

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



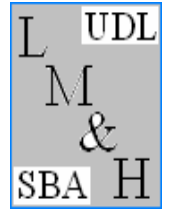
UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS



## THESE DE DOCTORAT L.M.D 3<sup>ème</sup> CYCLE

Spécialité : Génie Civil

Option : Analyse et Modélisation du Comportement des Structures et des Matériaux

Présentée par

**AHOUEL MAMA**

Intitulé de la thèse

### **Etude de l'effet d'échelle sur le comportement mécanique des structures homogènes et non homogènes**

#### Composition du jury

Mr. A. TOUNSI	Pr	Président	UDL-SBA
Mr. E.A. ADDA BEDIA	Pr	Directeur de thèse	UDL-SBA
Mr. A. FEKRAR	MCA	Examineur	UDL-SBA
Mr. M. BOURADA	MCA	Examineur	UDL-SBA
Mr. M. AMEUR	MCA	Examineur	ENP ORAN
Mr. A. KACI	MCA	Examineur	U - SAIDA
Mr. A. ASROUN	Pr	Invité	UDL-SBA

Année universitaire 2015-2016

Composition du jury :

## Remerciements

---

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Monsieur le Professeur **E.ADDA BEDIA** qui a dirigé ce travail. Sa disponibilité, ses compétences scientifiques ont été précieuses pour mener à terme cette étude. Je le remercie surtout de m'avoir accueilli dans son laboratoire des matériaux et hydrologie de l'université Djillali Liabes de Sidi-Bel-Abbes, et qui m'a intégré dans son équipe de recherche. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude et mon profond respect.

Je tiens aussi à remercier vivement Monsieur le Professeur **A. TOUNSI**, pour ses conseils scientifiques précieux, son suivi et ses conseils avisés qui ont facilité l'aboutissement de ce travail.

Sans oublier les membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail en Particuliers messieurs **A. FEKRAR** et **M. BOURADA**.

Je ne saurais oublier d'adresser mes remerciements à mon ami et collègue **,Ismahene Belkorissat** qui a donné de son précieux temps pour me mettre dans le vif du sujet de cette thèse.

J'adresse mes remerciements les plus vifs à Mlle: **Benyoucef Houria** (Ingénieur du laboratoire LM&H) qui m'a constamment encouragée et soutenue tout au long de ces années.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi-Bel-Abbès, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma personnalité et leur contribution a apporté un soutien scientifique important à ce travail.

*Et à tous ceux que ma réussite leur  
tient à cœur*

# Dédicaces

---

**A tous ceux qui me sont chers  
et que j'aime de tous mon cœur**

# Abstract

---

A nonlocal trigonometric shear deformation beam theory based on neutral surface position is developed for bending, buckling, and vibration of functionally graded (FG) nano-beams using the nonlocal differential constitutive relations of Eringen. The present model is capable of capturing both small scale effect and transverse shear deformation effects of FG nano-beams, and does not require shear correction factors. The material properties of the FG nano-beam are assumed to vary in the thickness direction. The equations of motion are derived by employing Hamilton's principle, and the physical neutral surface concept. Analytical solutions are presented for a simply supported FG nano-beam, and the obtained results compare well with those predicted by the nonlocal Timoshenko beam theory.

**Keywords:** *Nano-beam; Non-local elasticity theory; Bending; Buckling; Vibration; Functionally graded materials; Neutral surface position.*

# Résumé

---

Dans ce travail, une théorie trigonométrique non locale de déformation de cisaillement des poutres basée sur la position de l'axe neutre est développée pour l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des nano-poutres fonctionnellement graduées en utilisant les relations non-locales différentielles constitutives d'Eringen. Le présent modèle est capable de considérer en même temps l'effet du paramètre d'échelle et les effets de déformation de cisaillement transversales des nano-poutres fonctionnellement graduées, et sans l'emploi des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles des nano-poutres fonctionnellement graduées sont supposées être variées à travers l'épaisseur. Les équations de mouvements sont déterminées en utilisant le principe d'Hamilton et le concept physique de l'axe neutre. Les solutions analytiques sont présentées pour une nano-poutre fonctionnellement graduée simplement appuyée et les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la théorie non locale des poutres de Timoshenko.

**Mots clés:** *nano-poutre; théorie d'élasticité non locale; flexion; flambement; vibration; matériaux fonctionnellement gradués*

# Table des matières

---

Remerciements	.....i
Dédicace	.....ii
Abstract	.....iii
Résumé	.....iv
Table des matières	.....v
Liste des figures	.....xi
Liste des tableaux	.....xiv
Nomenclatures	.....xv
Introduction générale	.....01

## **Chapitre I            Les FGMs : Matériaux fonctionnellement gradués**

Introduction	.....05
Définition des FGMs	.....05
Comparaison entre un FGM et un matériau composite	.....06
Concept des matériaux FGM s	.....08
Evolution des recherches sur les matériaux FGMs	.....10
Propriétés effectives des FGMs	.....11

Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	.....12
Propriétés matérielles de la poutre P-FGM	.....13
Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	.....14
Domaine d'application des FGMs	.....15
Revue des méthodes d'élaboration des FGMs	.....16
Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	.....16
Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	.....17
Dépôt par électrophorèse	.....18
Compaction sèche des poudres	.....18
Projection plasma	.....18
C.V.D et P.V.D	.....19
Frittage et infiltration	.....19
Frittage laser différentiel	.....19
Implantation ionique (sputtering)	.....20
Dépôt par centrifugation	.....20
Conclusion	.....21

## Chapitre II

### Nanotechnologies: Du monde visible vers l'invisible

Introduction	.....22
La découverte du nano-monde	.....23
Définition des nano-matériaux	.....24
Différence entre un matériau ordinaire et un nano-matériau	.....25
	.....25

Les familles des nano-matériaux	.....25
Les nano-objets	.....25
Les nanoparticules	.....25
Les nano fibres, nanotubes, nano-filaments ou nano-bâtonnets	.....25
Les nano-feuillets, nano-plats ou nano- plaquettes	.....26
Les matériaux nano-structurés	.....27
Les agrégats et agglomérats de nano-objets	.....27
Les nano-composites	.....27
Les matériaux nano-poreux	.....27
Travailler dans le monde invisible	.....28
Contexte et problématique	.....28
Les moyens pour observer et manipuler les nanomatériaux	.....29
Microscopie à effet tunnel	.....29
Microscopie à force atomique	.....31
Microscopie électronique à très haute résolution	.....33
Les procédés de fabrication des nano- matériaux	.....35
Domaine d'utilisation des nano-matériaux	.....36
Quelques exemples de nano-matériaux et application associées	.....37
Le dioxyde de titane	.....37
Les points quantiques (ou quantun dots)	.....38
Les dendrimères	.....39



Les nanotubes de carbone	.....40
Avantages et inconvénients des nano-matériaux	.....41
Inconvénients des nano-matériaux	.....41
Avantages des nano-matériaux	.....41
Conclusion	.....42

## **Chapitre III**

### **De l'élasticité vers les théories des poutres**

Introduction	.....43
La mécanique des structures et la résistance des matériaux (RDM)	.....43
Définition de la mécanique des structures	.....43
Résistance des Matériaux	.....44
Résolution des problèmes d'élasticité	.....45
Approche en déplacement	.....45
Approche en contrainte	.....46
L'orientation vers la théorie des poutres	.....46
Historique des théories des poutres	.....47
Domaine d'application de la théorie des poutres	.....47
Les modèles de la théorie des poutres	.....48
Théories des poutres selon la prise en	

compte du cisaillement	.....48
Modèle d'Euler Bernoulli ou bien la théorie classique des poutres	.....48
Modèle de Timoshenko ou bien la théorie de premier ordre (FSDT)	.....49
Théorie d'ordre élevé	.....52
Théorie des poutres selon la prise en compte de l'effet d'échelle	.....56
Théorie locale d'élasticité	.....56
Théorie non locale d'élasticité	.....56
Conclusion	.....56

## **Chapitre IV**      **Formulation théorique**

Introduction	.....57
Représentation de la nano-poutre utilisée et les propriétés matérielles	.....57
Hypothèse de base	.....59
Cinématique	.....60
Les relations constitutives	.....60
Les équations de mouvement	.....61
Solution analytique d'une nano-poutre fonctionnellement graduée et simplement appuyée	.....64
Conclusion	.....65

## **Chapitre V**      **Résultats et discussions**

Introduction	.....66
--------------	---------

Résultats numériques et interprétations	.....66
Conclusion	.....75
Conclusion Générale	.....76
Références bibliographique	.....77

# Liste des figures

---

## Chapitre I

Fig.I.1	Type d'un matériau FGM en céramique et métal	.....06
Fig .I.2	Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites.	.....07
Fig .I.3	La distribution composante des matériaux	.....07
Fig I.4	Concept des matériaux a gradient de propriétés	.....09
Fig I.5	Protection thermique	.....10
Fig I.6	Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM	.....12
Fig.I.7	La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM	.....13
Fig.I.8	La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM	.....14
Fig.I.9	La variation du module de Young d'une poutre S-FGM	.....15
Fig I.10	Les principaux domaines d'application des FGMs	.....16
Fig.I.11	Principe de la méthode coulage en bande	.....17
Fig.I.12	Disposition du procédé frittage laser différentiel	.....20
Fig.I.13	Schéma du procédé dépôt par centrifugation	.....21

## Chapitre II

Fig.II.1	L'échelle des dimensions	.....24
Fig.II.2	Types des nano-objets	.....26
Fig.II.3	Nano-particules de dioxyde de titane	.....26
Fig.II.4	Nano-tubes de carbone multi-parois	.....27
Fig. II.5	Types des matériaux nano-structurés	.....28

Fig.II.6	Le principe du microscope à effet tunnel	.....30
Fig. II.7	Cercles d'atomes de fer sur surface de cuivre	.....31
Fig. II.8	Principe de la microscopie à force atomique	.....32
Fig.II.9	Image de microscopie à force atomique et à force électrostatique	.....33
Fig.II.10	Le principe de la formation d'image des structures cristalline	.....34
Fig.II.11	Image par microscopie électronique à très haute résolution de nanotube d'oxyde de titane	.....34
Fig.II.12	Les deux approches d'élaboration des nano-matériaux manufacturés	.....35
Fig.II.13	Façade d'un immeuble en verre composé de nano-particules de dioxyde de titane	.....38
Fig.II.14	Nano-cristaux inorganiques fluorescents	.....39
Fig.II.15	Structure d'un dendrimère	.....40
Fig.II.16	Structure d'un nano-tube de carbone mono-paroi	.....41

### **Chapitre III**

Fig .III.1	Type de structures	.....44
Fig.III.2	Cinématique d'Euler Bernoulli	.....48
Fig.III.3	Cinématique de Timoshenko	.....50
Fig.III.4	La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko	.....51
Fig.III.5	Cinématique de la théorie d'ordre élève	.....52
Fig.III.6	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)$	.....54
Fig.III.7	Variation de la fonction de cisaillement $f'(z)$	.....55

### **Chapitre I V**

Fig.IV.1	La position de l'axe neutre et l'axe médian pour une poutre fonctionnellement graduée	.....57
----------	---	---------

## Chapitre V

Fig .V.1	L'effet du paramètre non-locale sur la flèche pour une charge uniforme avec différents rapport d'épaisseur (K=1)	.....70
Fig.V.2	L'effet du paramètre non-locale sur la charge de flambement pour une nano-poutre fonctionnellement graduée avec différents rapports d'épaisseurs (K=1)	.....71
Fig.V.3	L'effet du paramètre non-locale sur la fréquence fondamentale pour une nano-poutre fonctionnellement graduée avec différents rapports d'épaisseur (K=1)	.....72
Fig.V.4	Effet du paramètre de distribution du matériau sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour une charge uniforme avec L/h=10	.....73
Fig.V.5	Effet du paramètre de distribution du matériau sur la charge de flambement adimensionnelle( $\bar{N}$ ) avec L/h=10	.....73
Fig.V.6	Effet du paramètre de distribution du matériau sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec L/h=10	.....74

# Liste des Tableaux

---

## Chapitre I

Tab I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	.....08
Tab I.2	Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	.....10

## Chapitre II

Tab II.1	Comparaison entre la dureté du nouveau matériau par rapport au matériau ordinaire	.....25
----------	---	---------

## Chapitre V

Tab V.1	La flèche transversale adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) de la nano-poutre FG pour une charge uniforme	.....67
Tab V.2	La charge critique adimensionnelle ( $\bar{N}$ ) pour une nano-poutre FG	.....68
Tab V.3	La fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) pour une nano-poutre FG	.....69

# Nomenclatures

---

FGM	Functionally graded material (matériau fonctionnellement gradué)
E-FGM	FGM avec fonction exponentielle
P-FGM	FGM avec fonction polynomiale
S-FGM	FGM avec fonction sigmoïde
$E(z)$	module de Young effective
H	hauteur de la poutre
$V(z)$	fraction volumique de la matière constituant
k	paramètre matériel
G	centre de gravité de la poutre
$u(x, z)$	déplacement dans la direction des "x"
$u_0(x)$	déplacement de la ligne moyenne dans la direction des "x"
$w(x)$	déplacement dans la direction des "z"
$w_0(x)$	déplacement de la ligne moyenne dans la direction des "z"
$\gamma_{xz}$	distorsion dans le plan xz
$\tau_{xz}$	contrainte de cisaillement dans le plan xz



$\varphi_0(x)$	rotation de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre
$f(z)$	fonction de gauchissement
$b$	largueur de la poutre
$L$	longueur de la poutre
$q(x)$	chargement transversal
$N_0$	charge axiale
$P(z)$	propriété matérielle de la poutre
$P_t$	propriétés matérielles correspondantes aux surfaces supérieures
$P_b$	propriétés matérielles correspondantes aux surfaces inférieures
$W_b$	la flèche: composante de flexion
$w_s$	la flèche: composante de cisaillement
$\sigma_z$	contrainte normale dans la direction
des "z" $u_b$	déplacement axial dû à la flexion
$u_s$	déplacement axial du au cisaillement
$\varepsilon$	déformation axiale
$E$	module de Young
$\mu$	paramètre non local

$e_0$	constante appropriée pour chaque matériau
$a$	rapport entre la longueur caractéristique interne et celle des caractéristiques externes
$N$	effort normal interne
$M_b$	moment de flexion résultant
$M_s$	moment de flexion du au cisaillement
$I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$	inertie massique
$P$	masse volumique
$A, B_s, D, D_s, H_s, A_s$	composantes de la rigidité
$\omega$	fréquence propre
$Q_n$	coefficients de Fourier associés à la charge
$C$	Distance de l'axe neutre à partir de l'axe médian
$z_{ms}$	Cote à partir de l'axe médian
$z_{ns}$	Cote à partir de l'axe neutre

An orange scroll graphic with a gradient from light to dark orange, featuring a shadow and decorative curled ends on the left and right sides. The text is centered on the scroll.

# *Introduction générale*

Dans ces dernières années, les structures à l'échelle nanométriques ont attiré une attention considérable pour l'application futurs des systèmes nano-électromécanique (NEMS) et la microscopie à force atomique (AFM) (Dai et al., 1996; Lourie et al., 1998). Pour accomplir la conception des nano-structures, une étude essentielle de leur comportement mécanique semble nécessaire. Des effets d'échelles sont significatifs dans le comportement mécanique de ces structures dans lesquelles les dimensions sont petites et comparable à leur distance moléculaire. Par conséquent les théories de la mécanique des milieux continue dépendant de l'échelle ont reçu une attention particulières dans les années récentes dû au besoin de la modélisation et l'analyse des structures mécaniques à une échelle petite et les instruments dans les développements rapides des micro ou nano-technologiques (Reddy, 1997; Amara et al., 2010). L'un des modèles les plus connus est la théorie d'élasticité non locale (Eringen, 1972 et 1983). Contrairement aux théories locales qui supposent que la contrainte à un point est fonction de la déformation au même point, la theorie d'élasticité non locale suppose que la contrainte à un point dépend des déformations de tous les points du milieu continu. La théorie d'élasticité non locale a été largement appliqué pour analyser la flexion , flambement, les vibrations et la propagation des ondes des éléments tels que la poutre dans les dispositifs en micro ou en nano-électromécanique (Peddieson et al., 2003; Lu et al., 2006; Wang et Varadan, 2006; Reddy et Pang, 2008; Benzair et al., 2008; Murmu etPradhan, 2009abc; Adda Bedia et al., 2015; Aissani et al., 2015; Besseghier et al., 2015). Sudak (2003) à étudier le flambement des nano-tube de carbone (CNTs) en introduisant les forces de van-der Waals (vdW) et les effets d'échelles, il a montré que la charge critique diminue para-port aux résultats de la theorie classique (locale). Wang (2005) à discuter les relations de dispersion moléculaire pour les CNTs en tenant compte de l'effet d'échelle. Wang and Hu (2005) ont étudié la propagation des ondes flexionnelle dans les nano-tube de carbone mono-paroi en utilisant la mécanique des milieux continus et la simulation de la dynamique moléculaire. Lu et al. (2007) ont investigué la propagation des ondes et les propriétés vibratoires des nano-tube de carbone mono- et multi-paroi en se basant sur le modèle non locale des poutres. Heireche et al.( 2008) ont étudié la propagation des ondes des nano-tube de carbone mono-et double parois en tenant compte de l'effet d'échelle, la température et la contrainte axiale initiale. Roque et al. (2011) ont utilisé la théorie

d'élasticité non locale d'Eringen pour étudier la flexion, flambement, et la vibration libre des nano-poutres de Timoshenko en utilisant une méthode numérique. Nami et Janghorban (2013) ont étudié la réponse statique des nano-plaque rectangulaire en utilisant la théorie trigonométrique de déformation de cisaillement et la théorie d'élasticité non locale. Pour et al. (2015) ont présenté la théorie sinusoïdale non locale de déformation de cisaillement pour la vibration non linéaire des nano-tube de carbone mono-parois. En utilisant la théorie des poutres d'Euler Bernoulli, Hajnayeb et Khadem (2015) ont étudié les vibrations libres d'un nano-tube de carbone double parois encastré et soumis à une force axiale. Bagdatli (2015) a examiné les vibrations transversales non linéaires des nano-poutres d'Euler Bernoulli sous contraintes en utilisant la théorie d'élasticité non locale.

Les développements dans le domaine des sciences des matériaux ont conduit à des nouveaux types de matériau avec une variation continue des propriétés matérielles, qui sont appelés les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) (Attia et al., 2015; Bouchafa et al., 2015; Bennai et al., 2015; Ebrahimi et Dashti, 2015; Kar et Panda; 2015; Darilmaz, 2015). La nano-technologie est aussi préoccupé par la fabrication des matériaux fonctionnellement gradués et des structures à l'échelle nano-métrique, qui mènent à une nouvelle génération des matériaux avec des propriétés révolutionnaire et une fonctionnalité améliorée.

Récemment, l'application des matériaux fonctionnellement gradués a été largement répondu dans les micro et nano-structures tel-que les micro et les nano-systèmes électro-mécanique (MEMS et NEMS) (Witvrouw and Mehta, 2005; Lee et al., 2006; Hasanyan et al., 2008; Mohammadi-Alasti et al., 2011; Zhang and Fu, 2012), les couches minces dans les alliages à mémoire de forme (Fu et al., 2003; Lu et al., 2011), et les microscopes à force atomique pour atteindre une sensibilité élevé et une performance souhaité (Rahaeifard et al., 2009). Dans de telle application, les effets d'échelle ont été observés expérimentalement (Fleck et al., 1994; Stolken et Evans, 1998; Chong et al., 2001; Lam et al., 2003). Puisque la dimension de ses dispositifs structurels se retrouve au dessous de l'échelle micro ou nano dans aux moins une direction. Une caractéristique essentielle rencontré dans ces dispositifs est que leur propriétés mécanique tel-que le module de Young , la rigidité flexionnelle.. etc sont dépendante de l'échelle. Jusqu'à présent seulement quelques travaux ont été trouvés pour les nano-poutres fonctionnellement graduées basé sur la théorie d'élasticité non locale. Janghorban et Zare (2011) ont investigué la vibration libre des nano-poutres

fonctionnellement graduées en utilisant la méthode différentielle quadrature. Eltaher et al. (2012) ont étudié la vibration libre des nano-poutres fonctionnellement graduées en utilisant la théorie non locale des poutres d'Euler Bernoulli. Récemment, Larbi Chaht et al. (2014) ont examiné la flexion statique et le flambement des nano-poutres fonctionnellement graduées en utilisant la théorie non locale sinusoïdale des poutres. Sobhy (2015) a étudié le comportement en flexion, en vibration libre, en flambement mécanique et thermique des nano-plaque fonctionnellement graduées noyées dans un milieu élastique. Ce dernier travail est basé sur la théorie de déformation de cisaillement à quatre variables et la théorie d'élasticité non locale d'Eringen. Kolahchi et al. (2015) ont étudié le comportement statique des nano-plaques fonctionnellement graduées en proposant une nouvelle théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement. Zenkour et Abouelregal (2015) ont investigué le phénomène de vibration d'une nano-poutre fonctionnellement graduée soumise à un flux de température. En se basant sous la théorie non locale de déformation de cisaillement, Zemri et al. (2015) ont discuté la réponse mécanique d'une poutre fonctionnellement graduée à l'échelle nano-métrique. Belkorissat et al. (2015) ont examiné les propriétés vibratoires d'une nano-plaque fonctionnellement graduée en utilisant une nouvelle théorie non locale raffinée à quatre variables. Al-Basyouni et al. (2015) ont étudié la réponse statique et vibratoire des micro-poutres fonctionnellement graduées en se basant sur la théorie modifiée de la contrainte de couple et la position de l'axe neutre. Tagrara et al., (2015) ont examiné le comportement statique de flambement et de vibration des poutres composites renforcées par des nano-tubes de carbone et supportées par une fondation élastique en utilisant une théorie trigonométrique des poutres. Bounouara et al. (2016) ont utilisé une théorie non locale de déformation de cisaillement d'ordre zéro pour l'analyse des nano-plaque fonctionnellement graduée appuyée sur une fondation élastique.

