

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES



Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DES SCIENCES DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & Matériaux**

Présenté par : **KHALFI Yassine**

Sujet de mémoire

**Utilisation des théories avancées d'ordre élevé
pour l'analyse des plaques solaires en FGM**

Soutenue en février 2016 devant le jury composé de :

Pr. E. ADDA BEDIA		UDL SBA	Président
Pr. A. TOUNSI		UDL SBA	Encadreur
AMARA Khaled	MCA	CU AIN TMOUCHENT	Examineur
KACI Abdelhakim	MCA	U DE SAIDA	Examineur
YEGHNEM redha	MCA	U DE SAIDA	Examineur
BENACHOUR Abkader	MCA	UDL SBA	Examineur
Pr. BENRAHOU Kouider Halim		UDL SBA	Invité

Année Universitaire 2015 / 2016

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Monsieur A. TOUNSI qui a dirigé ce travail. Sa disponibilité, ses compétences scientifiques ont été précieuses pour mener à terme cette étude, je tiens à lui exprimé toute ma gratitude et mon profond respect.

Je tiens aussi à remercier le Professeur ADDA BEDIA EL ABBES, qui m'a accueilli dans son laboratoire des matériaux et hydrologie de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, ses conseils avisés ont facilité l'aboutissement de ce travail, de plus il m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, KACI Abdelhakim, maitre de conférence à l'université de Saida, YEGHENEM Reda maitre de conférence à la même université, AMARA Khaled maitre de conférence au centre universitaire de Ain Tmouchent et Messieurs BENACHOUR Abdelkader maitre de conférence à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés, BENRAHOU Kouider Halim Professeur à la même université de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djiljali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études et par conséquent, ce mémoire de thèse. Merci a tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée.

Résumé

Une théorie de déformation de cisaillement simple et raffiné est développée pour l'analyse de flambement thermique des plaques solaires fonctionnellement graduée posée sur des fondations élastique de type Pasternak's, le champ de déplacement est choisie en se basant sur les hypothèses que le déplacement transversal et axial sont composée d'une partie de flexion et une autre de cisaillement. La composante de cisaillement du déplacement axial engendre une variation parabolique de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur de tel sort que les contraintes de cisaillements disparues dans les faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, le facteur de correction de cisaillement ne devient plus nécessaire dans cette théorie. Le nombre des inconnus indépendants de la présente théorie est quatre contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement qui utilise cinq inconnus. Il est supposé que les propriétés matérielles de la plaque varient à travers l'épaisseur selon une loi de puissances. La position de la surface neutre pour la plaque est déterminée. Les équations de stabilité sont déterminées on utilisant la présente théorie et on se basant aussi sur le concept de la surface neutre. Les relations non linéaires déformation-déplacement sont aussi prises en considération. Les conditions aux limites pour la plaque sont supposées être simplement appuyées sur tout les coté. Les solutions analytiques sont présenté pour calculé la température critique du flambement. Les effets des paramètres de la fondation, les dimensions de la plaque, et l'indice de puissance sur la température critique des plaques solaires fonctionnellement gradué sont analysés.

Mots-clés : plaque solaire fonctionnellement graduée, température de flambement, théorie des plaques, position de la surface neutre.

Abstract

A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plate (SFGP) resting on two-parameter Pasternak's foundations is developed. The displacement field is chosen based on assumptions that the in-plane and transverse displacements consist of bending and shear components, and the shear components of in-plane displacements give rise to the parabolic variation of shear strain through the thickness in such a way that shear stresses vanish on the plate surfaces. Therefore, there is no need to use shear correction factor. The number of independent unknowns of present theory is four, as against five in other shear deformation theories. It is assumed that the material properties of the plate vary through the thickness of the plate as a power function. The neutral surface position for such plate is determined, and the present plate theory based on exact neutral surface position is employed to derive the governing stability equations. The non-linear strain–displacement relations are also taken into consideration. The boundary conditions for the plate are assumed to be simply supported in all edges. Closed-form solutions are presented to calculate the critical buckling temperature, which are useful for engineers in design. The effects of the foundation parameters, plate dimensions, and power law index are presented comprehensively for the thermal buckling of solar functionally graded plates.

Keywords : Solar functionally graded plate; Thermal buckling; Plate theory; Neutral surface position.

Sommaire

Liste des notations

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

CHAPITRE 01 : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction.....	01
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	02
I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	05
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	07
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	07
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	08
I.4.3. Compaction sèche des Poudres.....	09
I.4.4. Projection plasma.....	09
I.4.5. Frittage et Infiltration.....	09
I.4.6. Frittage Laser Différentiel.....	10
I.4.7. Dépôt par Centrifugation.....	11
I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	11
I.5.1 Utilisation des matériaux a gradient de propriété dans la fabrication des plaques. Solaires	12
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	18
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	19
I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	20
I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	21

CHAPITRE 02 : Les Différentes Théories Des Plaques

II.1. Introduction.....	22
II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	23
II.2.1. Modèle monocouche équivalente.....	23

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)	23
II.2.1.2. Les modèles Reissner Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	24
II.2.1.3. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur	26
II.2.2. Approche par couche	31
II.2.2.1. Les modèles zig-zag	32
II.2.2.2. Les modèles en couches discrètes	34
II.2.3. Approche développement asymptotique	36
II.3. Modèles éléments finis des structures composites	36
II.3.1. Modèles éléments finis 2D	37
II.3.2. Modèles éléments finis 3D	39

CHAPITRE 03 : Etude Analytique De Flambement Thermique Des Plaques FGM

III.1. Introduction	41
III.2. Formulation mathématique	41
III.3. Equations d'équilibre et de stabilité	46
III.4. Solution trigonométrique du flambement thermique	49
III.4.1. Flambement des plaques FG sous une variation uniforme de température	51
III.4.2. Flambement des plaques FG soumises à une variation de température non linéaire à travers l'épaisseur	52

CHAPITRE 04 : Discussion Des Résultats Du Modèle

IV.1. Introduction	54
IV.2. Étude comparatif et paramétrique sur la stabilité thermique des plaques FGM	55

Conclusion Générale

Références Bibliographiques

Liste Des Notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E (z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu (z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\alpha (z)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de « z »
α_c, α_m	Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal
E_c, E_m	Module de Young de la céramique et du métal
$V(z)$	Fraction volumique
z_{ms}	Coordonné mesure à partir de la surface du milieu de la plaque
z_{ns}	Coordonné mesure à partir de la surface neutre de la plaque
C	Distance entre la surface neutre et la surface médiane
n	Indice matériel
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
w_b, w_s	Composante de déplacement transversal de flexion et de cisaillement
u_b, v_b	Composante de flexion
u_s, v_s	Composante de cisaillement

$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
U	Energie potentielle totale
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moment supplémentaire du à la flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
N_x^T, N_y^T	Contraintes résultants due aux chargements thermique
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT} et M_y^{sT}$	Moment résultants due aux chargements thermique
Q_{ij}, Q_{ji}	Coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
$i et j$	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion

A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Opérateurs différentiels
U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn}	Paramètres arbitraires
N_{cr}	La charge critique de flambement
T_C, T_M	Températures de la surface supérieure et inférieure (céramique et métal)
T_f, T_i	température initiale et finale respectivement
ΔT	Différence de température de flambement
$T(z)$	Chargement thermique
$\{ \Delta \}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ f \}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne

Liste Des Figures

Figure I.1	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	04
Figure I.2	Protection thermique.....	05
Figure I.3	Principe de la méthode coulage en bande.....	08
Figure I.4	Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel.....	10
Figure I.5	Schéma du Procédé Dépôt par Centrifugation.....	11
Figure I.6	Les principaux domaines d'application des FGM.....	12
Figure I.7	panneau solaire thermique.....	13
Figure I.8	panneau solaire photovoltaïque.....	16
Figure I.9	Illustration schématique d'un panneau solaire hybride avec un matériau FGM.....	17
Figure I.10	Géométrie d'une plaque en FGM.....	18
Figure I.11	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	19
Figure I.12	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	20
Figure I.13	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	21
Figure II.1	Cinématique de Love-Kirchhoff.....	24
Figure II.2	Cinématique de Reissner-Mindlin.....	25
Figure II.3	Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur....	26
Figure II.4	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	27
Figure II.5	Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de..... l'épaisseur	30
Figure II.6	Variation de la dérivée de la fonction forme $f'(z)$ des différents..... modèles suivant l'épaisseur	30
Figure II.7	Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique..... [Nguyen 2004]	32
Figure II.8	Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen..... 2004]	32
Figure II.9	Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [Nguyen 2004].....	33
Figure II.10	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [Nguyen 2004].....	34
Figure II.11	Elément « sinus » triangulaire 6 nœuds de [Polit 2002].....	38
Figure II.12	Elément quadrilatère de type Lagrange a 9 nœuds [Nguyen 2004].....	39

Figure II.13	Elément quadrilatère de type Lagrange a 16 nœuds [Nguyen 2004].....	39
Figure II.14	Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes interlaminaires.....	40
Figure III.1	Système de coordonnées et la géométrie des plaques rectangulaires FG sur la..... fondation élastique de type « Pasternak »	42
Figure III.2	La position de la surface moyenne et la surface neutre pour une plaque FG.....	42
Figure IV.1	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec l'indice de la loi de..... puissance n pour des plaques solaires à gradient de propriétés avec ou sans fondations élastiques: le cas d'une distribution uniforme de température à travers l'épaisseur	58
Figure IV.2	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec l'indice de la loi de..... puissance n pour des plaques solaires à gradient de propriétés avec ou sans fondations élastiques: le cas d'une distribution non-linéaire de température à travers l'épaisseur.	59
Figure IV.3	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h dans le cas d'une distribution uniforme et non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. (n = 0,5, $k_1 = 10$, $k_2 = 10$, et a / b = 1).	60
Figure IV.4	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/b dans le cas d'une distribution uniforme et non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. (n = 0,5, $k_1 = 10$, $k_2 = 10$, et a / b = 1).	60
Figure IV.5	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique dans le cas d'une distribution linéaire de la température à travers l'épaisseur. (n = 0,5 et a / b = 1)	61
Figure IV.6	Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique dans le cas d'une distribution non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. (n = 0,5 et a / b = 1)	61

Liste Des Tableaux

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	04
Tableau V.1	Modèles de déplacement.....	54
Tableau V.2	Température critique de flambement (T_{cr}) des plaques solaires à gradient de..... propriété carrées soumise à une température uniforme pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport géométrique	56
Tableau V.3	Température critique de flambement (T_{cr}) des plaques solaires à gradient de..... propriétés carrées soumise à une température uniforme pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport géométrique	57

Introduction Générale

Introduction Générale

La plaque solaire est utilisée pour focaliser le rayonnement solaire sur un absorbeur situé au niveau du point focal dans un disque parabolique concentrateur pour fournir l'énergie solaire. Le capteur solaire concentrateur se compose d'un réflecteur sur la plaque solaire, l'absorbeur et le boîtier. Le disque parabolique est constitué de plaques solaires. La performance d'une plaque solaire en termes d'efficacité, durée de vie et d'alignement optique dépend des conditions de fonctionnement et du matériau utilisé. Généralement, une plaque solaire peut être fabriquée à partir d'un matériau pur bien poli ou d'une plaque revêtue avec une certaine couverture spéciale [Howell and Bereny (1979)]. Toutefois, pour certaines applications spécifiques, comme dans le cas d'un satellite solaire, tour de l'énergie solaire et un moteur thermique à énergie solaire, on peut exiger un faible poids et un environnement à haute température. Une haute résistance thermique offre une rigidité appropriée pour éviter la déformation non sollicitée à un meilleur alignement optique. Ces plaques doivent être fabriquées avec des matériaux spéciaux tels qu'un matériau à gradation fonctionnelle (FGM) à base de métal et céramique [Shahrjerdi et al. (2010)].

Les plaques solaires à gradient fonctionnel (SFGPs) sont souvent utilisées dans des environnements thermiques et ils peuvent flamber sous les charges thermiques et mécaniques. Ainsi, l'analyse de flambement de ces plaques est essentielle pour assurer une conception efficace et fiable. La théorie classique des plaques (CPT) est généralement utilisée pour effectuer une analyse de la stabilité des plaques minces à gradient fonctionnel (FG) [Javaheri and Eslami (2002)]. Cette théorie ne tient pas en compte la déformation de cisaillement transversal et suppose que la normale au plan médian avant déformation reste plane et perpendiculaire à la surface médiane après déformation. Par conséquent, la théorie classique des plaques (CPT) surestime la charge critique de flambement à l'exception des plaques minces. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) qui prend en considération les effets de la déformation de cisaillement transversal a été utilisée par certains chercheurs pour analyser le comportement de flambement des plaques à gradient fonctionnel modérément épaisses [Yaghoobi and Yaghoobi (2013); Wu (2004); Bouazza et al. (2010)]. Cette théorie suppose une variation uniforme de la déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque et nécessite un facteur de correction de cisaillement. Ce

facteur qui est crucial pour une analyse précise, dépend des paramètres géométriques, du chargement, du matériau utilisé et des conditions aux limites de la plaque. De plus, dans cette théorie (FSDT), le gauchissement de la section transversale est négligé car il est supposé que les sections planes restent planes après déformation. Selon des travaux réalisés dans la littérature sur ce type de recherche, il a été constaté que la FSDT n'est pas un modèle idéal pour analyser les plaques épaisses [Reddy (1984, 2000); Javaheri and Eslami (2002); Ma and Wang (2004); Najafizadeh and Heydari (2004)]. Pour surmonter les inconvénients de ces théories (par exemple, CPT et FSDT), plusieurs théories des plaques d'ordre élevé ont été proposées en supposant champs de déplacement d'ordre supérieur. Bien que les théories des plaques de déformations de cisaillement d'ordre supérieur ont été adoptées pour l'analyse de flambement des plaques à gradient fonctionnel [Javaheri and Eslami (2002); Najafizadeh and Heydari (2008); Samsam Shariat and Eslami (2007); Matsunaga (2009); Zenkour and Mashat (2010)], ils ne sont pas pratiques à utiliser en raison des termes d'ordre supérieur introduites dans la théorie. Récemment, [Abdelaziz et al. (2011)] ont développé une théorie de plaque raffinée de déformation de cisaillement efficace et simple à utiliser.

En général, les propriétés matérielles des plaques à gradient fonctionnel ne possèdent pas de symétrie par rapport au plan moyen de la plaque. Par conséquent, les équations de membrane et de flexion d'une telle plaque sont couplées. Ce couplage produit une courbure et des moments de flexion lorsque la plaque est soumise à des charges de compression axiale. Par conséquent, le flambement ne se produira pas [Liew et al. (2003); Qatu and Leissa (1993)]. [Morimoto et al. (2006)] ; Abrate (2008) ; Zhang and Zhou (2008) et Ould Larbi et al. (2013)] ont montré qu'il n'y a pas de couplage membrane-flexion dans les équations constitutives si la surface de référence est bien choisie.

Le but de ce travail est d'étudier l'analyse de flambement thermique de SFGPs posées sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffinée et simple de déformation de cisaillement des plaques [Abdelaziz et al. (2011)] basée sur la position exacte de la surface neutre. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que le déplacement axiale et transversale est constitué des composantes de flexion et de cisaillement dans laquelle la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts tranchants et, de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et satisfait aux conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de

correction de cisaillement. En outre, elle contient seulement quatre variables indépendantes, et a de fortes similitudes avec la CPT dans certains aspects tels que les équations du mouvement, les conditions aux limites, et les expressions des efforts résultants. Les propriétés matérielles des SFGPs sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur, selon une loi de puissance de la fraction en volume des constituants. Les charges thermiques sont supposées être variées d'une façon uniforme ou non linéaire à travers l'épaisseur. Les résultats sont comparés et validés par les résultats des travaux connues dans la littérature.

Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais: **Functionally Graded Materials "F.G.M"**).

