

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES
Laboratoire Structures & Matériaux Avancés dans
le Génie Civil & Travaux Publics



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

MEKSI Abdeljalil

Sujet de thèse

**Comportement Mécanique des Plaques Sandwiches
sur Fondations Elastiques**

Soutenue le -----

Devant le Jury composé de :

Mr. A. TOUNSI	Professeur	UDL-SBA	Président
Mr. S. BENYOUCEF	MC A	UDL-SBA	Directeur de thèse
Mr. S.A MEFTAH	Professeur	UDL-SBA	Examineur
Mr. R.YEGHNEM	MC A	U de SAIDA	Examineur
Mr. H. AIT ATMANE	MC A	U. de CHLEF	Examineur
Mr. LAZREG HADJI	MC A	U. de TIARET	Examineur
Mr. M. SID AHMED HOUARI	MCA	U. de MASCARA	Invité

Année universitaire: 2015-2016

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Mr **Benyoucef Samir**, maître de conférence classe A, de m'avoir confié un sujet de recherche passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et indéfectible, et son soutien amical m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma gratitude et ma reconnaissance à M^r **Abdelouahed TOUNSI** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Enfin, sur un plan plus personnel, une pensée à mes parents, mon frère et ma sœur qui m'ont toujours encouragé en m'apportant leur soutien toute au long de ces années d'études, ainsi une grande partie de cette thèse leur revient.

Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques du premier ordre basée sur la position exacte de la surface neutre est développée pour la flexion et la vibration des plaques fonctionnellement graduées (FGM). La plaque est supposée simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. En divisant le déplacement transversal en deux composante l'une de flexion et l'autre de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations de la présente théorie est réduit ce qui rend la théorie simple à utiliser. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe Hamilton et le concept de la surface neutre. L'utilisation du concept de la surface neutre élimine le couplage flexion-membrane, et par conséquent, les équations et conditions aux limites de cette théorie ont la même forme des plaques isotropes. Des résultats numériques de la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature basés sur la théorie du premier ordre et d'ordre élevé. A partir de cette comparaison, il ressort que cette théorie est simple et précise pour étudier la réponse en flexion et en vibration des plaques en FGM.

Mots clés : Vibration, FGM, Théorie des plaques, fondation élastique, position de la surface neutre

Abstract.

In this work, a novel simple first-order shear deformation plate theory based on neutral surface position is developed for bending and free vibration analysis of functionally graded plates and supported by either Winkler or Pasternak elastic foundations. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. The governing equations are derived by employing the Hamilton's principle and the physical neutral surface concept. There is no stretching–bending coupling effect in the neutral surface-based formulation, and consequently, the governing equations and boundary conditions of functionally graded plates based on neutral surface have the simple forms as those of isotropic plates. Numerical results of present theory are compared with results of the traditional first-order and the other higher-order theories reported in the literature. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the static bending and free vibration behaviors of functionally graded plates.

Keywords: vibration; bending; FGM; plate theory; elastic foundation; neutral surface position

ملخص

في هذا العمل ، وضعت نظرية الإنحناء و الإهتزاز جديدة للتشوه عن طريق القص من الدرجة الأولى خاصة بالصفائح و ذلك بالاعتماد على الطبقة الوسطى للوحات المتدرجة وظيفيا (FGM) .

ثم الإفتراض أن اللوحة مسندة و موضوعة على اساس مرن من نوع وينكلار- باستارناك. بتقسيم التغير الموضعي العرضي إلى مركبتين الأولى خاصة بالإنحناء و الثانية بالقص، عدد المجاهيل و المعادلات في هذه النظرية مختصر مما يجعل النظرية بسيطة الإستعمال.

معادلات التوازن تم الحصول عليها باستعمال مبدأ هاميلتون و مفهوم الطبقة الوسطى.

إستعمال مفهوم على الطبقة الوسطى يلغي إقتران الإنحناء-العشاء، و بالتالي فإن المعادلات و الشروط الحدية لهذه النظرية يكون لهم نفس الشكل للصفائح ذات الخواص الموحدة.

النتائج العددية لهذه النظرية ثم مقارنتها مع النتائج المتحصل عليها سابقا و ذلك بالإعتماد على نظرية من الدرجة الأولى و نظرية من الدرجة العالية. استنادا إلى هذه المقارنة ، يتم استنتاج أن هذه النظرية بسيطة و دقيقة لدراسة التجارب عند الانحناء و عند الإهتزاز لهذه الصفائح (FGM).

كلمات مفتاح: إهتزاز، صفائح متدرجة وظيفيا، نظرية الصفائح، أساس مرن، وضعية الطبقة الوسطى.

TABLE DES MATIERES

Résumé

Abstract

Table des Matières

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Liste des Notations

	INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I	GENERALITES SUR LES FGM	
I.1	Introduction	03
I.2	Idée Générale	03
I.3	Propriétés Effectives Des Matériaux A Gradient Fonctionnel	05
I.3.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	08
I.3.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	09
I.3.3	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	11
I.4	I-4 Comparaison Des Matériaux Types FGM Et Les Matériaux Composites Traditionnels	
I.5	Conclusion	13
CHAPITRE II	RAPPEL SUR LA THEORIE DES PLAQUES	
II.1	Introduction	14
II.2	Définitions et Hypothèses	14
II.3	Les théories de déformation des plaques	15
II.3.1	Théorie classique des plaques (CPT)	15
II.3.2	Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT)	16
II.3.3	Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT)	17
II.3.3.1	Théorie des plaques du second ordre	17
II.3.3.2	Théorie des plaques du troisième ordre	18
II.4	Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques	22
CHAPITRE III	REVUE SUR LES TRAVAUX REALISES SUR LES STRUCTURES FGM	
III.1	Introduction	23
III.2	Théories ESL	24
III.2.1	Modèle CPT	24

III.2.2	Modèle FSDT	27
III.2.3	Modèle TSDT	31
III.2.4	Modèles HSDT	34
III.2.4.1	Modèles basés sur la fonction Polynomiale	35
III.2.4.2	Modèles basés sur la fonction non Polynomiale	36
III.2.5	Théories Simplifiées	38
III.2.6	Théories Mixtes	39
III.3	Théorie De L'élasticité 3D	40
CHAPITRE IV	MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES	
IV.1	Introduction	43
IV.2	Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement (NFSDT) des plaques FG	47
IV.2.1	Hypothèses de la présente théorie (hypothèses de bases)	47
IV.2.2	Cinématique	48
IV.2.3	Equations constitutives	49
IV.2.4	Equations du mouvement	50
IV.3	Solution exact pour les Plaques FG	54
CHAPITRE V	RESULTATS ET DISCUSSIONS	
V.1	Problème de la Flexion	61
V.2	Problème de la vibration libre	66
V.3	Conclusions	71
	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	73
	BIBLIOGRAPHIE	