A partir de cette dernière recherche bibliographique, on constate que les références les plus citées traitent les micro-nano-structures avec l'hypothèse que le matériau est homogène. Une littérature très limitée est disponible pour les micro-nano-structures en FGM. Cela nous donne l'idée d'examiner plus le comportement statique, de flambement et dynamique des nano-poutres fonctionnellement graduées. Dans ce travail, une théorie trigonométrique non locale des poutres est proposée pour l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des nano-poutres fonctionnellement graduées. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiaux et transversaux sont composés d'une partie dû à la flexion et d'une autre dû au

cisaillement. De plus, cette théorie est aussi basée sur l'hypothèse que la contrainte et la déformation transversale s'annulent sur les faces supérieures et inférieures de la poutre. Ainsi, le coefficient de correction de cisaillement n'est pas exigé comme le cas de la théorie des poutres de Timoshenko (TBT). Les propriétés matérielles des nano-poutres fonctionnellement graduées sont supposées être variées selon une loi de distribution polynomiale de la fraction volumique des constituants. De plus, l'effet d'échelle est pris en compte en utilisant les relations constitutives non locale d'Eringen . Pour simplifier les équations d'équilibres pour une nano-poutre fonctionnellement graduée, le système des coordonnées est localisé à l'axe neutre de la poutre. Cela est dû au fait que le couplage membrane-flexion dans les équations constitutives d'une poutre fonctionnellement graduée n'existe pas lorsque l'axe neutre est considéré comme le système de coordonnées (Ould Larbi et al., 2013; Yahoobi and Feraidoon, 2013). Ainsi, la présente théorie trigonométrique non locale basée sur la position de l'axe neutre est utilisée avec le principe d'Hamilton pour déterminer les équations de mouvements pour la nano-poutre fonctionnellement graduée. Les solutions analytiques pour la flèche, la charge de flambement et la fréquence naturelle sont présentées pour les nano-poutres fonctionnellement graduées et simplement appuyés, les résultats obtenus sont comparés avec ceux disponibles dans la littérature pour vérifier l'exactitude de la présente solution. Les effets du paramètre non-locale du rapport géométrique et de l'indice matériel sur les réponses statiques, stabilité et dynamique des nano-poutres fonctionnellement graduées sont discutés.

# Chapitre I

## *Les FGMs : Matériaux fonctionnellement gradués*



## **I.1 Introduction :**

Grâce aux récentes recherches, aussi bien publiques que privées, les matériaux composites ont trouvé une application plus large dans les secteurs industriels de l'aéronautique, de l'automobile, du sport et loisir, du génie civil et de la marine. Ces matériaux disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques.

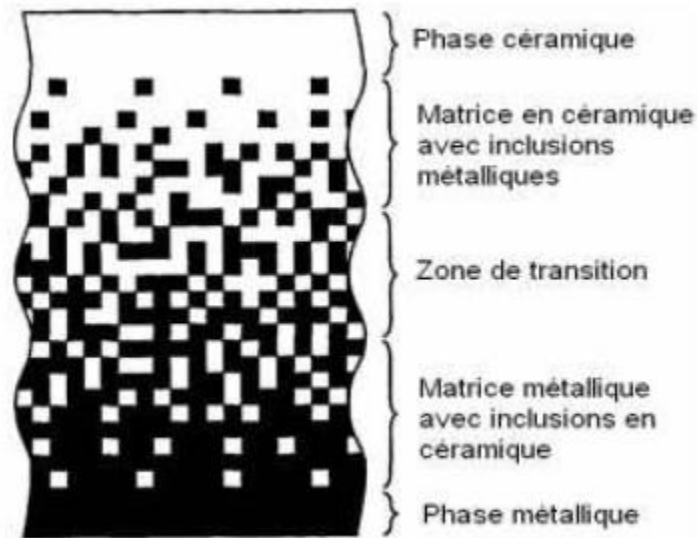
Les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur le développement des matériaux composites ce qui a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par l'association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais Functionally Graded Materials « FGM »).

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGMs sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil, ils trouvent également des applications biomédicales.

## **I.2 Définition des FGMs :**

Les matériaux fonctionnels de gradient ont été proposés en 1984 au Japon et depuis lors ont été source d'inspiration des chercheurs de partout dans le monde, Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de la céramique. On les considère comme le produit de matériaux composites en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur. Ce changement allège les zones les plus chargées et conduit à trouver des solutions optimales d'un point de vue

économique et mécanique. Le but principal de ses matériaux est pour l'usage afin d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé, léger avec une haute efficacité balistique et la résistance à des températures élevées.



**Fig I.1** : *type d'un matériau FGM en céramique et métal*

### **I.3 Comparaison entre un matériau à gradient de propriétés et un matériau composite**

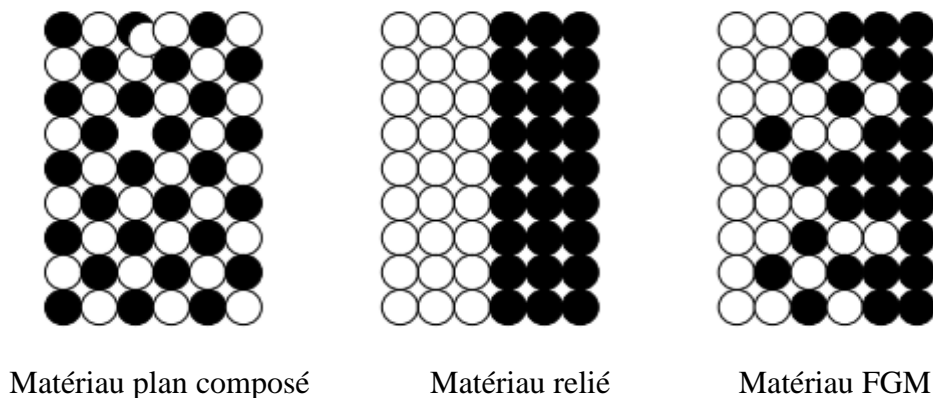
Les changements continus de la microstructure des FGMs les distinguent des matériaux composites, il en résulte par conséquent des gradients dans les propriétés des FGMs.

Les différences dans la microstructure et les propriétés entre les FGM et les matériaux composites sont illustrées schématiquement sur la figure I.2

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutants:</b></p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○</p> <p>Fibre ◇*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Fig I.2 :**Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites (Koizumi et al 1996)

Yoshihisa (2004) a présenté un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux conventionnels (figure I.3). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, le matériau relié a une frontière au niveau de l'interface des deux matériaux, et les FGMs ont d'excellentes caractéristiques qui les diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGMs suscitent beaucoup d'attention en termes de leur application dans les domaines industriels .



**Fig I.3 :** La distribution composante des matériaux. (Yoshihisa, 2004)

## I.4 Concept des matériaux FGMs

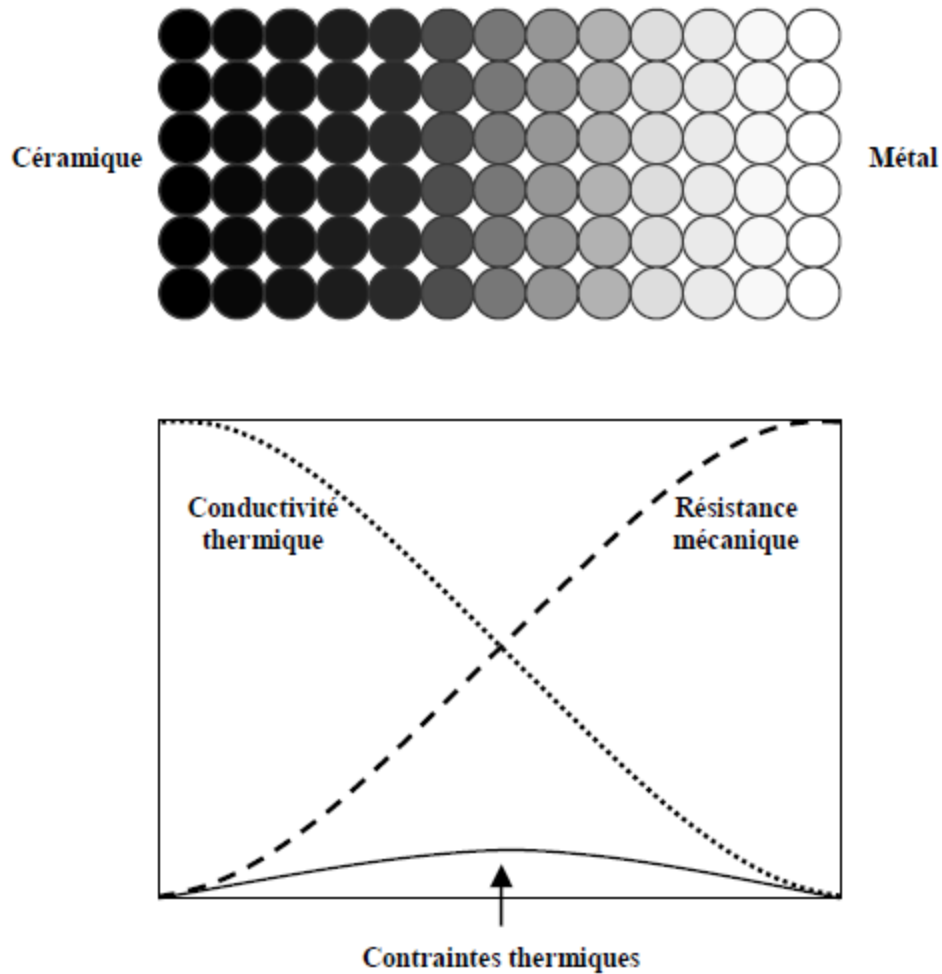
Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à une variation continue de la composition, dont la morphologie est dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc. Généralement, les FGMs sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que la céramique et le métal, les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des « FGMs » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

**Tab I.1** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

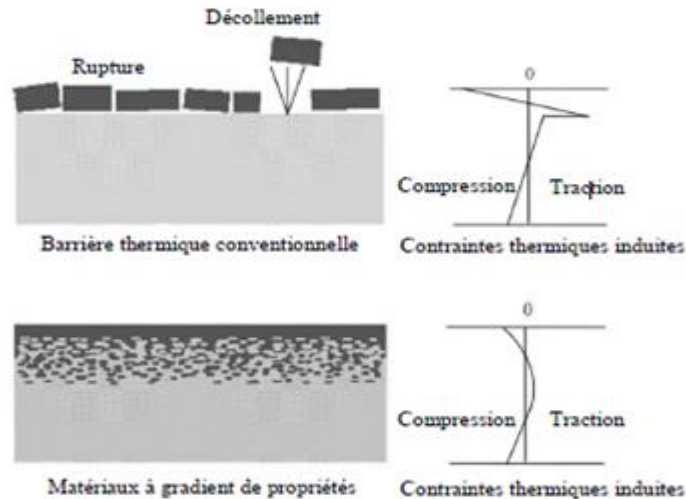
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"><li>- Bonne résistance thermique ;</li><li>- Bonne résistance à l'oxydation ;</li><li>- Faible conductivité thermique.</li></ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"><li>-Élimination des problèmes de l'interface ;</li><li>-Relaxer les contraintes thermiques.</li></ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"><li>- Bonne résistance mécanique ;</li><li>- Conductivité thermique élevée,</li><li>- Très bonne ténacité.</li></ul>

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs des matériaux composites conventionnels (figure I.4) (KOIZ, 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGMs. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (BOCH, 1986). Ce type des FGMs qui se composent du métal et de la céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique du côté métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique.



**Figure I.4 :** *concept des matériaux a gradient de propriétés*

La figure I.5 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ses concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Fig I.5:** Protection thermique

## I.5 Evolution des recherches sur les matériaux FGMs

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est née au milieu des années quatre-vingts au laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays: l'Allemagne, la Suisse, les Etats-Unis, la Chine et la Russie. Les progrès de la recherche sur ces matériaux au Japon sont résumés dans le tableau I.2

**Tab I.2:** Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par DR Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon )
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA)
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques . FGM partie I- phase (1)
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1ère Colloque sur FGM organisée par FGMF
1989	Conférence d'Allemagne- Japon (FGM) à Koln, (Allemagne)
1990	1er Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon ). Comité consultatif international de FGM ( IACFGM)
1990-1991	FGM partie I-phase (2)
1992	Etude de faisabilité sur la R&D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2ème Colloque international sur FGM et atelier international Japon -Allemagne-

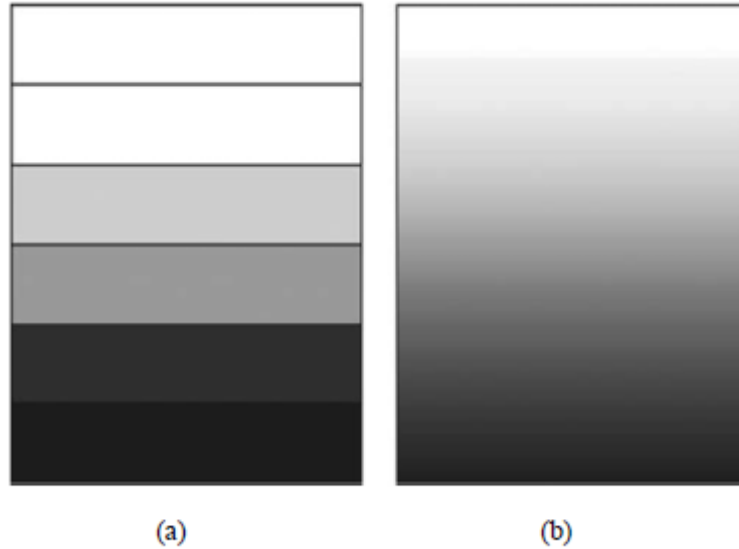
	USA à San Francisco, (USA)
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM.  FGM partie II-phase(1)
1994	3 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse)
1995	Atelier: Japon- Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie( ENECOM-95), (Sendai)
1996	4 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba,(Japon)

## I.6 Propriétés effectives des FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnel <<FGM>> consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition , de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Pour les modèles FGM nous avons deux approches :

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire une couche quasi-homogène de céramique-métal (fig. I.6-a)
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (fig. I.6-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnée suivant l'épaisseur (z).



**Fig I.6 :** *Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM*

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

### **I .6. 1 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM:**

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_0 e^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad (I - 1)$$

avec

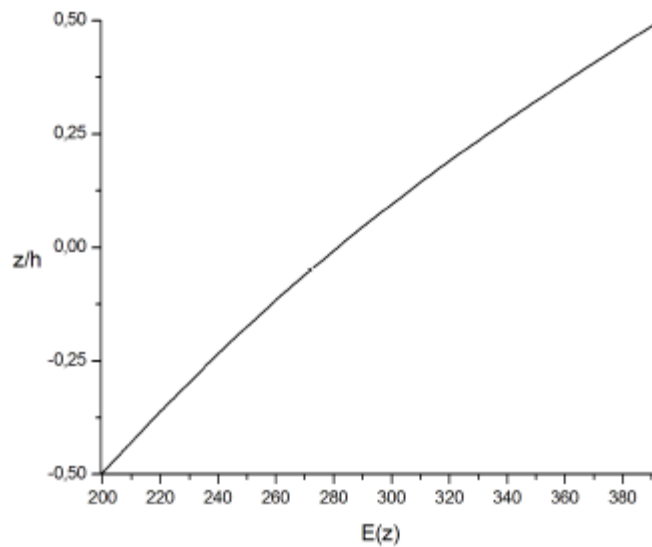
$$\beta = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I - 2)$$

et

$$E_0 = \sqrt{E_1 E_2}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure I.7.





**Fig I.7:** La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM

### I .6. 2 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM:

La fraction volumique des matériaux de type P-FGM est de la forme :

$$v(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h}\right)^k \quad (I. 3)$$

k : est un paramètre matériel.

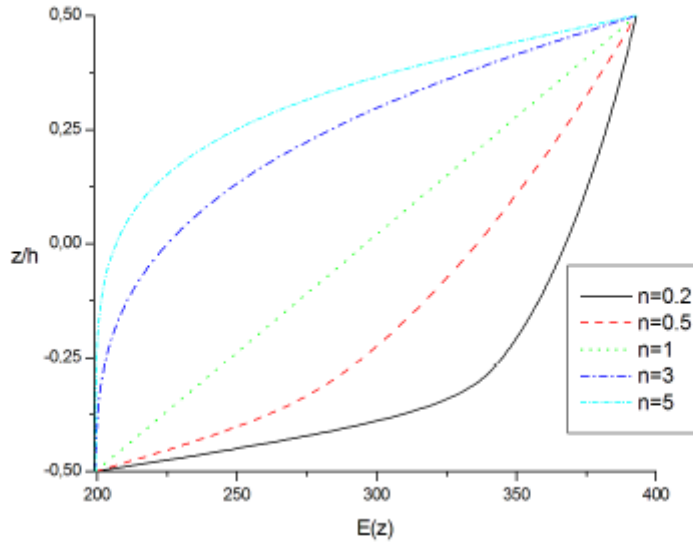
h : est la hauteur de la poutre.

Après avoir défini la fraction volumique on peut représenter les propriétés matérielles de la poutre en utilisant la loi du mélange

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)v(z) \quad (I. 4)$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure

( $z = h/2$ ) et de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) de la poutre FGM, La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.8 (pour différentes valeurs de n).



**Fig I.8 :** La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM

### I .6. 3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM:

Pour le type S-FGM la fraction volumique prend une autre forme, en utilisant deux fonctions à travers l'épaisseur :

$$v_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + z \right) / \left( \frac{h}{2} \right)^n \quad \text{pour } -\frac{h}{2} < z < 0 \quad (I.5)$$

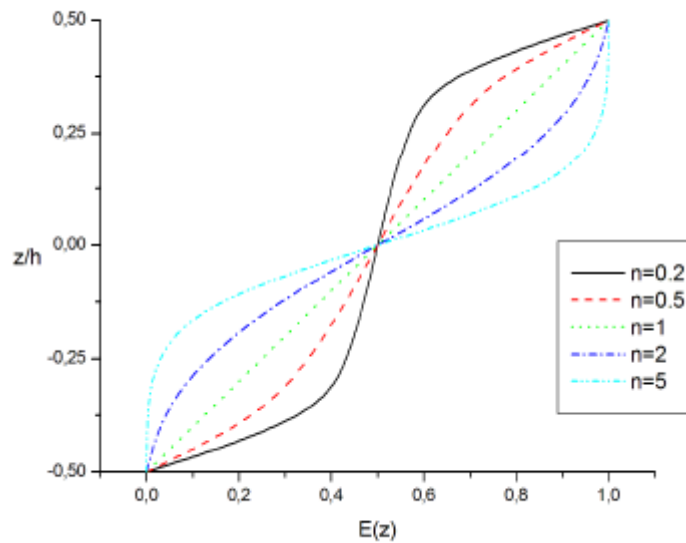
$$v_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - z \right) / \left( \frac{h}{2} \right)^n \quad \text{pour } 0 < z < h / 2 \quad (I.6)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E_{(z)} = v_{1(z)}E_1 + [1 - v_{1(z)}]E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} < z < 0 \quad (I.7.a)$$

$$E_{(z)} = v_{2(z)}E_1 + [1 - v_{2(z)}]E_2 \quad \text{Pour } 0 < z < \frac{h}{2} \quad (I.7.b)$$

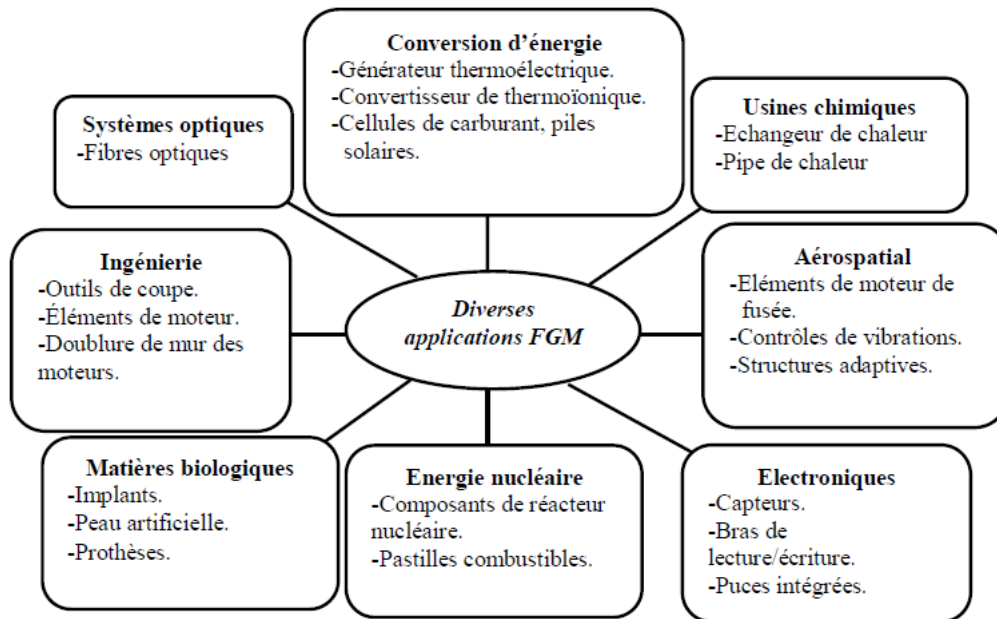
La figure (I-9) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.7.a) et (I.7.b) représente les distributions sigmoïdites, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM)



**Fig I.9 :** La variation du module de Young d'une poutre S-FGM

## I.7 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans de nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5 Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGMs ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et l'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.



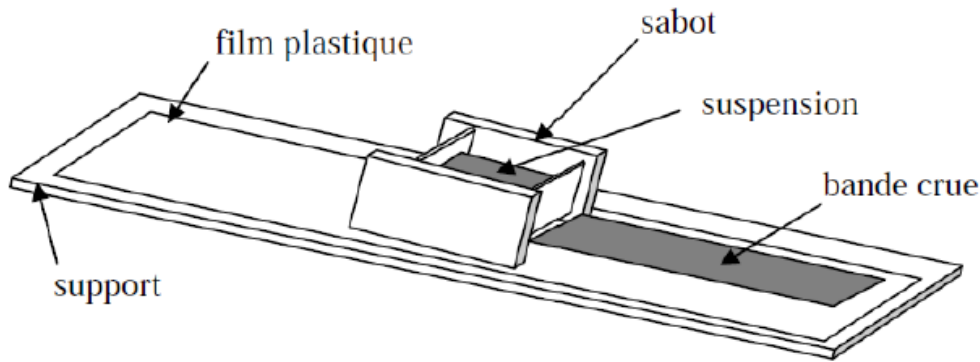
**Fig I.10** Les principaux domaines d'application des FGMs

## I.8 Revues des méthodes d'élaborations des FGMs

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées (Will, 1976) sont brièvement expliquées ci – après

### I.8.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (Doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.11).



