\}$ is a sequence of identically distributed and ψ-mixing random variables.

Corollaire 6.2.2. *Under the conditions of Theorem 6.1.2* $E\left(\left|Y_1\right|^r h\left(\left|Y_1\right|^p\right)\right)<\infty$ *implies*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\left\{\left|S_n\right|>\varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}<\infty \tag{6.2.2}$$

for all $\varepsilon>0$.

To demonstrate this theorem uses the lemmas indicate the previous chapter (ie Lemma 5.2.2 and Lemma 5.2.3)

Démonstration. By Theorem 6.2.1 we have

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) E\left\{\left|S_n\right|-\varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^{+} \\
& =\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) \int_0^{\infty} P\left\{\left|S_n\right|-\varepsilon n^{\frac{1}{p}}>x\right\} d x \\
& =\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) P\left\{\left|S_n\right|>(\varepsilon+y) n^{\frac{1}{p}}\right\} n^{\frac{1}{p}} d y \\
& =\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} h(n) P\left\{\left|S_n\right|>(\varepsilon+y) n^{\frac{1}{p}}\right\} d y<\infty .
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Hence from (6.2.3) the result (6.2.2) follows. □

Démonstration. [Proof of theorem 6.2.1] Recall that

$$\sum_{k=1}^n X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{i+k} Y_i=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n i} Y_i,$$

where $a_{ni}=\sum_{k=1}^n a_{i+k}$.

From Lemma 5.2.2, we can assume, without loss of generality, that

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|a_{n i}\right| \leq n, \; n \geq 1 \text { and } \tilde{a}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|a_i\right| \leq 1 .$$

Le t $S_n=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} Y_i I\left\{\left|a_{ni} Y_i\right| \leq x\right\}$. First note that for $x>n^{\frac{1}{p}}$,

$$x^{-1} E\left|S_n\right|=x^{-1}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n i} E Y_i I\left\{\left|a_{n i} Y_i\right|>x\right\}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|\,E\,|Y_1|\,I\left\{|a_{ni}Y_i|>x\right\}\\
&\leq x^{-1}nE\mid Y_1\mid I\left\{\tilde{a}\,|Y_1|>x\right\}\\
&\leq x^{-1}nE\mid Y_1\mid I\left\{|Y_1|>x\right\}\\
&\leq x^{-1}x^{p}E\mid Y_1\mid I\left\{\tilde{a}\,|Y_1|>x\right\}\\
&\leq E\,|Y_1|^{p}\,I\left\{|Y_1|>x\right\}\to 0\,as\,x\to\infty.
\end{aligned}$$

So, for x large enough we have $x^{-1}E\,|S_n|<\varepsilon/2$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)E\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|-\varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^{+}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{\varepsilon n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|\geq x\right\}dx\;(posons\;x=\varepsilon x')$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\varepsilon\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|\geq \varepsilon x'\right\}dx'\;(posons\;x=x')$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\varepsilon\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\left(P\left\{\sup_i|a_{ni}Y_i|\geq x\right\}+P\left\{|S_n-ES_n|\geq x\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)dx$$

$$=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\varepsilon\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}(I_1+I_2)\,dx,$$

where $I_1=P\left\{\sup_i|a_{ni}Y_i|>x\right\}$ and $I_2=P\left\{|S_n-ES_n|\geq x\frac{\varepsilon}{2}\right\}$

set $I_{nj}=\left\{i\in\mathbb{Z};(j+1)^{-\frac{1}{p}}<|a_{ni}|\leq j^{-\frac{1}{p}}\right\}$, $j=1,2,....$ Then $\underset{j\geq 1}{\cup}I_{nj}=\mathbb{Z}$.

Note that(cf. Li et al. 1992)

$$\sum_{j=1}^{k}(\sharp I_{nj})\leq n(k+1)^{\frac{1}{p}}.$$

For I_1 et $1\leq p<2, r\geq p$ noting that $E\left(|Y_1|^{r}h\left(|Y_1|^{p}\right)\right)<\infty$ we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}I_1dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}P\left\{|a_{ni}Y_i|>x\right\}dx$$

$$= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}P\left\{|a_{ni}Y_1|>x\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_{nj}}P\left\{|Y_1|>j^{\frac{1}{p}}x\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})\sum_{k\geq jx^p}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}\sum_{j=1}^{[k/x^P]}(\sharp I_{nj})P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}(\frac{k}{x^p}+1)^{\frac{1}{p}}nP\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}x^{-1}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\int_{1}^{\infty} t^{\frac{r}{p}-1-\frac{1}{p}}h(t)\int_{t^{\frac{1}{p}}}^{\infty}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}x^{-1}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dxdt$$