LISTE DES FIGURES

Figure I.1	Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées (Yin et al (2004)).	05
Figure I.2	Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.	06
Figure I.3	Fraction volumique du matériau le long de l'épaisseur.	07
Figure I.4	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	09
Figure I.5	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	10
Figure I.6	Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	11
Figure I.7	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996)	12
Figure I.8	La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004).	12
Figure II.1	Géométrie d'une plaque.	14
Figure II.2	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques	15
Figure II.3	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre	17
Figure II.4	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques	19
Figure IV-1	Position des surfaces moyenne et neutre de la plaque fonctionnellement graduée (FGP)	47
Figure V.1	La comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction de l'Indice de la loi de puissance p ($a/h = 5$).	61
Figure V.2	comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b .	61
Figure V.3	Comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b ($a/h = 5$).	62
Figure V.4	Effet du paramètre du module de Winkler sur la flèche dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées de titane / zircon ($p = 2$) pour différent rapport de a/h avec $J_0 = 10$ et $q_0 = 100$.	63
Figure V.5	Effet du paramètre du module de cisaillement de Pasternak sur la flèche dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées de titane / zircon ($p = 2$) pour différent rapport de a/h avec $K_0 = 10$ et $q_0 = 100$.	63
Figure V.6	Variation de la contrainte axiale dimensionnelle ($\hat{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée Titanium / Zirconia ($p = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_0 avec	64

	$J_0 = 10$, $q_0 = 100$ et $a / h = 10$.	
Figure V.7	Variation de la contrainte axiale dimensionnelle $d(\hat{\sigma}_x)$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée Titanium / Zirconia ($p = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement de Pasternak J_0 avec $K_0 = 10$, $q_0 = 100$ et $a / h = 10$.	65
Figure V.8	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque Aluminium / Alumine par rapport à l'indice de loi de puissance p ($a / h = 5$).	69
Figure V.9	Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque Aluminium / Alumina en fonction du rapport (a / h).	70
Figure V.10	Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une plaque Aluminium / Alumina en fonction du rapport a / b ($a / h = 5$).	70
Figure V.12	Effet du paramètre du module de cisaillement de Pasternak sur les dimensions de la fréquence fondamentale Ω de la plaque carré Aluminium / Alumina pour différents indice de loi de puissance p ($a / h = 10$, $K_0 = 100$).	71

LISTE DES TABLEAUX

Tableau II.1	Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes et FGM	21
Tableau V.1	Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.	57
Tableau V.2	comparaison des flèches adimensionnelles et des contraintes d'une plaque carrée en Aluminium/alumina soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).	58
Tableau V.3	Effet de l'indice de loi de puissance et des paramètres élastiques de la fondation sur la dimension et les contraintes d'une plaque rectangulaire FG en titane / Zirconia ($a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$).	59
Tableau V.4	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\hat{\omega}$) de la plaque carrée en Aluminium / Alumina	66
Tableau V.5	Comparaison des quatre premières fréquences adimensionnelle ($\bar{\omega}$) de la plaque rectangulaire en aluminium / alumine ($b = 2a$).	67
Tableau V.6	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) de la plaque FG aluminium / alumina reposant sur fondation élastique.	68

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z

$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i \text{ et } j$	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice

H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$T(x, y, z)$	Chargement thermique
$\{ \Delta \}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ f \}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette double démarche est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique. Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Materials, FGM) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent

donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique, l'aérospatial, le génie civil, les ouvrages de travaux publics et bien d'autres secteurs où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique.

De ce qui précède, Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement des pièces ou éléments élaborés à partir de ces matériaux. Les efforts dans ce travail de thèse seront orientés vers l'étude du comportement des plaques FGM sur assise élastique.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application. Dans ce chapitre, nous Dans Le second chapitre, nous rappelons les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement des structures en « FGM ».

Dans le troisième chapitre une revue générale sur les travaux de littérature concernant les structures FGM est présentée. Toutes les théories des plaques ainsi que les travaux de recherche qui lui sont associés sont exposés.

Le chapitre quatre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

Le dernier chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur les plaques FGM sur fondation élastique. Une validation des résultats ainsi qu'une étude paramétrique sont présentés.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES FGM

I.1. INTRODUCTION

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material " F.G.M "*). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

I.2. IDEE GENERALE

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. Avant cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (**1987-1989**), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (**1990-1991**), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc....

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

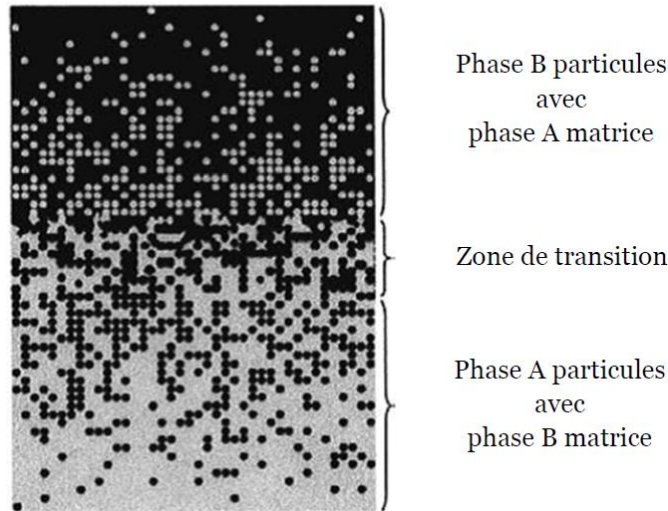


Figure I.1 : Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et al (2004)].

I.3. PROPRIETES EFFECTIVES DES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes.