Les matériaux FGMs; sont des matériaux fonctionnellement gradués, microscopiquement non homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de la céramique. On les considère comme le produit de matériaux composites en changeant sans interruption, les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur. Ce changement allège les zones les plus chargées et conduit à trouver des solutions optimales d'un point de vue économique et mécanique.

Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques résiduelles. Ils sont considérés comme l'un des plus prometteurs pour l'avenir des composites dans de nombreux secteurs tels que l'aérospatiale, la défense, et plus récemment, le secteur médical et le domaine de génie civil.

Les matériaux FGMs, ont été largement utilisés pour satisfaire les exigences de haute performance. Cependant, la concentration d'efforts peut se produire à l'interface entre deux matériaux différents, en raison de l'inadaptation des matériaux. En particulier, dans un environnement à haute température, par exemple dans la chambre de combustion du moteur d'un véhicule aérien ou d'une réaction de fusion nucléaire conteneur, le décalage relativement plus élevé en coefficients de dilatation thermique élevé va entraîner des contraintes résiduelles.

En conséquence, le composite peut encourir de fissures ou de fléchissement. Par conséquent, le concept de ce type de matériau (FGM) a été introduite pour répondre à la demande de l'ultra-haute température de l'environnement et d'éliminer cette concentration.

En raison du changement continu des propriétés matérielles d'un F.G.M, les interfaces entre deux matériaux disparaissent mais les caractéristiques des matériaux constituant le composite restent préservé. Donc, l'utilisation d'un matériau F.G.M, va augmenter la rigidité à la flexion et éliminer les zones de concentration des contraintes à l'interface. Le classement a montré que plus l'interface est diffuse, meilleur sont l'adhérence et la conductivité thermique.

Pour décrire la variation des propriétés matérielles des structures composées du matériau F.G.M, on utilise la fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle [BATRA (1996)].

Dans la fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle, les zones de concentration des contraintes apparaissent dans les interfaces auxquelles le matériau est continu mais changent rapidement. Par conséquent, [Chung et Chi (2001)] ont proposé un F.G.M sigmoïde (S.F.G.M) qui se compose de deux fonctions d'une loi de puissance pour définir une nouvelle fraction de volume.

Chi et Chung ont indiqué que l'utilisation d'un sigmoïde F.G.M pourra réduire de manière significative les facteurs d'intensité des contraintes d'un corps fissuré.

Beaucoup de chercheurs ont consacré des années à comprendre le mécanisme des FGMs pour offrir un profil optimal aux concepteurs. Ils sont utilisés des poutres composites en FGM pour pouvoir résister à la température par exemple. Si une forte pression externe est appliquée à la poutre, de fortes contraintes survenues dans la structure aura une incidence sur son intégrité et la structure est sensible à se rompre. Par conséquent, la compréhension du comportement mécanique d'une poutre de FGM est très importante pour évaluer la sécurité de la structure.

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent

supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'ya aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [M. Koizumi (1992)].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation les matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [K. Kokini and Y. Takeuchi (1990)]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [P. Boch and T. Chartier and M. Huttepain (1986)].

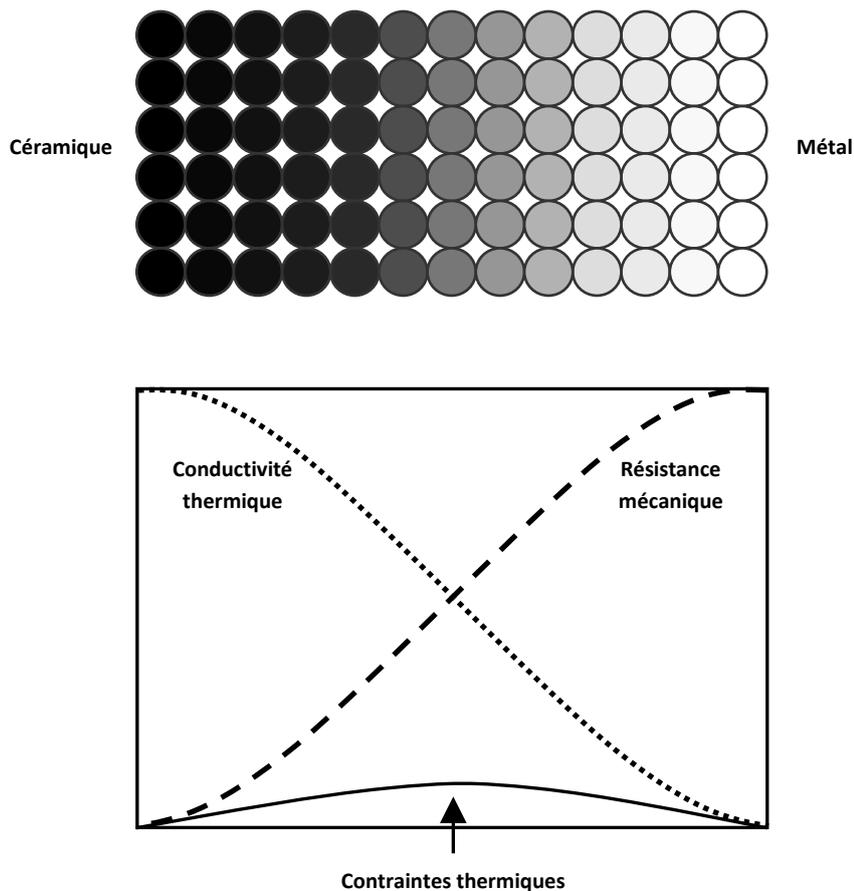


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

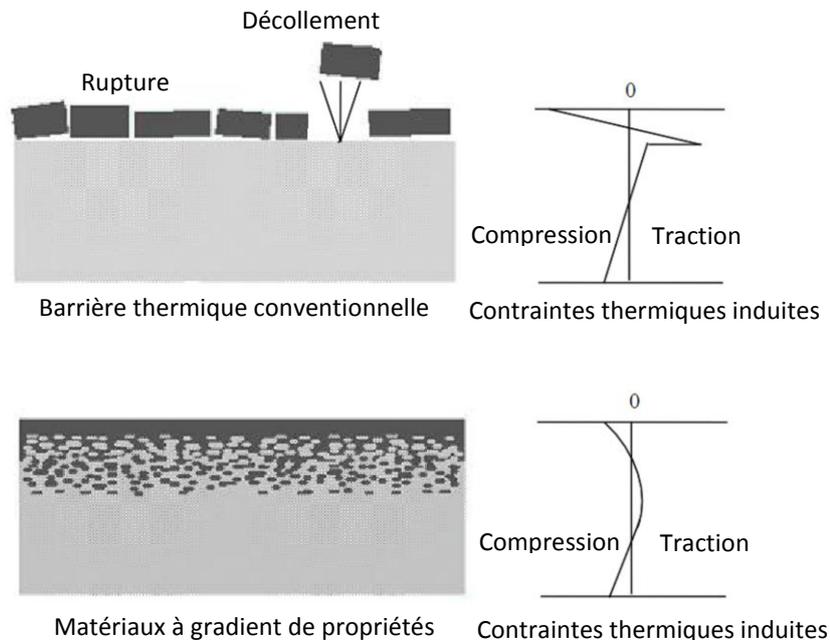


Figure I.2 : Protection thermique

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [M. Koizumi (1997)]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [T. K. Nguyen and K. Sab and G. Bonnet (2007)].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la

relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [28].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [H. Okamura (1991)].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [L. Lostec (1997)]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

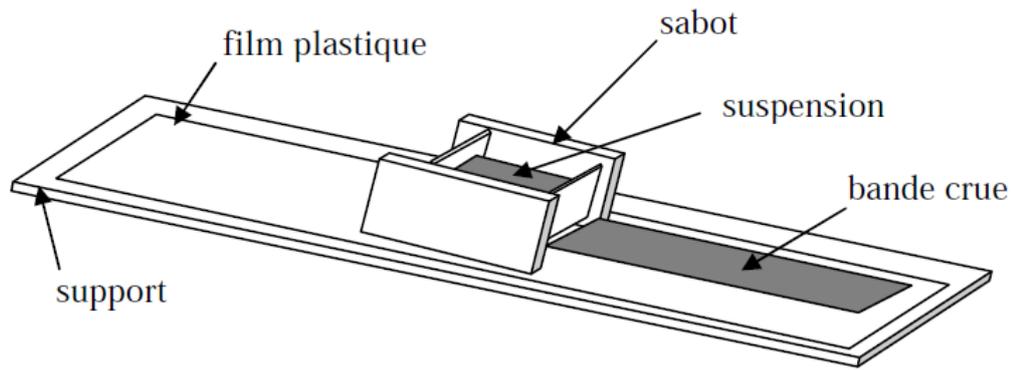


Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [R. E. Mistler (1973)] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [J.S. Moya and A.J. Sanchez-Herencia and J. Requena and R. MORENO (1992)])
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [A Bishop and C.Y. Lin and M. Navaratnam and R.D. Rawlings and H.B. McShane (1993)].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [H.D. Steffens and M. Dvorak and M. Wewel (1993)].

I.4.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [M. Takahashi and Y. Itoh and H. Kashiwaya (1990)].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.6. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du Point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo.

La figure I.4, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé. [YUKI et al. (1990)]

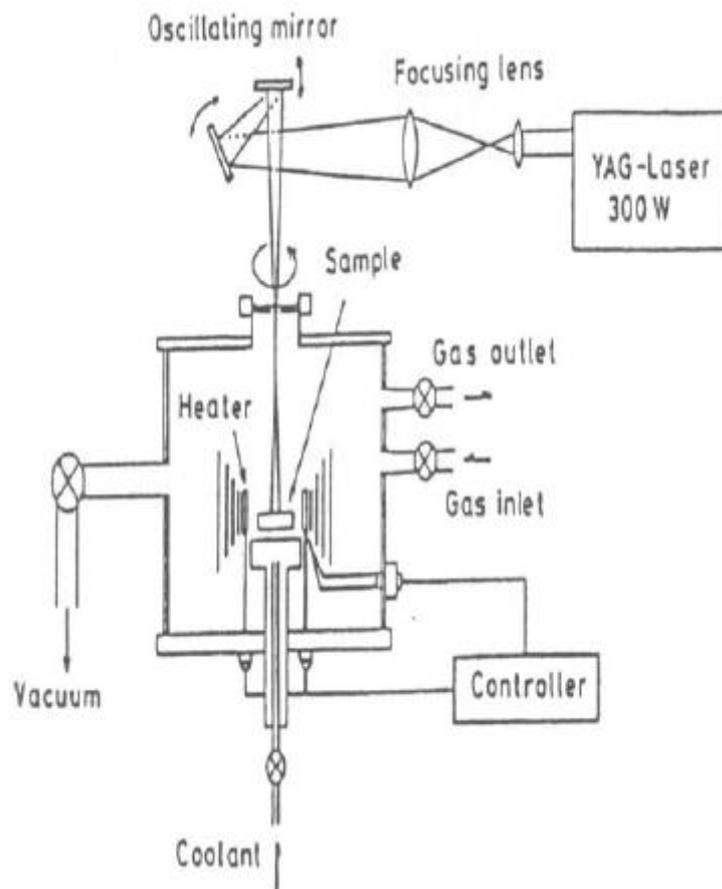


Figure I.4 : Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel [Yuki et al, 1990]

I.4.7. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.5) [ABDI (1997)].

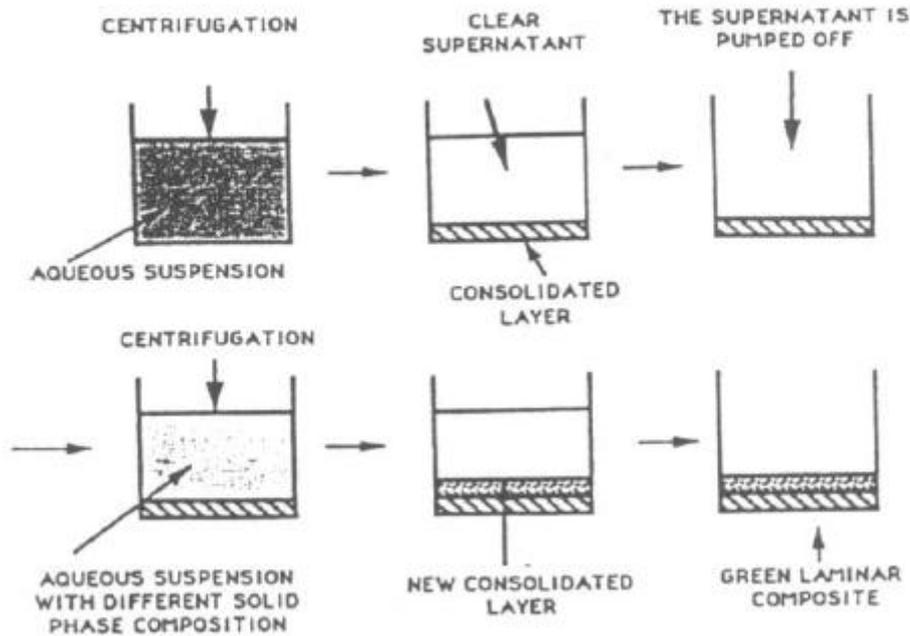


Figure I.5 : Schéma du Procédé Dépôt par Centrifugation [ABDI, 1997]

I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.6. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

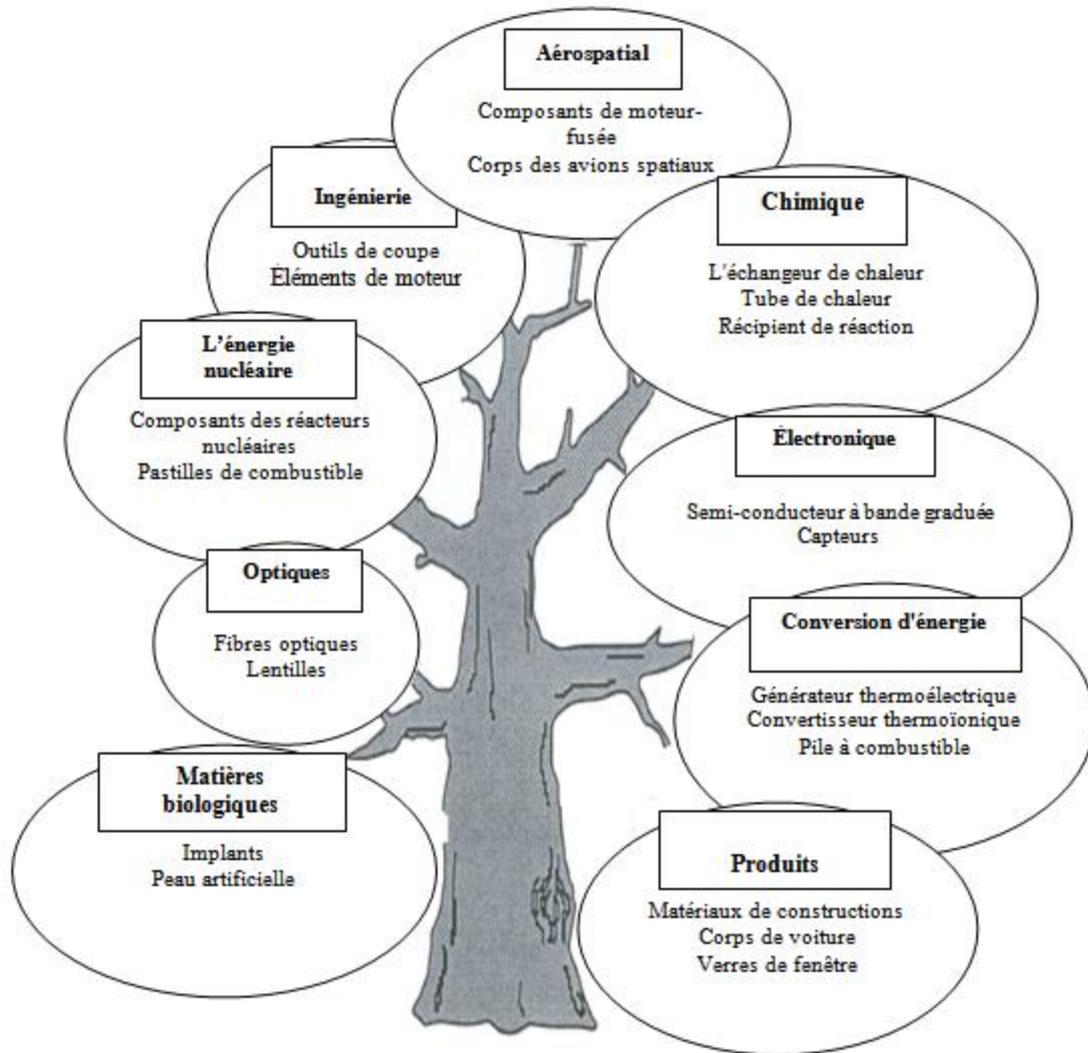


Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM

I.5.1 Utilisation des matériaux a gradient de propriété dans la fabrication des plaques solaires

Un panneau solaire est un dispositif destiné à récupérer le rayonnement solaire pour le convertir en énergie électrique ou en énergie thermique utilisable par l'homme.