**Figure I.11:** principe de la méthode coulage en bande

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 $\mu$ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Cette technique est économique pour la production des substrats céramiques de type Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et surtout pour les condensateurs à base de BaTiO<sub>3</sub>.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (MIST, 1973), soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (BOCH, 1986) et (BOCH, 1987).

### **I.8.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles (MOYA, 1992),

- formation du tessou ou "prise".
- consolidation du tessou ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (MOYA, 1992)).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.8.3. Dépôt par électrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (SARK, 1996). L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (ABDI, 1997).

### **I.8.4. Compaction sèche des poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (BISH, 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **I.8.5. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet

environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des F.G.M. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (STEF, 1990).

#### **I.8.6. C.V.D et P.V.D**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes compliquées, (KAWA, 1990).

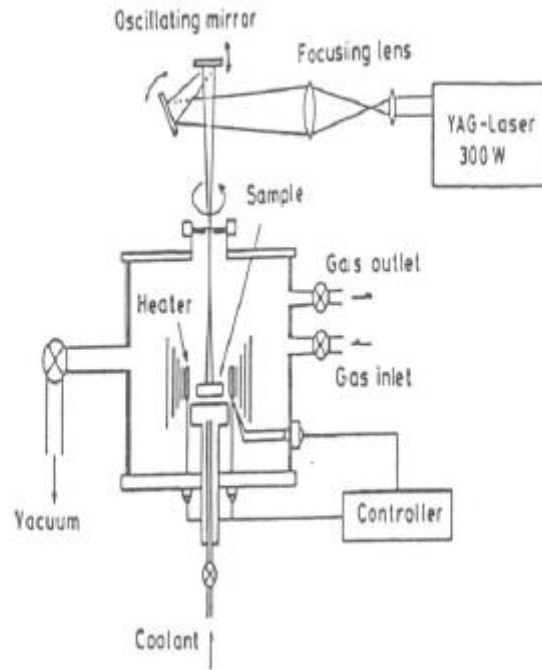
#### **I.8.7. Frittage et infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (TAKA, 1990). Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **I.8.8. Frittage laser différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo.

La figure I.12, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé. (YUKI et al, 1990)



**Figure I.12 :** *Disposition du procédé frittage laser différentiel (Yuki et al, 1990)*

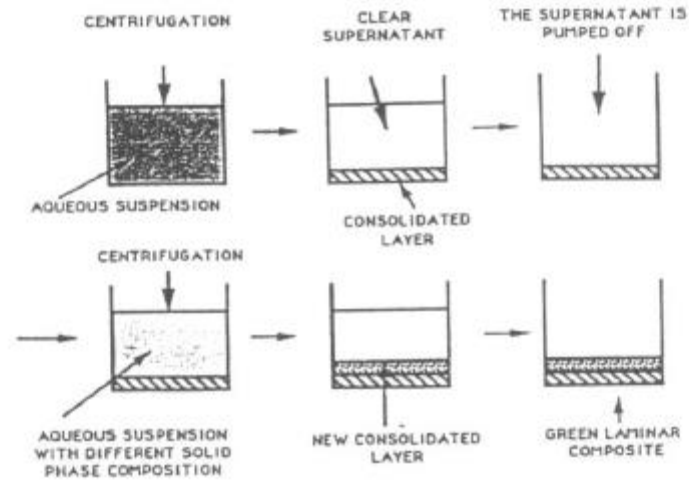
### I.8.9. Implantation ionique (sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (ABDI, 1997).

### I.8.10. Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (fig I.13) (ABDI, 1997).





**Figure I.13 :** Schéma du procédé dépôt par centrifugation (ABDI, 1997)

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre l'idée est de donner une vue générale sur les matériaux à gradients de propriétés , leurs évolutions au Japon et leurs méthodes d'élaborations ont été mises en évidence, ainsi que la différence entre eux et les matériaux composites qui sont distingués par les changements continus de leurs microstructures .Grace à la fonctionnalité des FGMs , des structures innovantes peuvent être créés et exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures en génie civile.

## Chapitre II

### *Généralités sur les nanotechnologies*

## **II 1. Introduction**

Les nano-sciences et nano-technologies font depuis plus de vingt-ans l'objet de travaux nombreux, au sein et à l'interface des disciplines scientifiques multiples, comme la physique, la chimie, la biologie, les sciences de l'ingénieur ou les sciences humaines et sociales. Les recherches sur les nano-technologies suscitent des espoirs importants en raison des propriétés particulières de la matière à l'échelle nano-métrique qui permettent d'envisager de nouvelles fonctions jusqu'ici inimaginables. Fabriquer, observer et manipuler des nano-objets, étudier et comprendre leurs propriétés et leurs interactions avec leur environnement, en particulier avec le vivant, les modéliser et les simuler, les intégrer dans des systèmes communicants, tels ont été et sont encore les grands défis scientifiques indispensables à relever pour développer des applications nombreuses et considérables, mais de façon maîtrisée et contrôlée.

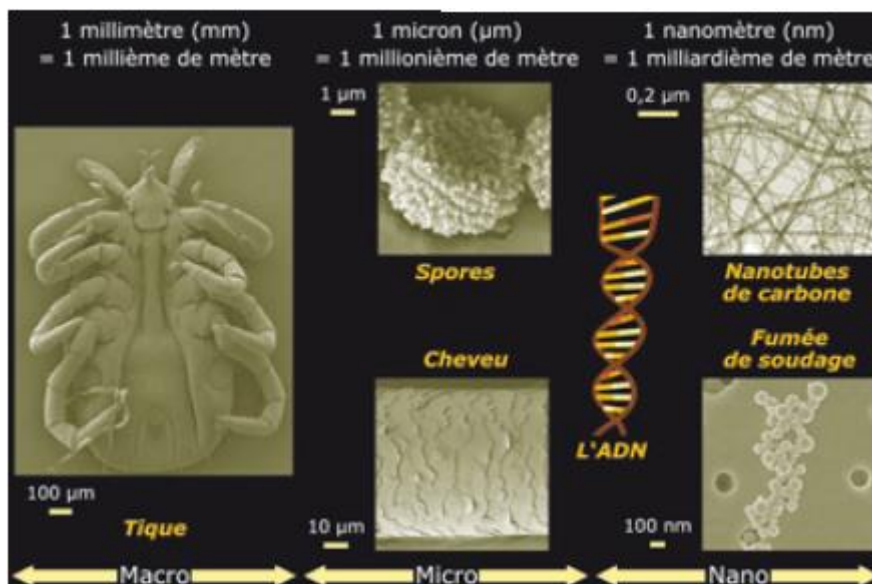
Les nano-technologies représentent vrai-semblablement le nerf de la prochaine révolution technologique. En émergence depuis la fin des années 90, leurs percées vont bouleverser tous les champs technologiques et scientifiques. Les nano-technologies et les nano-sciences ont la particularité scientifique par rapport aux autres champs que celles-ci opèrent à des dimensions nano-métriques, où la matière que l'on manipule présente de nouvelles propriétés jusqu'alors inutilisées. A l'échelle mondiale, les nano-technologies suscitent de plus en plus d'intérêt et sont en voie de constituer le cœur de la prochaine révolution industrielle. Le développement des sciences nous a amenés à un point de convergence où les technologies de pointe sont à l'étape de la manipulation de la matière dans ses plus petits éléments constitutifs. Des 1959, le physicien visionnaire américain Richard Feynman a lancé le défi à la communauté scientifique d'aller au cœur de la matière pour la transformer, molécule par molécule. Mais à cette époque, une telle vision ne pouvait être concrétisée avant l'arrivée de certaines percées scientifiques comme celle qui fut apportée en 1981 par Gerd Binnig et Heinrich Rohrer : le microscope à effet tunnel. Grâce à cet outil, on pouvait enfin voir la matière à l'échelle atomique.

Les applications des nano-technologies sont de plus en plus importantes dans la vie de chaque individu, pour l'industrie et le commerce, pour la santé et la société. Aujourd'hui, des travaux de recherche et de développement sont en pleine explosion sur les applications des nano-technologies dans le domaine de l'énergie, de la chimie et des capteurs, des matériaux, de l'information et des communications, de

la biologie et de la médecine, de l'environnement. Ce riche paysage ne doit pas occulter d'autres aspects, comprenant, en contrepoint des avantages, les risques nouveaux des nanotechnologies pour la santé, l'environnement, le respect de la vie privée, ou plus loin encore, les évolutions de l'espèce humaine. Les défis relevés sont donc immenses et la compétition entre grands pays apparait de plus en plus acharnée.

## II.2 La découverte du nano-monde

Lors d'une conférence organisée en 1959, le physicien Richard Feynman a déclaré que les principes de la physique autorisaient la manipulation et le positionnement contrôlé des atomes et des molécules, individuellement, à la manière de briques de construction type Lego. Par cette déclaration, le physicien américain suggérait à la communauté scientifique d'explorer l'univers de l'infiniment petit. Le terme nano-technologie fut utilisé pour la première fois en 1974. Dans les années quatre-vingt, avec la découverte du microscope à effet tunnel, puis celle du microscope à force atomique, le nano-monde s'ouvre réellement aux chercheurs. L'unité de référence du nano-monde est le nano-mètre (noté en abrégé nm). Le préfixe (nano) vient du grec Nanos qui signifie (nain). Un nano-mètre équivaut à un milliardième de mètre ( $1\text{nm}=10^{-9}\text{m}=0.000\ 000\ 001\text{m}$ ) soit approximativement 1/50 000 de l'épaisseur d'un cheveu humain. Cette échelle est celle de l'atome, la brique élémentaire de toute matière.



**Fig II.1** l'échelle des dimensions

### II.3 Définition des nano-matériaux

Il existe de nombreuses définitions du terme nano-matériau. La commission européenne a proposé en octobre 2011, dans le cadre d'une recommandation, une définition pour le terme (nano-matériau). Un nano-matériau est un matériau naturel, formé accidentellement, ou manufacturé, contenant des particules libres, sous forme d'agrégat ou sous forme d'agglomérat, dont au moins 50% de particules, dans la répartition numérique par taille, présentent une ou plusieurs dimensions externes se situant entre 1 nm et 100 nm. Il est précisé dans cette recommandation que, dans des cas spécifiques, lorsque cela se justifie pour des raisons tenant à la protection de l'environnement, à la santé publique, à la sécurité ou à la compétitivité, le seuil de 50% fixé pour la répartition numérique par taille peut être remplacé par un seuil compris entre 1% et 50% . Il est également indiqué que, par dérogation, les fullerènes, les flocons de graphène et les nano-tubes de carbone à paroi simple présentant une ou plusieurs dimensions externes inférieures à 1 nm sont considérés comme des nano-matériaux. Selon la norme ISO TS 80004-1, un nano-matériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nano-métrique, c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 nm, ou qui possède une structure interne ou de surface à l'échelle nano-métrique.

### II.4 Différence entre un matériau ordinaire et un nano-matériau

Ce qui distingue les matériaux ordinaires des nano-matériaux est la taille des grains qui passent de plusieurs centaines ou plusieurs milliers de nano-mètres à moins de 100 nano-mètres. Plus la taille des particules constituant un matériau diminue, plus la résistance ou (dureté) du matériau augmente. Par exemple, un matériau formé de nano-particules de cuivre voit sa dureté augmenter approximativement selon le tableau suivant (comparaison entre la dureté du nouveau matériau par rapport au matériau ordinaire)

**Tab II.1** : Comparaison entre la dureté du nouveau matériau par rapport au matériau ordinaire

Taille des nanoparticules	Rapport de dureté
50 nm	2

15 nm	3
6 nm	5

## II.5 les familles des nano-matériaux

Il existe deux grandes familles de nano-matériaux

### II.5.1 Les nano- objets

Ce sont des matériaux dont une, deux ou trois dimensions externes se situent à l'échelle nano-métrique, c'est-à-dire approximativement entre 1 et 100 nm. Parmi les nano-objets, il est possible de distinguer trois catégories

#### II.5.1.1 Les nano-particules

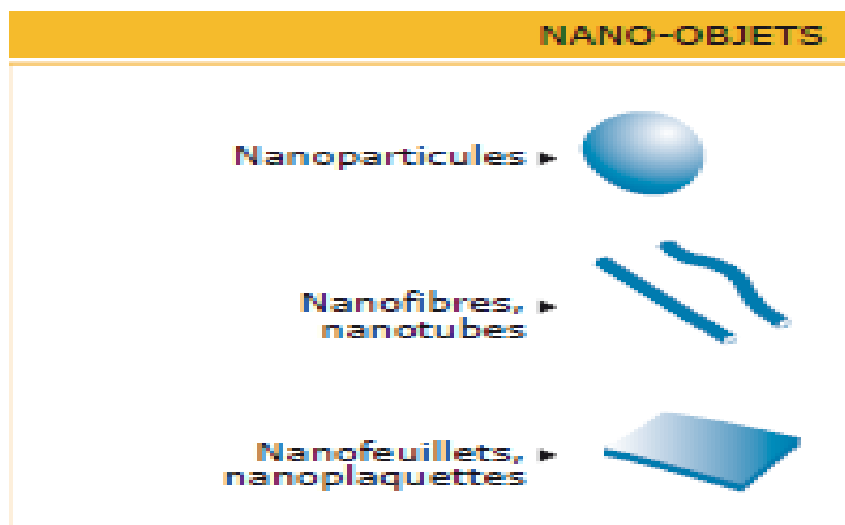
Ce sont des nano-objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nano-métrique : nano-particules de latex, d'oxyde de zinc, de fer et de cérium, d'alumine, de dioxyde de titane, de carbonate de calcium, etc.

#### II.5.1.2 Les nano-fibres, nano-tubes, nano-filaments ou nano-bâtonnets

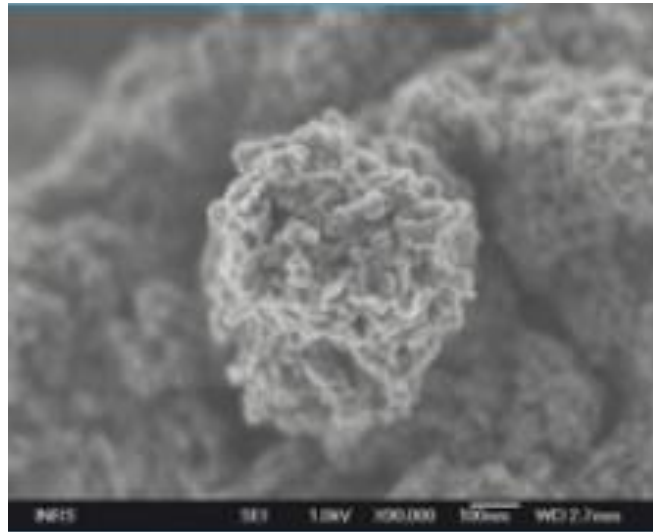
Ce qui désignent des nano-objets dont deux dimensions externes sont à l'échelle nano-métrique et la troisième dimension significativement supérieure ( nano-tubes de carbone, nano-fibres de polyester, nano-tubes de bore, etc.). Ces termes désignent des nano-objets longilignes de section comprise entre 1 et quelques dizaine de nm et de longueur comprise entre 500 et 10 000 nm.

#### II.5.1.3 Les nano-feuillets, nano-plats ou nano-plaquettes

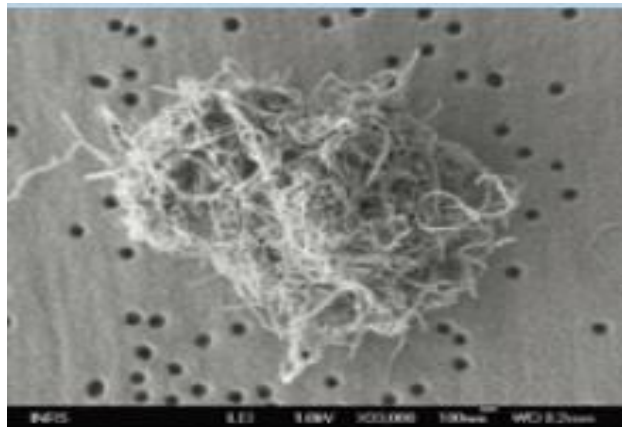
Ce qui définissent des nano-objets dont une dimension externe se situe à l'échelle nano-métrique et les deux autres dimensions sont significativement supérieures (nano-feuillets d'argile, nano-plaquettes de sélénure de cadmium, etc.)



**FigII.2:** *types des nano-objets*



**FigII.3 :** *Nano-particules de dioxyde de titane*



**Fig II.4 :** *Nano-tubes de carbone multi- parois*

## **II.5.2 Les matériaux nano-structurés**

Ce sont des matériaux qui possèdent une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique. Parmi les matériaux nano-structurés, il est possible de distinguer plusieurs sous familles.

### **II.5.2.1 Les agrégats et agglomérats de nano-objets**

Ce genre peut se présenter soit sous forme individuelle ( c'est à dire sous forme de particules primaires), soit sous forme d'agrégats ou d'agglomérats dont la taille est sensiblement supérieure à 100 nm.

### II.5.2.2 Les nano-composites

Ces matériaux sont composés pour tout ou en partie de nano-objets qui leur confèrent des propriétés améliorées ou spécifiques de la dimension nano-métrique.

Les nano-objets sont incorporés dans une matrice ou sur une surface afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité ou de modifier certaines propriétés mécaniques, magnétiques, thermiques, etc. A titre d'exemple les polymères chargés de nano-tubes de carbone utilisés dans le secteur des équipements sportifs, afin d'améliorer leur résistance mécanique et de diminuer leur poids.

### II.5.2.3 Les matériaux nano-poreux

Ces matériaux possèdent des pores de taille nano-métrique. Les aérogels de silice sont des matériaux nano-poreux qui présentent d'excellentes propriétés d'isolation thermique.

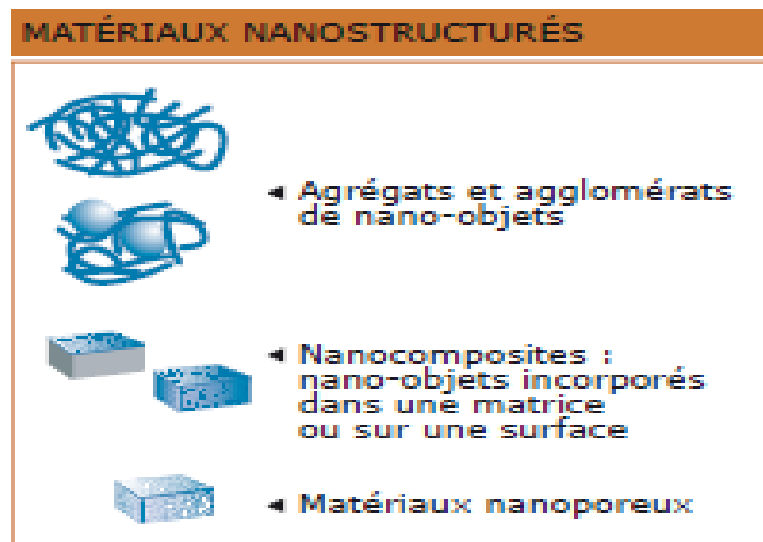


Fig II.5 : Types des matériaux nano-structurés

## II.6 travailler dans le monde invisible

### II.6.1 Contexte et problématique

Les nano-matériaux sont constitués de structures élémentaires dont au moins une des dimensions est comprise typiquement, mais non exclusivement, entre 1 et 100 nano-mètres (nm). Cette caractéristique dimensionnelle confère à ces matériaux des propriétés ou des comportements particuliers, utilisés notamment pour de nouvelles applications technologiques. Les propriétés des nano-matériaux varient notamment selon leur composition chimique, leur taille, leur surface spécifique, l'état de surface, ou encore la forme du nano-



objet considéré. De plus, chaque nano-matériau peut être doté d'une réactivité ou d'un comportement différent selon la formulation et la matrice du produit fini qui le contient.

En raison des nombreuses applications innovantes que laissent entrevoir ces propriétés physiques, chimiques ou biologiques, les nano-matériaux représentent un domaine de la recherche scientifique et technique en pleine expansion. Ils ne sont plus seulement confinés dans les laboratoires de recherche, mais sont désormais intégrés dans de nombreux procédés industriels et participent à la composition d'une grande variété de produits ou systèmes utilisés dans la vie courante (crèmes solaires, textiles, aliments, domaine des transports, etc.). Ces nano-matériaux sont présents dans des secteurs aussi variés que le bâtiment, l'automobile, l'emballage, la chimie, l'environnement, l'énergie ou la santé. Ces nano-matériaux sont dits manufacturés, car ils sont produits intentionnellement, et sont introduits dans l'environnement par l'homme. Ils doivent être distingués de l'ensemble des particules d'échelle nano-métrique présentes par exemple dans le milieu ambiant naturel ou issues involontairement de divers processus industriels ou domestiques. Les particules ultrafines issues de combustion font par exemple quant à elles l'objet d'études relatives à leurs dangers spécifiques. L'étude des dangers et l'évaluation des risques associés aux nano-matériaux manufacturés s'avèrent nécessaires dans la mesure où ces objets sont produits en raison de leurs propriétés nouvelles et spécifiques. La construction d'outils d'observation et de manipulation adaptés est un préalable à l'exploration et à l'exploitation des nouvelles propriétés de la matière à l'échelle nano-métrique

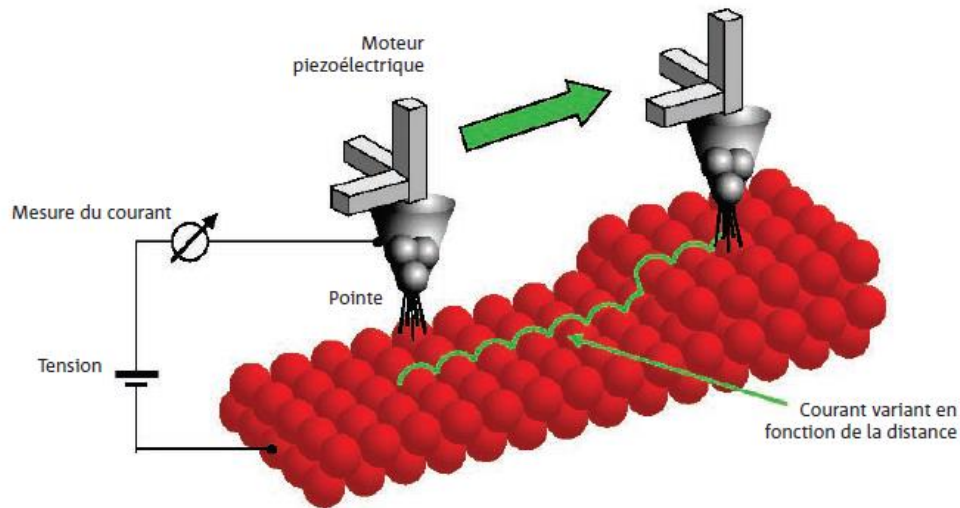
## **II.6.2 Les moyens pour observer et manipuler les nano-matériaux**

Désormais les nano-matériaux peuvent être observés et manipulés grâce à une gamme d'outils qui ne cesse de se diversifier. Il est donc possible d'obtenir des images et d'analyser des propriétés locales des matériaux et de nano-objets à l'échelle du nano-mètre.