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.2. a) ;
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.2. b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

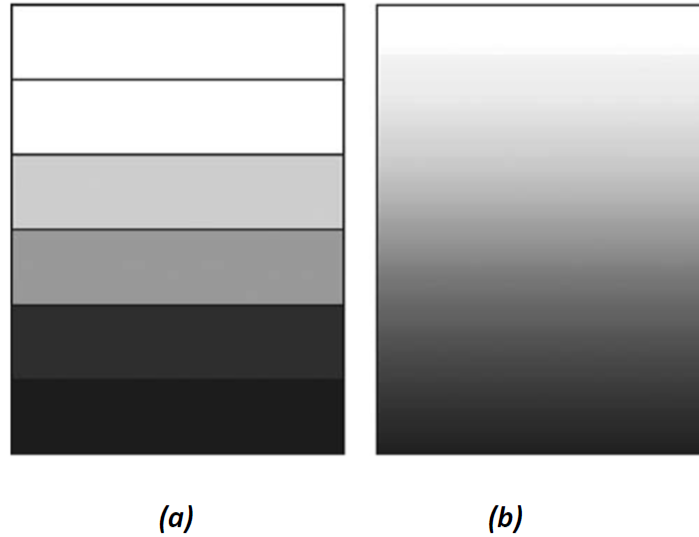


Figure I.2 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

L'expression de la fraction volumique est donné par :

$$V_m = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^P \quad (I.1)$$

Où h est l'épaisseur de la plaque et P ($0 \leq p \leq \infty$) est un exposant de la fraction volumique qui règle la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche FGM.

La figure I.3 représente la variation de l'exposant de la loi de mélange P qui génère un nombre infini de la distribution de la composition.

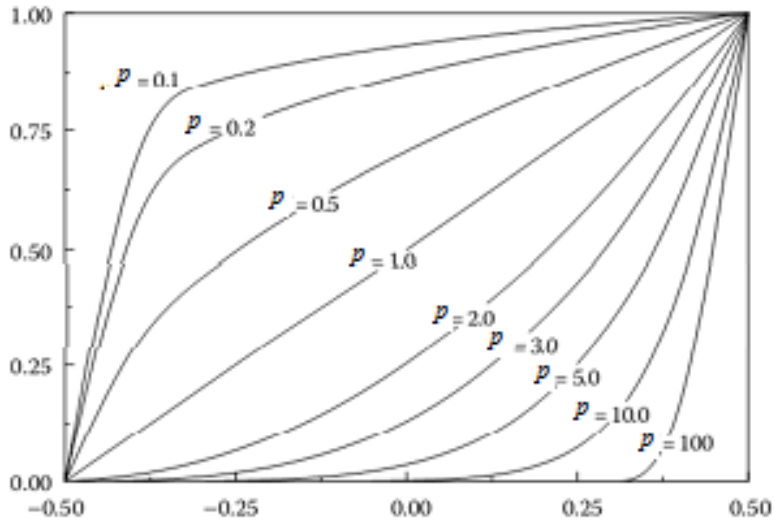


Figure I.3 : Fraction volumique du matériau le long de l'épaisseur.

Une simple règle de mélange de matériaux composites (modèle de Voigt). Les propriétés effectives des matériaux P_j de la couche de FGM, comme module de Young E_F , peuvent alors être exprimées comme suit :

$$V_f = \sum_{j=1} P_j V_{fj} \quad (I.2)$$

Où P_j et V_{fj} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du Matériau constitutif j .

La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants est :

$$\sum_{j=1} V_{fj} = 1 \quad (I.3)$$

Puisque les structures FGM sont employées dans les environnements à hautes températures où des changements importants des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs doivent être prévus (Reddy et Chin (1998)), il est essentiel de prendre en compte cette dépendance de la température pour la prévision précise de la réponse mécanique.

Ainsi, le module de Young E_F , le coefficient de Poisson ν_F , le coefficient de dilatation thermique, et la conductivité thermique k_F sont supposés être dépendants.

La température et peuvent être exprimés comme fonction non linéaire de la température (Touloukian (1967)) :

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (\text{I.4})$$

Où $P_0, P_{-1}, P_1, P_2,$ et P_3 sont les fonctions de température T (en K) et sont propres aux matériaux constitutifs. Des équations 1.1 à 1.3, nous avons (Gibson et autres 1995) :

$$E_F(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + E_m(T) \quad (\text{I.5})$$

$$\nu_F(z, T) = (\nu_c(T) - \nu_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + \nu_m(T) \quad (\text{I.6})$$

$$\alpha_F(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + \alpha_m(T) \quad (\text{I.7})$$

$$k_F(z, T) = (k_c(T) - k_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + k_m(T) \quad (\text{I.8})$$

$$\rho_F(z, T) = (\rho_c(T) - \rho_m(T)) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^P + \rho_m(T) \quad (\text{I.9})$$

I.3.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^P \quad (\text{I-10})$$

Où P est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I-11})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.4. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $P < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $P > 1$.

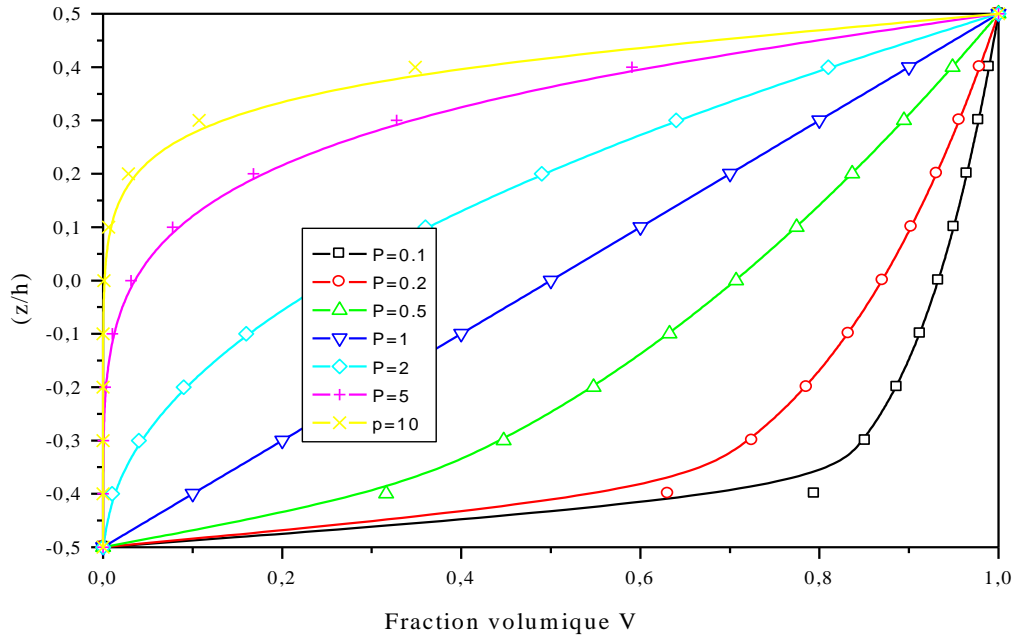


Figure I.4 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.3.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^P \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-12})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^P \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-13})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-14})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-15})$$