(letting $y=t^{\frac{1}{p}}$)

$$\leq C\int_{1}^{\infty} y^{r-2}h(y^p)\int_{y}^{\infty}x^{-1}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dxdy$$

$$\leq C\int_{1}^{\infty}\left(\int_{1}^{x} y^{r-2}h(y^p)dy\right)x^{-1}\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\int_{1}^{\infty} x^{r-2}h(x^p)\sum_{k=[x^p]}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}P\left\{k\leq|Y_1|^p<k+1\right\}\int_{1}^{(k+1)^{\frac{1}{p}}}x^{r-2}h(x^p)dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}} P\left\{k \leq |Y_1|^p < k+1\right\}(k+1)^{\frac{r-1}{p}} h(k+1)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\frac{r}{p}} h(k+1) P\left\{k \leq |Y_1|^p < k+1\right\}$$

$$\leq CE\left|Y_1\right|^r h(|Y_1|^p) + 1 < \infty.$$

Now we estimate I_2 , for $1 \leq p < 2$, $r > 1 + \frac{p}{2}$. By Lemma 5.2.3 and Markov's inequality, we have for $q \geq 2$

$$P\left\{|S_n - ES_n| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}x\right\} \leq Cx^{-q}E\left|S_n - ES_n\right|^q$$
$$\leq Cx^{-q}\left(\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 EY_1^2 I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq x\right\}\right)^{\frac{q}{2}} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} E\left|a_{ni}Y_1\right|^q I\left\{|a_{ni}Y_1| < x\right\}\right).$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_2 dx \tag{6.2.4}$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 EY_1^2 I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq x\right\}\right)^{\frac{q}{2}} dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E\left|a_{ni}Y_1\right|^q I\left\{|a_{ni}Y_1| < x\right\} dx$$

$$= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{P}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} (I_3 + I_4)\, dx.$$

If $q \geq 2$, is large enough such that $q(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) > \frac{r}{p} - 1$, then for I_3 we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_3 dx \tag{6.2.5}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^2 EY_1^2 I\left\{|a_{ni}Y_1| \leq x\right\}\right)^{\frac{q}{2}} dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}+\frac{q}{2}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} dx = C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-q(1/p-1/2)} h(n) < \infty.$$

For I_4 and $r \geq 2$ we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_4 dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E\left|a_{ni}Y_1\right|^q I\left\{\left|a_{ni}Y_1\right| \leq x\right\} dx$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} E\left|a_{ni}Y_1\right|^q I\left\{\left|a_{ni}Y_1\right| \leq x\right\} dx$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} E\left|Y_1\right|^q I\left\{\left|Y_1\right|^p \leq x^p(j+1)\right\} dx$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} \sum_{0 \leq k \leq (j+1)x^p} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) [\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$+ \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=[2x^p]+1}^{[(j+1)x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx]$$

$$= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} \left(I_5 + I_6\right) dx.$$

Note that for $q \geq 1$ and $m \geq 1$, we have

$$n \geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|a_{ni}\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} \left|a_{ni}\right| \geq \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-\frac{1}{p}}$$

$$\geq \sum_{j=m}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-\frac{1}{p}} \geq \sum_{j=m}^{\infty} (\sharp I_{nj})(j+1)^{-\frac{q}{p}}(m+1)^{(\frac{q}{p}-\frac{1}{p})}.$$

So

$$\sum_{j=m}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-\frac{q}{p}} \leq Cnm^{-\frac{q-1}{p}}.$$

If $r \geq 2$ and $q > r$, for I_5we get on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_5 dx \tag{6.2.6}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty}(\sharp I_{nj})j^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) n \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C \int_{1}^{\infty} t^{\frac{r}{p}-1-\frac{1}{p}} h(t) \int_{t^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dxdt$$

letting $t = y^p$

$$\leq C \int_{1}^{\infty} y^{r-2} h(y^p) \int_{y}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dxdy$$

$$\leq C \int_{1}^{\infty} \left(\int_{1}^{x} y^{r-2} h(y^p) dy\right) x^{-q} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C \int_{1}^{\infty} x^{r-1-q} h(x^p) \sum_{k=0}^{[2x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} \int_{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{r-1-q} h(x^p) dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} k^{\frac{r-q}{p}} h(k)$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{\frac{r}{p}} h\left(k+1\right) P\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\}$$

$$\leq CE\left|Y_1\right|^r h(\left|Y_1\right|^p) + 1 < \infty$$

If $r \geq 2$, then for I_6, $1 \leq p < 2$, and $r > 1 + \frac{p}{2}$, we also get