### **II.6.2.1 Microscopie à effet tunnel:**

Le microscope à effet tunnel a été inventé par les chercheurs Gerd Binnig et Heinrich Rohrer, qui ont eu un prix Nobel de physique en 1986. Outil de haute précision permettant de voir les surfaces des matériaux avec une résolution atomique, il peut opérer sous plusieurs conditions extrêmes de pression, température et magnétisme, et servir d'outil de structuration des surfaces et d'étude des propriétés électroniques des matériaux. On approche une pointe très fine au-dessus d'une surface en appliquant une tension entre les deux. Un courant peut

s'établir lorsque la pointe est à quelques nano-mètres de la surface, même si elle ne la touche pas : c'est l'effet tunnel. L'intensité de ce courant dépend avec une grande sensibilité de la distance entre la pointe et la surface. Lorsqu'on déplace la pointe au dessus de la surface. Il suffit d'enregistrer les variations du courant en fonction de la position de la pointe pour obtenir une représentation de la topographie de la surface .

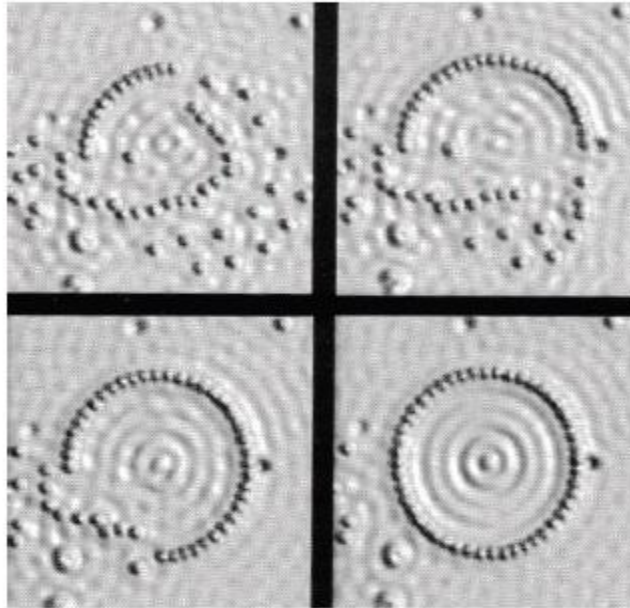


**Fig**

## II.6: *Le principe du microscope à effet tunnel*

- Exemple de manipulation à l'aide du microscope à effet tunnel

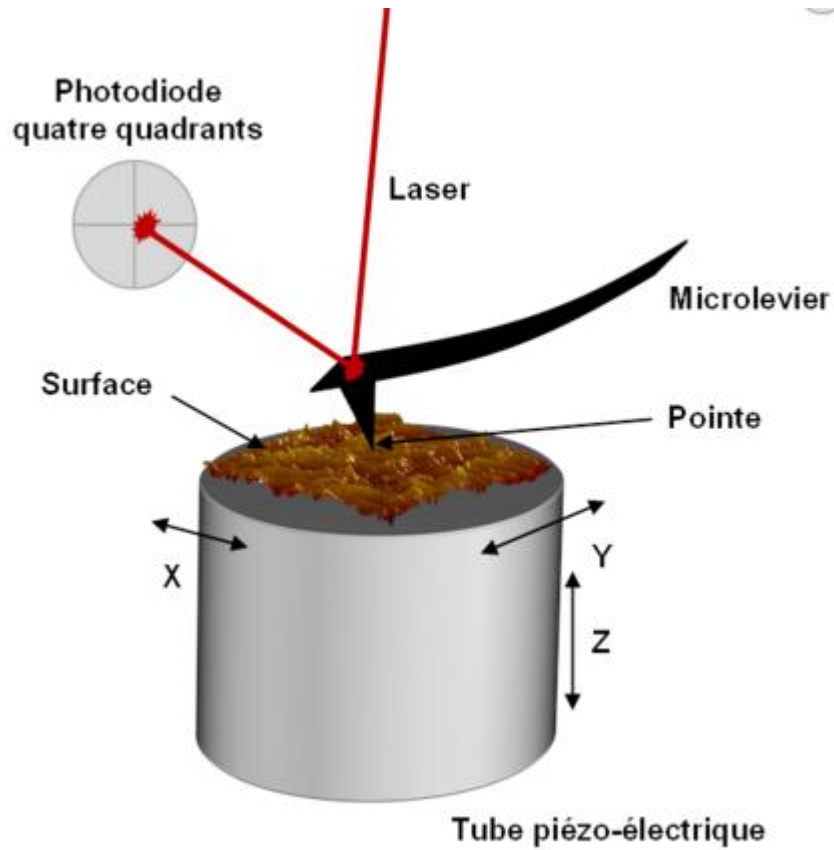
Il est possible, comme le montre la figure II.7 de former un cercle d'atomes de fer déposés sur du cuivre. Au début, les atomes sont simplement déposés au hasard sur la surface de cuivre. La pointe du microscope sert ensuite à les disposer de façon à former un cercle.



**Fig II.7:** *Cercles d'atomes de fer sur surface de cuivre*

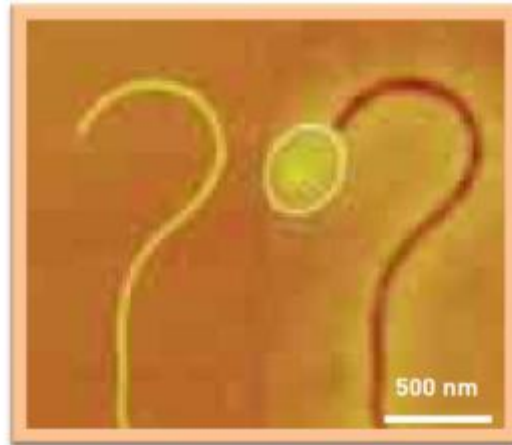
### II.6.2.2 Microscopie à force atomique

La microscopie à force atomique est une technique permettant de visualiser avec une résolution nano-métrique la morphologie tridimensionnelle de la surface d'un matériau, et de **cartographier certaines de ses propriétés (adhésives, mécaniques, magnétiques, électriques, ...)**. Le principe de la microscopie à force atomique repose sur la mesure des différentes forces d'interaction (forces de répulsion ionique, forces de Van-der-Waals, forces électrostatiques, etc...) entre les atomes de la surface à observer et les atomes d'une pointe-sonde. La pointe est fixée sous un micro levier flexible ou cantilever, de raideur donnée. L'échantillon est quant à lui posé sur le même céramique piezo-électrique contrôlant les déplacements dans les 3 directions x, y, z. Lorsque l'échantillon est approché de la pointe, les forces d'interaction pointe/échantillon provoquent une déflexion du micro levier proportionnelle à l'intensité de la force. Un faisceau laser, réfléchi sur la face arrière du micro levier et dirigé sur une photodiode 4 quadrants, permet de mesurer cette déflexion. Dans le premier mode d'utilisation de cette technique, le « mode contact », la déflexion du micro levier est maintenue constante par une boucle d'asservissement pendant que l'échantillon est déplacé suivant X, Y et Z. Une image topographique tridimensionnelle peut ainsi être obtenue..



**FigII.8** : *Principe de la microscopie à force atomique*

Le microscope force électrostatique est un outil dérivé du microscope à force atomique. Grâce à un oscillateur mécanique (une pointe oscillante qui balaye la surface à observer), ce microscope mesure les propriétés électro-statiques locales d'un matériau avec une résolution spatiale de l'ordre de la dizaine de nano-mètres.

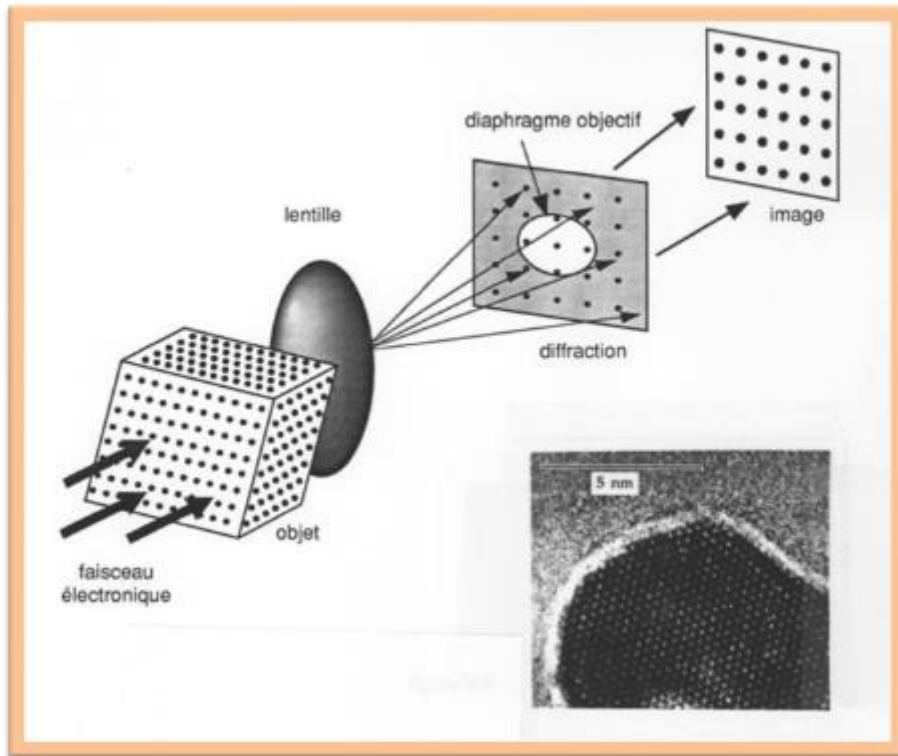


**FigII.9** : -A gauche : image de microscopie à force atomique d'un nano-tube de carbone.

-A droite : image de microscopie à force électrostatique après une expérience d'injection de charges. (CNRS 2005)

### II.6.2.3 Microscopie électronique à très haute résolution

Les développements récents de la microscopie électronique en font un outil incontournable d'exploitation du nano-monde qui rend possible l'analyse et la mesure des propriétés de nano-objets individuels. La barre du dixième de nano-mètre a été franchie en résolution spatiale, ce qui permet d'observer et de comprendre l'organisation tridimensionnelle des atomes ainsi que ses éventuels défauts. La spectroscopie des pertes d'énergie électronique donne la possibilité d'une analyse chimique localisée à tel point que les chercheurs sont capables d'identifier un atome isolé. L'importance des études consacrées aux nano-tubes de carbones simples ou composites et aux nano-phases solides dans l'environnement montre l'enjeu lié au développement de tels instruments.



**FigII.10** : *Le principe de la formation d'image des structures cristallines en microscopie électronique à transmission à très haute résolution (CNRS 2005)*



**FigII.11** : *Image par microscopie électronique à très haute résolution de nano-tube d'oxyde de titane (CNRS 2005)*

## II.7 Les procédés de fabrication des nano-matériaux

Les nano-matériaux manufacturés peuvent être synthétisés selon deux approches différentes. Il convient ainsi de différencier la méthode dite « ascendante » en anglais (bottom-up) de la méthode dite « descendante » en anglais (top-down).

- **L'approche ascendante** : elle consiste à construire les nano-matériaux atome par atome, molécule par molécule ou agrégat par agrégat. L'assemblage ou le positionnement des atomes, des molécules ou des agrégats s'effectue de façon précise, contrôlée permettant ainsi l'élaboration de matériaux fonctionnels dont la structure est complètement maîtrisée.
- **L'approche descendante** : elle consiste à réduire et plus précisément à miniaturiser les systèmes actuels (généralement des matériaux micro-structures) en optimisant les technologies industrielles existantes. Les dispositifs ou les structures sont ainsi graduellement sous dimensionnés ou fractionnés jusqu'à atteindre des dimensions nano-métriques.

Les deux approches tendent à converger en termes de gamme de tailles des objets. L'approche bottom-up semble néanmoins plus riche en termes de type de matière, de diversité d'architecture et de contrôle de l'état nano-métrique alors que l'approche top-down permet d'obtenir des quantités de matière plus importantes mais le contrôle de l'état nano-métrique s'avère plus délicat.

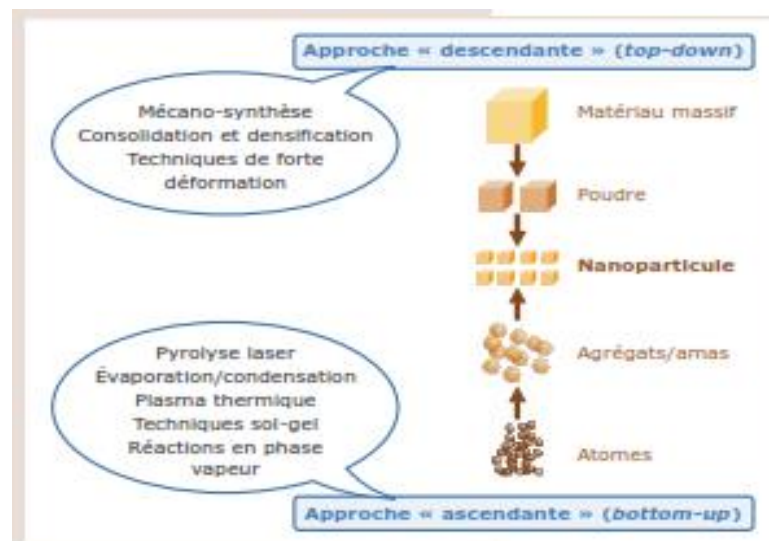


Fig II.12 : Les deux approches d'élaboration des nano-matériaux manufacturés

## II.8 Domaine d'utilisation des nano-matériaux

Les nano-technologies permettent d'élaborer des nano-matériaux qui ont des propriétés nouvelles comme conductivité électrique et thermique, élasticité et solidité accrues. Par

exemple le carbone sous forme graphique est tendre et malléable dans la mine de crayon alors qu'à l'échelle nano-métrique sous forme de nano-tubes il est plus solide que l'acier et six fois plus léger.

### **Dans le secteur de la santé**

- On peut envisager des diagnostics précoces de certaines maladies comme le cancer ou l'Alzheimer par des puces combinant informatique, cellules, gènes et protéines permettant la détection de l'ADN et des molécules. Ils inspectent les cellules ou les indices capables d'orienter le traitement. Par exemple : introduction de nano- balises détectant la cellule cancéreuse et s'y fixant.

- Il est envisagé d'utiliser les nano-particules comme container permettant de protéger les produits actifs jusqu'à leur cible. C'est l'implantation de la pharmacie sur une puce. On peut délivrer un médicament de façon ciblée et continue avec accumulation automatique ou pilotée de nano-particules autour de tumeurs. La chimiothérapie est alors mieux ciblée. Cela peut se généraliser à des pathologies comme les cancers, la parasitologie, les vaccinations, etc.

- L'ingénierie des tissus, des matériaux biométriques et des implants est en essor. Une armature doit fournir le support sur lequel les cellules peuvent se développer. Des nano-tubes de carbone ou des particules de titane peuvent jouer ce rôle. On peut envisager la réparation d'un organe déficient ou sa substitution.

### **Secteur industriel**

- Les nano-technologies contribuent à renforcer les performances de produits industriels (les matériaux sont plus légers et plus résistants), comme la fabrication de pneus inusables, de revêtements antibruit, de vitres athermiques, de moteurs céramiques, de téléphones portables, d'ordinateurs, de matériel électro-ménager. des revêtements antibactériens, des textiles auto réparateurs, des systèmes dépolluants, des écrans plats.

- Depuis 20 ans l'électronique embarquée intègre les nano-technologies.
- En informatique, en communication, la fabrication de circuits intégrés utilise des traits de gravure d'une mesure inférieure à 100 nm.
- Amélioration des capacités de stockage en informatique.
- Les nano films peuvent être utilisés pour la transmission de signaux électriques, optiques et chimiques.
- Dans le secteur alimentaire, elles devraient améliorer la traçabilité et la conservation.



- Concernant l'énergie, des progrès sont à attendre dans la transformation de l'énergie solaire en l'énergie électrique: certaines piles à combustible utilisent pour produire de l'énergie électrique de l'hydrogène obtenu en cassant des molécules d'eau à partir de l'énergie solaire. Elles ne sont pas polluantes ni en amont pour obtenir de l'hydrogène ni en aval puisque le sous-produit est aussi de l'eau.

### **Secteur environnemental**

- La fabrication de nano membranes pour retenir le sel de l'eau de mer
- Création de nano puce à ADN pour détecter les pollutions organiques ou microbiennes  
=> Accession à l'eau potable pour les populations qui en sont dépourvues.
- Fabrication de poudres détruisant les agents pathogènes.
- Décontamination des sols, assainissement de l'eau.

## **II.9 Quelques exemples de nano-matériaux et d'applications associées**

### **II.9.1 Le dioxyde de titane**

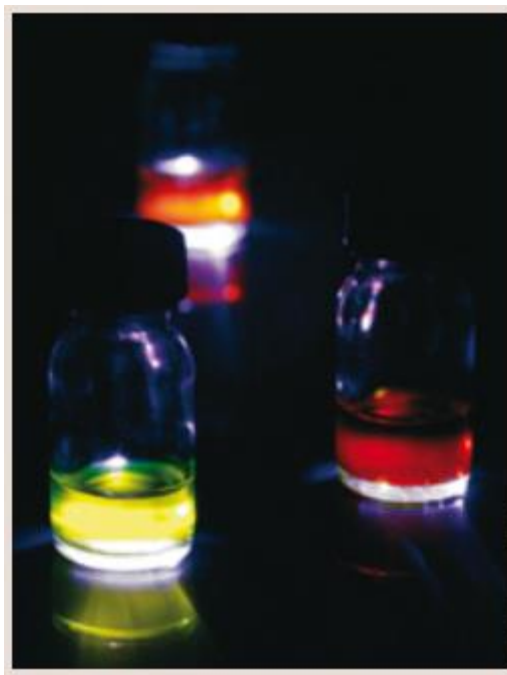
Le dioxyde de titane est l'un des pigments minéraux synthétiques les plus utilisés à travers le monde (notamment dans les peintures, les encres, les plastiques, les bitumes, etc.) avec les oxydes de fer et le noir de carbone. Ce pigment blanc est aujourd'hui incorporé dans les ciments, et également les verres, en raison de ses propriétés photo catalytiques qui permettent de décomposer une large variété de matières organiques, inorganiques et de micro-organismes



**Fig II.13 :** *Façade d'un immeuble en verre composé de nano-particules de dioxyde de titane*

### **II.9.2 Les points quantiques (ou quantum dots)**

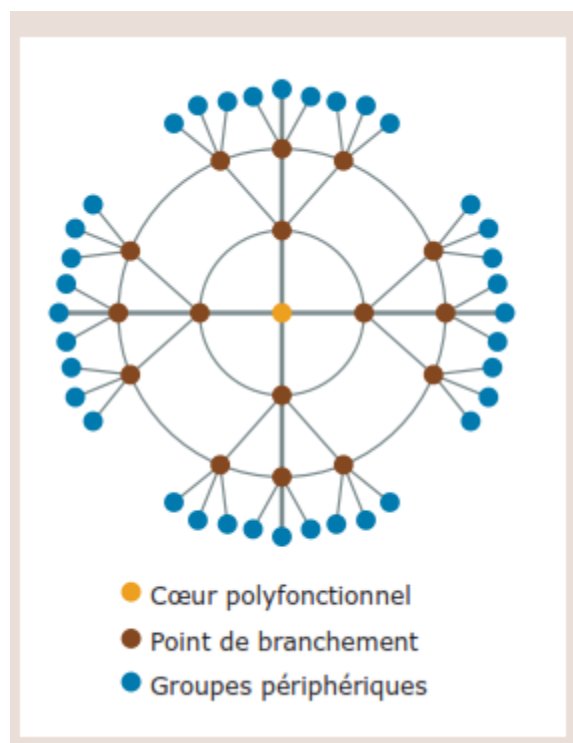
Les points quantiques sont des nano-cristaux semi conducteurs tels que le séléniure de cadmium qui possède des propriétés de fluorescence ajustables par le contrôle de leur taille. Eclairés en lumière blanche ou ultraviolette, ces cristaux inorganiques émettent une fluorescence dont la couleur varie en fonction de leur composition et de leur diamètre ( cette couleur peut varier du bleu au rouge). Ces matériaux peuvent notamment, être utilisés en imagerie biologique : marquage et suivi de cellules vivantes, imagerie sur l'animal vivant, microscopie fluorescente, etc.