La figure I.5 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-12) et (I-13) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

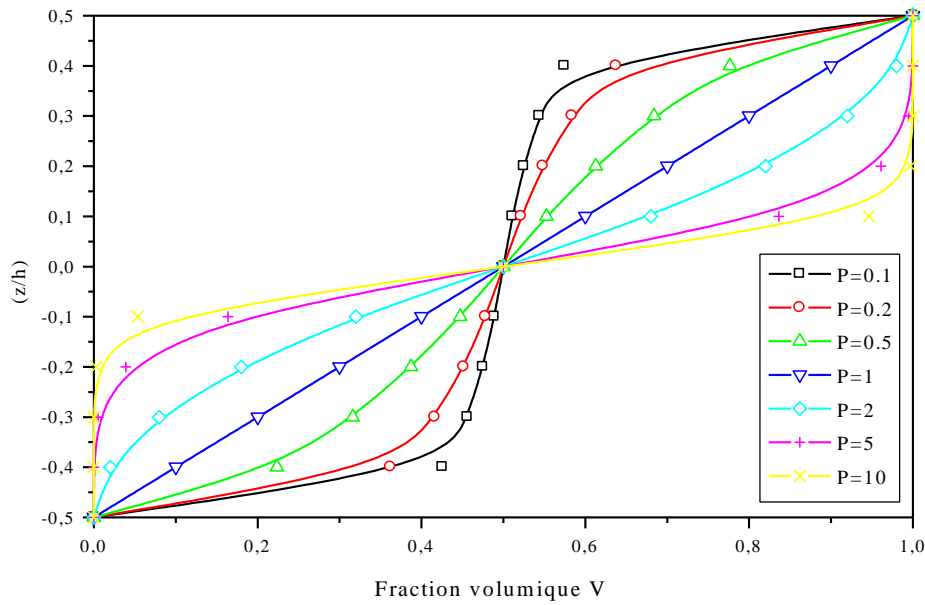


Figure I.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.3.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983).

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I-16})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I-17})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.6.

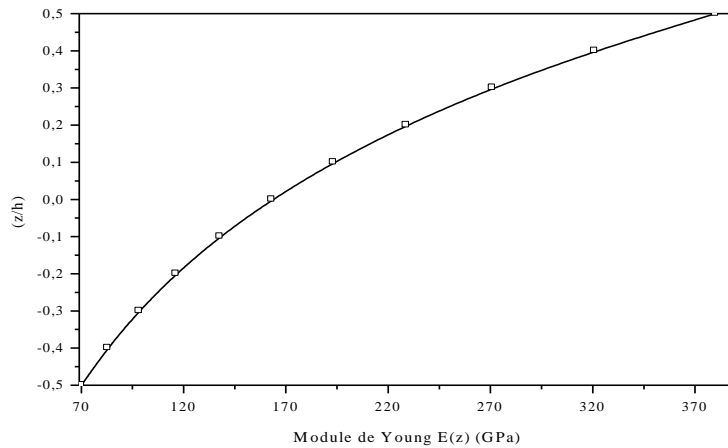


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I-4 COMPARAISON DES MATERIAUX TYPES FGM ET LES MATERIAUX COMPOSITES TRADITIONNELS

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.7) (Koizumi 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch *et al.* 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

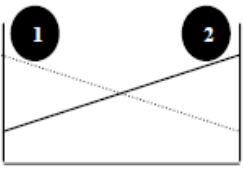
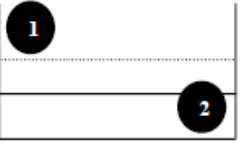
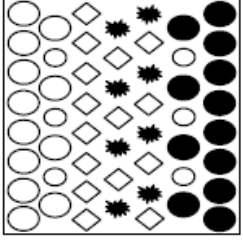
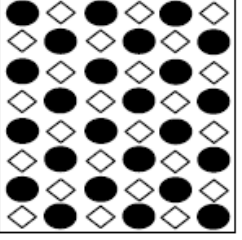
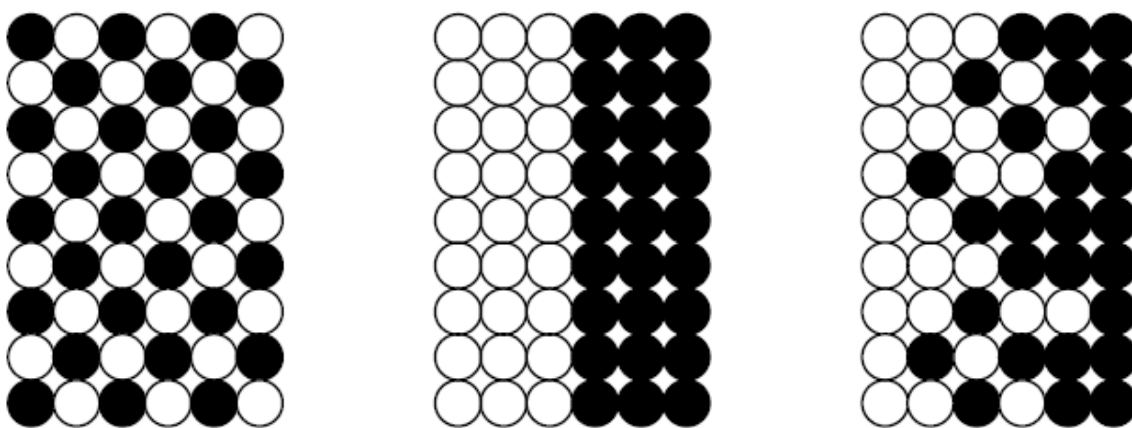
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
Matériaux	<p>exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Figure I.7 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996)

Yoshihisa (2004) a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I- 8). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en terme de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure I.8 La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004).

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l’histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d’application.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d’application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

RAPPEL SUR LA THEORIE DES PLAQUES

II.1- Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2-Définitions et Hypothèses

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée «épaisseur», est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Ce solide particulier comporte généralement un plan de symétrie en $z=0$ (plan Oxy) appelé «surface de référence» ou «surface moyenne» de la plaque.