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_6 dx \tag{6.2.7}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=[2x^p]+1}^{[(j+1)x^p]} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} \sum_{j \geq [\frac{k}{x^p}]-1} (\sharp I_{nj}) j^{-\frac{q}{p}} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2-\frac{1}{p}} h(n) \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-q} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} n(\frac{k}{x^p})^{-\frac{q-1}{p}} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dx$$

$$\leq C\int_{1}^{\infty} t^{\frac{r}{p}-1-\frac{1}{p}} h(t) \int_{t^{\frac{1}{p}}}^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-\frac{q-1}{p}} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dxdt$$

letting $t = y^p$

$$\leq C\int_{1}^{\infty} y^{r-2} h(y^p) \int_{y}^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-\frac{q-1}{p}} E\left|Y_1\right|^q I\left\{k \leq \left|Y_1\right|^p < k+1\right\} dxdy$$

$$\leq C\int_1^\infty \left(\int_1^x y^{r-2}h(y^p)dy\right)x^{-1}\sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-\frac{q-1}{p}}E\left|Y_1\right|^q I\left\{k\leq \left|Y_1\right|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\int_1^\infty x^{r-2}h(x^p)\sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-\frac{q-1}{p}}E\left|Y_1\right|^q I\left\{k\leq \left|Y_1\right|^p<k+1\right\}dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{q-1}{p}}E\left|Y_1\right|^q I\left\{k\leq \left|Y_1\right|^p<k+1\right\}\int_0^{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{p}}} x^{r-2}h(x^p)dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{r-q}{p}}h\left(k\right)E\left|Y_1\right|^q I\left\{k\leq \left|Y_1\right|^p<k+1\right\}$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left(k+1\right)^{\frac{r}{p}}h\left(k+1\right)P\left\{k\leq \left|Y_1\right|^p<k+1\right\}$$

$$\leq CE\left|Y_1\right|^r h(\left|Y_1\right|^p)+1<\infty.$$

So by (6.2.6) and (6.2.7) we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_4dx<\infty \tag{6.2.8}$$

for $r\geq 2$, $q>r$, note that $r\geq 2$, $q>2$ and $q(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>\frac{r}{p}-1$ imply $q>r$. Hence, (6.2.5) and (6.2.8) yield

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p}h(n)\int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} I_2dx<\infty \tag{6.2.9}$$

for $r\geq 2$ and $q>2$ such that $q(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})>\frac{r}{p}-1$.

If $1+\frac{p}{2}<r<2$ and $q=2$, then (6.2.9) follows from (6.2.4) and (6.2.5) since $I_3=I_4$.

Thus we have $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r/p-2-1/p}h\left(n\right)E\left\{\left|S_n\right|-\varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\}^{+}<\infty$ for all $\varepsilon>0$.

□

Bibliography

1. J. I. Baek, T. S. Kim, and H. Y. Liang, On the convergence of moving average processes under dependent conditions, Aust. N. Z. J. Statist. 45 (2003), 331-342.
2. R.M. Burton, and H. Dehling, Large deviation for some weakly dependent random process, Statist. Probab. Lett. 9 (1990) 397-401.
3. Y. S. Chow, On the rate of moment convergence of sample sums and extremes, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 16 (1988), 177-201.
4. I.A. Ibragimov, Some limit theorems for stationary processes, Theory Probab. Appl. 7 (1962) 349-382.
5. D.L. Li, M.B. Rao and X.C. Wang, Complete convergence of moving average processes, Statist, Probab. Lett. 14 (1992) 111-114.
6. Y. X. Li and L. X. Zhang, Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions, Statist. Probab. Lett. 70 (2004), 191-197.
7. H. Y. Liang, Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables, Statist. Probab. Lett. 48 (2000), 317-325.
8. L. X. Zhang, Complete convergence of moving average processes under dependence as- sumptions, Statist. Probab. Lett. 30 (1996), 165-170.
9. Wang Xuejun, Hu Shuhe, Shen Yan, YangWenzhi, Maximal inequality for - mixing sequences and its applications,Applied Mathematics Letters 23 (2010) 1156-1161. [10] J.R. Blum, D.L. Hanson, L. Koopmans, On the strong law of large numbers for a class of stochastic process, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb. 2 (1963) 1-11