**Fig II.14 :** *Nano-cristaux inorganiques fluorescents*

### II.9.3 Les dendrimères

Les dendrimères sont des macro-molécules de taille nano-métrique caractérisées par une structure ramifiée tridimensionnelle. Ils sont apparentés à des polymères pluri fonctionnels et possèdent des propriétés particulières de solubilité, viscosité, stabilité thermique, etc. Ils adoptent en générale, une forme globulaire. Les possibilités d'utilisation offertes par les dendrimères sont nombreuses et sont liées à leur topologie originale composée de trois régions bien spécifiques : le cœur, les branches, formant la matrice dendritique et la périphérie constituée d'une multitude de groupes fonctionnels. Les applications touchent aussi bien la vectorisation et la libération contrôlée de principe actifs que la thérapie génique, la catalyse et les capteurs biologiques.

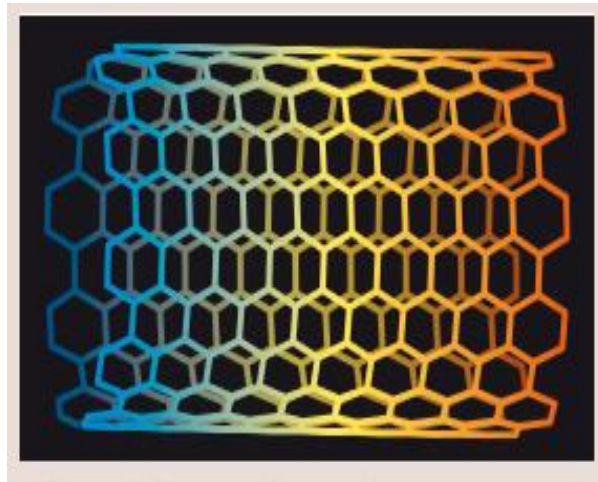


**FigII.15** :Structure d'un dendrimère

### II.9.4 Les nano-tubes de carbone

Les nanotubes de carbone constituent, avec d'autres molécules nommées fullerènes, la troisième forme cristalline du carbone. Leur structure peut être représentée par un ou plusieurs feuillets ou parois de graphène enroulés sur eux-mêmes ou les uns autour des autres : on distingue ainsi les nano-tubes de carbone mono-parois (ou mono-feuillets) des nano-tubes de

carbone multi-partis (ou multi-feuillets). Ces cylindres creux démontrent des propriétés mécaniques et électriques remarquables (un nano-tube de carbone est 100 fois plus résistant et 6 fois plus léger que l'acier à section équivalente) qui induisent de nombreuses applications : élaboration de matériaux composites haute performance, de polymères conducteurs ou encore de textiles techniques. Ils sont ainsi utilisés dans l'aéronautique (aile d'avion), les équipements sportifs (raquette, vélo), l'électronique (diode, transistor, etc)



**FigII.16** : *structure d'un nanotube de carbone mono-paroi*

## **II.10 Avantages et inconvénients des nano-matériaux**

### **II.10.1 Inconvénients**

Les risques liés aux nano-technologies sont divers. Tout d'abord, il est important de savoir qu'à cause de leur petite taille ; les nano-technologies peuvent facilement pénétrer dans le corps humain. En effet, ce dernier a plusieurs entrées, notamment la peau et les voies respiratoires. C'est pour cela que le corps humain est exposé aux dangers. La peau n'est plus une barrière efficace contre bon nombre de corps étrangers. Un nano-robot peut passer à travers les barrières naturelles du cerveau tout comme il peut atteindre la zone placentaire chez la femme enceinte. Il faut être prudent, car les effets cardio-vasculaires, respiratoires et cancérogènes des nano-technologies sont encore connus. D'autant plus, l'utilisation de ces nouveaux éléments dans le BTP pourrait aussi connaître certaines limites financière, avec un coût de ces nano-matériaux élevé.

## **II.10.2 Avantages**

La nano-technologie n'est pas seulement une révolution industrielle, mais également une voie permettant de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde et aussi une voie permettant d'avoir une vie meilleure. De plus avec la nano-technologie, l'élaboration de nombreux systèmes de transformations et de productions plus performantes pourront permettre une meilleure utilisation des ressources naturelles. Grâce à eux, certains matériaux nocifs pour l'environnement (ex : lubrifiants, engrais chimiques, pesticides) pourraient être remplacés. On peut dire également qu'avec la nano-technologie, la dépollution et la réparation des dégâts causés à l'environnement sont à notre portée. Par la nano-technologie, des nano-particules comme les nano-poudres peuvent être utilisées pour dépolluer l'eau. Au niveau de l'air, une des applications de la nano-technologie la plus répondu dans ce domaine est le pot catalytique. Grâce à celui-ci, tous les polluants (monoxyde de carbone, oxyde d'azote) peuvent être éliminés. Ensuite, la nano-technologie permettra une grande avancée dans le domaine militaire avec l'amélioration des armes et dans le domaine informatique avec la production de nouveaux ordinateurs portables. Pour conclure, les nano-technologies ont le grand avantage de pouvoir résoudre certains problèmes inhérents aux conditions de la vie de l'homme.

## **II.11 Conclusion**

Les nano-technologies représentent sans nul doute le nerf de la prochaine révolution technologique. En émergence depuis la fin des années 90, leurs percées vont bouleverser tous les champs technologiques et scientifiques. Les nano-technologies et les nano-sciences ont la particularité scientifique par rapport aux autres champs que celles-ci opèrent à des dimensions nano-métriques ou la matière que l'on manipule présente de nouvelles propriétés jusqu'alors inconnues. Par ailleurs, le succès de recherche dans le domaine des nano-technologies ne peut résulter que de la convergence des efforts de plusieurs acteurs opérant dans différentes disciplines scientifiques et technologiques (informatique, mathématiques, génie, chimie, physique, biologie, etc.).

# Chapitre III

## *Théories des poutres*

### **III.1 Introduction**

La mécanique des milieux continus, ou MMC, est la base de la résolution de problème en mécanique des solides et mécanique des fluides. Si la MMC permet de traiter tout type de problème, la résolution analytique simultanée des trois équations d'équilibres en tout point du domaine considéré, devient vite insurmontable pour être utilisée directement dans le dimensionnement des produits industriels courants. Dans le cas de la mécanique des solides, les ingénieurs ont isolé des cas particuliers de la MMC, ou via certaines hypothèses sur les géométries et le chargement, la résolution peut se faire plus aisément. Ce domaine de la mécanique des solides se nomme la mécanique des structures et se définit, par opposition à la MMC, comme la mécanique des solides de dimensions finies où une des dimensions au moins est très faible devant les autres.

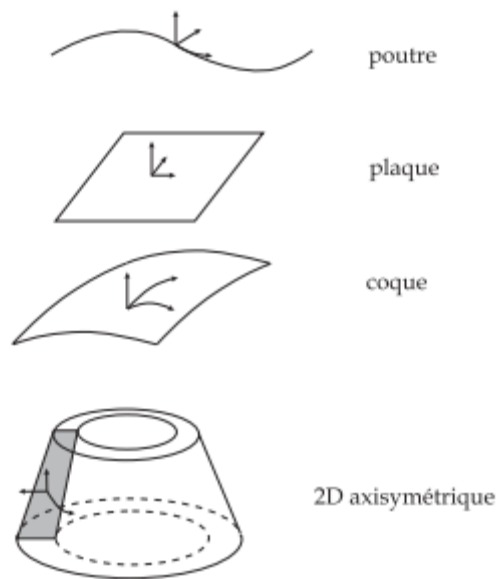
Les théories cinématiques qui sous-tendent de la mécanique des structures ont été mises au point dans les deux derniers siècles pour le dimensionnement des structures. Dans le même temps la résistance des matériaux, ou RDM était mise en place comme un cadre particulier de la mécanique où des hypothèses supplémentaires simplifient encore les problèmes à traiter. L'introduction de la théorie des poutres en RDM peut être envisagée principalement de deux façons différentes. Une première approche consiste à partir des considérations particulières pour des grandes familles d'exemples. Une telle approche nécessite une bonne connaissance et une bonne maîtrise de la modélisation des problèmes physiques à résoudre, la seconde approche plus systématique permet de poser la formulation rigoureuse de la théorie des poutres à partir des considérations purement mécaniques.

### **III.2 La Mécanique des structures et la Résistance des matériaux « RDM »**

#### **III.2.1 Définition de la mécanique des structures**

La mécanique des structures se définit comme la mécanique des solides de dimensions finies où une des dimensions au moins est faible devant les autres. La mécanique des structures couvre donc un grand nombre de géométrie dont les plus courantes sont les poutres, les plaques, les coques, et les solides axi-symétriques. En observant la géométrie des structures citées, des hypothèses peuvent être faites quant à la cinématique qui prévaut dans ces solides. Toute la difficulté de ce type d'approche réside dans le choix judicieux de cette cinématique qui doit être suffisamment riche pour observer tous les phénomènes rencontrés durant l'utilisation des structures considérées, mais assez simple pour permettre des

résolutions analytiques. On peut remarquer que ces structures sont également utilisées dans les simulations numériques, telles que les simulations par éléments finis par exemple. Dans ce cas, comme lors de la résolution analytique d'ailleurs, les temps de calcul nécessaires à la résolution d'un problème sont amplement plus faibles que si le même problème était traité avec une approche de type MMC.



**Fig III.1:** *Type de structures*

### III.2.2 Résistance des Matériaux

La résistance des matériaux est un cadre restreint, mais utilisable pour la plupart des applications courantes, pour traiter des problèmes de mécanique des structures. Principalement, les hypothèses simplificatrices de la RdM portent sur des conditions de réversibilité et de linéarité.

Les études en RdM sont conduites sous les hypothèses suivantes :

- Petites déformations, petits déplacements.
- Les matériaux constitutifs sont élastiques linéaires isotropes.
- Loin de son point d'application, une sollicitation extérieure peut être remplacée par son torseur équivalent.
- Principe de superposition : quelque soit l'ordre d'application des efforts extérieurs sur un solide, l'état final est invariant.



Sous ces hypothèses, la RdM permet de traiter des problèmes de poutres, plaques, coques, ainsi elle peut s'appliquer à beaucoup de matériaux constitutifs différents. Généralement, en première approximation les matériaux sont supposés homogènes élastiques linéaires isotropes. La loi de comportement permet de relier les contraintes aux déformations, dernier élément nécessaire à la résolution de tous problèmes en mécanique.

### **III.3 Résolution des problèmes d'élasticité**

Résoudre un problème d'élasticité revient à trouver une fonction qui satisfait aux différentes équations de mécanique et d'équilibre. Pour arriver à une solution analytique à un problème, il existe plusieurs méthodes, détaillées dans des ouvrages plus conséquents. Deux méthodes différentes seront illustrer : en partant des déplacements et en partant des déformations (ou contraintes).

#### **III.3.1 Approche en déplacement**

Cette méthode consiste à choisir le champ de déplacement comme inconnue principale. Dans la pratique, une certaine forme pour ce champ est proposée Il s'agit alors de vérifier toutes les équations du problème. Ce champ doit satisfaire les conditions aux limites en déplacement, et il est aisé de calculer par dérivation les déformations, puis les contraintes en utilisant la loi de comportement. Il est alors possible d'étudier si les équations d'équilibre et les conditions aux limites portant sur les contraintes sont vérifiées. Dans le cas d'un domaine homogène il est plus commode d'exprimer directement les équations d'équilibres en termes de déplacement. Celles-ci sont obtenues en rapportant la relation déformations/ déplacements dans la loi de comportement, puis en injectant cette expression dans les équations d'équilibres.

Le processus de résolution avec la méthode en déplacement est :

- Postuler un champ de déplacement
- Vérifier les équations aux limites sur les déplacements
- Vérifier les équations de Lamé-Navier
- Vérifier les conditions aux limites sur les contraintes
- Conclure grâce à l'unicité

#### **III.3.2 Approche en contrainte**

La seconde méthode de résolution consiste à rechercher directement les contraintes. Le champ de contrainte doit vérifier les conditions aux limites portant sur les contraintes et les équations d'équilibres. Si tel est le cas, il sera toujours possible de lui associer un champ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en utilisant la loi de comportement sous sa forme inverse.

En revanche, il n'est pas sûr que ce champ correspond à un champ de déformation. Il faut pour cela s'assurer qu'il existe un champ de déplacement tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dérive de ce champ de déplacement, soit ce qui revient à dire que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  doit vérifier des conditions d'intégrabilité, encore appelées conditions de compatibilité des déformations.

En pratique, lors d'une approche en contraintes, ces équations sont exprimées en fonction des contraintes. Pour ce faire, il faut utiliser la loi de comportement. Mais les équations obtenues sont difficiles à exploiter c'est pourquoi elles sont combinées avec les équations d'équilibres,

Le processus de résolution avec la méthode en contrainte est

- Postuler un champ de contrainte
- Vérifier les conditions aux limites sur les contraintes
- Vérifier les équations d'équilibres
- Intégrer les déformations et obtenir le champ de déplacement
- Vérifier les conditions aux limites sur les déplacements
- Conclure grâce à l'unicité

De façon générale la première approche est plutôt simple, car à partir des déplacements, on calcule directement les déformations par dérivation. Les contraintes sont ensuite directement évaluées. Il suffit de vérifier les équations d'équilibres, ou bien lorsque l'expression des déplacements ou des contraintes fait appel à des constantes, les déterminer à partir des équations d'équilibres.

La deuxième approche est un peu plus compliquée, puisqu'il faudra intégrer pour passer des déformations aux déplacements, donnant ainsi une série de conditions d'intégrations appelées équations de compatibilité.

### **III.4 L'orientation vers la théorie des poutres**

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Elle peut être envisagée lorsque le corps solide déformable possède une dimension bien plus grande que les deux autres.

La théorie des poutres fournit des solutions en déplacements et en contraintes qui ne sont pas nécessairement valables en tout point. Mais loin des points d'application de chargements, des liaisons (blocage cinématique) et des variations brusques de section, elle est tout à fait suffisante. (Génevaux et al 2011).

### **III.5 Historique des théories des poutres**

Le terme de < poutre > désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de cette dernière est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Léonard avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtient la distribution correcte (2001).

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émettent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire (1997). A cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au *XIX<sup>e</sup>* siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle

### **III.6 Domaine d'application de la théorie des poutres**

La théorie des poutres est la base de la résistance des matériaux. Elle s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale), là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

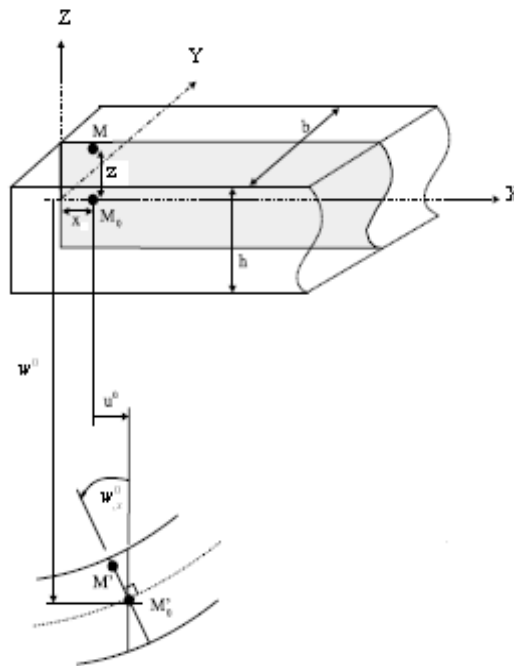
### **III.7 Les modèles de la théorie des poutres**

#### **III.7.1 Théories des poutres selon la prise en compte du cisaillement**

L'obtention d'une théorie de poutre nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui représentent des simplifications acceptables de la réalité. Plusieurs théories dans la littérature jouent sur la prise en compte ou non du cisaillement. Dans ce qui suit, on abordera les plus connues.

### III.7.1.1 Modèle d'Euler Bernoulli ou bien la théorie classique des poutres

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche.



**FigIII.2** Cinématique d'Euler Bernoulli (Dufort, 2001)

Dans cette théorie, les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre. L'hypothèse dans cette théorie :

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre).
- La section transversale reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.
- La fonction  $f(z)$  qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est nulle.

$$f(z) = 0 \quad \text{(III-1)}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

$u(x, z)$  : C'est le déplacement suivant X.

$w(x, z)$  : C'est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III-3})$$

Ou  $u_0(x)$  et  $w_0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-4})$$

Cela veut dire que la distorsion est nulle et par conséquent la contrainte de cisaillement est nulle puisque,

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{III-5})$$

**« Cette théorie ne tient pas en compte le cisaillement ».**

### III.7.1.2 Modèle de Timoshenko ou bien la théorie de premier ordre (FSDT)

Cette théorie s'applique pour le cas des poutres courtes, elle est basée sur le principe, qu'après déformation la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses (1972). Dans ce cas, la fonction  $f(z)$  est égale à z.

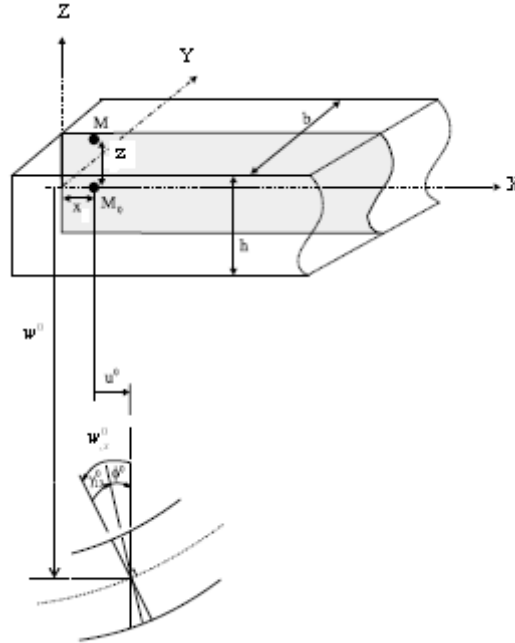
$$f(z) = Z \quad (\text{III-6})$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées.

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + z \varphi_0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

Où  $\varphi_0(x)$  : est la rotation de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre



**Figure III.3 :** Cinématique de Timoshenko (Dufort, 2001)

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + \varphi_0(x) + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (\text{III-8})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \varphi_0(x) \quad (\text{III-9})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \varphi_0 \quad (\text{III-10})$$

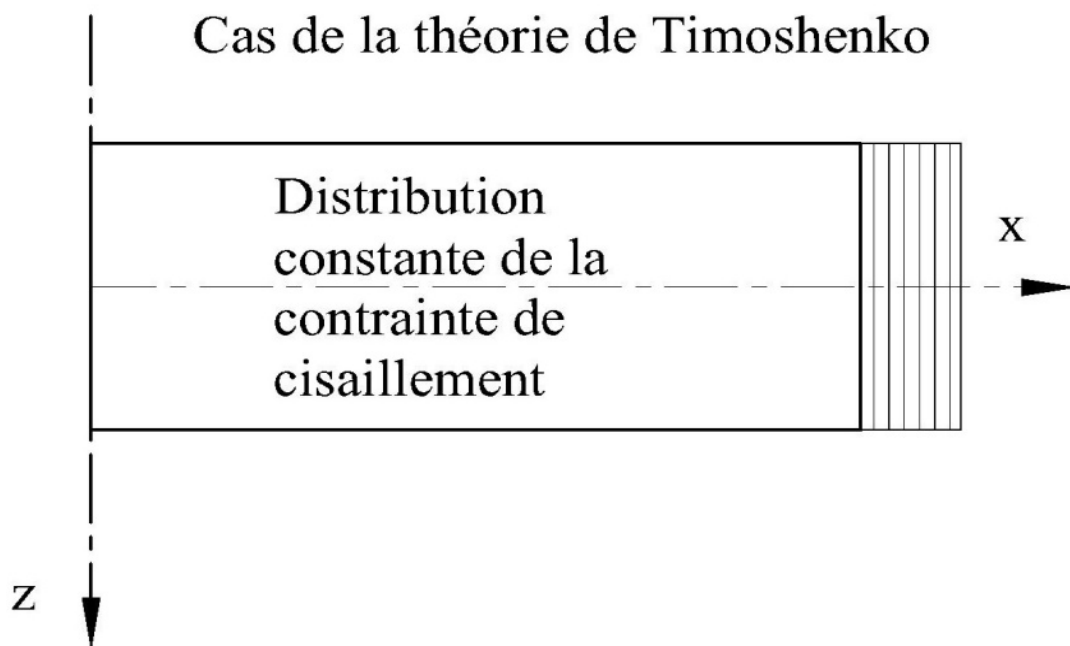
$G_{xz}$  : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre, cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients de correction pour mieux considérer le cisaillement transversal. Ces coefficients correcteurs notés "k" dépendent de la forme

géométrique de la poutre considérée (par exemple, pour une poutre de section rectangulaire  $k=5/6$ ).

La non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs, c'est « la théorie d'ordre élevé ».

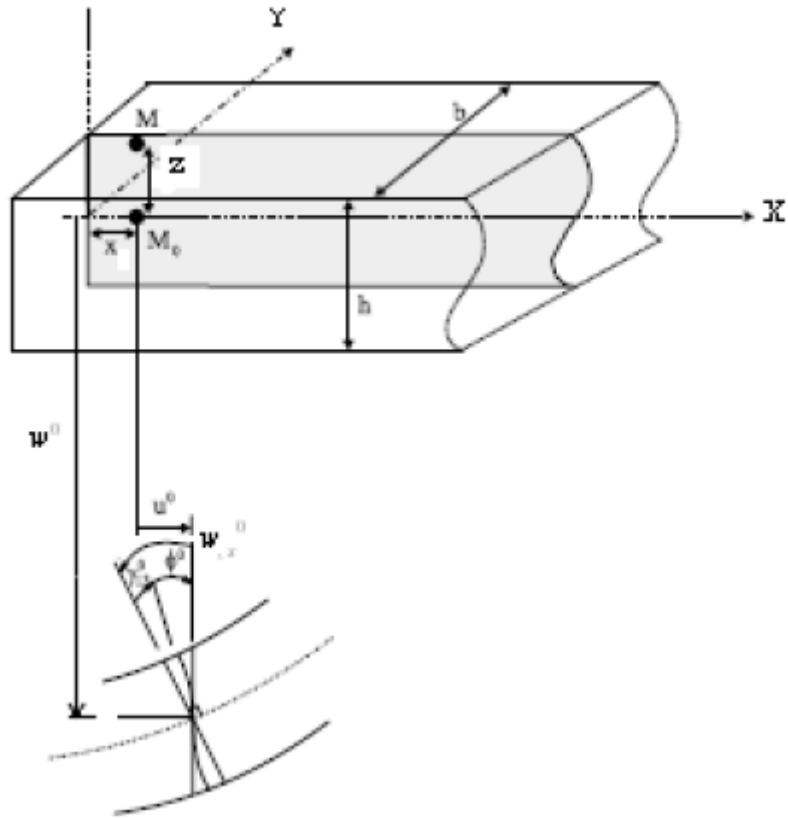


**Fig III.4** *La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko*

### III.7.1.3 Théorie d'ordre élevé

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène « gauchissement ».