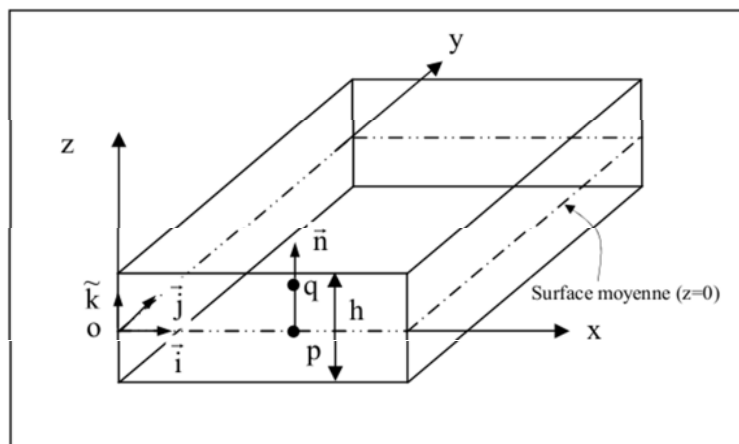


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque.

II.3. Les théories de déformation des plaques

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques FGM, seront exposées.

II.3.1. Théorie classique des plaques (CPT)

En 1850, Kirchhoff (1850a, 1850b) a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques », basée sur les hypothèses citées dans le chapitre I. Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x,y,z) à l'instant t s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \tag{II.1}$$

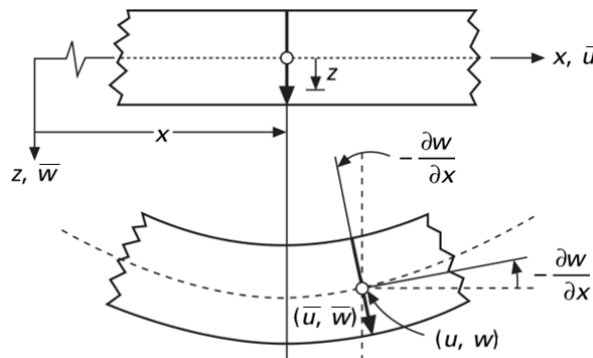


Figure II.2: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

Où u, v, w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation normale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (Figure II.2); ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959)).

II.3.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (1921) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant (Figure II.3):

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \phi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \phi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{II.2}$$

Où u, v et w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

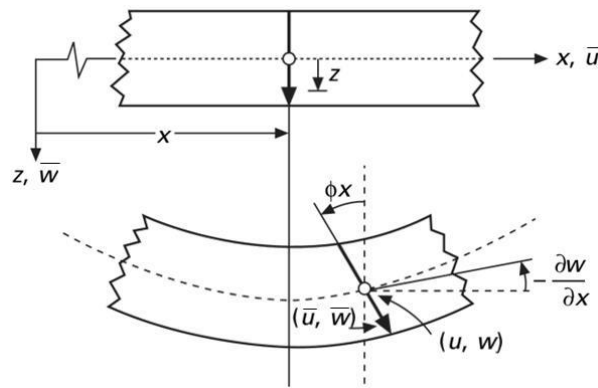


Figure II.3: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

II.3.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT)

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2ème ordre, 3ème ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en séries. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

II.3.3.1. Théorie des plaques du second ordre

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\
 \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\
 \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Où : $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y et du temps t .

Cette théorie apporte une amélioration substantielle par rapport à la théorie du premier ordre tout en nécessitant un facteur de correction comme pour la FSDPT.

II.3.3.2. Théorie des plaques du troisième ordre

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont vu le jour. Le champ des déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\chi_x(x, y, t) \\
 \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\chi_y(x, y, t) \\
 \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) + z^3\chi_z(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Où: $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y et du temps t .

D'autres théories raffinées, basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contraintes nulles sur les faces inférieure et supérieure de la plaque ont été développées. Leur champ de déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \phi_x(x, y, t) \\
 \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \phi_y(x, y, t) \\
 \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

Où: u, v et w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); et sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie dominante, utilisée dans les études de flexion, de flambement et de vibrations des plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy (1997). Le champ des déplacements de Reddy est le suivant (Figure II.4):

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left[\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left[\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Le champ des déplacements inclut une variation parabolique des déformations transversales et des contraintes qui leurs sont associées. Les contraintes de cisaillement s'annulent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Cette théorie ne nécessite donc pas de facteur de correction des contraintes puisqu'elle fournit une distribution plus réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur. Elle fournit également de meilleures précisions par rapport aux théories précédentes quant à la réponse globale des plaques minces et des plaques épaisses et une meilleure estimation des déflexions moyennes, des charges critiques de flambage, des fréquences de vibration et de leurs modes propres associés.

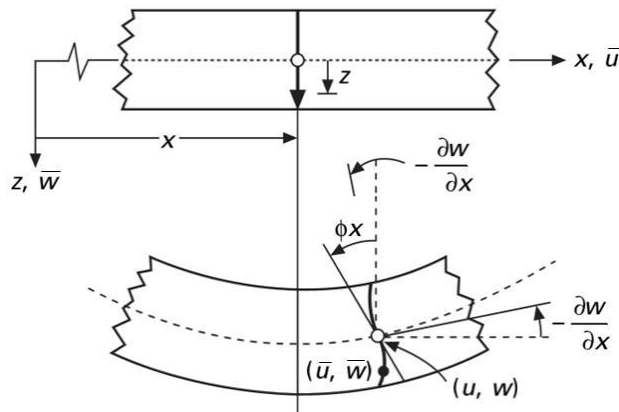


Figure II.4: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

CHAPITRE II : RAPPEL SUR LA THEORIE DES PLAQUES

D'autres théories raffinées ont vu le jour plus récemment. Leur champ de déplacements sous la forme unifiée s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(z) \left[\psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi(z) \left[\psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{II.7}$$

Où: $\varphi(z)$ est la fonction de forme pilotant la distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est propre à chaque théorie (Tableau II.1).