Chapitre 7

Annexe

Inégalités de Markov

Soit X une v.a.r definie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et supposée p.s positive ou nule Alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Corollaire. *Soit une fonction croissante $f \geq 0$ sur l'intervalle I et soit X une v.a.r definie sur un espace (Ω, A, P) et tq $P(X \in I) = 1$, Alors $\forall b \in I$ tq $f(b) > 0$*

$$P(X \geq b) \leq \frac{E(f(X))}{f(b)}$$

Démonstration. [Preuve du Lemme 5.2.2] Soit $\varepsilon > 0$ donner. Choisissons $0 < \delta < min(\varepsilon, \delta_0)$ et $\phi(x) = |x|^k$ tel que $|\phi(x) - \phi(a)| \leq \varepsilon$ pour $|x - a| \leq \delta$. Prenons m assez grand de sorte que $\sum_{|i|>m} |a_i| \leq \delta$ et permettre $n \geq 2m$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right) - \phi(a) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i<-m-n} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right) + \sum_{j\geq m}\phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right)\right)$$

$$+\frac{1}{n}\left(\sum_{-m-n\leq i<m-n} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right) + \sum_{-m\leq i<m} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{m-n\leq i<-m} \phi\left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j\right) - \phi(a)\right)$$

$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

Pour évaluer A_1 noter que pour $i \in I_1 = \{i\ : i < -m - n \; or \; i \geq m\}$ nous avons

$$\left| \sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right| \leq \sum_{|j|>m} |a_j| \leq \delta \leq \delta_0$$

Ainsi

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i \in I_1} \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right| \leq \frac{c}{n} \sum_{i \in I_1} \sum_{j=i+1}^{i+n} |a_j| \leq \frac{c}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{i+n} \widetilde{a}_j$$

où $\widetilde{a}_j = |a_j| \, 1 \{|j| > m\}$. Changeant l'ordre de sommation, on voit que la dernière somme est égale à $c \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}_j \leq c\delta \simeq c\varepsilon$.

Pour évaluer A_2 nous observons que avec $I_2 = \{i : -m - n \leq i \leq m - n \; or \; -m \leq i < m\}$ nous avons $I_2 \leq 4m$ de sorte que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i \in I_2} \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right| \leq d \frac{4m}{n}$$

où d est la limite supérieure sur $\phi(x)$ dans $[-R, \quad R]$, avec $R = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_i|$.

Finalement nous évaluons A_3. Noter que pour $i \in I_3 = \{i : \; m - n \leq i < -m\}$ nous avons

$$\left| \sum_{j=i+1}^{i+n} a_j - a \right| \leq \sum_{|j|>m} |a_j| < \delta.$$

Ainsi

$$\left| \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) - \phi(a) \right| < \varepsilon$$

et

$$\left| \phi(a) - \frac{1}{n} \sum_{i \in I_3} \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right| = \left| \frac{1}{n - 2m} \sum_{i \in I_3} \phi(a) - \frac{1}{n} \sum_{i \in I_3} \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{n - 2m} \sum_{i \in I_3} \left\{ \phi(a) - \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right\} \right| + \left| \frac{1}{n - 2m} - \frac{1}{n} \right| \left| \sum_{i \in I_3} \phi \left(\sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right) \right|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2m}{n} d.$$

□

La démonstration de lemme 5.2.3 fait appel aux lemmes ci-dessous.
Le lemme suivant provient de C.R.Lu et Z.Y.Lin (1997).

Lemme 7.0.3. *Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ est une suite variables alatoires ψ-mixing. soit $Y \in \mathcal{F}_1^k$, $X \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty$, $E|X| < \infty$, $E|Y| < \infty$. Alors $E|XY| < \infty$ et*

$$|EXY - EXEY| \leq \psi(n) E|X| E|Y|.$$

Le lemme suivant provient de Q.M. Shao (1993).