Par définition : le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3). La fonction  $f(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $f'(z)$  le cisaillement.



**FigIII.5** Cinématique de la théorie d'ordre élevé (Dufort, 2001)

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z) \varphi_0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f'(z) \varphi_0(x) + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (\text{III-12})$$

$$\gamma_{xz}(x) = f'(z) \varphi_0(x)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'(z) = f'\left(+\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (\text{III-13})$$



C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (III.13).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement  $f(z)$ , quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM.

- Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) ETB

$$f(z) = 0 \quad (\text{III-14})$$

- Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre FSDT

$$f(z) = Z \quad (\text{III-15})$$

- Le modèle d'ordre élevé, avec l'approche de Levinson (1980), Murthy (1981) et Reddy (1984)

$$f(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-16})$$

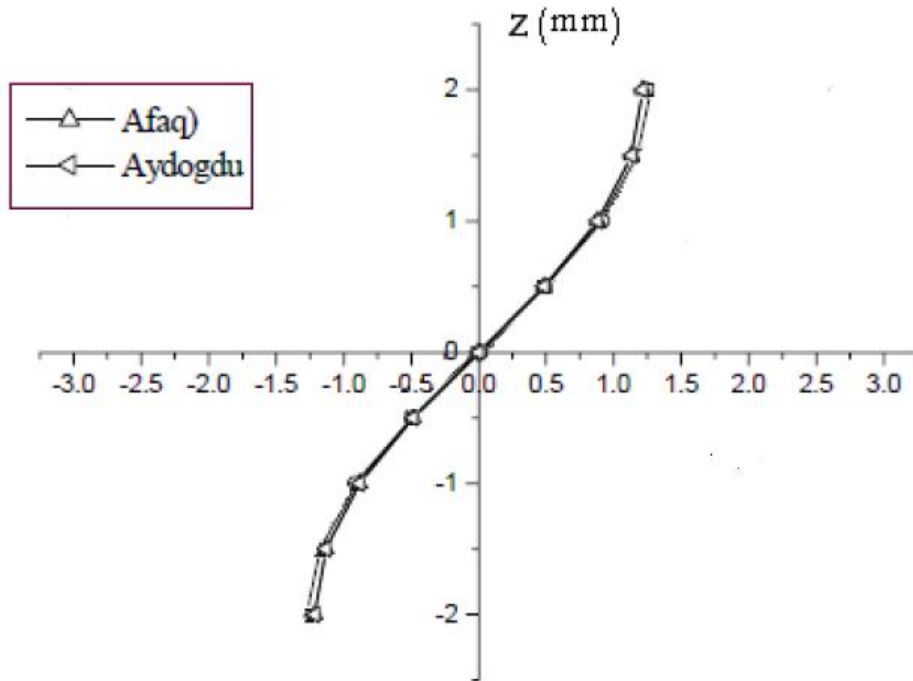
- Le modèle exponentiel proposé par Afaq et al (2003)

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III-17})$$

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \alpha}} \quad (\text{III-18})$$

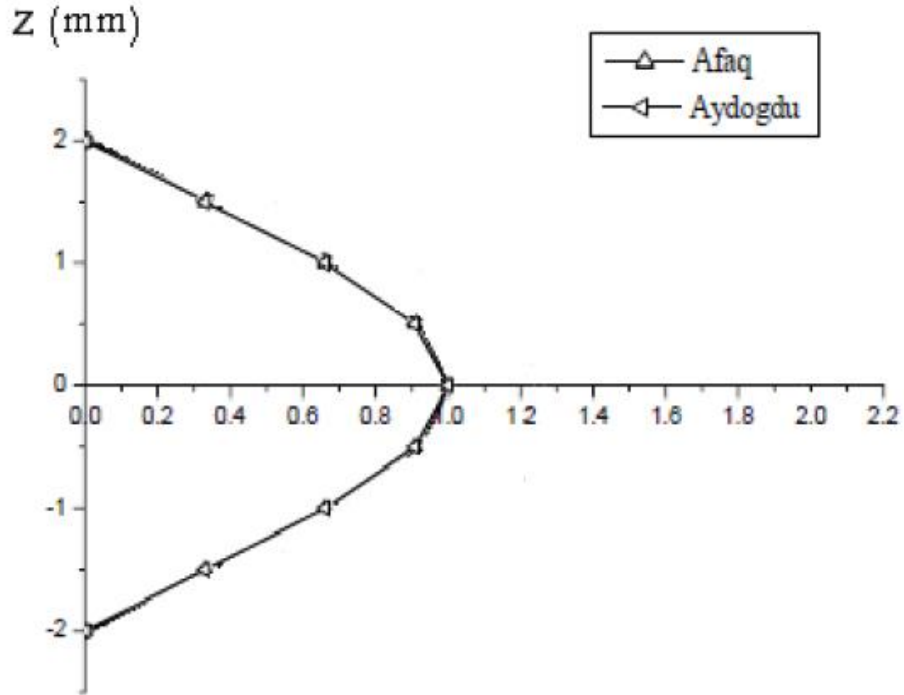
Avec,  $h$  étant l'épaisseur de la poutre.

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ .



**Fig III.6** Variation de la fonction de gauchissement  $f(z)$  des modèles d'Afaq et Aydogdu en fonction de l'épaisseur

La figure ci-dessus, illustre la variation de la fonction de gauchissement  $f(z)$  des modèles d'Afaq et Aydogdu en fonction de l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est symétrique par rapport au plan moyen de la poutre. Les deux modèles convergent et donnent les mêmes résultats.



**FigIII.7** Variation de la fonction de cisaillement  $f'(z)$  des modèles d'Afaq et Aydogdu en fonction de l'épaisseur

La figure III.7, montre la variation de la fonction de gauchissement  $f'(z)$  des modèles d'Afaq et Aydogdu en fonction de l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est aussi symétrique par rapport au plan moyen de la poutre et les deux modèles précités convergent toujours vers les mêmes résultats.

### III.7.2 Théories des poutres selon la prise en compte de l'effet d'échelle

La modélisation des structures est différente entre le monde macro et le monde micro et nano. La différence qui existe est celle de l'effet d'échelle qui a une grande influence sur le comportement de ces structures au niveau micro et nano-métrique.

#### III.7.2.1 La théorie locale d'élasticité

Cette théorie ne tient pas en compte de l'effet d'échelle dans ces hypothèses et donc néglige les forces entre atomiques. La théorie est applicable dans le cas des structures macro métrique mais incapable d'étudier les structures micro ou nano-métriques.

### **III.7.2.2 La théorie non locale d'élasticité**

La question qui se pose, pourquoi la non localité ? Le domaine d'application des théories classiques de l'élasticité est intimement relié à grandes échelles de temps et de longueur. Cette approche de l'élasticité non locale a été faite par Eringen qui a expliqué l'effet d'échelle en élasticité en supposant que l'effort à un point de référence peut être considéré comme une fonction du champ de contrainte à chaque point dans le domaine de cette façon, la taille interne a pu être considérée dans les équations constitutives simplement comme un paramètre matériel.

### **III.8 Conclusion**

Dans ce qui précède, un bref rappel de la mécanique des structures et de la résistance des matériaux a été abordé, ainsi un aperçu sur l'historique des théories des poutres et ses différents modèles selon la prise en considération du cisaillement et selon la prise en compte aussi de l'effet d'échelle. Trois types de théorie ont été présentés selon le premier critère: la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko et la théorie d'ordre élevé, dans le second on trouve la théorie locale et la non-locale. Par la suite dans ce travail la théorie non locale d'ordre élevé de l'élasticité va être utilisée.

# Chapitre IV

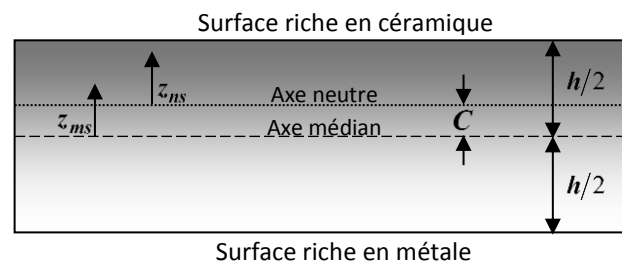
## *Formulations Théoriques*

## IV.1 Introduction

Les nano-poutres ont connu une large réputation dans différents systèmes et périphérique tels que les nano-fils, nano-sondes, et les nano-capteurs. En raison de leurs grandes applications d'ingénierie potentielle, il est nécessaire de comprendre le comportement mécanique des nano-poutres qui mène au développement de ces structures. Par conséquent dans ce qui suit une étude de flexion, flambement et de vibration libre va être proposé.

## IV.2 Représentation de la nano-poutre utilisée et les propriétés matérielles

Dans cette partie, on considère une nano-poutre fonctionnellement graduée d'épaisseur  $h$ , de longueur  $L$ , et de largeur  $b$ , obtenue en mélangeant deux matériaux distincts (métal et céramique). La coordonnée  $x$  est le long de la direction longitudinale et  $z$  est le long de la direction d'épaisseur. Pour de telles poutres, l'axe neutre ne peut pas coïncider avec l'axe médian (Ould Larbi et al., 2013; Yahooobi et Feraiidooon, 2010). La force de compression appliquée peut être supposée agir à l'axe médian de la poutre, mais la résultante des contraintes axiales agissent le long de l'axe neutre. La non-coïncidence de la ligne d'action de la résultante des contraintes et de la force de compression appliquée produit un couplage comme est montré schématiquement dans la figure IV.1



**Fig IV.1** La position de l'axe neutre et l'axe médian pour une poutre fonctionnellement graduée

La présente étude vise à examiner la position de l'axe neutre et les caractéristiques de la flexion sous des charges axiales.

Dans ce cas, deux plans de référence différents sont considérés pour la mesure de  $z$ , à savoir,  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  mesurés respectivement à partir de l'axe médian et de l'axe neutre de la poutre ( Fig IV.1) par

$$V = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV-1})$$

Où  $k$  est le paramètre de distribution du matériau, il prend la valeur supérieure ou égale à zéro et  $C$  c'est la distance de l'axe neutre à partir de l'axe médian. Les propriétés matérielles non homogènes d'une poutre fonctionnellement graduée peuvent être obtenus grâce à la règle du mélange de Voigt (Eltaher et al., 2012; Bourada et al., 2012; Larbi Chaht et al., 2014; Tounsi et al., 2013a; Boudierba et al., 2013; Hebali et al., 2014; Zidi et al., 2014; Bakora et Tounsi, 2015; Hamidi et al., 2015; Mahi et al., 2015; Akbaş, 2015; Bennoun et al., 2016; Salima et al. 2016). Ainsi, en utilisant l'équation (IV-1), les propriétés matérielles non homogènes d'une nano-poutre fonctionnellement graduée  $P$ , tels que le module de Young ( $E$ ), le coefficient de poisson ( $\nu$ ), le module de cisaillement( $G$ ), et la densité massique( $\rho$ ), peuvent être obtenues par

$$P(z_{ns}) = (P_t - P_b) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_b \quad (\text{IV-2})$$

Où  $P_t$  et  $P_b$  sont des propriétés matérielles correspondant aux surface supérieurs et inférieurs de la nano-poutre .

La position de l'axe neutre de la nano-poutre fonctionnellement graduée est déterminée pour satisfaire le moment statique en fonction du module de Young étant égale à zéro comme suit (Ould Larbi et al., 2013; Bousahla et al., 2014; Fekrar et al., 2014; Bourada et al., 2015)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Par conséquent, la position de l'axe neutre peut être obtenu par

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (\text{IV-4})$$

### IV.3 Hypothèses de base

Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en se basant sur les hypothèses suivantes

- L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la nano-poutre fonctionnellement graduée
- les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la nano-poutre et, par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont des fonctions de coordonnée  $x$  seulement.

$$w(x, z_{ns}) = w_b(x) + w_s(x) \quad (IV-5)$$

- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligée en comparaison avec des contraintes dans le plan  $\sigma_x$
- Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  est constitué de trois termes le déplacement de la membrane, de la flexion, et du cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (IV-6)$$

La composante de flexion  $u_b$  est supposée être similaire aux déplacements donnés par la théorie classique des poutres. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  peut-être donnée par

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (IV-7)$$

La composante de cisaillement  $u_s$  donne lieu, en conjonction avec  $w_s$ , à une variation sinusoïdal de déformation de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et donc à une contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur de la nano-poutre de telle sorte que cette contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est nulle au niveau des faces supérieure et inférieure de la nano-poutre. Par conséquent, l'expression de  $u_s$  peut être donnée par

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (IV-8)$$

Où

$$f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right) \quad (IV-9)$$

## IV.4 Cinématique



En se basant sur les hypothèses citées si dessus, le champ de déplacement peut-être obtenu en utilisant les équations (IV-5) – (IV-9) comme suit :

$$u(x, z_{ns}, t) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV-10a})$$

$$w(x, z_{ns}, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{IV-10b})$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (IV-10) sont

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \text{ et } \gamma_{xz} = g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \quad (\text{IV-11})$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \text{ et} \\ f'(z_{ns}) &= \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

## IV.5 Les relations constitutives

La réponse des matériaux à l'échelle nano-métrique est différente de ceux de leur volume. Dans la théorie d'élasticité non locale (1972 et 1983), la contrainte à un point de référence est considérée comme une fonctionnelle du champ de déformation à chaque point dans le Corp. Par exemple, dans le domaine de l'élasticité non locale, la loi de comportement uni axiale est exprimée en élasticité d'Eringen (1983)

$$\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E(z_{ns}) \varepsilon_x \quad (\text{IV-13a})$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} = G(z_{ns}) \gamma_{xz} \quad (\text{IV-13b})$$

Et  $\mu = (e_0 a)^2$  est le paramètre non locale révélant l'effet d'échelle nano-métrique sur la réponse des nano-poutre,  $e_0$  est une constante appropriée pour chaque matériau et  $a$  est la

longueur caractéristique interne. En générale , une estimation conservatif du paramètre non locale est  $e_0 a < 2.0 \text{ nm}$  pour un nanotube de carbone à paroi simple (Wang, 2005; Heireche et al., 2008; Tounsi et al., 2013bc; Berrabah et al., 2013; Benguediab et al, 2014; Zidour et al., 2014; Semmah et al., 2014; Bessaim et al., 2015).

## IV.6 Les équations de mouvement

En utilisant la version dynamique du principe des travaux virtuels (Belabed et al., 2014; Draiche et al., 2014; Ait Amar Meziane et al., 2014; Ait Yahia et al., 2015), les équations différentielles de mouvement des nano-poutre fonctionnellement graduée seront obtenus

$$\int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dA dx - \int_0^L \int_A \rho [\ddot{u} \delta u + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dA dx - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx - \int_0^L N_0 \frac{d(w_b + w_s)}{dx} \frac{d\delta(w_b + w_s)}{dx} dx = 0 \quad (\text{IV-14})$$

La collecte des coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  dans l'équation (IV-14), les équations de mouvement sont obtenues par

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{IV-15a})$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q - N_0 \frac{d^2 (w_b + w_s)}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV-15b})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q - N_0 \frac{d^2 (w_b + w_s)}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV-15c})$$

où  $N$ ,  $M_b$ ,  $M_s$  et  $Q$  sont les efforts définis comme

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} (1, z_{ns}, f) \sigma_x dz_{ns} \text{ et} \quad (\text{IV-16})$$

$$Q = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} g \tau_{xz} dz_{ns}$$

Et  $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les inerties massiques définis comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} (1, z_{ns}, f, z_{ns}^2, z_{ns} f, f^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad (\text{IV-17})$$

Quand l'effet de déformation de cisaillement est négligée ( $w_s = 0$ ), les équations d'équilibres dans l'équation (IV-15) recouvre ceux déterminés à partir de la théorie des poutres d'Euler Bernoulli.

En substituant l'équation (IV-11) dans l'équation (IV-13) et les résultats trouvés dans l'équation (IV-16) , les efforts sont obtenus comme

$$N - \mu \frac{d^2 N}{dx^2} = A \frac{du_0}{dx} - B_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{IV-18a})$$

$$M_b - \mu \frac{d^2 M_b}{dx^2} = -D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{IV-18b})$$

$$M_s - \mu \frac{d^2 M_s}{dx^2} = B_s \frac{du_0}{dx} - D_s \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{IV-18c})$$

$$Q - \mu \frac{d^2 Q}{dx^2} = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (\text{IV-18d})$$

Où

$$(A, D, B_s, D_s, H_s) = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} E(z_{ns}) (1, z_{ns}^2, f, z_{ns} f, f^2) dz_{ns}, \quad (IV-19)$$

$$A_s = \int_{-\frac{h-C}{2}}^{\frac{h-C}{2}} G(z_{ns}) g^2 dz_{ns}$$

En substituant l'équation (IV-18) dans l'équation (IV-15), les équations de mouvement non locale peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0, w_b, w_s$ ) comme suit

$$A \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B_s \frac{d^3 w_s}{dx^3} = I_0 \left( \ddot{u}_0 - \mu \frac{d^2 \ddot{u}_0}{dx^2} \right) - I_1 \left( \frac{d \ddot{w}_b}{dx} - \mu \frac{d^3 \ddot{w}_b}{dx^3} \right) - J_1 \left( \frac{d \ddot{w}_s}{dx} - \mu \frac{d^3 \ddot{w}_s}{dx^3} \right) \quad (IV-20a)$$

$$\begin{aligned} -D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2 (w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4 (w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\ = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) + I_1 \left( \frac{d \ddot{u}_0}{dx} - \mu \frac{d^3 \ddot{u}_0}{dx^3} \right) \\ - I_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_b}{dx^4} \right) - J_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_s}{dx^4} \right) \end{aligned} \quad (IV-20b)$$

$$\begin{aligned} B_s \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2 (w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4 (w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\ = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) + J_1 \left( \frac{d \ddot{u}_0}{dx} - \mu \frac{d^3 \ddot{u}_0}{dx^3} \right) \\ - J_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_b}{dx^4} \right) - K_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_s}{dx^4} \right) \end{aligned} \quad (IV-20c)$$

Les équations de mouvement de la théorie des poutres locale peuvent-être obtenues à partir de l'équation (IV-20) en mettant le paramètre non-locale  $\mu$  égale à zéro

## IV.7 Solution analytique d'une nano-poutre fonctionnellement graduée et simplement appuyée

Les équations de mouvement ci-dessus sont analytiquement résolues pour la flexion, le flambement, et les problèmes de vibration libre. La procédure de la solution de Navier est

utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour une nano-poutre fonctionnellement graduée simplement appuyée. La solution est supposée être de la forme

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{bn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{sn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-21})$$

Où  $U_n, W_{bn}$  et  $W_{sn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au mode propre  $n$ , et  $\alpha = n\pi / L$ . La charge transversale  $q$  est également étendu dans la série de Fourier sinus comme suit

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha x, \quad Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (\text{IV-22})$$

Les coefficients de Fourier associés à certaine charges typique sont donnés par

$$Q_n = q_0, \quad n = 1 \text{ pour une charge sinusoidal,} \quad (\text{IV-23a})$$

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, \quad n = 1,3,5,\dots \text{ pour une charge uniforme,} \quad (\text{IV-23b})$$

$$Q_n = \frac{2q_0}{L} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1,2,3,\dots \text{ pour une charge ponctuelle } Q_0 \text{ à mis travée} \quad (\text{IV-23c})$$

En substituant les expansions de  $u_0, w_b, w_s$ , et  $q$  des équations (IV-21) et (IV-22) dans l'équation (IV-20), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_{22} - \xi & S_{23} - \xi \\ S_{13} & S_{23} - \xi & S_{33} - \xi \end{bmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda Q_n \\ \lambda Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

$$\text{Où } S_{11} = A\alpha^2, S_{13} = -B_s\alpha^3, S_{22} = D\alpha^4, S_{23} = D_s\alpha^4, \quad (\text{IV-25})$$

$$S_{33} = H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2, m_{11} = I_0, m_{12} = -I_1\alpha, m_{13} = -J_1\alpha, m_{22} = I_0 + I_2\alpha^2$$

$$, m_{23} = I_0 + J_2\alpha^2, m_{33} = I_0 + K_2\alpha^2,$$

$$\xi = \lambda N_0\alpha^2, \lambda = 1 + \mu\alpha^2$$

## **IV.8 Conclusion**

Dans ce chapitre la flexion, le flambement et la vibration libre d'une nano-poutre fonctionnellement graduée sont étudiés en utilisant une théorie trigonométrique non locale de déformation de cisaillement basé sur la position de l'axe neutre. La procédure de la solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour cette nano-poutre.

# Chapitre V

## *Résultats et Discussions*

## V.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter des exemples numériques pour les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent pour les nano-poutre fonctionnellement graduées.