CHAPITRE II : RAPPEL SUR LA THEORIE DES PLAQUES

Tableau II.1: Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	Intitulé	Fonction de forme $\varphi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction (cisaillement)	Validité
CPT Kirchhoff [152], [153]	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaques minces
FSDPT Mindlin [11]	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [157]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [158]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT Touratier [159]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama, Afaq et al. [41]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Levinson [19], Reddy [21], Murthy [160]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [52]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche, Tounsi et al. [53]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{h}{\pi} \frac{\sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)}{\left(\cos h \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Atmane, Tounsi et al. [134]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cos h \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right]} z$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

		$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $- \frac{z}{(\cos h(\pi/2) - 1)}$			
Shimpi [54]	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

II.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude du comportement des plaques FGM avec ou sans la présence de fondations élastique. En plus la position exacte de la surface neutre de telle plaque sera déterminée.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w_b(x, y, z) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \tag{II.8}$$

CHAPITRE III

REVUE SUR LES TRAVAUX REALISES SUR LES STRUCTURES FGM

III.1. Introduction

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans les industries de l'aérospatiale, la mécanique, le génie civil, le nucléaire et l'automobile en raison de leurs caractéristiques remarquables telles que le rapport élevée de la rigidité sur la résistance-poids et un faible coût d'entretien. Les matériaux composites conventionnels présentent une disparité des propriétés mécanique à l'interface en raison du collage de deux matériaux différents. En conséquence, la concentration de contrainte se produit généralement à l'interface. Cela peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, fissuration de la matrice et la séparation du collage Reddy (2004). Les matériaux fonctionnellement gradués (MGFs) sont donc conçus pour surmonter ces problèmes. Le FGM est le matériau composite perfectionné qui est composé de deux ou de plusieurs phases constituantes avec une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre, ce qui élimine la concentration de contraintes rencontrée dans les composites stratifiés classiques. Le concept des FGM a été proposé en 1984 par les spécialistes Japonais en matériaux Koizumi (1997). Un FGM typique est constituée d'un mélange de céramique et de métal. L'histoire du FGM ainsi que de ses applications peut être trouvée dans le rapport de Jha et al. (2013). La modélisation et l'analyse des FGM ont également été examinées par Birman et Byrd (2007).

En général, le comportement des plaques et coques fonctionnellement graduées(FG) sous sollicitations mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant soit la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D) ou les théories équivalentes des monocouches (ESL). Les modèles ESL sont dérivés de la théorie de l'élasticité 3D en faisant des hypothèses appropriées sur la cinématique de déformation ou de l'état des contraintes à travers l'épaisseur des plaques et coques Reddy (2004). Ces théories ESL peuvent expliquer à la fois les effets du cisaillement et de la déformation normale en fonction du niveau d'hypothèses. Le modèle ESL simple est la théorie classique des plaques (CPT), aussi connu comme la théorie de Kirchoff (1850), qui ignore à la fois les effets de cisaillement et de la déformation normale. Ainsi, il est seulement approprié pour les plaques et coques FG mince. La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) développée par Mindlin (1951). Les comptes FSDT pour l'effet de déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements plans au travers de l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer car il dépend non seulement des paramètres géométriques, mais également de la charge et des conditions aux limites. Pour

éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDTs) étaient introduites. La HSDT peut être formulée en développant les composants du déplacement en série de puissance des coordonnées de l'épaisseur. En principe, les théories développées par ce moyen deviennent précises par une simple inclusion d'un certain nombre suffisant de termes dans les séries. Parmi les HSDTs, la théorie (TSDT) de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (1984) est la plus largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision. Un examen des théories de déformation de cisaillement des plaques stratifiées et isotropes a été effectué par Ghugal et Shimpi (2002) et Khandan et al. (2012). Un examen complet des différents modèles analytiques et numériques pour la prédiction de la flexion, du flambement et des réponses en vibrations des plaques FG sous chargements mécaniques et thermiques a été récemment effectué par Swaminathan et al. (2015). Cependant, aucun examen du développement des diverses théories pour la modélisation et l'analyse des plaques et coques FG n'a été rapporté dans la littérature.

L'objectif de ce chapitre est de fournir un examen complet des théories existantes pour la modélisation et l'analyse des plaques et coques FG dans la littérature en mettant l'accent principalement sur les modèles ESL tels que la CPT, FSDT, TSDT, HSDTs, théories simplifiées, théories mixtes. En outre, un examen détaillé de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité 3D et une formulation unifiée est également reporté.

III.2. Théories ESL

III.2.1. Modèle CPT

Le modèle CPT est basé sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love qui stipule que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au plan médian après déformation. Ces hypothèses impliquent l'annulation de la déformation normale et du cisaillement et, par conséquent, elles négligent les effets de cisaillement et de déformation normale. La CPT est le modèle ESL le plus simple et il est seulement approprié pour les plaques et coques minces FG où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables.

Feldman et Aboudi (1997) ont étudié le flambement élastique des plaques FG sous charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches micromécanique et structurelles. Les équations régissant les dérivées de la CPT ont été résolues analytiquement pour la charge de flambement des plaques FG avec différentes conditions aux limites. Javaheri et Eslami (2002) ont employés la CPT pour étudier le comportement en flambement

des plaques FG sous quatre types de charges thermiques Javaheri et Eslami (2002) et de charges de compression Javaheri et Eslami (2002). En se basant sur la CPT, Kiani et al. (2011) ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG encastres et reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques. Ghannadpour et al. (2012) ont également examiné la déformation thermique des plaques FG en utilisant la CPT. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode de la bande finie à la place de la solution de Navier dans le travail Javaheri et Eslami (2002). Le flambement des plaques FG soumises à la compression non uniforme a été examiné par Mahdavian (2009) en utilisant la CPT et les solutions de Fourier. Mohammadi et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions aux limites arbitraires (par exemple des plaques de type Levy). Les équations régissant les dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues en utilisant l'approche de la solution de type Levy.

Woo et al. (2006) ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires issues de la CPT avec des hypothèses de Von-Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode de série. Hu et Zhang (2011) ont également adopté la CPT avec les hypothèses Von-Karman pour effectuer l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques FG sous excitation en plan. La vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique avec diverses conditions aux limites a été étudiée par Chakraverty et Pradhan (2014) en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Chakraverty et Pradhan (2014) ont amélioré leur travail antérieur (2014) en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Ruan et Wang (2014) ont investigué sur la vibration et la stabilité du déplacement des plaques obliques FG en utilisant la CPT et la DQM.