On distingue deux types de panneaux solaires

- les panneaux solaires thermiques, appelés capteurs solaires thermiques, collecteurs solaires ou simplement capteurs solaires, qui piègent la chaleur du rayonnement solaire et la transfèrent à un fluide caloporteur ;

- les panneaux solaires photovoltaïques, appelés modules photovoltaïques ou simplement panneaux solaires, qui convertissent le rayonnement solaire en électricité. Le solaire photovoltaïque est communément appelé PV ;

a- les panneaux solaires thermiques

Un capteur solaire thermique (ou capteur hélio-thermique ou collecteur solaire ou simplement capteur solaire) est un dispositif conçu pour recueillir l'énergie solaire transmise par rayonnement et la communiquer à un fluide caloporteur (gaz ou liquide) sous forme de chaleur. Cette énergie calorifique peut ensuite être utilisée pour le chauffage de bâtiments, pour la production d'eau chaude sanitaire ou encore dans divers procédés industriels. Cette technologie est parfois confondue avec les panneaux photovoltaïques, qui eux transforment la lumière (les photons) en électricité.

La technologie du solaire thermique est beaucoup plus simple.

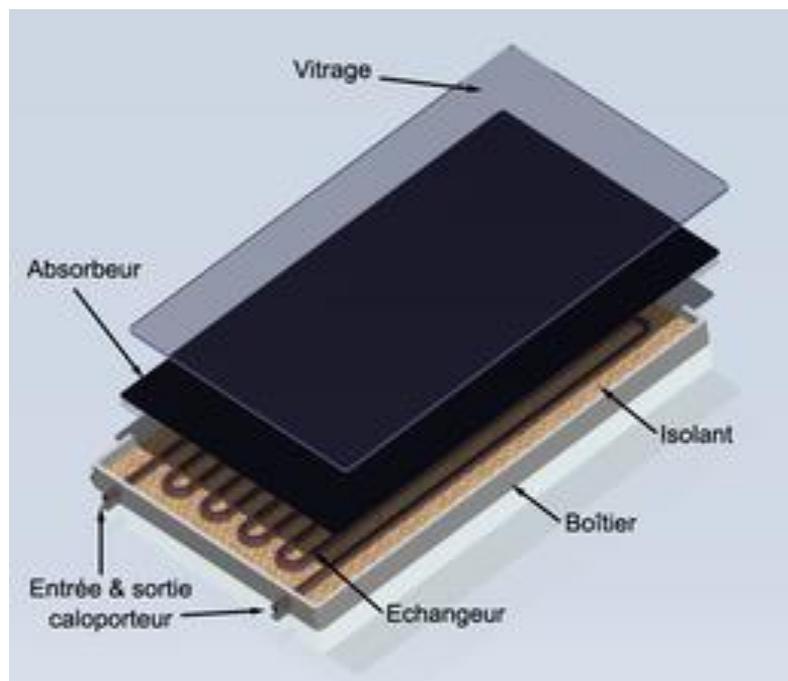


Figure I.7 : panneau solaire thermique

Un capteur solaire plan est généralement composé d'un coffre, d'un vitrage, d'une isolation, d'un absorbeur et de tubes permettant le passage du fluide caloporteur.

Les absorbeurs :

L'absorbeur est l'un des éléments les plus importants d'un capteur thermique ; il convertit le rayonnement solaire en chaleur.

L'absorbeur se caractérise par deux paramètres :

- le facteur d'absorption solaire α^* (ou absorptivité) : le rapport du rayonnement lumineux absorbé par le rayonnement lumineux incident ;
- le facteur d'émission infrarouge ε (ou émissivité) : le rapport entre l'énergie rayonnée dans l'infrarouge lorsque l'absorbeur est chaud et celle qu'un corps noir rayonnerait à la même température.

Dans les applications de chauffage solaire, on cherche à obtenir le meilleur rapport facteur d'absorption solaire / facteur d'émission infrarouge. Ce rapport est appelé sélectivité.

Le matériau constituant l'absorbeur est en règle générale en cuivre ou aluminium mais aussi parfois en matière plastique.

Afin d'obtenir un meilleur rendement, certains systèmes sont donc constitués d'un revêtement particulier.

Les fluides caloporteurs

Le fluide caloporteur (ou calorporteur) permet d'évacuer la chaleur emmagasinée par l'absorbeur et de la transmettre vers là où elle doit être consommée. Un bon fluide caloporteur doit prendre en compte les conditions suivantes :

- être chimiquement stable lorsqu'il atteint une forte température, en particulier lors de la stagnation du capteur ;
- posséder des propriétés antigel en corrélation avec les conditions météorologiques locales ;
- posséder des propriétés anticorrosives selon la nature des matériaux présents dans le circuit capteur ;
- posséder une chaleur spécifique et une conductivité thermique élevées afin de transporter efficacement la chaleur ;
- être non-toxique et avoir un faible impact sur l'environnement ;

- avoir une basse viscosité afin de faciliter la tâche de la pompe de circulation ;
- être facilement disponible et bon marché

Le bon compromis par rapport à ces critères est un mélange d'eau et de glycol (utilisé dans le liquide de refroidissement des automobiles), même s'il n'est pas rare de trouver des systèmes fonctionnant à l'eau pure ou tout simplement à l'air selon l'utilisation.

Le vitrage

Le vitrage permet de protéger l'intérieur du capteur contre les effets de l'environnement et d'améliorer le rendement du système par effet de serre.

Si l'on souhaite un vitrage efficace, il doit posséder les propriétés suivantes :

- réfléchir le rayonnement lumineux au minimum quelle que soit son inclinaison ;
- absorber le rayonnement lumineux au minimum ;
- avoir une bonne isolation thermique en gardant le rayonnement infrarouge au maximum ;
- résister dans le temps aux effets de l'environnement (pluie, grêle, rayonnement solaire,...) et aux grandes variations de températures.

Les principaux vitrages utilisés pour les capteurs thermiques sont à base de verre non-ferrugineux ou en verre acrylique, et souvent dotés d'un revêtement anti-reflet.

Les isolants thermiques

L'isolant thermique permet de limiter les déperditions thermiques, sa caractéristique est le coefficient de conductivité ; plus il est faible meilleur est l'isolant. Les principaux matériaux utilisés pour les capteurs thermiques sont la laine de roche et de verre, des mousses de polyuréthane ou encore de la résine de mélamine. On retrouve parfois des isolants plus naturels.

Dans le cas des capteurs thermiques vitrés, il est aussi intéressant de remplacer l'isolation entre la vitre et l'absorbeur par de l'air ! En effet, l'air a un grand pouvoir d'isolation, il est ainsi utilisé dans le double vitrage.

b- Les panneaux solaires photovoltaïques

Les panneaux solaires photovoltaïques, parfois appelés photoélectriques, transforment la lumière en électricité. Ces panneaux sont donc les plus répandus mais aussi les plus complexes.

Ces panneaux sont tout simplement un assemblage de cellules photovoltaïques, chacune d'elles délivrant une tension de 0.5V à 0.6V. Elles sont donc assemblées pour créer des modules photovoltaïques de tension normalisée comme 12V.

Un panneau solaire photovoltaïque permet de générer de l'électricité à partir de la lumière du soleil. Un panneau photovoltaïque est globalement constitué de 6 composants

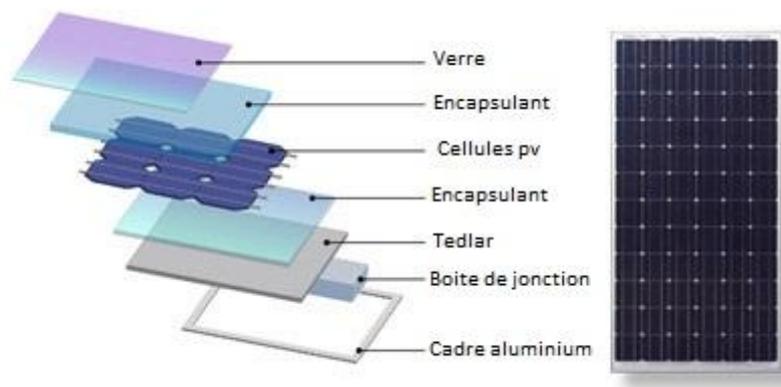


Figure I.8 : panneau solaire photovoltaïque

- Du verre trempé en face avant à haute transmission
- Des films fin d'EVA (Ethylène-acétate de vinyle) qui permet de coller et protéger les cellules photovoltaïques de l'eau et la poussière.
- Les cellules photovoltaïques qui vont convertir la lumière en électricité
- Le TPT (Tedlar-Polyester-Tedlar) en face arrière
- La boîte de jonction permettant le raccord simple et efficace des panneaux photovoltaïques et la protection électrique des panneaux.

Le cadre en aluminium anodisé pour le maintien et la pose des panneaux

La performance d'une plaque solaire dépend de la matière utilisée et des conditions d'exploitation. Normalement, une plaque solaire peut être fabriquée à partir d'un matériau poli ou d'une plaque recouverte d'une couche spéciale. Cependant, pour certaines applications

spécifiques, comme dans les satellites solaires, les tours solaires et l'énergie solaire pour les moteurs de puissance thermique on peut exiger un faible poids et une haute résistance à la température.

Parmi les matériaux qui peuvent être utilisés dans la fabrication des panneaux solaires, il existe un matériau innovant récent qui suscite de plus en plus la curiosité des scientifiques et du monde industriel: le matériau fonctionnellement gradué (Functionally Graded Materials) ou FGM. Ce matériau est composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs, a des fractions volumiques et microscopiques qui sont obtenus par une combinaison intime et graduelle d'acier et de céramique conçus pour avoir une continuité spatiale variable.

La plaque solaire à base de FGM, dont la couche supérieure en céramique empêche la chaleur d'être transférée et la surface inférieure en métal qui aide à résister aux contraintes exercées sur la structure, constitue une alternative aux plaques de silicium qui s'avèrent assez coûteuses et polluantes. Elles offrent aussi un faible poids.

En contribution aux recherches actuelles, l'objectif du présent projet vise à former les concepteurs dans les bureaux d'étude industriels et engineering, les enseignants universitaires et les centres de recherche pour la maîtrise de cette technologie et son application dans différents domaines et en particulier dans l'énergie solaire.

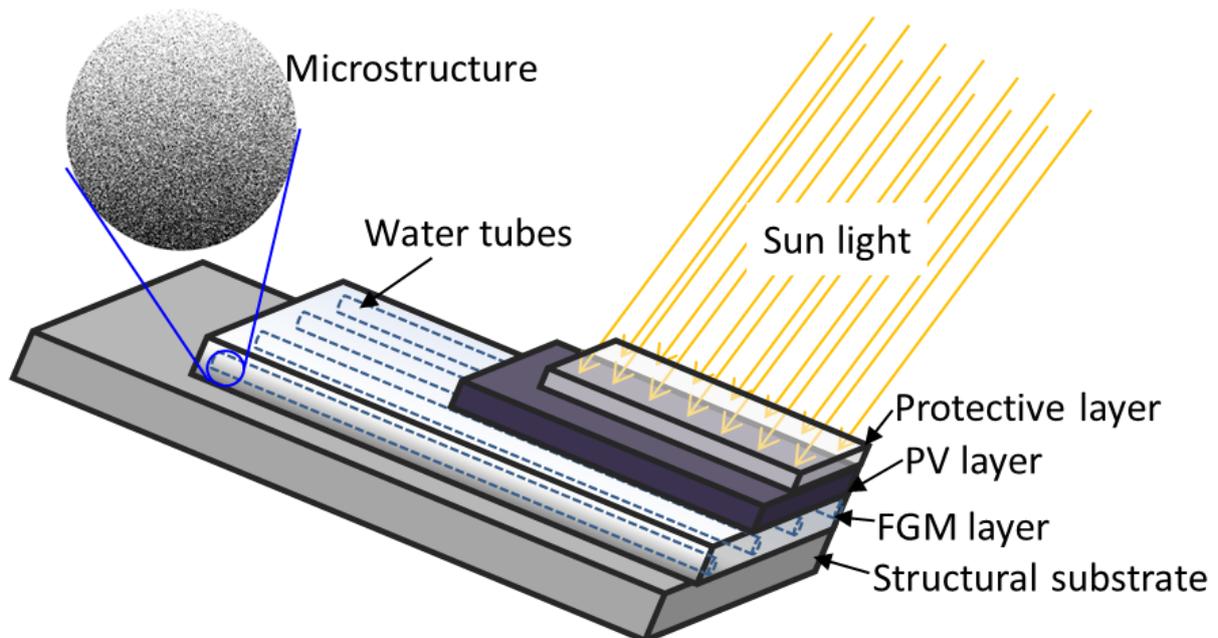


Figure I.9 : Illustration schématique d'un panneau solaire hybride avec un matériau FGM

La mise en œuvre des modèles analytiques et numériques sur les paramètres mécaniques, physiques et thermiques seront un atout qui permet la maîtrise de ce type spécifique de matériau pour la réalisation des panneaux solaires.