Lemme 7.0.4. *Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ est une suite variables alatoires φ-mixing. Posons $T_a(n) = \sum_{i=a+1}^{a+n} Y_i$. Supposons qu'il existe une suite $\{C_{a,n}\}$ de nombres positifs tels que $ET_a^2(n) \leq C_{a,n}$ pour tout $a \geq 0$ et $n \geq 1$. Alors pour tout $q \geq 2$, il existe une constante C ne dépendant que de q et $\varphi(.)$ tel que*

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n} |T_a(j)|^q\right) \leq C\left[C_{a,n}^{q/2} + E\left(\max_{a+1\leq i\leq a+n} |Y_i|^q\right)\right]$$

pour tout $a \geq 0$ et $n \geq 1$.

Démonstration. [Preuve du Lemme 5.2.3] Par le lemme 7.0.3, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=a+1}^{a+n} Y_i\right)^2 &= \sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2 + 2\sum_{a+1\leq i<j\leq a+n} E(Y_iY_j) \\
&\leq \sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2 + 2\sum_{a+1\leq i<j\leq a+n} \psi(j-i)E|Y_i|E|Y_j| \\
&\leq \sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2 + 2\sum_{a+1\leq i<j\leq a+n} \psi(j-i)E(Y_i^2)^{1/2}E(Y_j^2)^{1/2} \\
&\leq \sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=a+1}^{a+n-k} \psi(k)(EY_i^2 + EY_{k+i}^2) \\
&\leq \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\right)\sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2 = C_1\sum_{i=a+1}^{a+n} EY_i^2.
\end{aligned}$$

Il est bien connu que $\psi - mixing$ est aussi $\varphi - mixing$. Par conséquent, d'aprèsle lemme 7.0.4 nous pouvons obtenir le résultat souhaité (5.2.1) immédiatement.

□

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Conclusion :

Dans cette thèse on s'est intéressé à étudier des processus lineaires, en particulier les processus autorégressifs à moyenne mobile, dont on a etendus des résultats intéressant (comportement asymptotique) pour ces processus dans le cas i.i.d aux cas mélangeant .En effet, on a montrer la convergence complète et la convergence complète du moment d'une moyenne mobile dans le cas $\psi - mélange$.

Perspectives

Le travail effectué dans cette thèse offre de nombreuses perspectives à savoir :

Le Chapitre 3 de cette thèse ouvre également sur des problèmes théoriques intéressants à étudier : l'estimation et le comportement asymptotique d'un processus Autorégressifs à coefficients aléatoires i.e. est-il possible d'étendre les resultats obtenus dans le cas du paramétre a_i au cas du variables aléatoires ρ_n, cette démarche a été initiée par **D**.**Bosq** et **T**.**Mourid** , etudier les propriétés de Melange des processus Autorégressifs Banachiques et les processus linaires Hilbertiens et leurs comportement asymptotique (ie : la convergence copmléte et la convergence compléte du moment,....) dans le cas où l'erreur de $ARB(1)$ est $(\psi - mélange)$.

Etendre des résultats obtenus pour les processus X_k avec $X_k = \sum_i a_{i+k} Y_i$ sous les hypotheses $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ i.i.d aux cas de $\psi - mélange$, pour établir les propriétés asymptotiques (théorèmes limites : loi des grands nombres, convergence...), car sous les conditions de dépendance peu de résultats obtenus.

Etudier l'estimation par méthode du noyau pour déterminer l'asymptotique d'innovation (Y_t) dans le cas où (Y_t) sont dependants $(\psi - mélange)$.

Bibliographie

[1] Allam, A. (2007). Propriétés de melange des processus linéaires generaux et estimation d'un ARHA (1). These De Doctorat, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

[2] AZZOUZI B., RABHI A., BENAISSA S.(2015) : Complete Convergence of Moving Average Processes With ψ-Mixing Sequences. International Journal of Statistics and Economics. Vol. 16, Issue 2, 1-6.

[3] Andrews D.W.K. (1984). Non strong mixing autoregessive processes. J. Appl. Prob. 21, p. 930-934

[4] Azencott R., Dachunna-Castelle D. (1984). Séries d'observations irréguliéres-Modélisation et prévision. Masson.

[5] Baek J.I., T. S. Kim, and H. Y. Liang.(2003). On the convergence of moving average processes under dependent conditions, Aust. N. Z. J. Statist, 45, 331-342.

[6] Blum, J. R. Hanson, D. L. and Koopmans, L.(1963) On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes, Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, (Springer-Verlag). Vol. 2(1), (1963), pp. 1-11.

[7] Bosq, D. (1981). Comportement asymptotique des tests Hilbertiens de dimension infinie sous des hypoth'eses adjacentes.Publ. IRMA Univ. Lille I, 3, 6, 22 p.