La CPT a également été utilisé pour analyser les plaques circulaires. Par exemple, Ma et Wang (2003) ont étudié la flexion non linéaire et les comportements thermiques des plaques circulaires FG sous chargements mécaniques et thermiques. Li et al. (2007) ont également étudié le comportement non linéaire du post flambement des plaques circulaires FG sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von-Karman. Les imperfections géométriques initiales des plaques FG ont été prises en compte dans leur étude. Allahverdizadeh et al. (2008) ont étudié la vibration à l'état stable des plaques circulaires FG dans des environnements thermiques utilisant la CPT et une approche

semi-analytique. Ghomshei Abbasi et al. (2013) ont étudié le flambement thermique axisymétriques des plaques annulaires FG avec épaisseur variable soumises à des sollicitations thermiques à l'aide de la CPT et la méthode des éléments finis.

En plus des plaques FG, la CPT est également plus utilisé pour des coques FG en raison de sa simplicité. Loy et al. (1999) ont étudié la vibration des coques cylindriques FG simplement appuyées en utilisant le CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Une approche similaire a été adoptée par Arshad et al. (2007) pour étudier les caractéristiques de la vibration des coques cylindriques FG sous trois différents types de lois de la fraction de volume. Les caractéristiques de vibration des coques cylindriques FG sous diverses conditions aux limites ont été examinées par Pradhan et al. (2000) en utilisant la méthode de Rayleigh et la CPT. Ce problème a été réexaminé par Naeem et al. (2010) en utilisant la méthode Ritz. Les vibrations forcées non linéaire des coques FG doublement courbées peu profondes ont été étudiées par Alijani et al. (2011) en utilisant la CPT avec des hypothèses de Von-Karman et la discrétisation multi-modale de Galerkin. Du et al. (2014) ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation sur la base de la CPT avec les hypothèses de Von-Karman combinées avec un procédé à échelle multiple. Du et Li (2013) ont étudié la réponse de vibration non linéaire des coques cylindriques FG dans des environnements thermiques suivant une approche similaire. Ebrahimi et Najafizadeh (2014) ont étudié la vibration libre des coques cylindriques FG en utilisant la CPT en liaison avec les méthodes de la quadrature différentielle généralisée et la quadrature intégrée généralisée.

Shen (2002,2004) ont étudié le comportement post flambement des coques cylindriques FG sous compression axiale (2002) ou sous pression latérale (2003) ou sous augmentation uniforme de la température (2004) en utilisant le CPT avec les hypothèses de Von-Karman. Les deux déformations non linéaires avant flambement ainsi que les imperfections géométriques initiales ont été inclus dans l'analyse post flambement en utilisant une théorie de la couche limite du flambement des coques. Le chemin d'équilibre post flambement et la charge de flambement ou la température sont déterminés en utilisant une technique de perturbation singulière. Woo et al. (2003) ont étudié le comportement post flambement des plaques FG et des coques cylindriques peu profondes sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la CPT et les hypothèses de Von-Karman. Des solutions analytiques ont été obtenues en utilisant des séries mixtes de solutions. Mirzavand et Eslami (2008) ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des coques cylindriques imparfaites FG sous compression axiale dans des environnements thermiques

utilisant deux modèles différents pour les imperfections géométriques initiales. Les résultats indiquent que les imperfections géométriques et la dépendance à la température des propriétés des matériaux jouent un rôle majeur pour dicter le point de bifurcation des coques cylindriques imparfaites FG sous compression axiale.

Woo et Meguid (2001) ont étudié la flexion non linéaire des coques FG peu profondes sous sollicitations transversales et sous un champ de température. Les équations régissant les dérivées de la CPT avec les hypothèses Von-Karman ont été résolus analytiquement pour la flèche, les contraintes et les moments de flexion d'une coque simplement appuyée par la méthode des séries de Fourier. Nguyen et Tran (2013,2012) ont effectué l'analyse dynamique non linéaire des coques FG imparfaites peu profondes et doublement courbes reposant sur une fondation élastique soumise à des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT avec des hypothèses de Von-Karman.

Le couplage étirement-flexion produit des déflexions transversales et des moments de flexion quand une plaque FG est soumise à des charges de compression dans son plan. Par conséquent, le flambement de type bifurcation ne se produit pas. Les conditions du flambement de type bifurcation produit sous l'action des charges de compression dans le plan ont été examinés par Aydogdu (2008). On observe que le flambement de type bifurcation se produit lorsque la plaque est complètement encastree. Pour une plaque sur appuis mobiles, le flambement de type bifurcation se produit lorsque les charges dans le plan sont appliquées à la surface neutre (2008).

III.2.2. Modèle FSDT

La FSDT développée par Mindlin (1951) représente l'effet de la déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Il est à noter que la théorie développée par Reissner (1945,1947) représente également l'effet de la déformation de cisaillement. Cependant, la théorie de Reissner n'est pas semblable à la théorie de Mindlin comme le perçoivent de nombreux chercheurs à travers l'utilisation de fausses descriptions telles que " plaques Reissner- Mindlin " et " FSDT de Reissner ". La différence majeure entre les deux théories a été établie par Wang et al. (2001) en dérivant les relations de flexion entre les quantités Mindlin et Reissner pour un problème général de plaques. Depuis, la théorie de Reissner a été fondée sur l'hypothèse d'une répartition linéaire des contraintes de flexion et une distribution parabolique des contraintes de cisaillement, sa formulation va inévitablement conduire à la variation du déplacement étant

donné qu'il n'est pas nécessairement linéaire à travers l'épaisseur de la plaque Wang et al. (2001). Ainsi, il est incorrect de se référer à la théorie FSDT de Reissner qui implique une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Une autre différence entre les deux théories est que la contrainte normale qui a été inclus dans la théorie de Reissner a été omise dans celle de Mindlin (1975).

La FSDT a été largement utilisée pour modéliser les plaques FG. Praveen et Reddy (1998) ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous chargements thermiques et mécaniques à l'aide de la méthode des éléments finis et de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman. Della Croce et Venini (2004) ont présenté une famille hiérarchique des éléments finis pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la FSDT et une formulation variationnelle. Toutefois, le couplage étirement-flexion a été ignoré dans leur travail. Kim et al. (2008) ont étudié le comportement non linéaire en flexion des plaques et des coques FG en utilisant la FSDT avec une définition complète du tenseur contrainte de Green.

Chen (2005) a étudié la vibration non linéaire des plaques FG soumises à une action combinée de la compression initiale dans le plan et les contraintes de flexion à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman. La fréquence non linéaire des plaques simplement appuyées a été obtenue en utilisant la méthode de Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La FSDT avec les hypothèses de Von-Karman a également été employée par Alijani et al. (2011) pour étudier la vibration non linéaire des plaques FG simplement appuyées dans des environnements thermiques. La vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique a été étudiée par Fallah et al. (2013) en utilisant la FSDT et une approche semi-analytique qui est basée sur une combinaison de la série de puissance infinie et la méthode de Kantorovich.