I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

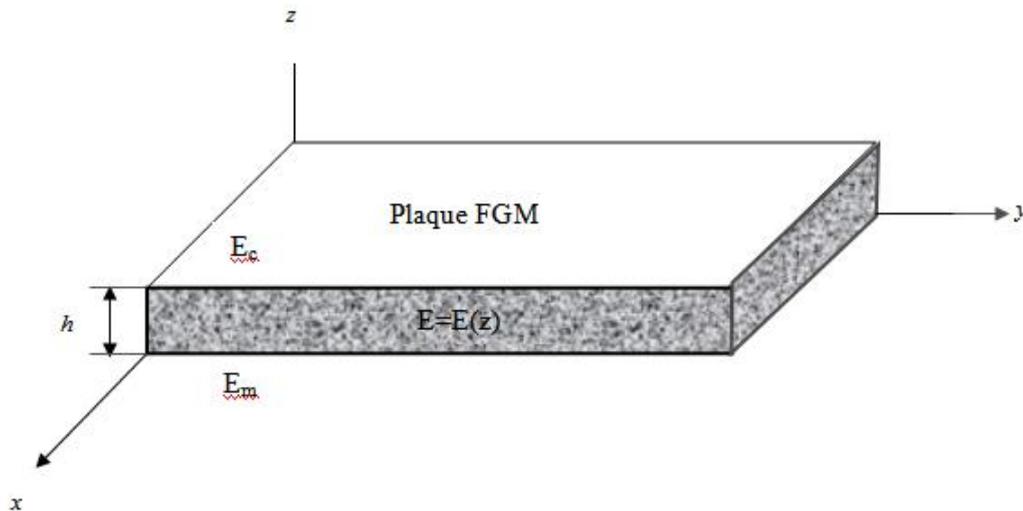


Figure I.10 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [G. Bao and L. Wang (1995)]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

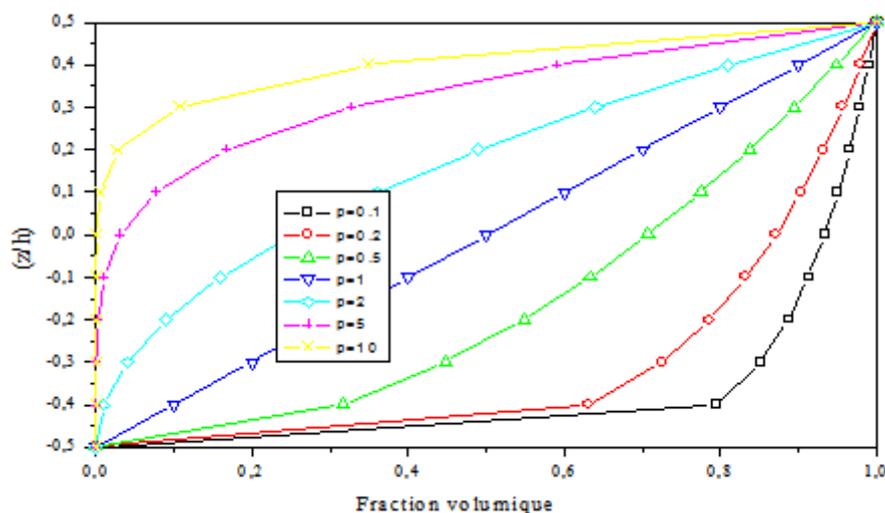


Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi [Chi. Shyang-ho and Chung Yen-Ling (2003)] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

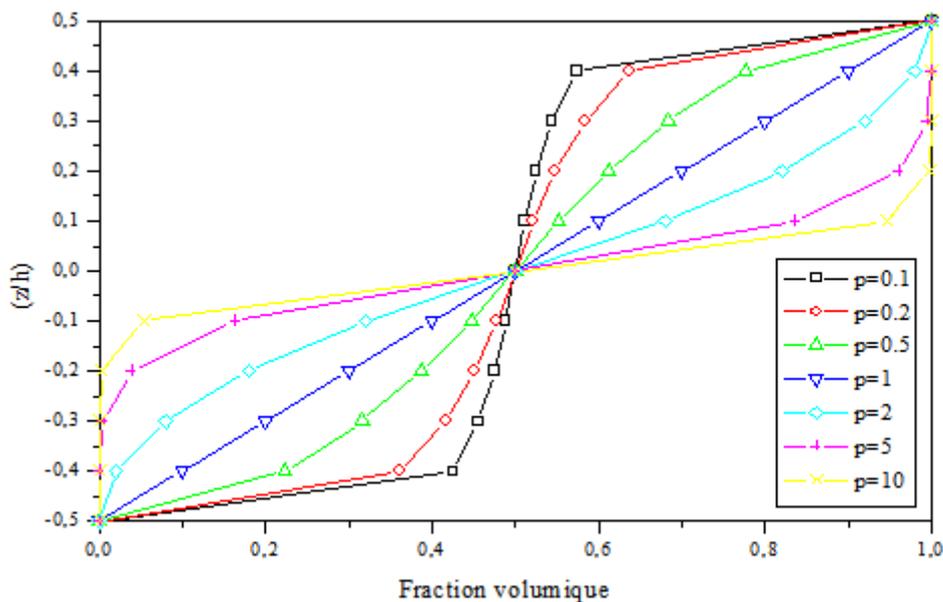


Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [F. Delale and F. Erdogan (1983)]

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.5b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

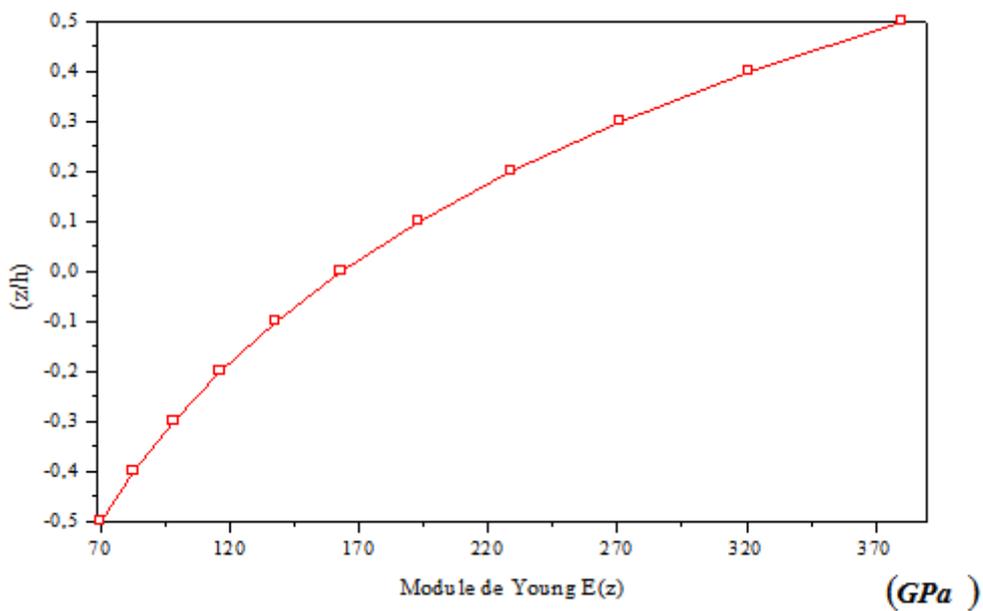


Figure I.13 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

Les Différentes Théories Des Plaques

II.1. Introduction

Le terme plaque peut avoir différentes significations, mais en construction et en génie mécanique, une plaque est une pièce dont l'épaisseur est négligeable devant les autres dimensions (voir aussi Tôle).

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, afin de fonder une théorie sur plaques minces.

La théorie des plaques épaisse a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de [Rayleigh (1877)], [Timoshenko (1921)] et [Reissner (1945)].

Comme pour l'étude des poutres, on met en relation une forme finale de la plaque. Grâce au principe d'équivalence, on peut établir la relation entre le champ des déplacements et le champ de tenseur des déformations, ainsi que les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes. Quant à la liaison entre les contraintes et le tenseur des déformations, s'écrit grâce à la loi de Hooke généralisée.

Une plaque composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes et collées. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses.

De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiées (délaminages, fissure transverse,...) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. En outre, une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée....) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés ces dernières années, pour la modélisation des structures multicouches. Ces modèles permettent de réduire le problème d'élasticité 3D en 2D; en considérant un champ de déplacement continu suivant l'épaisseur avec également une continuité de déformation entre les différentes couches.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente,
- Approche par couche,
- Approche développement asymptotique,

II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Modèle monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches, la plaque multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner (1961)]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff (1850)] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation (Figure II.1).

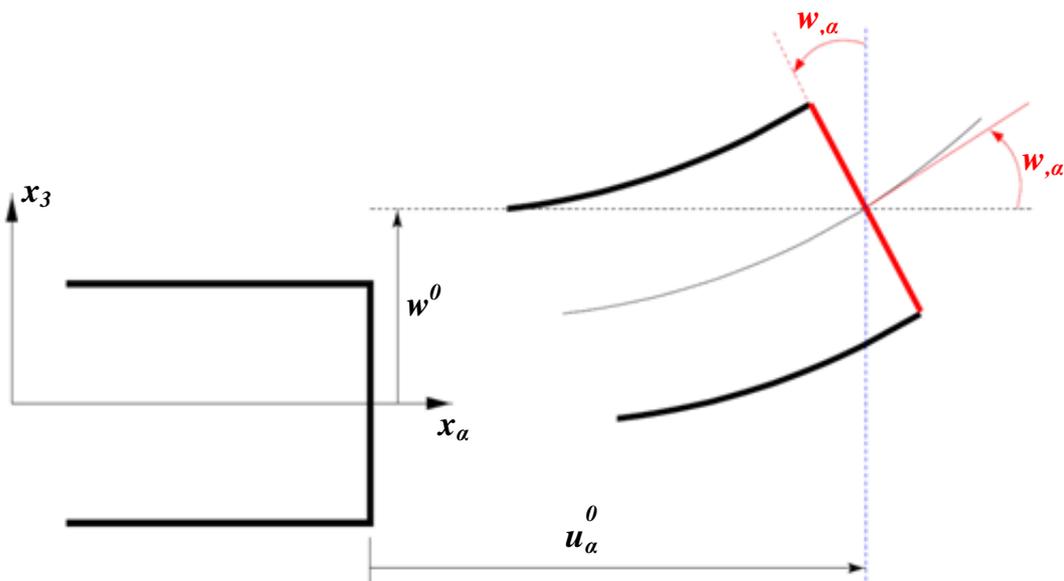


Figure II.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II.2). Le champ de déplacements de reissner-mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

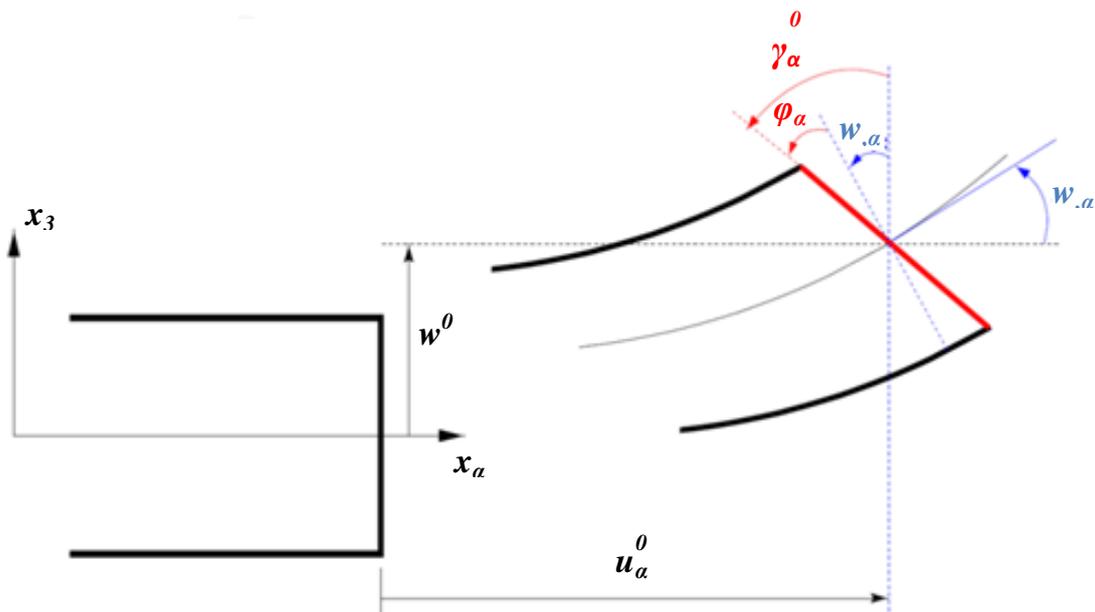


Figure II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney (1973)]. Les résultats obtenus

dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

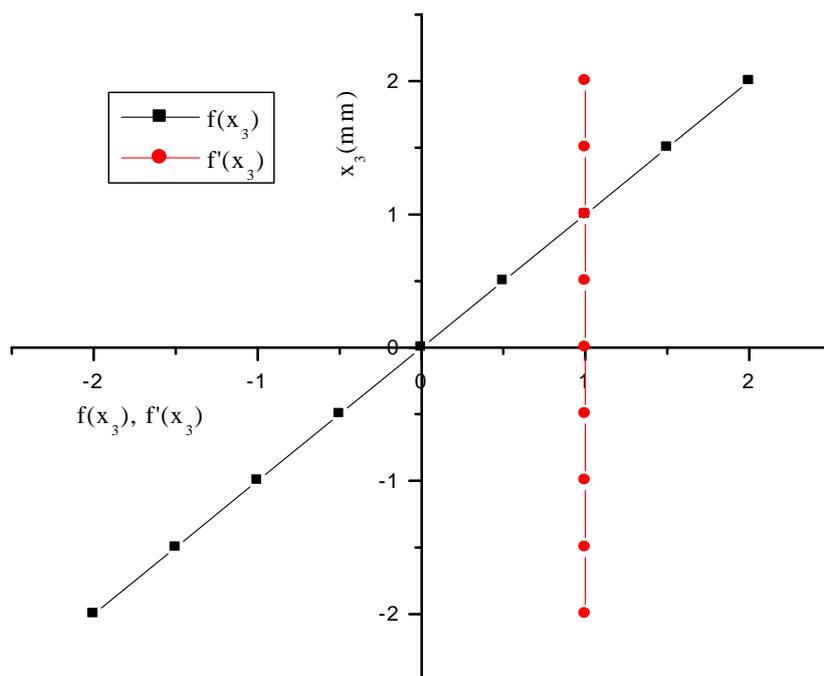


Figure II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur

II.2.1.3. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4) [Liberscu (1967)], [Whitney (1973)], [Touratier (1991)], [Nguyen (2004)]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d' [Ambartsumyan (1969)] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de [Reissner (1945)], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de [Reddy (1987)] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de [Reddy (1987)], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier (1991)] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h} \right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy (1984)].

Récemment, Afaq et al. [Afaq (2003)] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu (2005)] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur du multicouche.

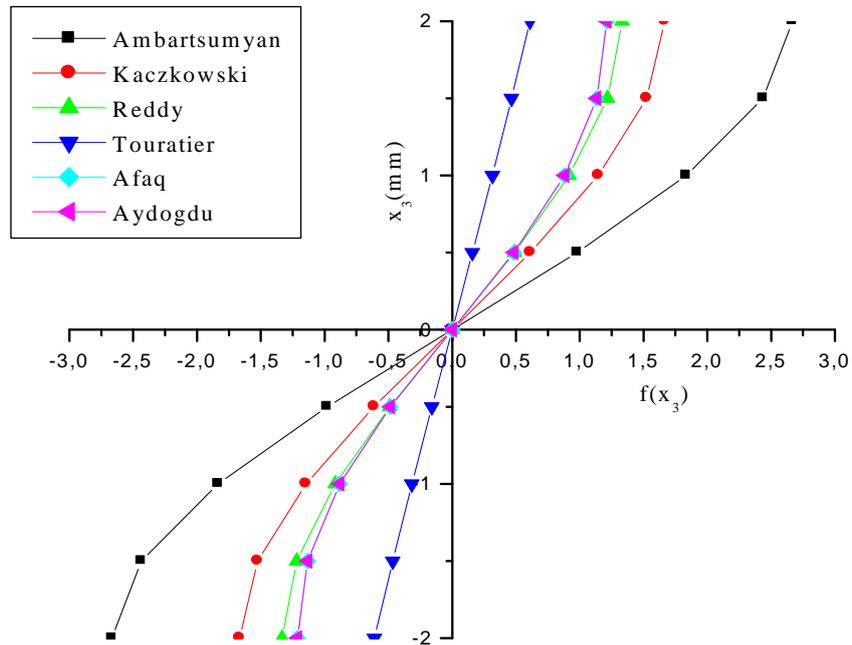


Figure II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

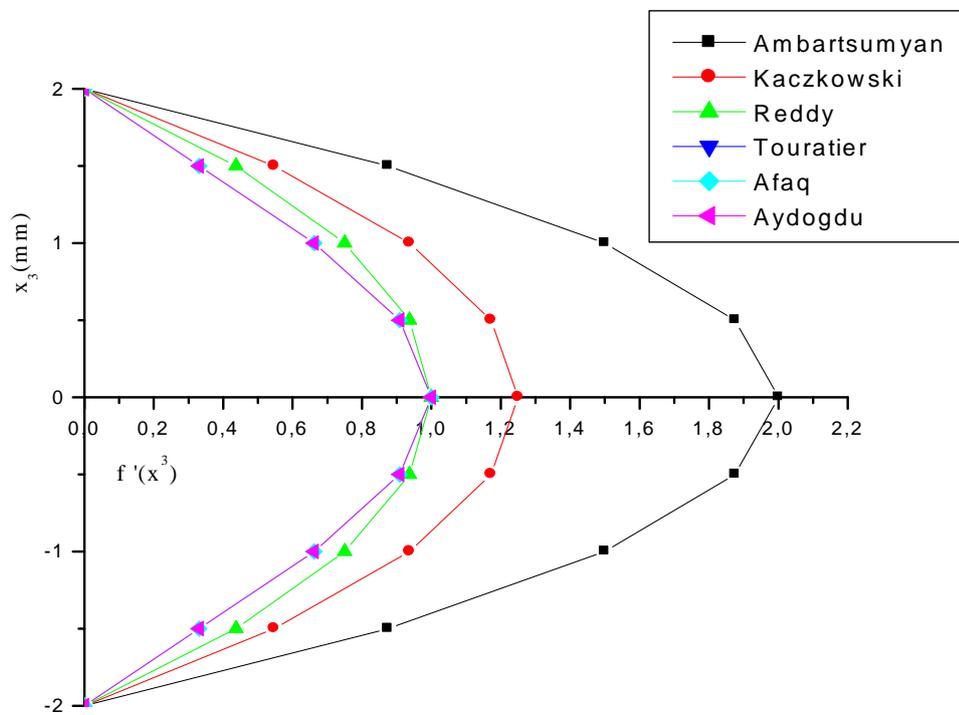


Figure II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures II.5 et II.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot (1997)], [Carrera (2000)], [Afaq (2003)], [Reddy (1984)], [Di Sciuva (1987)]. Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figure II.7 et II.8).