[8] Bosq, D., Lecoutre, J.P. (1987). Théorie de l'estimation fonctionnelle. Edition Economica, Paris.

[9] Bosq, D.(1990). Estimation et pr ´evision d'un processus autorégressif Hilbertien. Le cas général. Publ. LSTA, Univ. Paris VI, 108, 20 p.

[10] Bosq D. (2000) : Linear processes in function spaces. Lecture Notes in Statistiques, springer.

[11] Bosq D. (1993). Limit theorems for Banach-valued autoregressive processes-Application to real contiuous times processes. Pub. LSTA, n 180. Univ. Paris 6.

[12] Box, G.E.P. and G.M. Jenkins. Time series analysis : forecasting and control (Holden Day, San Franscisco. 1970. revised edition. 1976).

[13] Breiman (1968). Probability. Adidison-Weslley Pub. Company.

[14] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1991). Time Series : Theory and Methods (Second ed.). New York : Springer.

[15] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1996). Introduction to Time Series and Forecasting. New York : Springer.

[16] Burton, R. M. and Dehling, H.(1990). Large deviation for some weakly dependent random process, Statist. Probab. Lett., Vol. 9, pp. 397-401.

[17] Caines P. E. (1988). Linear StochasticSystems. Wiley.

[18] Charles R.Nelson (1973).The first-order moving average process.Graduats School of Busines University of Chicago,III,60637,USA.

[19] Chatelin, F. (1983). Spectral Approximation of Linear Operators. Academic, New- York

[20] Chow Y. S., (1988). On the rate of moment convergence of sample sums and extremes, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica , 16 , 177-201.

[21] Chritophe Hurlin. Econométrie appliquée Serie temporelles.UFR Economie.

[22] Cryer, J. (1986). Time series analysis. Boston : Duxbury Press.

[23] Doukhan, P. (1994). Mixing : Properties and examples. Lecteur Notes in Statistics, 85 Springer-Verlag New Yotk.

[24] Dunford, N. et Schwartz, J. (1963). Linear operators. Interscience Publishers, New- York.

[25] Dunford, N. et Schwartz, J. (1958). Linear operators. I, Wiley Interscience.

[26] Enders, W. (1995). Applied Econometric Time Series. New York : Wiley

[27] Ferraty F., PH VIEU (2001). Statistique Fonctionnele :Modéles de régression pour variables aleatoires uni, multi et infiniment-dimensionnées. Publications du LSP 2001-03, Toulouse, France.

[28] Ferraty F. and P. Vieu (2006). Nonparametric functional data analysis : Theory and practice, Springer Series in Statistics, Springer, New York. ISBN 0-387-30369-3.

[29] Ferraty F., Y. Romain (2011). Oxford Handbook of Functional Data Analysis (Eds.). Oxford University Press

[30] Florence Merlevède (1995). Résultats de convergence presque sûre pour l'estimation et la prévision des processus linéaires hilbertiens. C.R. Acad. Sci. Paris 324, Série I, 573-576.

[31] Gebelin H. (1941) Das Statistische Problem der Korrelation als Variationund Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit Ausgleischung. Z. Angew. Math. Meach. 21, 364-379.

[32] Geffroy J. (1959). Quelques extensions du théoréme de P. Levy sur la convergence p.s des séries aléatoires à termes indépendants. Comptes Rendus Aca. Sc. Paris, t 24, p. 1180-1182.

[33] Gohberg, I.C. et Krejn, M.G. (1971). Introduction a la theorie des operateurs li- neaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien. Dunod, Paris, 1971.

[34] Gudmundsson G. (1971). Time-Series Analysis of Imports, Exports and Other Economic Variables. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), Vol. 134, No. 3 , pp. 383-412.

[35] Hirschfeld H. O. (1935). A connection between correlation and contingency. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 520-524.

[36] Hsu, P. L. and Robbins, H., (1947). Complete convergence and the law of large numbers, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 33, pp. 25-31.

[37] Ibragimov I.A.,(1962). Some limit theorems for stationary processes, Theory Probab. Appl., 7, 349-382.

[38] Ito K. et M. Nisio (1968) On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. Osaka J. Math. 5, p. 35-48

[39] Kato, T. (1976). Perturbation theory for linear operators, Springer.

[40] Kendall, M., & Stuart, A. (1976). The Advanced Theory of Statistics (Vol. 3).london :Griffin.