## V.2 Résultats numériques et interprétations

Dans cette partie les solutions analytiques obtenues dans les sections précédentes sont présentées. Les résultats obtenus sont comparés à ceux calculés indépendamment en se basant sur la théorie des poutres (EBT) et la théorie des poutres de Timoshenko (TBT) pour une large gamme de paramètre non-locale ( $e_0a$ ), le paramètre de distribution de matériau ( $k$ ) et le rapport d'épaisseur ( $L/h$ ). Dans ce qui suit, deux nano-poutres fonctionnellement graduées sont étudiées. La première nano-poutre fonctionnellement graduée possède les propriétés matérielles suivantes :  $E_t = 0.25 \text{ TPa}$ ,  $E_b = 1 \text{ TPa}$ ,  $\nu_t = \nu_b = 0.3$  (Larbi Chaht et al., 2014). La seconde est composée d'acier et de l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). La surface inférieure de la poutre est en acier pur, tandis que la surface supérieure de la poutre est de l'alumine pure. Les propriétés matérielles sont les suivantes :  $E_t = 390 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho_t = 3960 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_b = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_t = \nu_b = 0.3$  (Eltaher et al., 2012). Le facteur de correction de cisaillement est pris égal à  $5/6$  pour la théorie des poutres de Timoshenko. Pour des raisons pratiques, les paramètres adimensionnels suivants sont utilisés :

- $\bar{w} = 100w \frac{E_t I}{q_0 L^4}$  pour une charge uniforme
- $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_t A}{E_t I}}$  paramètre de fréquence
- $\bar{N} = N_{cr} \frac{L^2}{E_t I}$  paramètre critique de charge de flambement

Le tableau (V-1) montre les flexions maximales adimensionnelles d'une nano-poutre fonctionnellement graduée et simplement appuyée soumise à une charge uniforme. Les valeurs calculées sont obtenues en utilisant 100 termes en série dans les équations (IV-21) à (IV-22). Il convient de noter que  $e_0a = 0$  correspond à la théorie des poutres locale. On peut voir que les résultats



de la théorie des poutres présentés en se basant sur la position de la surface neutre sont en excellent accord avec ceux prédits par TBT (Şimşek etYurtçu, 2013) pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur  $L/h$ , paramètre de distribution du matériau  $k$  et le paramètre non-locale  $e_0a$ . Un changement significatif de la flèche maximale est observé en faisant varier le paramètre de distribution du matériau  $k$ . On peut également noter que la flèche maximale augmente avec l'augmentation du paramètre non-locale, ce qui met en évidence l'importance de l'effet non-locale. Il est à noter qu'il n'y a aucun effet du rapport d'épaisseur sur  $\bar{w}$  lorsque la théorie locale EBT est utilisée. Cela est dû à ce que la théorie locale EBT néglige l'effet transversal de la déformation de cisaillement.

**Tab. V.1** : La flèche transversale adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) de la nano-poutre FG pour une charge uniforme

$L/h$	$k$	Nonlocal parameter, $e_0a$ (nm)														
		0			0.5			1			1.5			2		
		EBT <sup>(a)</sup>	TBT <sup>(a)</sup>	Present	EBT <sup>(a)</sup>	TBT <sup>(a)</sup>	Present	EBT <sup>(a)</sup>	TBT <sup>(a)</sup>	Present	EBT <sup>(a)</sup>	TBT <sup>(a)</sup>	Present	EBT <sup>(a)</sup>	TBT <sup>(a)</sup>	Present
10	0	5.2083	5.3383	5.3381	5.3333	5.4659	5.4657	5.7083	5.	5.8485	6.3333	6.4867	6.4865	7.2083	7.3798	7.3796
	0.3	3.1401	3.2169	3.2181	3.2154	3.2938	3.2945	3.4415	3.5245	3.5257	3.8183	3.9090	3.9103	4.3459	4.4472	4.4487
	1	2.3674	2.4194	2.224193	2.4242	2.4772	2.4772	2.5946	2.6508	2.6508	2.8787	2.9401	2.9400	3.2765	3.3451	3.3450
	3	1.8849	1.9249	1.9233	1.9302	1.9710	1.9693	2.0659	2.1091	2.1073	2.2921	2.3393	2.3374	2.6088	2.6615	2.6594
	10	1.5450	1.5799	1.5790	1.5821	1.6176	1.6168	1.6933	1.7310	1.7300	1.8787	1.9190	1.9188	2.1383	2.1843	2.1832
30	0	5.2083	5.2227	5.2228	5.2222	5.2366	5.2367	5.2638	5.2784	5.2784	5.3333	5.3480	5.3480	5.4305	5.4455	5.4455
	0.3	3.1401	3.1486	3.1475	3.1484	3.1570	3.1559	3.1736	3.1822	3.1811	3.2154	3.2241	3.2230	3.2740	3.2829	3.2818
	1	2.3674	2.3732	2.3732	2.3737	2.3795	2.3795	2.3926	2.3985	2.3985	2.4242	2.4301	2.4301	2.4684	2.4744	2.4744
	3	1.8849	1.8894	1.8892	1.8900	1.8944	1.8943	1.9050	1.9095	1.9094	1.9302	1.9347	1.9346	1.9654	1.9700	1.9698
	10	1.5450	1.5489	1.5488	1.5491	1.5530	1.5529	1.5615	1.5654	1.5653	1.5821	1.5860	1.5860	1.6109	1.6149	1.6149
100	0	5.2083	5.2096	5.2096	5.2095	5.2108	5.2109	5.2133	5.2146	5.2146	5.2195	5.2208	5.2209	5.2283	5.2296	5.2296
	0.3	3.1401	3.1408	3.1395	3.1408	3.1416	3.1402	3.1431	3.1438	3.1425	3.1468	3.1476	3.1463	3.1521	3.1529	3.1516
	1	2.3674	2.3679	2.3679	2.3679	2.3685	2.3685	2.3696	2.3702	2.3702	2.3725	2.3730	2.3731	2.3765	2.3770	2.3770
	3	1.8849	1.8853	1.8854	1.8854	1.8858	1.8858	1.8867	1.8871	1.8872	1.8890	1.8894	1.8894	1.8922	1.8926	1.8926
	10	1.5450	1.5453	1.5454	1.5454	1.5457	1.5457	1.5465	1.5468	1.5469	1.5483	1.5487	1.5487	1.5509	1.5513	1.5513

Le tableau (V-2) présente les valeurs pour les charges critiques non-dimensionnelles de flambement calculées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur  $L/h$ , le paramètre de distribution du matériau  $k$  et le paramètre non locale  $e_0a$ . Comme on peut le constater, les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Şimşek et Yurtçu (2013). La charge de flambement diminue lorsque les paramètres non-locale augmentent. Ceci montre l'importance de l'effet non-locale sur la réponse du flambement des poutres. La variation du paramètre de distribution du matériau  $k$  conduit à une modification importante de la charge de flambement. Il est à noter qu'il n'y a aucun effet du rapport d'épaisseur sur les charges critiques de flambement lorsque la théorie locale EBT est utilisée. Cela est dû à ce que la théorie locale EBT néglige l'effet transversal de la déformation de cisaillement.

**Tab.V.2** :La charge critique adimensionnelle de flambement ( $\bar{N}$ ) pour une nano-poutre fonctionnellement graduée.

$L/h$	$k$	Nonlocal parameter, $e_0 a$ (nm)														
		0			0.5			1			1.5			2		
		EBT(a)	TBT(a)	Present	EBT(a)	TBT(a)	Present	EBT(a)	TBT(a)	Present	EBT(a)	TBT(a)	Present	EBT(a)	TBT(a)	Present
10	0	2.4674	2.4056	2.4058	2.4079	2.3477	2.3478	2.2457	2.1895	2.1897	2.0190	1.9685	1.9686	1.7690	1.7247	1.7248
	0.3	4.0925	3.9921	3.9906	3.9940	3.8959	3.8946	3.7249	3.6335	3.6322	3.3488	3.2667	3.2655	2.9341	2.8621	2.8611
	1	5.4282	5.3084	5.3086	5.2975	5.1805	5.1808	4.9406	4.8315	4.8317	4.4418	4.3437	4.3440	3.8918	3.8059	3.8061
	3	6.8176	6.6720	6.6780	6.6534	6.5113	6.5172	6.2051	6.0727	6.0781	5.5787	5.4596	5.4645	4.8879	4.7835	4.7879
	10	8.3176	8.1289	8.1338	8.1173	7.9332	7.9379	7.5704	7.3987	7.4031	6.8062	6.6518	6.6558	5.9633	5.8281	5.8316
30	0	2.4674	2.4603	2.4604	2.4606	2.4536	2.4537	2.4406	2.4336	2.4337	2.4079	2.4011	2.4012	2.3637	2.3570	2.3570
	0.3	4.0925	4.0811	4.0826	4.0813	4.0699	4.0714	4.0481	4.0368	4.0383	3.9940	3.9828	3.9843	3.9205	3.9096	3.9110
	1	5.4282	5.4146	5.4147	5.4134	5.3998	5.3999	5.3694	5.3559	5.3560	5.2975	5.2843	5.2843	5.2001	5.1871	5.1872
	3	6.8176	6.8011	6.8018	6.7989	6.7825	6.7832	6.7436	6.7273	6.7280	6.6534	6.6373	6.6380	6.5311	6.5153	6.5160
	10	8.3176	8.2962	8.2968	8.2949	8.2735	8.2741	8.2274	8.2062	8.2068	8.1173	8.0964	8.0970	7.9681	7.9476	7.9482
100	0	2.4674	2.4667	2.4668	2.4667	2.4666	2.4666	2.4649	2.4643	2.4643	2.4619	2.4613	2.4613	2.4576	2.4570	2.4571
	0.3	4.0925	4.0915	4.0933	4.0915	4.0905	4.0923	4.0885	4.0874	4.0893	4.0834	4.0824	4.0843	4.0764	4.0754	4.0772
	1	5.4282	5.4270	5.4271	5.4269	5.4257	5.4257	5.4229	5.4217	5.4217	5.4162	5.4150	5.4150	5.4069	5.4057	5.4057
	3	6.8176	6.8161	6.8162	6.8159	6.8144	6.8145	6.8108	6.8094	6.8095	6.8025	6.8010	6.8011	6.7908	6.7893	6.7894
	10	8.3176	8.3157	8.3158	8.3155	8.3136	8.3136	8.3094	8.3075	8.3076	8.2992	8.2972	8.2973	8.2849	8.2830	8.2831

<sup>(a)</sup>Şimşek and Yurtçu (2013)

Le tableau (V-3) présente les fréquences fondamentales adimensionnelles tout en faisant varier le paramètre non-locale et le paramètre de distribution du matériau pour un rapport d'épaisseur de 10, 30 et 100 respectivement. Les propriétés matérielles de la nano-poutre fonctionnellement graduée sont en accord avec ceux utilisées par Eltaher et al. (2012). Les présents résultats sont comparés à ceux calculés en utilisant à la fois EBT et TBT où un excellent accord est observé avec la TBT. A partir des résultats obtenus, on peut voir que la fréquence fondamentale adimensionnelle est réduite avec l'augmentation du paramètre non-locale et le paramètre de distribution du matériau.

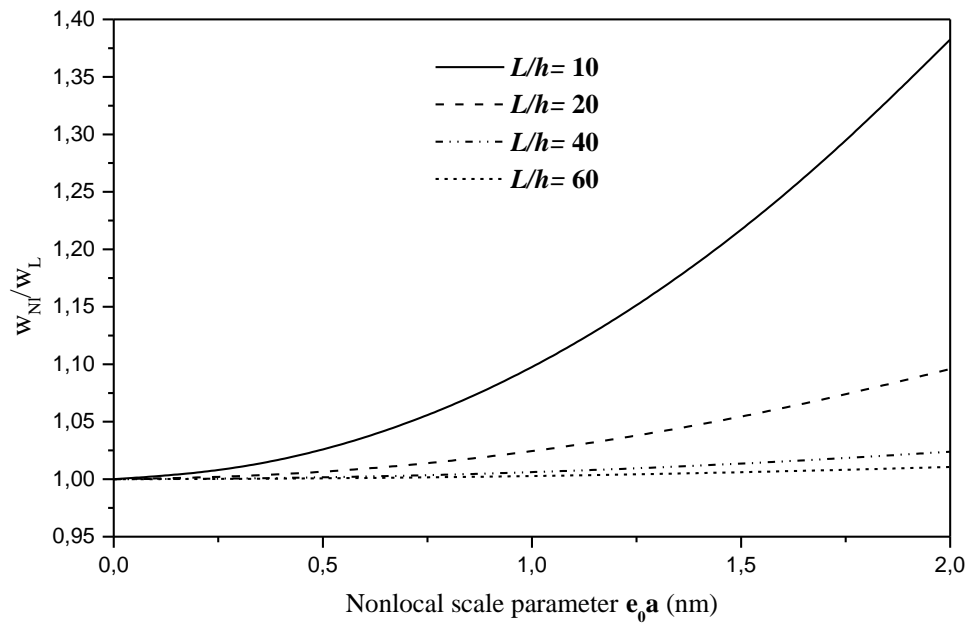
**Tab.V.3** : La fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) pour une nano-poutre fonctionnellement graduée

$L/h$	$k$	Nonlocal parameter, $e_0 a$ (nm)														
		0			0.5			1			1.5			2		
		EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present
10	0	9.8293	9.7075	9.7077	9.7102	9.5899	9.5901	9.3774	9.2612	9.2614	8.8915	8.7813	8.7815	8.3228	8.2196	8.2198
	0.3	8.2694	8.1700	8.1710	8.1692	8.0711	8.0720	7.8892	7.7944	7.7954	7.4804	7.3905	7.3914	7.0019	6.9178	6.9187
	1	6.9650	6.8814	6.8816	6.8807	6.7981	6.7982	6.6448	6.5651	6.5652	6.3005	6.2249	6.2250	5.8975	5.8267	5.8268
	3	6.1575	6.0784	6.0755	6.0829	6.0048	6.0019	5.8744	5.7990	5.7962	5.5700	5.4985	5.4958	5.2137	5.1468	5.1443
	10	5.6544	5.5794	5.5769	5.5859	5.5118	5.5093	5.3945	5.3229	5.3205	5.1150	5.0470	5.0448	4.7878	4.7242	4.7221
30	0	9.8651	9.8511	9.8511	9.8516	9.8376	9.8376	9.8114	9.7975	9.7975	9.7456	9.7318	9.7318	9.6556	9.6419	9.6419
	0.3	8.3015	8.2901	8.2902	8.2902	8.2787	8.2789	8.2564	8.2450	8.2451	8.2010	8.1897	8.1898	8.1252	8.1140	8.1141
	1	6.9929	6.9832	6.9833	6.9833	6.9737	6.9737	6.9548	6.9453	6.9453	6.9082	6.8987	6.8987	6.8444	6.8349	6.8350
	3	6.1806	6.1715	6.1712	6.1722	6.1631	6.1627	6.1470	6.1380	6.1376	6.1058	6.0968	6.0964	6.0494	6.0405	6.0401
	10	5.6744	5.6658	5.6655	5.6667	5.6581	5.6578	5.6436	5.6350	5.6347	5.6057	5.5972	5.5969	5.5540	5.5455	5.5452
100	0	9.8692	9.8679	9.8679	9.8680	9.8667	9.8667	9.8643	9.8631	9.8631	9.8583	9.8570	9.8570	9.8498	9.8485	9.8485
	0.3	8.3052	8.3042	8.3042	8.3042	8.3031	8.3032	8.3011	8.3001	8.3001	8.2960	8.2950	8.2950	8.2889	8.2878	8.2878
	1	6.9961	6.9952	6.9952	6.9952	6.9943	6.9943	6.9926	6.9917	6.9917	6.9883	6.9874	6.9874	6.9823	6.9814	6.9814
	3	6.1833	6.1825	6.1824	6.1825	6.1817	6.1817	6.1802	6.1794	6.1794	6.1764	6.1756	6.1756	6.1711	6.1703	6.1703
	10	5.6767	5.6760	5.6759	5.6761	5.6753	5.6752	5.6740	5.6732	5.6731	5.6705	5.6697	5.6697	5.6656	5.6648	5.6648

En générale, l'effet des déformations de cisaillement transversales et le paramètre non-locale est d'augmenter les flèches et de réduire les charges de flambements ainsi que les fréquences naturelles, comme on peut le voir d'après les résultats présentés dans les tableaux (V-1), (V-2) et (V-3). L'augmentation du paramètre de distribution du matériau conduit à une diminution à la fois des flèches adimensionnelles et des fréquences fondamentales contrairement à la charge adimensionnelle de flambement. Ceci est du au fait que l'augmentation du paramètre de distribution du matériau mène à une augmentation de la raideur de la nano-poutre fonctionnellement graduée.

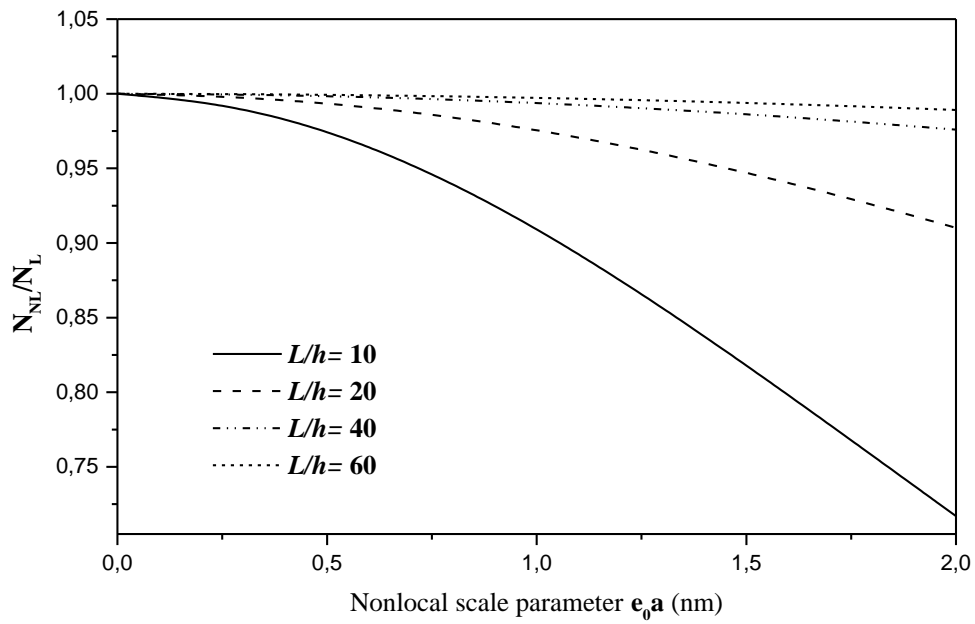
Les résultats numériques sont représentés graphiquement sur les figures (V-1) jusqu'au (V-6), en utilisant la théorie actuelle et les propriétés matérielles de la nano-poutre fonctionnellement graduée sont conformément à ceux utilisés par Eltahir et al. (2012). La figure (V-1) représente les effets du paramètre d'échelle non-locale sur la flèche adimensionnelle de la nano-poutre fonctionnellement graduée pour différent rapports d'épaisseur.  $w_{NL}$  et  $w_L$  représentent respectivement la flèche non-locale et la flèche locale. On peut également voir que la déformation augmente avec le paramètre d'échelle non locale.

En outre, il peut être trouvé à partir des résultats que l'effet de non-localité est plus important pour les faibles valeurs de rapport d'épaisseur ( $L/h$ ), et cet effet est tout à fait négligeable pour de longues nano-poutres fonctionnellement graduées.

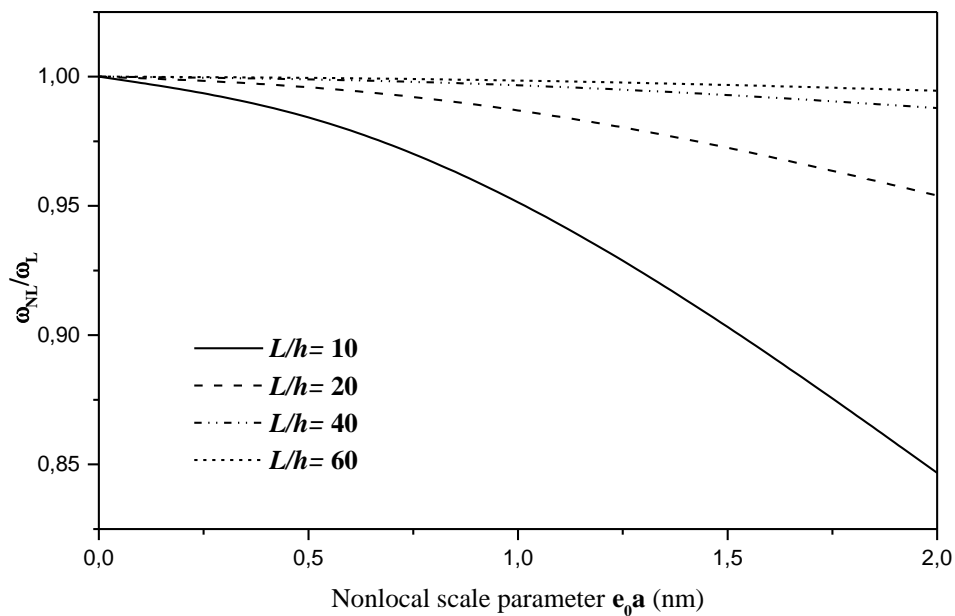


**Fig.(V-1) :** l'effet du paramètre non-locale sur la flèche pour une charge uniforme avec différents rapport d'épaisseur( $k = 1$ )

L'effet du paramètre d'échelle non locale sur le flambement et les réponses dynamiques de la nano-poutre fonctionnellement graduée est démontré dans les figures (V-2) et (V-3), respectivement. Ces figures montrent que les réponses varient non linéairement avec le paramètre d'échelle non-locale. On peut observer que le paramètre d'échelle-non locale affecte fortement les charges de flambement adimensionnelles et les fréquences naturelles. Aussi, il peut être observé que lorsque le rapport d'épaisseur est faible, les effets d'échelles sont importants. Cependant, les effets d'échelles sur la charge critique du flambement et la fréquence fondamentale à la fois, démuniront l'augmentation du rapport d'épaisseur. Ce qui implique que les effets d'échelles sur les propriétés dynamiques et de flambement ne sont pas évident pour les nano-poutre fonctionnellement graduées énoncées mais ils doivent être pris en compte pour les courtes nano-poutres fonctionnellement graduées



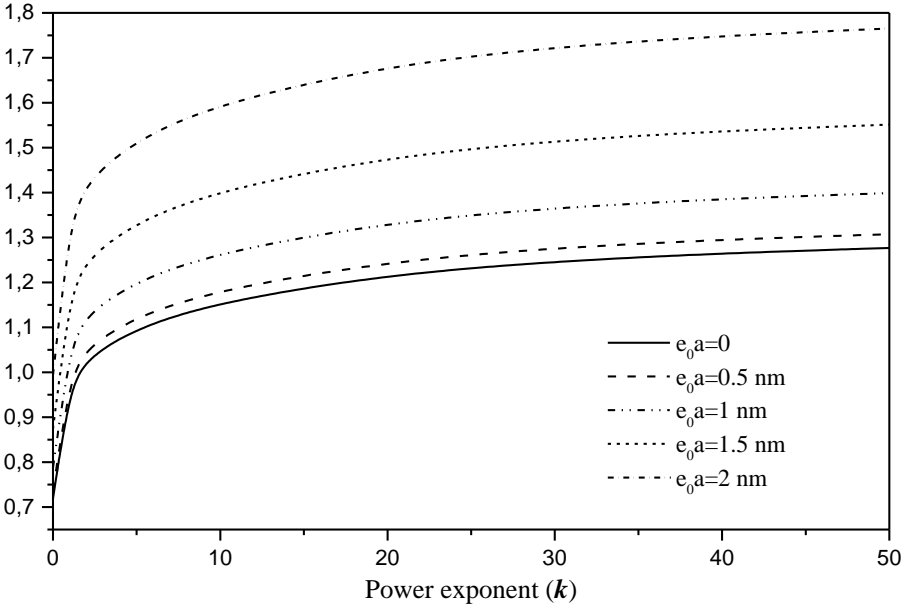
**Fig.(V-2) :** L'effet du paramètre non-locale sur la charge de flambement pour une nano-poutre fonctionnellement graduée avec différents rapports d'épaisseurs ( $k=1$ )



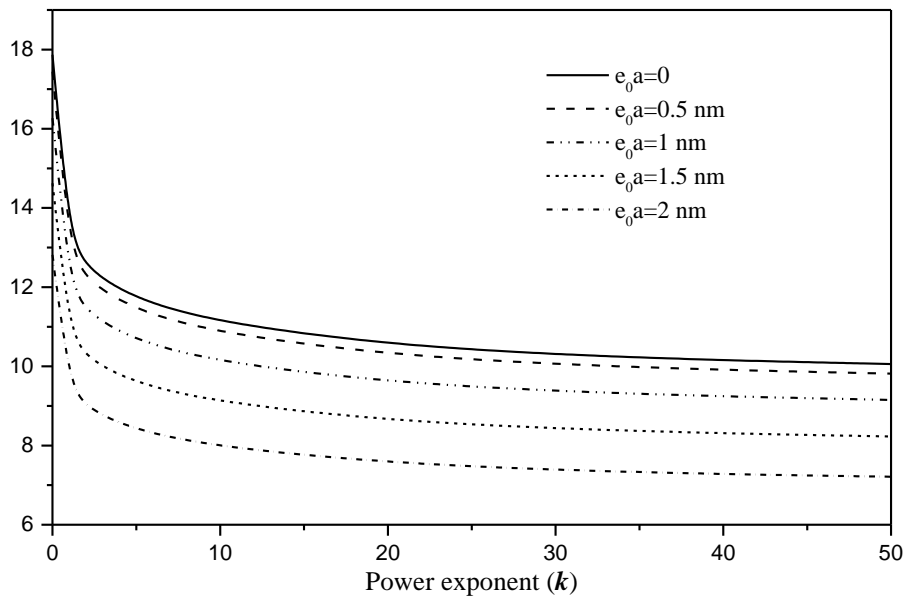
**Fig.(V-3) :** L'effet du paramètre non-locale sur la fréquence fondamentale pour une nano-poutre fonctionnellement graduée avec différents rapports d'épaisseurs ( $k=1$ ).