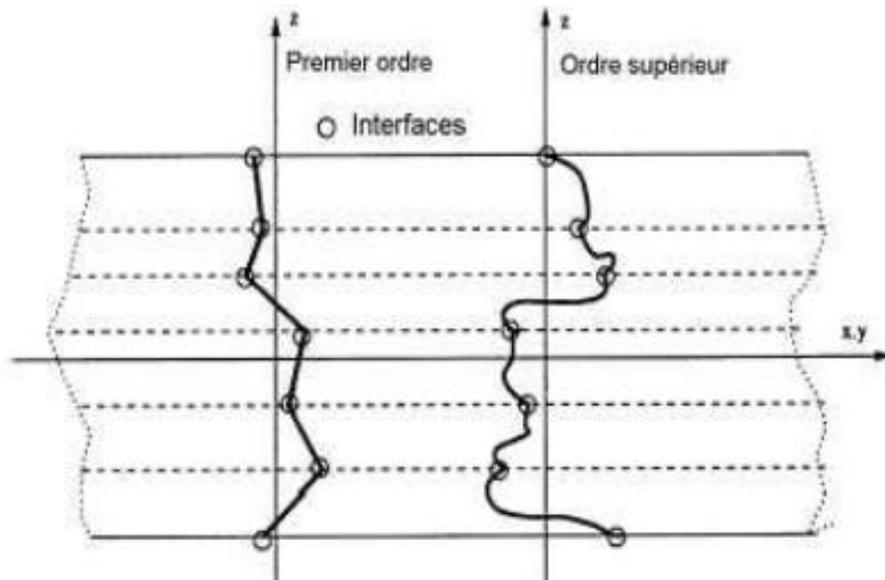


Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen (2004)]

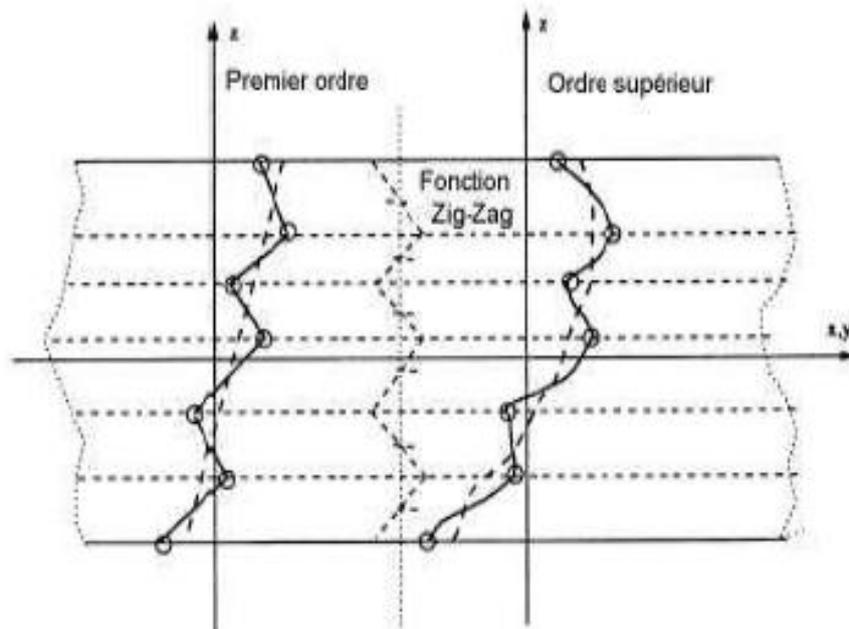


Figure II.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen (2004)]

II.2.2.1. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva (1987)]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une

théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure II.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

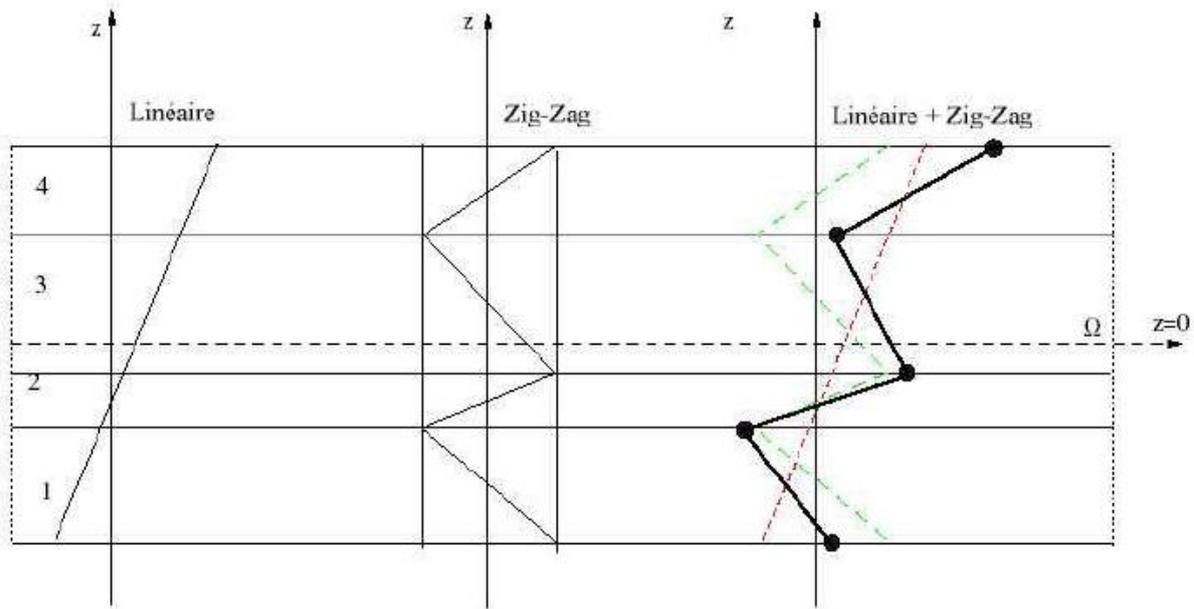


Figure II.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Nguyen (2004)]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Nguyen (2004)]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure II.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

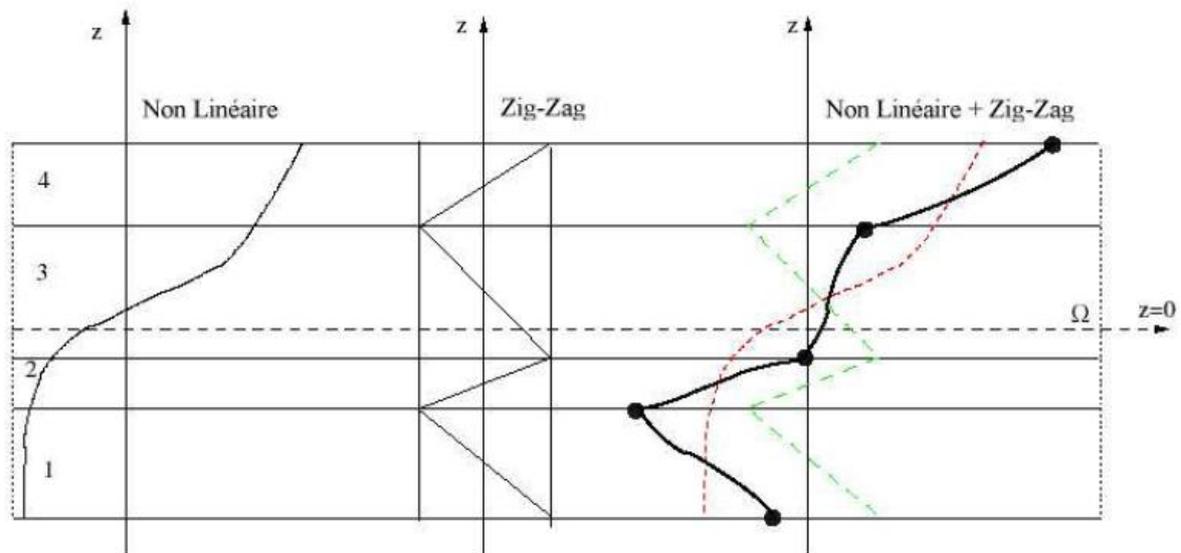


Figure II.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [Nguyen (2004)]

Dans les travaux de [Karama (1998)], [Ossadzow (2001)], la fonction sinus de [Touratier (1991)] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [Afaq (2003)] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peut artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue [Icardi 01a]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

II.2.2.2. Les modèles en couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure II.7). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couples par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux

interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [Srinivas (1973)], [Reddy (1987)], [Tahani (2003)], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [Ren (1986)], [Kassapoglou (1987)], [Yin (1994)] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [Ren (1986)] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou (1987)], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin (1994)], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano (1978)]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen (2004)].

II.2.3. Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières. Ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrale, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [Fredrichs (1961)], [Johnson (1971)], [Allix (1989)]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de [Ladeveze (1988)], [Allix (1989)]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis au, voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contrainte et déplacements correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en série de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces est pris en compte.

II.3. Modèles éléments finis des structures composites

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis

sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

II.3.1. Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [Reddy (1980)], [Ganapathi (1997)]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par noeud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grace à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité Co, les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans [Nguyen (2004)] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen (2004)].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux w mais encore leurs dérivées normales doivent être continus à travers des frontières inter éléments [Reddy (1999)]. Dans [Ren (1986)], un élément de continuité C1 basé sur le modèle cubique de [Reddy (1984)] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le modèle "sinus" de [Touratier (1991)], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité C1 sont développés [Nguyen (2004)], [Polit (2002)]. L'élément triangulaire développé par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds. La continuité des champs aux interfaces et les

conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurés. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure II.11.

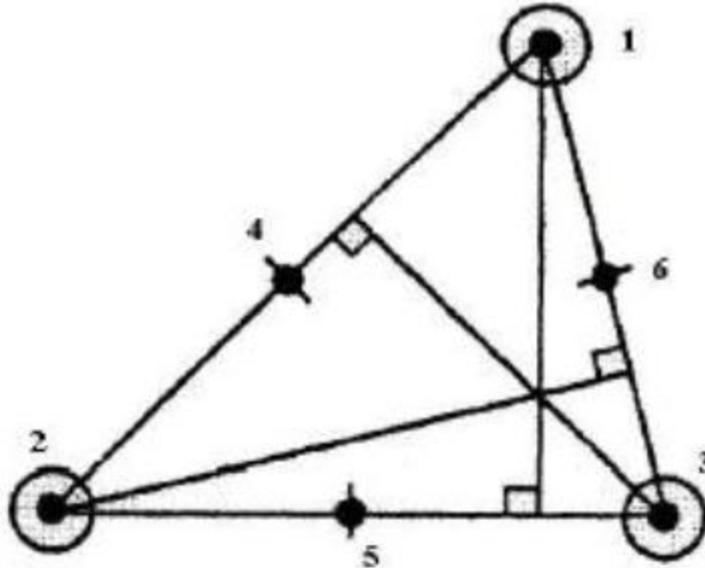


Figure II.11 : Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds de [Polit (2002)]

Les travaux de Khare [Khare (2004)], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures II.12 et II.13). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement

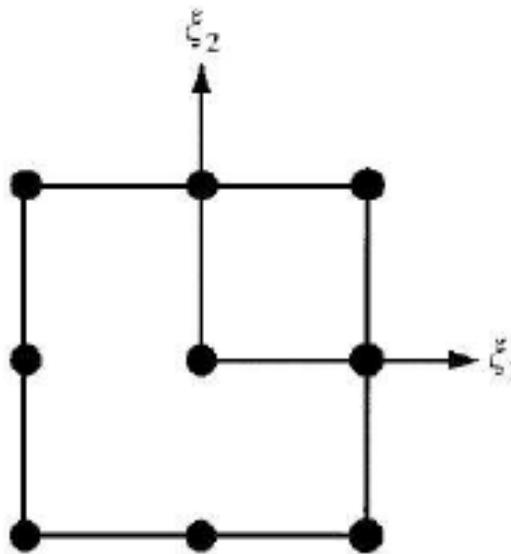


Figure II.12 : Elément quadrilatère de type Lagrange a 9 nœuds [Nguyen (2004)]

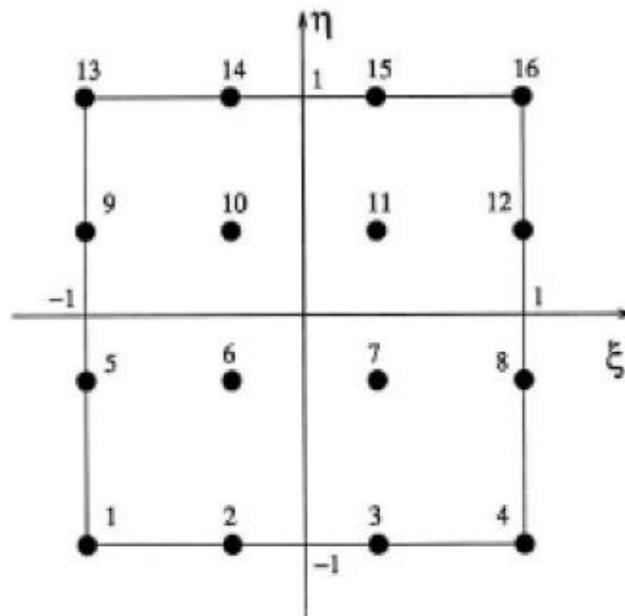


Figure II.13 : Elément quadrilatère de type Lagrange a 16 nœuds [Nguyen (2004)]

II.3.2. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 nœuds de Raju [Raju (1981)] sont

couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure II.14.