[41] Kolmogorov A. N., Rosanov Y. A. (1960). On the strong mixing conditions for stationary gaussian sequences. Theory Probab. Apll. 5, 204-207.

[42] KUTOYANTS Y., MOURID T., Bosq D. (1991). Estimation d'un processus autorégressif à temps continu. CRAS, Paris, 312, I, 747-750.

[43] Li D.L., M.B. Rao and X.C. Wang,(1992). Complete convergence of moving average processes, Statist, Probab. Lett., 14,111-114.

[44] Li Y. X. and L. X. Zhang,(2004). Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions, Statist. Probab. Lett.,70, 191-197.

[45] Liang H. Y.,(2000). Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables, Statist. Probab. Lett. 48, 317-325.

[46] Lu C.R., Lin Z.Y. (1997). Limit Theory for Mixing Dependent Sequences, SciencePress, Beijing, China (in chinese).

[47] Lu C.R., Lin Z.Y. (1992). Strong limit theorem, 11. P. Mattila

[48] Mas, A. (1999-a) Normalite asymptotique de l'estimateur empirique de l'operateur d'autocorrelation d'un processus ARH(l). C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Ser. I, 899-902.

[49] Michel Sampson(2001).Time series analysis .Loglinear Publishing.

[50] Monfort, A. (1997). Cours de statistique mathématique (3 ed.). Paris : Economica

[51] Mourier (1953). Éléments aléatoires dans un espace de Banach. Annales de l'institut Henri Poincaré 13.3 : 161-244.

[52] Nagy, B. et Riesz, F. (1965). Lecons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris

[53] Neveu, J. (1970). Bases mathématiques du calcul des probabilit´es, 2nd. ed. Masson et Cie, Editeurs Paris.

[54] Pierre-André Cornillon et autre.Statistiques avec R. Pratique de La Statistique Presses Universitaires De Rennes 2008.

[55] Pumo B. (1998). Prediction of Continuous Time Processes by C[0,1]-Valued Autoregressive Process. Statistical Inference for Stochastic Processes,Vol. 1, Issue 3, pp 297-309.

[56] Ramsay, J.O., and B.W. Silverman (1997). Functional data analysis. Springer-Verlag, New York.

[57] Ramsay, J.O., and B.W. Silverman (2002). Applied Functional Data Analysis : Methods and Case Studies. New York : Springer-Verlag, 2002. ISBN 0-387-95414-7

[58] Robert H. shumaway, Davids.Stoffer(1999).Time series analysis and its applications,Second Edition.Springer Science.

[59] Rosenblatt M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A., 42, 43-47.

[60] Rozanov Yu. A. (1971). Stationary Random Processes. Ann. Math. Statist. Volume 42, Number 4 , 1463-1467.

[61] Shao Q.M. (1993). Almost sure invariance principales for mixing sequences of random variables, Stochastic Process. Appl. 48, 319-334.

[62] Slutsky E. (1937),The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes, Econometrica, 5, 105-146.

[63] Tahar M. Nawel B.(2006). Sieves estimator of the operator of a functional autoregressive process. Statistics Probability Letters, 76(1) :93-108.

[64] Tahar M. Abdelaziz A. (2001). Proprietés de mélange des processus autoregressifs Banachiques. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 332 p 363-368.

[65] Tahar M. (1982). Sur l'identification d'un processus autorégressif, On the identification of a self-regressive process. Thése De Doctorat, Université Lille1 - Sciences et Technologies .

[66] Tahar M. (2002). Estimation and Prediction of Functional Autoregressive Processes. Journal : Statistics , vol. 36, no. 2, pp. 125-138.

[67] Wang, X. Hu, S. Shen, Y. and Yang, W.,(2010). Maximal inequality for ψ-mixing sequences and its applications, Applied Mathematics Letters, 23, 1156-1161.

[68] With G. W. Groves (1968). Time Series Regression of Sea Level on Weather. Rev. Geophys. 6, 129-174.

[69] Yule G.U. (1927), On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference toWolfer's Sunspot Numbers, Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A, 226, 267-298.

[70] Yuzuhira, T. (1960), The autocorrelation curves of schizophrenic brain wave and the power spectra. Psychiat. Neurol. jap. 62 :910–924 (in Japanese).

[71] Zhang L. X.,(1996). Complete convergence of moving average processes under dependence assumptions, Statist. Probab. Lett., 30 , 165-170.