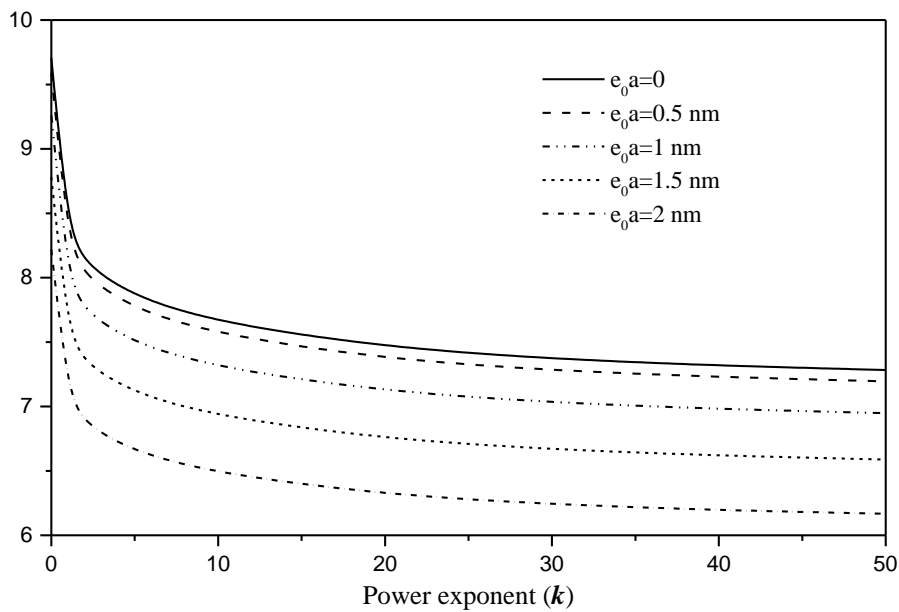
L'influence du paramètre de distribution du matériau sur la flèche adimensionnelle, la charge de flambement et la fréquence fondamentale de la nano-poutre fonctionnellement graduée est présentée dans les figures (V-4) à (V-6), pour différentes valeurs du paramètre non-locale et avec  $L/h=10$ . On peut constater à la fois que la charge de flambement adimensionnelle et les fréquences fondamentales diminuent tandis que la flèche adimensionnelle augmente lorsque le paramètre de distribution du matériau augmente. Ceci est dû au fait que l'augmentation du paramètre de distribution du matériau produit une diminution de la rigidité de la nano-poutre fonctionnellement graduée.



**Fig.(V-4) :** Effet du paramètre de distribution du matériau sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) pour une charge uniforme avec  $L/h = 10$



**Fig.(V-5) :**Effet du paramètre de distribution du matériau sur la charge de flambement adimensionnelle ( $\bar{N}$ ) avec  $L/h = 10$



**Fig.(V-6) :**Effet du paramètre de distribution du matériau sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec  $L/h = 10$

Finalement, la réponse mécanique de la nano-poutre fonctionnellement graduée est effectuée en utilisant la présente théorie et d'autres théories non-locale des poutres car dans

ces théories, l'interaction des atomes entre eux est incorporé dans les équations de mouvement par le soit disant le paramètre à petit échelle. D'ailleurs, l'effet des liaisons inter-atomiques sur le comportement vibratoire des poutres tel-que les nano-structures est pris en compte par un paramètre à petite échelle sans difficulté sérieuse pour résoudre les équations (Peddieson et al., 2003). En outre l'applicabilité et la fiabilité de ces théories des poutres non-locale sont justifiées par plusieurs auteurs tels que Wang et Hu (2005), Harik (2001 et 2002) et Tounsi et al. (2013). Harik (2001 et 2002) a rapporté des gammes d'application pour le modèle continu des poutres dans la mécanique des nano-tubes de carbone et des nano-tiges. Wang et Hu (2005) présentent une étude rigoureuse, dans laquelle ils vérifient la validité du modèle des poutres dans l'étude des ondes de flexion, simulées par la dynamique moléculaire (MD), en une seule nano-tube de carbone. Tounsi et al. (2013) ont étudié la charge critique de flambement et les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés à partir de la simulation MD.

### **V.3 Conclusion**

Une théorie trigonométrique non- locale de déformation de cisaillement des nano-poutres y compris le concept de la position de la surface neutre a été utilisée pour étudier la flexion, le flambement et la vibration d'une nano-poutre fonctionnellement graduée et simplement appuyée.

Le présent modèle est capable de considérer en même temps l'effet du paramètre d'échelle et les effets de déformation de cisaillement pour une nano-poutre fonctionnellement graduée. Les calculs obtenus montrent que l'augmentation du paramètre de distribution du matériau mène à l'augmentation de la raideur de la nano-poutre fonctionnellement graduée, ainsi l'effet de non-localité est plus important pour les faibles valeurs de rapport d'épaisseur  $L/H$ .

A decorative orange scroll graphic with rounded corners and a vertical strip on the left side, resembling a rolled-up document. The text is centered on the scroll.

# *Conclusion générale*

## Conclusion générale

---

Une théorie trigonométrique non-locale de déformation de cisaillement des poutres basée sur la position de la surface neutre est proposée pour la flexion, le flambement, et la vibration libre des nano-poutres fonctionnellement graduées. Le présent modèle est capable de capturer à la fois l'effet d'échelle et les effets de déformation de cisaillement pour une nano-poutre fonctionnellement graduée, et ne nécessite pas des facteurs de correction de cisaillement. En outre, le champ de déplacement proposé dans la présente théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux sont constitués des composants de flexion et de cisaillement dans le quelle les composants de flexion ne contribuent pas vers les forces de cisaillement et, de même, les composants de cisaillement ne contribuent pas vers les moments de flexion. En se basant sur les relations constitutives différentielles non-locales d'Eringen et le concept de la surface neutre, les équations non-locale de mouvement de la théorie proposée sont tirées du principe d'Hamilton. Il n'ya pas l'effet de couplage étirement flexion dans la formulation basée sur la surface neutre, et par conséquent, les équations régissantes et les conditions au limites des nano-poutres fonctionnellement graduées basées sur la surface neutre ont les formes simples comme celles des nano-poutres isotropes. Des exemples numériques montrent que la présente théorie donne des solutions qui sont presque identiques à ceux générées par la TBT. Les résultats obtenus montrent que le paramètre de distribution de matériau peut être manipulé pour changer la flèche maximale, pour choisir une fréquence de conception spécifique et pour maximiser la charge critique de flambement. Il est également montré que, le paramètre non-locale a un effet notable sur la flèche, les fréquences fondamentales et le flambement des nano-poutres fonctionnellement graduées. Ce modèle peut être utilisé dans l'analyse et la conception des nano-poutres, tels que les nano-capteurs et les nano-actionneurs.

An orange scroll graphic with a gradient from light to dark orange, featuring rounded corners and a vertical strip on the left side that looks like a scroll binding. The text is centered on the scroll.

# *Références bibliographiques*

## Références bibliographiques

---

Adda Bedia, W., Benzair, A., Semmah, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On the thermal buckling characteristics of armchair single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal continuum elasticity”, *Braz.J.Phys.*, **45**, 225-233.

Akbaş, Ş.D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, **19**(6), 1421-1447.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53**(6), 1143-1165.

Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos.Struct.*, **125**, 621-630.

Aissani, K., Bachir Bouiadjra, M., Ahouel, M., Tounsi, A. (2015), “A new nonlocal hyperbolic shear deformation theory for nanobeams embedded in an elastic medium”, *Struct.Eng.Mech.*, **55**(4), 743-762.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16**(3), 293–318.

Amara, K., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), “Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field”, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3933–3942.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 187-212.

- Bagdatli, S.M. (2015), "Non-linear transverse vibrations of tensioned nanobeams using nonlocal beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **55(2)**, 281-298.
- Bakora, A., Tounsi, A., (2015), "Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, **56(1)**, 85-106.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.
- Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel and Composite Structures*, **18(4)**, 1063-1081.
- Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams" *Steel and Composite Structures*, **19(3)**, 521-546.
- Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M., Semmah, A. (2014), "Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes", *Composites Part B*, **57**, 21 – 24.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23(4)**, 423 – 431.
- Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. and Boumia, L. (2008), "The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **41**, 225404.
- Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A., Adda Bedia, E.A. (2013), "Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams", *Structural Engineering and Mechanics*, **48(3)**, 351 – 365.
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Bernard, F., Tounsi, A. (2015), "A nonlocal quasi-3D trigonometric plate model for free vibration behaviour of micro/nanoscale plates", *Structural Engineering and Mechanics*, **56(2)**, 223 – 240.



Besseghier, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Benzair, A. (2015), “Nonlinear vibration properties of a zigzag single-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix”, *Advances in Nano Research*, **3**(1), 29-37.

Bishop, A, LIN, C. Y., Navaratnam, M., Rawlings, R.D., Mshane, H. B., A (1993),“Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process”, *Journal of Materials Science Letters*”, Vol. 12, p.15-16-18.

Boch .p, Chrtier. Huttepain .M (1986) , “Tape casting of  $al_2O_3/ZRO_2$ ” , *Laminated Composite*.

Boch .p,Chrtier.huttepain.M (1987) , “Tape casting of layered composite, in processing of advanced ceramics”, *edited by moya and aza sociedad Espanola de ciramica y vidrio*

Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18**(6), 1493 – 1515.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14**(1), 85 – 104.

Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409 – 423.

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, **11**(6), 1350082.

- Chong, ACM, Yang, F., Lam, DCC, Tong, P. (2001), “Torsion and bending of micron-scaled structures”, *J Mater Res*, **16(4)**, 1052–1058.
- Dai, H., Hafner, J.H., Rinzler, A.G., Colbert, D.T., Smalley, R.E. (1996), “Nanotubes as nanoprobe in scanning probe microscopy”, *Nature*, **384**, 147.
- Darilmaz, K., (2015), “Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 395 – 408.
- Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.
- Ebrahimi, F., Dashti, S. (2015),” Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam”, *Steel and Composite Structures*, **19(5)**, 1279 – 1298.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. (2012), “Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams”, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 7406–7420.
- Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, *Int. J. Eng. Sci.*, **10**, 1–16.
- Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *J. Appl. Phys.*, **54**, 4703–4710.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795 – 810.
- Fleck, NA., Muller, G.M., Ashby, M.F., Hutchinson, J.W. (1994), “Strain gradient plasticity: theory and experiment”, *Acta Metall Mater*, **42(2)**, 475–487.
- Fu, Y., Du, H., Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, *Mater Lett.*, **57(20)**, 2995–2999.
- Génevaux, J.M., Deslandes, S., Durand, S., Gautier, F. (2011), “théorie des poutres (résistance des matériaux)”, ENSIM 2A ; cel-00611692, version 1
- Hajnayeb, A., Khadem, S.E. (2015), “An analytical study on the nonlinear vibration of a double walled carbon nanotube”, *Structural Engineering and Mechanics*, **54(5)**, 987 – 998.

- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, **18(1)**, 235 – 253.
- Harik, V.M. (2001), “Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods“, *Solid. State. Commun.*, 120, 331 – 335.
- Harik, V.M. (2002), “Mechanics of carbon nanotubes: applicability of the continuum-beam models“, *Comput. Mater. Sci.*, **24**, 328 – 342.
- Hasanyan, D.J., Batra, R.C., Harutyunyan, S. (2008), “Pull-In instabilities in functionally graded microthermoelectromechanical systems”, *Journal of Thermal Stresses*, **31**, 1006-1021.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, **140**, 374 – 383.
- Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Adda Bedia, E.A. (2008), “Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity”, *Physica E*, **40**, 2791.
- Janghorban, M., Zare, A. (2011), ‘Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes with variable thickness by differential quadrature method”, *Physica E.*, **43**, 1602–1604.
- Kar, V.R., Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel and Composite Structures*, **18(3)**, 693-709.
- Kawai, C., Wakamatsu, S., Sakagami, S., Igarashi, T. (1990), “ Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan* , p. 77-82.
- Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *International Journal of Computational Methods*, **11(5)**, 135007.

- Kolahchi, R, Bidgoli, A.M.M., Mehdi Heydari, M. (2015), “Size-dependent bending analysis of FGM nano-sinusoidal plates resting on orthotropic elastic medium”, *Structural Engineering and Mechanics*, **55(5)**, 1001 – 1014.
- Koizumi. M (1996) , “FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry”,*Ryukoku University Japan, Ohtsu* 520-21.
- Lam, DCC, Yang, F., Chong, ACM, Wang, J., Tong, P. (2003), “Experiments and theory in strain gradient elasticity”, *J Mech Phys Solids*, **51(8)**, 1477–1508.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 425 – 442.
- Lee, Z., Ophus, C., Fischer, L., Nelson-Fitzpatrick, N., Westra, KL., Evoy, S., et al. (2006), “Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al–Mo films”, *Nanotechnology*, **17(12)**, 3063–3070.
- Levinson, M., (1981), “A new rectangular beam theory”, *J. Sound Vib.*, **74**, 81.
- Lourie, O., Cox, D.M., Wagner, H.D. (1998), “Buckling and collapse of embedded carbon nanotubes”, *Physical Review Letters*, **81**, 1638.
- Lu, C., Wu, D., Chen, W. (2011), “Non-linear responses of nano-scale FGM films including the effects of surface energies”, *IEEE Trans Nanotechnol*, **10(6)**, 1321–1327.
- Lu, P., Lee, H.P., Lu, C., Zhang, P.Q. (2006), “Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model”, *J. Appl. Phys.*, **99**, 073510.
- Lu, P., Lee, H.P., Lu, C., Zhang, P.Q. (2007), “**Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes**“, *Int. J. Solids Struct.*, **44**, 5289–5300.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), ”A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.

- Mistler, R.E. (1973), “High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple- Layer Casting Technique”, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.
- Mohammadi-Alasti, B., Rezazadeh, G., Borgheei, A.M., Minaei, S., Habibifar, R. (2011), “On the mechanical behavior of a functionally graded micro-beam subjected to a thermal moment and nonlinear electrostatic pressure”, *Compos. Struct.*, **93**, 1516–1525
- Moya, J. S., Sanchez-herencia, A. J., Requena, J. & Moreno, R. (1992) ,“Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting”, *Materials Letters*, Vol.14, p.333-35.
- Murmu, T., Pradhan, S.C. (2009a), “Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM”, *Physica E*, **41**, 1232 – 1239.
- Murmu, T., Pradhan, S.C. (2009b), “Small-scale effect on the vibration of nonuniform nanocantilever based on nonlocal elasticity theory”, *Physica E*, **41**, 1451 – 1456.
- Murmu, T., Pradhan, S.C. (2009c), “Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory”, *Comp. Mater. Sci.*, **46**, 854 – 869.
- Nami, M.R., Janghorban, M. (2013), “Static analysis of rectangular nanoplates using trigonometric shear deformation theory based on nonlocal elasticity theory”, *Beilstein J. Nanotechnol.*, **4**, 968–973.
- Ould Larbi, L, Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **41**, 421–433.
- Peddieson, J., Buchanan, G.R., McNitt, R.P. (2003), “Application of nonlocal continuum models to nanotechnology”, *Int. J. Eng. Sci.*, **41**, 305–312.
- Pour, H.R., Vossough, H., Heydari, M.M., Beygipoor, G., Azimzadeh, A. (2015), “Nonlinear vibration analysis of a nonlocal sinusoidal shear deformation carbon nanotube using differential quadrature method”, *Structural Engineering and Mechanics*, **54(6)**, 1061 – 1073.

- Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, MH, Ahmadian, MT. (2009), “Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials”, *In: 3<sup>rd</sup> International conference on micro- and nanosystems*, 539-544.
- Reddy, J.N. (2007), “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”, *Int. J. Eng. Sci.*, **45**, 288 – 307.
- Reddy, J.N., Pang, S.D. (2008), “Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes”, *J. Appl. Phys.*, **103**, 023511.
- Roque, C.M.C., Ferreira, A.J.M., Reddy, J.N. (2011), “Analysis of timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method“, *Int. J. Eng. Sci.*, **49**, 976 – 984.
- Salima, A., Fekrar, A., Heireche, H., Saidi, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2016), “An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Wind and Structures*, (Accepted).
- Sarkar, P., Nicholson, P. S. (1996), “ Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics”, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.
- Steffens, H. D., Dvorak, M. , WeweL, M. (1990), “ Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM” *Sendai-Japan* , p. 139-43.
- Stolken, J.S., Evans, A.G. (1998), “A microbend test method for measuring the plasticity length scale”, *Acta Mater*, **46(14)**, 5109–5115.
- Semmah, A., Tounsi, A., Zidour, M., Heireche, H., Naceri, M. (2015), “Effect of chirality on critical buckling temperature of a zigzag single-walled carbon nanotubes using nonlocal continuum theory”, *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*, 23, 518 – 522.
- Şimşek, M. and Yurtçu, H.H. (2013), “Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory”, *Compos. Struct.*, **97**, 378-386.

- Sobhy, M. (2015), “A comprehensive study on FGM nanoplates embedded in an elastic medium”, *Composite Structures*, **134**, 966–980.
- Sudak, L.J. (2003), “Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics”, *J. Appl. Phys.*, **94**, 7281–7287.
- Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M., Tounsi, A. (2015), “On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel and Composite Structures*, 19(5), 1259-1277.
- Takahashi, M., Itoh, Y. & Kashiwaya, H. (1990), “Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan* , p. 129-34.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013a), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A, Zidour, M. (2013b), “Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes”, *Advances in Nano Research*, **1(1)**, 1 – 11.
- Tounsi, A, Semmah, A., Bousahla, A.A. (2013c), “Thermal buckling behavior of nanobeams using an efficient higher-order nonlocal beam theory”, *ASCE Journal of Nanomechanics and Micromechanics*, **3**, 37–42.
- Wang, Q., Varadan, V.K. (2006), “Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics”, *Smart Mater. Struct.*, **15**, 659.
- Wang, Q. (2005), “Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics”, *J. Appl. Phys.*, **98**, 124301.
- Wang, L.F., Hu, H.Y. (2005), “Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes”, *Phys. Rev. B.*, **71**, 195412.
- Williams, J.C. (1976), “Doctor-Blade Process, in *Treatise on Materials Science and Technology*”, *New York:Academic Press*, p. 173-98.

Witvrouw, A., Mehta, A. (2005), “The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications”, *Mater Sci Forum.*, **492**, 255–260.

Yahoobi, H., and Feraidoon, A. (2010), “Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load”, *World Applied Sciences Journal*, **10(3)**, 337 – 341.

Yuki, M., Murayama, T., Irisawa, T. (1991), “ Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan* , p. 203-208.

Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, **54(4)**, 693-710.

Zenkour, A.M., Abouelregal, A.E. (2015), “Thermoelastic interaction in functionally graded nanobeams subjected to time-dependent heat flux”, *Steel and Composite Structures*, **18(4)**, 909 – 924.

Zhang, J., Fu, Y. (2012), “Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory”, *Meccanica*, **47**, 1649 – 1658.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34.

Zidour, M., Daouadji, T.H., Benrahou, K.H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Hadji, L. (2014), “Buckling analysis of chiral single-walled carbon nanotubes by using the nonlocal Timoshenko beam theory”, *Mechanics of Composite Materials*, **50(1)**, 95 – 104.