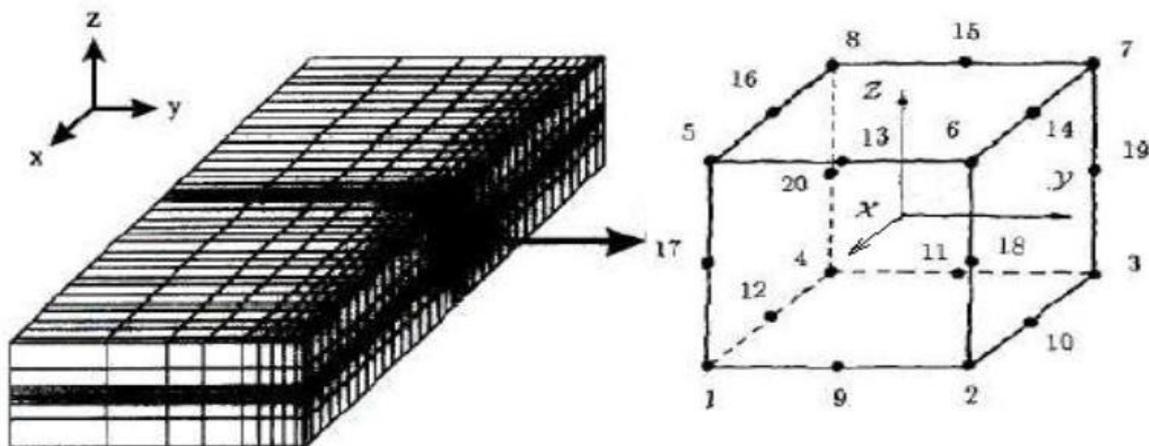


Figure II.14 : Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes interlaminaires [Nguyen (2004)]

Etude Analytique De Flambement Thermique Des Plaques FGM

III.1. Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'analyse de flambement thermique des plaques solaires fonctionnellement graduée SFGPs posées sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffinée et simple de déformation de cisaillement des plaques [Abdelaziz et al. (2011)] basée sur la position exacte de la surface neutre. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que le déplacement axiale et transversale est constitué des composantes de flexion et de cisaillement dans laquelle la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts tranchants et, de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et satisfait aux conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. En outre, elle contient seulement quatre variables indépendantes, et a de fortes similitudes avec la CPT dans certains aspects tels que les équations du mouvement, les conditions aux limites, et les expressions des efforts résultants. Les propriétés matérielles des plaques solaires fonctionnellement graduée SFGPs sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur, selon une loi de puissance de la fraction en volume des constituants. Les charges thermiques sont supposées être variées d'une façon uniforme ou non linéaire à travers l'épaisseur. Les résultats sont comparés et validés par les résultats des travaux connus dans la littérature.

III.2. Formulation mathématique

Considérons une plaque rectangulaire à gradient de propriété FGMs d'épaisseur h , longueur a et de largeur b , liée à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) , comme est indiqué dans la figure IV.1. Puisque dans les plaques fonctionnellement graduées, une symétrie matérielle par rapport au plan médian n'existe pas, les équations de membranes et de flexion seront donc couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie d'une manière appropriée dans la direction de l'épaisseur de la plaque à gradient de propriété de telle sorte qu'il sera confondu avec la surface neutre, les équations d'équilibre seront découplées. Afin de déterminer la position de la surface neutre des plaques à gradient de propriété, deux plans de référence différents sont considérés pour la mesure de la côté z , à savoir z_{ms} et z_{ns}

mesurée à partir du plan médian et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme est indiqué dans la figure IV.2. La fraction volumique de la céramique (V_c) peut être exprimée en termes de coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (III.1)$$

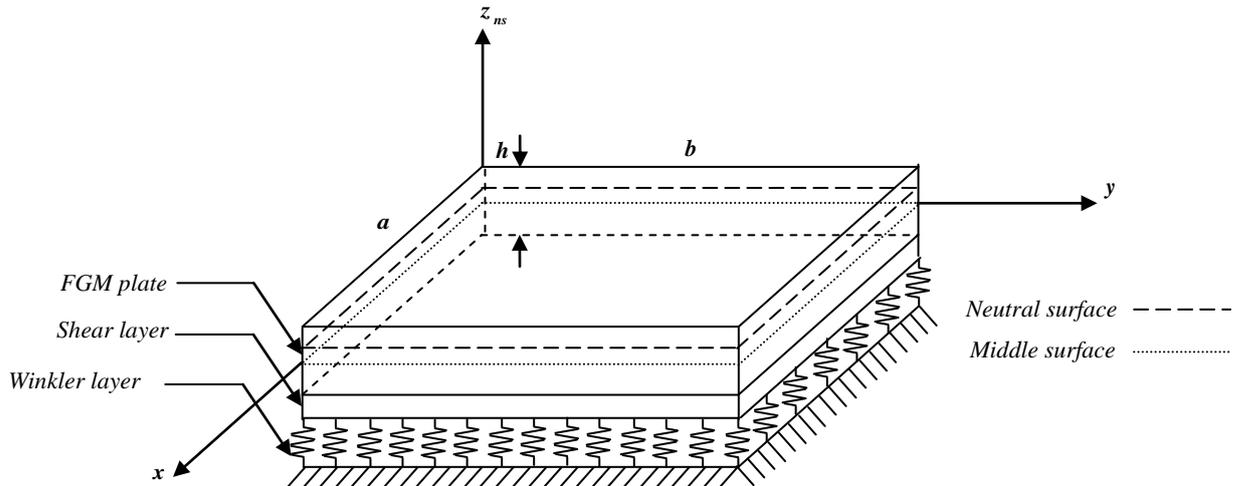


Figure III.1 : Système de coordonnées et la géométrie des plaques rectangulaires à gradient de propriété sur une fondation élastique de type « Pasternak ».

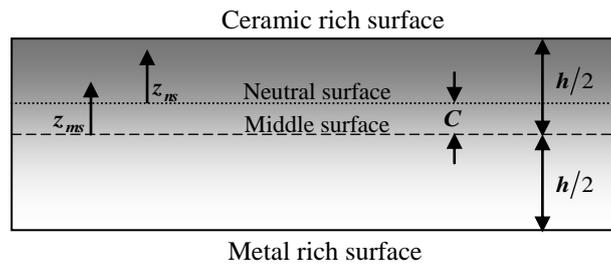


Figure III.2 : La position de la surface moyenne et la surface neutre pour une plaque à gradient de propriété FGM.

Les propriétés Matériel non homogènes d'une plaque à gradient de propriété, peuvent être obtenues au moyen de la loi de mélange [Suresh and Mortensen (1998)]. Ainsi, en utilisant l'équation (1), chaque propriété (P) non homogènes du matériau de la plaque à gradient de propriété, peut être écrite en fonction de la coordonnée de l'épaisseur comme suit

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (\text{III.2})$$

Où P_M et P_C sont les propriétés correspondantes au métal et au céramique, respectivement, et n est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro. De plus, le paramètre C est la distance entre la surface neutre et la surface moyenne. Dans le présent travail, nous supposons que les modules d'élasticité E , la conductivité thermique K et le coefficient de dilatation thermique α , sont décrits par l'équation (2), tandis que le coefficient de Poisson ν , est considérée comme étant constant à travers l'épaisseur [Javaheri et Eslami (2002); Samsam Shariat et Eslami (2007); Zenkour et Mashat(2010)].

La position de la surface neutre de la plaque à gradient de propriété est déterminée en annulant le moment du premier ordre en terme du module de Young [Zhang and Zhou (2008); Ould Larbi et al. (2013)]

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue comme

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (\text{III.4})$$

Il est clair que le paramètre C est nul pour des plaques isotropes homogènes comme prévu.

En se basant sur la théorie raffinée de déformation de cisaillement [Abdelaziz et al. (2011)] et le concept physique de la surface neutre, le champ de déplacement devient

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} + (z_{ns} + C) \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.5a})$$

$$v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} + (z_{ns} + C) \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.5b})$$

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.5c})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements axiaux au niveau de la surface neutre de la plaque dans la direction x et y , respectivement; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement.

Les équations non linéaires déformation-déplacement de Von Karman sont comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 6})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{III. 7a})$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (\text{III. 7b})$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (\text{III. 7c})$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad g(z_{ns}) = \frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right)^2 \quad (\text{III. 7d})$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque à gradient de propriété [Tounsi (2011)] peuvent être écrites

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 8})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. $T(x, y, z_{ns})$ est la variation de la température à travers l'épaisseur. En utilisant les propriétés des matériaux définis dans l'équation (III.2), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}, \quad (\text{III. 9})$$

En se basant sur la présente théorie de plaque raffinée de déformation de cisaillement, les résultantes des efforts sont liées aux composantes de contraintes par les équations [Abdelaziz et al. (2011)]

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{III .10a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (\text{III .10b})$$

En substituant Eq. (III.8) dans Eq. (III.10), les résultantes des efforts de la plaque à gradient de propriété peuvent être liées aux déformations par

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (\text{III .11})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III .12a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (\text{III.12b})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III .12c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{III .12d})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III .12e})$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III .12f})$$

Où A_{ij} , D_{ij} , etc, sont les rigidités de la plaque, définie par

$$\begin{aligned}
 \{A_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} &= \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \{1, z_{ns}^2, z_{ns}^3, z_{ns}^4, z_{ns}^6\} Q_{ij} dz_{ns}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 B_{ij}^s &= \frac{5}{3h^2} E_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 D_{ij}^s &= -\frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 H_{ij}^s &= \frac{1}{16} D_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^4} H_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 \{A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\} &= \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \{1, z_{ns}^2, z_{ns}^4\} Q_{ij} dz_{ns}, \quad (i, j = 4, 5) \\
 A_{ij}^s &= \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{2h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}, \quad (i, j = 4, 5)
 \end{aligned} \tag{III .13}$$

Les résultantes d'effort et de moment, $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, and $M_x^{sT} = M_y^{sT}$

dû au chargement thermique sont définis par

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu} \alpha(z_{ns}) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \tag{III .14}$$

III.3. Equations d'équilibre et de stabilité

Dans cette partie, on s'intéresse à la détermination des équations d'équilibre d'une plaque à gradient de propriété reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. La plaque est sollicitée à un chargement thermique. Pour cela, le principe de l'énergie potentielle totale est adopté et il s'écrit comme suit

$$V = U + U_F \tag{III .15}$$

Où U est l'énergie de déformation totale de la plaque, et est calculé comme

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} [\sigma_x (\epsilon_x - \alpha T) + \sigma_y (\epsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dz_{ns} dy dx, \tag{III .16}$$

Et U_F est l'énergie de déformation due à la fondation élastique, qui est donnée par [Aiello and Ombres (1999)]

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f_e (w_b + w_s) dy dx \tag{III .17}$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation et qui est donnée par

$$f_e = K_w (w_b + w_s) - K_g \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (\text{III .18})$$

Où K_w est la rigidité de la fondation de Winkler et K_g est une constante représentant l'effet des interactions de cisaillement des éléments verticaux.

En utilisant les équations (III.6), (III.7) et (III.11) et en employant le principe des travaux virtuels pour minimiser la fonctionnelle de l'énergie potentiel total, les expressions des équations d'équilibre de la plaque reposant sur la fondation élastique a deux paramètres seront

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} - f_e &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} - f_e &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III .19})$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III .20})$$

Les équations de stabilité des plaques à gradient de propriété peuvent être obtenues en moyenne du critère de l'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque sandwich sous des charges thermiques est défini en termes des composantes de déplacement u_0^0 , v_0^0 , w_b^0 et w_s^0 . Les composantes de déplacement de l'état voisin de l'équilibre stable sont notés par u_0^1 , v_0^1 , w_b^1 , w_s^1 . Ainsi, les déplacements totaux de l'état voisin sont

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad (\text{III .21})$$

Ainsi, les résultantes des contraintes se décomposent en deux termes représentant l'équilibre stable et l'état voisin. Les résultantes des contraintes en exposant 1 sont des fonctions linéaires de déplacement. En utilisant les équations (III.19) et (III.21), les équations de stabilité deviennent

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{III .22}$$

Avec

$$\bar{N}^1 = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \tag{III .23a}$$

$$f_e^1 = K_w (w_b^1 + w_s^1) - K_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) \tag{III .23b}$$

Les termes N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 sont les résultantes des forces de pré-flambement obtenus par

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns}) E(z_{ns}) T}{1-\nu} dz_{ns}, \quad N_{xy}^0 = 0 \tag{III .24}$$

Les équations de stabilité en termes de déplacement peuvent être obtenues en substituant l'équation (III.11) dans l'équation (III.22). Les équations obtenues en se basant sur la présente théorie de déformation de cisaillement raffinée des plaques à gradient de propriété en contact avec une fondation élastique à deux paramètres sont en nombre de quatre et sont comme suit

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{III .25a}$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x^2 \partial y} = 0 \tag{III .25b}$$

$$\begin{aligned}
 -D_{11} \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial y^4} \\
 -K_w (w_b^1 + w_s^1) + K_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) + \bar{N}^1 = 0
 \end{aligned} \tag{III .25c}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 -D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial y^4} \\
 + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s^1}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s^1}{\partial y^2} - K_w (w_b^1 + w_s^1) + K_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) + \bar{N}^1 = 0
 \end{aligned} \tag{III .25d}$$

III.4. Solution trigonométrique du flambement thermique

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous nous concentrons dans cette partie sur la solution exacte de l'équation (III.25) pour une plaque à gradient de propriété simplement supportée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour la présente théorie raffinée au niveau des bords latéraux

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \text{ at } x = 0, a, \quad (\text{III .26a})$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \text{ at } y = 0, b. \quad (\text{III .26b})$$

La solution approchée suivante satisfait à la fois à l'équation différentielle et les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III .27})$$

Où U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{bmn}^1 , and W_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$. En remplaçant l'équation (III.27) dans l'équation (III.25), on obtient

$$[K]\{\Delta\} = 0, \quad (\text{III .28})$$

Où $\{\Delta\}$ désigne le vecteur colonne

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\}^t \quad (\text{III .29})$$

Et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{III .30})$$

Où

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\
 a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= 0 \\
 a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\
 a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
 a_{23} &= 0 \\
 a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + \\
 &\quad K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w)
 \end{aligned} \tag{III .31}$$

En appliquant la méthode de condensation statique pour éliminer les coefficients associés aux déplacements axiaux, l'équation (III.28) peut être réécrite comme suit

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III .32}$$

Où

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, [K^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{14} \\ 0 & a_{24} \end{bmatrix}, [K^{22}] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{III .33a}$$

$$\Delta^1 = \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \\ V_{mn}^1 \end{Bmatrix}, \Delta^2 = \begin{Bmatrix} W_{bmn}^1 \\ W_{smn}^1 \end{Bmatrix} \tag{III .33b}$$

L'équation (III.32) peut être exprimée par

$$[K^{11}]\Delta^1 + [K^{12}]\Delta^2 = 0 \tag{III .34a}$$

$$[K^{12}]^T\Delta^1 + [K^{22}]\Delta^2 = 0 \tag{III .34b}$$

En déterminant Δ^1 à partir de l'équation (III.34a) et on le remplaçant dans l'équation (III.34b), on obtient l'équation suivante

$$\left[\overline{\mathbf{K}}^{22} \right] \Delta^2 = 0 \quad (\text{III .35})$$

Où

$$\left[\overline{\mathbf{K}}^{22} \right] = \left[\mathbf{K}^{22} \right] - \left[\mathbf{K}^{12} \right]^T \left[\mathbf{K}^{11} \right]^{-1} \left[\mathbf{K}^{12} \right] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III .36a})$$

Et

$$\overline{a}_{33} = a_{33}, \quad \overline{a}_{34} = a_{34}$$

$$\overline{a}_{43} = a_{34}, \quad \overline{b}_{44} = a_{44} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0} \quad (\text{III .36b})$$

$$b_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad b_1 = a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}, \quad b_2 = a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}$$

L'équation (III.35) représente un problème de valeur propre, par conséquent, le déterminant de la matrice de cette équation doit être égal à zéro. Le développement du déterminant nous mène à l'expression de la charge critique du flambement thermique

$$N_x^0 = N_y^0 = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad (\text{III .37})$$

III.4.1. Flambement des plaques à gradient de propriété FGM sous une variation uniforme de température

On suppose que la température initiale de la plaque est « T_i ». La température est uniformément élevée à une valeur finale T_f à partir de laquelle la plaque flambe. Le changement de température est $\Delta T = T_f - T_i$. En utilisant cette distribution de température, la température critique du flambement ΔT_{cr} devient en utilisant les équations (III.24) et (III.37) comme suit

$$\Delta T_{cr} = \frac{1}{\beta_1 (\lambda^2 + \mu^2)} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad (\text{III .38a})$$

Où

$$\overline{\beta}_1 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns}) E(z_{ns})}{1-\nu} dz_{ns} \quad (\text{III .38b})$$

III.4.2. Flambement des plaques à gradient de propriété FGM soumises à une variation de température non linéaire à travers l'épaisseur

Le champ de température est supposé être uniforme sur toute la surface de la plaque mais variable le long de la direction de l'épaisseur en raison de la conduction thermique. Dans un tel cas, la répartition des températures le long de l'épaisseur peut être obtenue en résolvant l'équation de transfert de chaleur en régime permanent comme suit

$$\frac{d}{dz_{ns}} \left(k(z_{ns}) \frac{dT}{dz_{ns}} \right) = 0, \quad (\text{III .39})$$

Avec les conditions limites $T(h/2-C) = T_C$ et $T(-h/2-C) = T_M$. On suppose que le coefficient de conductivité thermique $k(z_{ns})$ obéit à la loi de puissance (III.2). En remplaçant l'équation (III.2) dans l'équation (III.39), on obtient une équation différentielle du second ordre en termes de température qui peut être écrite comme suit

$$-\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{nk_{CM} r^{n-1}}{k_M + k_{CM} r^n} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (\text{III .40a})$$

Où

$$r = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III .40b})$$

L'équation différentielle (III.40a) peut être facilement résolue en utilisant les séries polynomiales. Ainsi, la répartition de température à travers l'épaisseur de la plaque est obtenue sous la forme suivante

$$T(z_{ns}) = T_M + \Delta T \frac{\theta(z_{ns} + C)}{\eta} \quad (\text{III .41})$$

Où

$$\begin{aligned} \theta(z_{ns}) = & \left[\left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{(k_C - k_M)}{(n+1)k_M} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right) \right]^{n+1} \\ & + \frac{(k_C - k_M)^2}{(2n+1)k_M^2} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2n+1} - \frac{(k_C - k_M)^3}{(3n+1)k_M^3} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3n+1} \\ & + \frac{(k_C - k_M)^4}{(4n+1)k_M^4} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4n+1} - \frac{(k_C - k_M)^5}{(5n+1)k_M^5} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5n+1} \end{aligned} \quad (\text{III .42a})$$

$$\eta = 1 - \frac{(k_C - k_M)}{(n+1)k_M} + \frac{(k_C - k_M)^2}{(2n+1)k_M^2} - \frac{(k_C - k_M)^3}{(3n+1)k_M^3} + \frac{(k_C - k_M)^4}{(4n+1)k_M^4} - \frac{(k_C - k_M)^5}{(5n+1)k_M^5} \quad (\text{III .42b})$$

Comme dans le cas du chargement précédent, la température critique de flambement ΔT_{cr} devient en utilisant les équations (III.24) et (III.37) comme suit

$$\Delta T_{cr} = \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2 + T_M \bar{\beta}_1 (\lambda^2 + \mu^2)(a_{33} + b_{44} - 2a_{34})}{\bar{\beta}_3 (\lambda^2 + \mu^2)(a_{33} + b_{44} - 2a_{34})} \quad (\text{III .43a})$$

Où

$$\bar{\beta}_3 = -\frac{1}{\eta} \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \theta(z_{ns}) dz_{ns} \quad (\text{III .43b})$$

Discussion Des Résultats Du Modèle

IV.1. Introduction

Pour illustrer la performance de la théorie proposée, une plaque à gradient de propriété (FGM) est considérée. De nombreux exemples sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle pour la prédiction de la température critique de flambement des plaques solaire fonctionnellement graduée (SFGPs). Des comparaisons sont faites avec différentes théories de plaques disponibles dans la littérature. La description des différents modèles de déplacement est donnée dans le tableau IV.1.

Model	Theory	Unknown functions
CPT	Classical plate theory	3
FSDT	First-order shear deformation theory [25]	5
TSDT	Third shear deformation theory [8]	5
SSDT	Sinusoidal shear deformation theory [15]	5
Present	Present refined plate theory	4

Tableau IV.1 : Modèles de déplacement.

Une plaque solaire fonctionnellement graduée (SFGPs) constitué d'aluminium et d'alumine avec les propriétés matérielle suivantes

- Metal (Aluminium, Al): $E_M = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\alpha_M = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$; $k_M = 204 \text{ W/mK}$. (IV.1)
- Ceramic (Alumina, Al_2O_3): $E_C = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\alpha_C = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$; $k_C = 10.4 \text{ W/mK}$. (IV.2)

Dans le cas d'une température non linéaire à travers l'épaisseur, une température de référence de 5°C à la surface riche en métal de la plaque (c'est à dire, $T_M = 5^\circ\text{C}$) est supposée. Le facteur de correction de cisaillement de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est pris égal à $5/6$.

Les paramètres non-dimensionnels de Winkler et de Pasternak de la fondation élastique, ainsi que la température critique du flambement sont utilisés dans la présente analyse comme suit

$$k_1 = \frac{a^4}{D} K_w, \quad k_2 = \frac{a^2}{D} K_g, \quad T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr} \quad (IV.3)$$

D'ou

$$D = E_c h^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad (IV.4)$$

IV.2. Étude comparative et paramétrique sur la stabilité thermique des plaques FGM

Pour la vérification des solutions du flambement thermique déterminées dans ce travail, les résultats des plaque solaire fonctionnellement graduée (SFGPs) sous chargement thermique uniforme et non linéaire à travers l'épaisseur sont obtenus et comparés avec ceux prédits par la théorie classique (CPT), et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT) comme est indiqué dans les tableaux IV.2 et IV.3. Il est clair que les résultats présentent des différences significatives entre les théories de déformation de cisaillement et la théorie classique des plaques, en raison de l'effet de déformation de cisaillement. En outre, un excellent accord est obtenu entre la théorie actuelle la théorie des plaques raffinées à quatre variables (RPT) et théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour toutes les valeurs d'indice de loi de puissance n et le rapport géométrique a/h . Le désaccord entre les deux autres théories, théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT) diminue au fur et à mesure que le rapport géométrique a/h augmente. On peut également noter que la température critique du flambement diminue rapidement avec l'augmentation du rapport géométrique a/h , tandis qu'elle diminue légèrement avec l'augmentation de l'indice matériel n , surtout en présence des fondations élastiques. Une augmentation de la température critique se produit lorsque la plaque se repose sur les fondations élastiques. Il convient de noter que le nombre de variables inconnue dans la théorie actuelle est de 4, tandis qu'il est égal à 5 dans les autres théories théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT). On peut en conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi simple pour la prédiction de la température critique de flambement des plaques solaires fonctionnellement graduée (SFGPs).

n	Theory	$k_1 = 0, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 10$		
		$a/h = 5$	10	50	$a/h = 5$	10	50	$a/h = 5$	10	50
0	Present	5.58344	1.61868	0.06824	5.75898	1.66257	0.07000	9.22398	2.52882	0.10465
	TSDT	5.58344	1.61868	0.06824	5.75898	1.66257	0.07000	9.22398	2.52882	0.10465
	SSDT	5.58556	1.61882	0.06824	5.76110	1.66270	0.07000	9.22610	2.52896	0.10465
	FSDT	5.58069	1.61862	0.06824	5.75623	1.66251	0.07000	9.22123	2.52876	0.10465
	CPT	6.83964	1.70991	0.06840	7.01518	1.75380	0.07015	10.48019	2.62005	0.10480
1	Present	2.67153	0.75840	0.03171	2.83514	0.79930	0.03335	6.06470	1.60669	0.06565
	TSDT	2.67153	0.75840	0.03171	2.83514	0.79930	0.03335	6.06470	1.60669	0.06565
	SSDT	2.67241	0.75845	0.03171	2.83602	0.79935	0.03335	6.06558	1.60674	0.06565
	FSDT	2.67039	0.75837	0.03171	2.83400	0.79928	0.03335	6.06356	1.60667	0.06565
	CPT	3.17751	0.79438	0.03178	3.34112	0.83528	0.03341	6.57068	1.64267	0.06571
5	Present	2.27501	0.67931	0.02898	2.50178	0.73600	0.03125	6.97810	1.85508	0.07601
	TSDT	2.27501	0.67931	0.02898	2.50178	0.73600	0.03125	6.97810	1.85508	0.07601
	SSDT	2.27131	0.67895	0.02898	2.49808	0.73564	0.03125	6.97440	1.85472	0.07601
	FSDT	2.35948	0.68678	0.02898	2.58625	0.74348	0.03125	7.06257	1.86255	0.07601
	CPT	2.90629	0.72657	0.02906	3.13306	0.78326	0.03133	7.60938	1.90234	0.07609
10	Present	2.27679	0.69269	0.02978	2.53273	0.75668	0.03234	7.58483	2.01970	0.08286
	TSDT	2.27679	0.69269	0.02978	2.53273	0.75668	0.03234	7.58483	2.01970	0.08286
	SSDT	2.27552	0.69254	0.02978	2.53146	0.75653	0.03234	7.58356	2.01955	0.08286
	FSDT	2.36822	0.70108	0.02978	2.62417	0.76507	0.03234	7.67626	2.02809	0.08286
	CPT	2.98771	0.74693	0.02988	3.24365	0.81091	0.03244	8.29575	2.07394	0.08296

Tableau IV.2 : Température critique de flambement (T_{cr}) des plaques solaires à gradient de propriété carrées soumise à une température uniforme pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport géométrique.

n	Theory	$k_1 = 0, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 0$			$k_1 = 10, k_2 = 10$		
		$a/h = 5$	10	50	$a/h = 5$	10	50	$a/h = 5$	10	50
0	Present	11.15688	3.22736	0.12649	11.50796	3.31513	0.13000	18.43797	5.04764	0.19930
	TSDT	11.15688	3.22736	0.12649	11.50796	3.31513	0.13000	18.43797	5.04764	0.19930
	SSDT	11.16112	3.22764	0.12649	11.51220	3.31541	0.13000	18.44220	5.04791	0.19930
	FSDT	11.15138	3.22725	0.12649	11.50246	3.31502	0.13000	18.43246	5.04752	0.19930
	CPT	13.66929	3.40982	0.12679	14.02036	3.49759	0.13030	20.95037	5.23009	0.19960
1	Present	6.94183	1.96133	0.06955	7.36777	2.06781	0.07381	15.77535	4.16971	0.15788
	TSDT	6.94183	1.96133	0.06955	7.36777	2.06781	0.07381	15.77535	4.16971	0.15788
	SSDT	6.94412	1.96147	0.06955	7.37005	2.06796	0.07381	15.77763	4.16985	0.15788
	FSDT	6.93886	1.96127	0.06955	7.36479	2.06775	0.07381	15.77238	4.16965	0.15788
	CPT	8.25905	2.05500	0.06970	8.68499	2.16148	0.07396	17.09257	4.26338	0.15804
5	Present	4.88668	1.45160	0.05163	5.37486	1.57364	0.05651	15.01109	3.98270	0.15287
	TSDT	4.88668	1.45160	0.05163	5.37486	1.57364	0.05651	15.01109	3.98270	0.15287
	SSDT	4.87871	1.45082	0.05163	5.36688	1.57286	0.05651	15.00311	3.98192	0.15287
	FSDT	5.06851	1.46768	0.05163	5.55669	1.58972	0.05651	15.19291	3.99878	0.15287
	CPT	6.24563	1.55334	0.05180	6.73381	1.67538	0.05668	16.37004	4.08444	0.15304
10	Present	4.65293	1.40849	0.05076	5.17714	1.53954	0.05600	15.52451	4.12639	0.15948
	TSDT	4.65293	1.40849	0.05076	5.17714	1.53954	0.05600	15.52451	4.12639	0.15948
	SSDT	4.65033	1.40818	0.05076	5.17453	1.53923	0.05600	15.52191	4.12608	0.15948
	FSDT	4.84020	1.82215	0.05076	5.36440	1.55672	0.05600	15.71178	4.14356	0.15948
	CPT	6.10899	1.51957	0.05095	6.63320	1.65062	0.056194	16.98057	4.23746	0.15967

Tableau IV.3 : Température critique de flambement T_{cr} des plaques solaires à gradient de propriétés carrées soumise à une température uniforme pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport géométrique.

Les figures IV.1 et IV.2 montrent l'effet de l'indice de loi de puissance n sur la température critique de flambement adimensionnel T_{cr} pour une plaque ($a/b = 2$ et $a/h = 10$) sans ou avec fondation élastique de type Winkler ou Pasternak en utilisant la présente théorie raffiné de déformation de cisaillement. On constate que T_{cr} décroît rapidement jusqu'elle atteint les valeurs minimales. Cependant, pour une plaque sans ou avec fondation élastique de type Winkler, la variation de la température critique adimensionnel de flambement T_{cr} est pratiquement indépendante de l'indice de loi de puissance n lorsque ce dernier est supérieur à 4. On remarque aussi que la présence des fondations élastiques conduit à une augmentation de la température critique adimensionnelle de flambement T_{cr} .

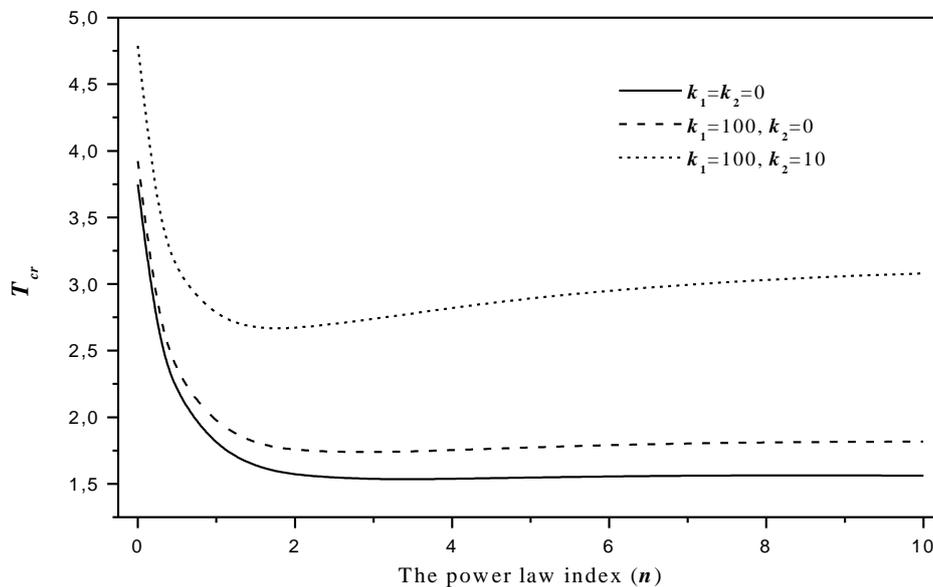


Figure IV.1 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec l'indice de la loi de puissance n pour des plaques solaires à gradient de propriétés avec ou sans fondations élastiques: le cas d'une distribution uniforme de température à travers l'épaisseur.

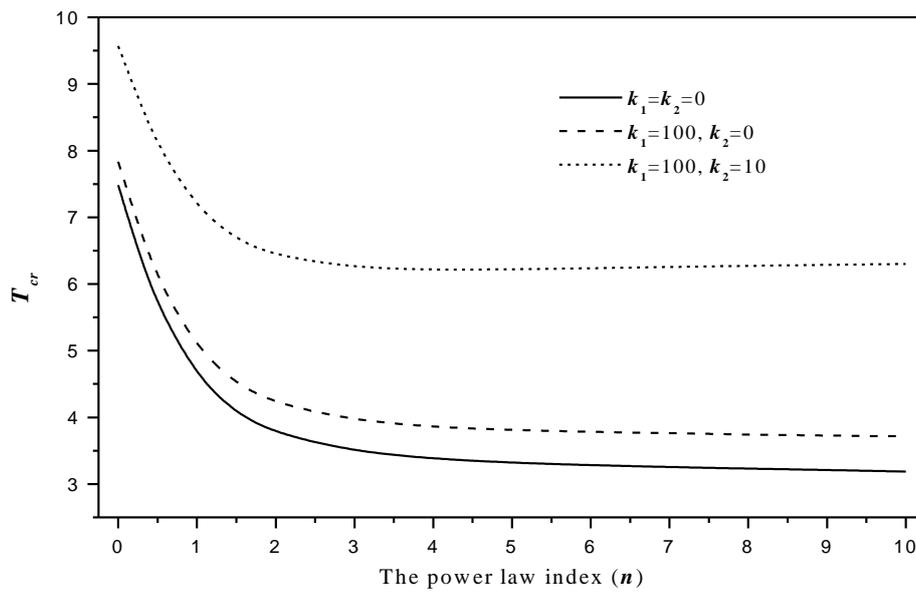


Figure IV.2 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec l'indice de la loi de puissance n pour des plaques solaires à gradient de propriétés avec ou sans fondations élastiques: le cas d'une distribution non-linéaire de température à travers l'épaisseur.

Les figures IV.3 et IV.4 montrent la variation de la température critique de flambement T_{cr} des plaques solaires fonctionnellement graduée (SFGPs) reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres en fonction des rapports géométriques a/h et a/b , respectivement. La plaque solaire fonctionnellement graduée est supposée être soumise à des variations de température uniforme et non linéaire à travers l'épaisseur. On constate que la température critique diminue d'une façon monotone lorsque le rapport a/h augmente. Par contre, le cas inverse est remarqué lorsque le rapport a/b croît. On note aussi que la température critique T_{cr} des plaques solaires fonctionnellement graduée (SFGPs) sous une distribution uniforme est inférieure à celle d'une plaque sous une variation non linéaire de température.

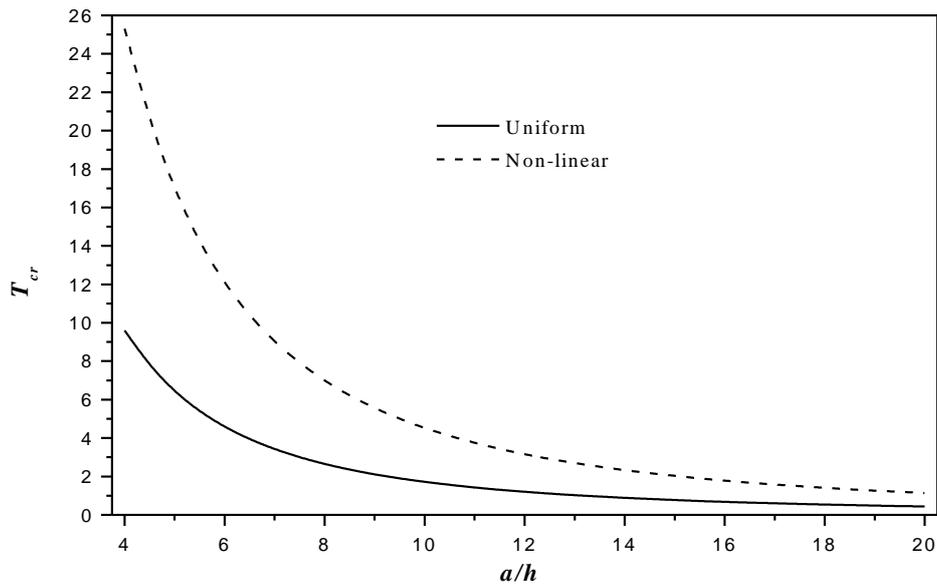


Figure IV.3 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h dans le cas d'une distribution uniforme et non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. ($n = 0,5$, $k_1 = 10$, $k_2 = 10$, et $a / b = 1$).

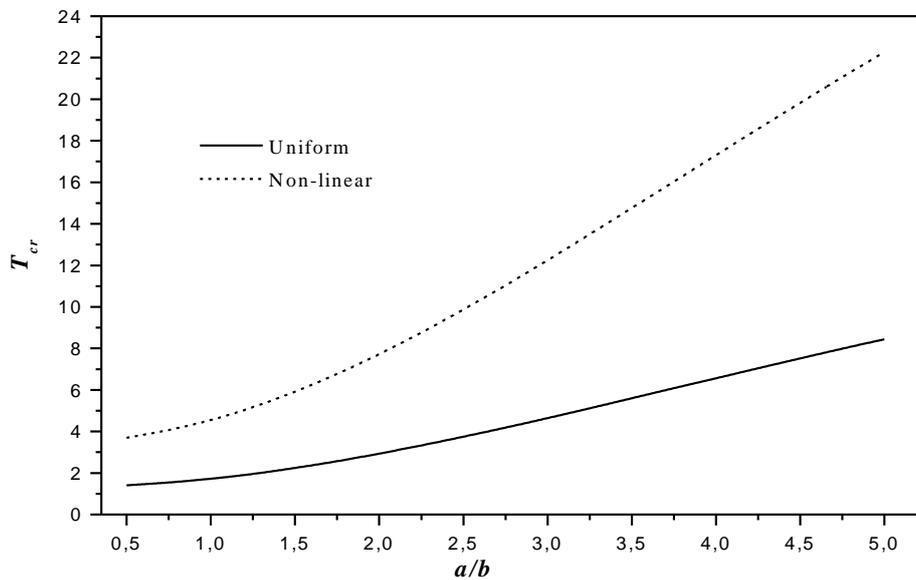


Figure IV.4 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/b dans le cas d'une distribution uniforme et non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. ($n = 0,5$, $k_1 = 10$, $k_2 = 10$, et $a / b = 1$).

L'effet des paramètres de la fondation élastique (k_1 et k_2) sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque solaire à gradient de propriétés soumise à une répartition linéaire

et non linéaire de température sont présentés dans les Figures IV.5 et IV.6 respectivement. Comme il est prévu, T_{cr} augmente au fur et à mesure que la rigidité des fondations élastiques augmente.

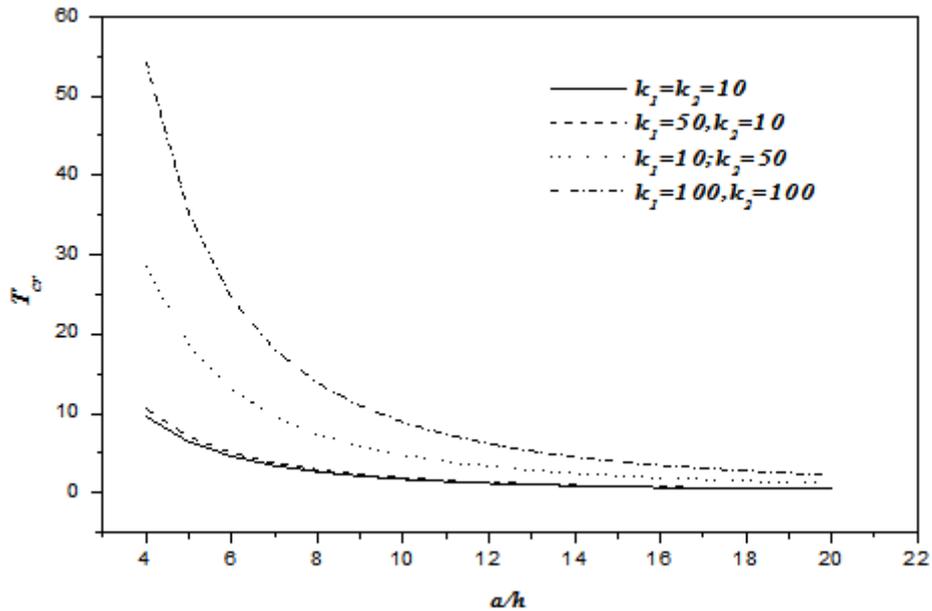


Figure IV.5 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique dans le cas d'une distribution linéaire de la température à travers l'épaisseur. ($n = 0,5$ et $a / b = 1$).

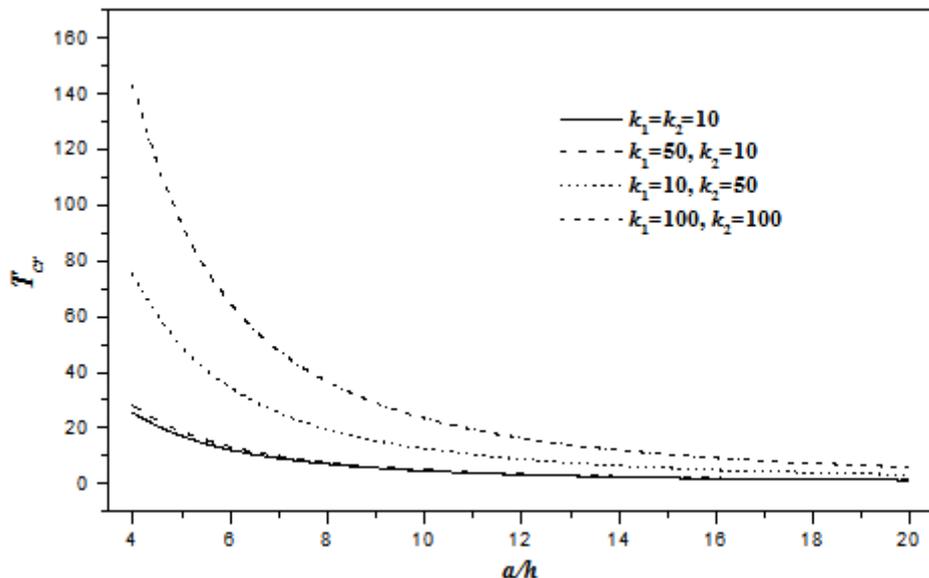


Figure IV.6 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} avec le rapport géométrique a/h pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique dans le cas d'une distribution non-linéaire de la température à travers l'épaisseur. ($n = 0,5$ et $a / b = 1$).

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur la détermination des caractéristiques de stabilité au flambement thermique des structures à gradient de propriété, afin de répondre à certains problèmes, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les charges critiques de stabilité thermique sous chargement uniforme et non-linéaire de température. Comparée aux résultats rencontrés dans la littérature, notre méthode analytique a montré son efficacité pour la détermination des charges critiques de flambement en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé.

Une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée, est présentée pour l'étude du flambement thermique des plaques solaire fonctionnellement graduée (SFGPs) en contact avec des fondations élastiques à deux paramètres. Contrairement aux théories de déformation de cisaillement classiques, la présente théorie ne contient que quatre inconnues et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) dans de nombreux aspects. Cette théorie considère une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et satisfait les conditions aux limites aux niveaux des surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés mécaniques de la plaque sont supposées être variées selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque. La position de la surface neutre de ces plaques a été déterminée. Pour expliquer l'effet de la déformation de cisaillement sur les températures critiques, les résultats obtenus par la théorie actuelle ainsi que la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT), la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT), et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) sont comparés à ceux obtenus par CPT. Il est montré dans les exemples numériques que les résultats de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement sont inférieurs à celles de la CPT, indiquant l'effet de la déformation de cisaillement. Toutes les études comparatives montrent que les températures critiques de flambement obtenues par la théorie proposée à quatre inconnues sont presque identiques à celles déterminées par d'autres théories de déformation de cisaillement contenant cinq inconnues. On peut donc conclure que la théorie proposée est précise et efficace dans la prédiction des réponses de flambement thermiques des SFGPs reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres (modèle de Pasternak). En raison des caractéristiques intéressantes de la théorie actuelle, les résultats obtenus seront un point de référence utile pour évaluer la fiabilité des autres futures théories des plaques.

Enfin, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux FGM et précisément leurs comportements vis-à-vis au flambement thermique.

References Bibliographiques

- G.Kirchhoff.** «Uber das Gleichgewicht und die bewegung einer Elastischen Scheib».Journal fur reine und angewandte Mathematik, Volume 40, pages: 51-88, (1850).
- Reissner.** The effect of transverse shear deformation On the bending of elastic plates. J Appl Mech-T ASME 1945;12(2):69–77 (1945).
- E. Reissner & Y. Stavsky.** Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408, (1961).
- L. Liberscu.** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68, (1967).
- S.A. Ambartsumyan.** Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, (1969).
- J.M. Whitney, N.J. Pagano.** Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. Journal of Applied mechanics, 37,1031–1036 (1970).
- J.M. Whitney.** « Shear correction factors for orthotropic Laminates under static loads ». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, (1973).
- R. E. Mistler,** High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull; 52 (11): 850-854, (1973).
- S. Srinivas.** A refined analysis of composite laminates. Journal of Sound and Vibration, vol. 30, no. 4, pages 495,507, (1973).
- N.J Pagano.** Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, (1978).
- Howell, A., Bereny, J.** Engineer's Guide to Solar Energy. USA: Solar Energy Information Services (1979).
- F. Delale., F. Erdogan,** The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, (1983).
- Reddy, J.N.** A simple higher-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech. 51, 745–752 (1984).

J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, (1986).

P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain. Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,(1986).

C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, (1987).

J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, (1987).

M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54,pages 589,596 (1987).

H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, (1990).

K. Kokini., Y. Takeuchi. Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, (1990).

M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, (1990).

H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,(1991).

M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, (1991).

J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, (1992).

M. Koizumi. Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).

A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, (1993).

Qatu MS, Leissa AW. Buckling or transverse deflections of unsymmetrically laminated plates subjected to in-plane loads. *AIAA Journal*; 31(1):189-194 (1993).

W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of compositelaminates using a subla- minate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549,1564, (1994).

G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, (1995).

A. Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, (1997).

L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, (1997).

M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. (1997).

M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated Composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, (1998).

S. Suresh, and A. Mortensen. *Fundamentals of Functionally Graded Materials* (IOM Communications Ltd., London), (1998).

M.A. Aiello, and L. Ombres. Buckling and vibrations of unsymmetric laminates resting on elastic foundations under in-plane and shear forces. *Composite Structures*, 44, 31–41 (1999).

E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, (2000).

Reddy, J.N. Analysis of functionally graded materials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47, 663–684 (2000).

C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi- layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, (2001).

O. Polit & M. Touratier. A multilayered/sandwich Triangular finite element applied to linear and non-Linear analyses. *Composite Structures*, vol. 58, pages 121,128, (2002).

Javaheri, R., Eslami, M.R. Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J.* 40, 162–169 (2002).

Javaheri, R., Eslami, M.R. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *J. Therm. Stress* 25, 603–625 (2002).

Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, (2003).

K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March (2003).

Liew KM, Yang J, Kitipornchai S. Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*; 40(15):3869-3892 (2003).

M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, (2003).

Ma, L.S., Wang, T.J. Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory. *Int. J. Solids Struct.* 41, 85–101 (2004).

Najafizadeh, M.M., Heydari, H.R. Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory. *Eur. J. Mech. A Solids* 23, 1085–1100 (2004).

R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405,418, (2004).

Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, (2004).

Wu, L. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos. Struct.* 64, 211–218 (2004).

Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 1740–1755 (2005).

Morimoto, T., Tanigawa, Y., Kawamura, R. Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating. *Int. J. Mech. Sci.* 48, 926–937 (2006).

B. A. Samsam Shariat and M. R. Eslami, “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads,” *Compos. Struct.*, 78, 433-439 (2007).

T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet. Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, (2007).

Abrate, S. Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Compos. Part B* 39, 151–158 (2008).

Najafizadeh, M.M., Heydari, H.R. An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression. *Int. J. Mech. Sci.* 50, 603–612 (2008).

Zhang, D.G., Zhou, Y.H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput. Mater. Sci.* 44, 716–720 (2008).

H. Matsunaga, “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory,” *Compos. Struct.*, 90, 76–86 (2009).

A. M. Zenkour, D. S. Mashat. Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates. *Natural Sciences*, 2, 968-978 (2010).

Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A. Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Computational Materials Science.* 49, 865–870 (2010).

Shahrjerdi, A., Bayat, M., Mustapha, F., Sapuan, S. M., Zahari, R. Second-order shear deformation theory to analyze stress distribution for solar functionally graded plates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 38, 348–361, (2010).

A. Tounsi. Cours sur «Théorie d'Elasticité», Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbés, Algérie. (2011).

H. H. Abdelaziz, H. A. Atmane, I. Mechab, L. Boumia, A. Tounsi, E.A. Adda Bedia. Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory. Chinese Journal of Aeronautics, 24, 434 – 448 (2011).

Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams. Mechanics Based Design of Structures and Machines, (In press) (2013).

Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach. Meccanica, (In press) (2013).