Lanhe (2004) et Bouazza et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la température de flambement des plaques FG simplement appuyées sous deux types de charges thermiques en utilisant la FSDT et la solution de Navier. Ganapathi et al. (2006) ont employé la FSDT et la méthode des éléments finis pour étudier le flambement des plaques obliques FG sous charges de compression. Yaghoobi et Yaghoobi (2013) ont étudié le flambement des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques. La FSDT et la méthode des séries de puissance de Frobenius ont été adoptées

pour calculer la charge critique de flambement des plaques FG sous différentes conditions aux limites.

Dai et al. (2005) ont étendu la méthode des éléments libres de Galerkin (1994) aux plaques FG avec des couches piézoélectriques sous chargements mécaniques et thermiques sur la base de la FSDT. Les résultats montrent que la méthode des éléments libres de Galerkin a de nombreuses caractéristiques attractives par rapport à la méthode des éléments finis. Zhao et al. (2009), Zhao et Liew (2009,2011), et Lee et al. (2009,2010) ont développé un modèle de maillage sur la base de la FSDT et de la méthode des éléments libres de Kp-Ritz. Ce modèle a été appliqué à des plaques et coques FG à travers différents problèmes, par exemple, flexion géométriquement non linéaire (2009), la vibration (2009), flambement thermique (2009), flexion thermique (2009), post flambement thermique (2010) et le flambement thermomécanique (2011). La réponse transitoire des plaques et coques FG sous chargements transversales a été étudiée par Roque et al. (2010) en utilisant la FSDT et une méthode de maillage avec des fonctions de base radiales (RBFs). Valizadeh et al. (2013) ont employé la FSDT et une approche isogéométrique (IGA) pour étudier la flexion, la vibration libre, le flambement et les réponses de flottement supersoniques des plaques FG.

Les solutions analytiques pour l'analyse de la vibration libre des plaques type Levy reposant sur une fondation élastique ont été données par Hosseini-Hashemi et al. (2010) en utilisant la FSDT et la solution Levy. Hosseini-Hashemi et al. (2011) ont amélioré leur travail antérieur (2010) en tenant compte de l'effet couplé entre les déplacements en plan et transversaux. Mohammadi et al. (2010) ont découplé cinq équations régissant la FSDT en deux équations indépendantes. Les équations obtenues ont ensuite été résolues pour la charge de flambement des plaques FG sous chargement plan en utilisant l'approche de la solution type Levy. Cette approche de la solution a été employée par Saidi et Jomehzadeh (2009) pour dériver la solution type Levy pour la flèche et les contraintes des plaques FG soumises à des charges transversales. Yaghoobi et Torabi (2013) ont également suivi une approche similaire pour dériver la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique et soumises à un chargement thermique.

Yang et al. (2005) ont étudié l'influence du caractère aléatoire des propriétés des matériaux et des paramètres de rigidité de la fondation sur la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la FSDT et une technique de perturbation. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement dans la FSDT,

Nguyen et al. (2008) ont adopté les équations d'équilibre dans le calcul des contraintes de cisaillement transversal et des forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques FG simplement appuyées et des panneaux sandwich FG encastres indiquent que la valeur du facteur de correction de cisaillement des modèles FG n'est pas le même que celui des modèles homogènes. Prakash et al. (2009) ont reformulé la FSDT basée sur la surface neutre pour étudier l'effet de la position de la surface neutre sur la stabilité non linéaire des plaques obliques FG sous chargement plan. Les équations fondées sur des les hypothèses de Von-Karman ont été résolus en utilisant un élément continu à huit nœud C0. La FSDT basée sur la surface neutre a également été adopté par Singha et al. (2011) pour étudier le comportement non linéaire de la flexion des plaques FG sous charges transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que la méthode de l'énergie a été adoptée pour obtenir les expressions du facteur de correction de cisaillement.

La FSDT a également été utilisée pour modéliser des coques FG. Reddy et Chin (1998) ont étudié la réponse dynamique des cylindres et plaques FG soumises à deux différents types de chargements thermiques en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. Eslami et Shahsiah (2003) ont dérivé des solutions analytiques pour la température de flambement des coques cylindriques FG reposant sur appuis simples et soumises à deux types de sollicitations thermiques en utilisant la FSDT et la solution de Navier. Samsam Shariat et Eslami (2005) et Mirzavand et al. (2005) ont étudié l'influence des imperfections géométriques initiales sur le flambement des plaques et des coques cylindriques FG. Des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques et coques FG sous différents types de charges thermiques ont été obtenues à partir de la FSDT. Une analyse géométrique non linéaire des coques FG a été réalisée par Arciniega Reddy et (2007) en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. Behjat et al. (2009) ont étudié la flexion statique, la vibration libre et les réponses transitoires des panneaux cylindriques piézoélectriques FG soumis à des sollicitations mécaniques, thermiques et électriques en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. Les problèmes de la flexion statique et dynamique et de la vibration libre des panneaux double courbure FG sous action combinée des charges mécaniques et thermiques ont été abordés par Kiani et al. (2012) en utilisant la FSDT et la transformation analytique hybride de Laplace-Fourier.

Zhang et Hao (2009) ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous une combinaison de charges thermiques et des excitations externes en utilisant la FSDT

et la méthode de Galerkin. Le flambement des coques cylindriques FG sous pression externe et sous compression axiale a été étudié par Khazaeinejad et al. (2010) en utilisant la FSDT et une méthode analytique. La méthode numérique de Runge-Kutta a été utilisée pour prédire la réponse dynamique des coques cylindriques FG soumises à des charges mécaniques axiale et transversale et à des charges d'amortissement. Isvandzibaei et al. (2014) ont étudié les caractéristiques de la vibration des coques cylindriques FG sous charge de pression. Les équations régissant les dérivés de la FSDT sont résolues analytiquement pour la fréquence propre des coques cylindriques FG dans différentes conditions aux limites, selon la méthode de Ritz. Pradyumna et Nanda (2012) ont étudié la réponse transitoire géométriquement non linéaire des panneaux coque FG imparfaits dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires directrices issues de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman ont été résolues en utilisant un élément continu de huit nœuds C0 avec cinq degrés de liberté (DOF) par nœud. La réponse transitoire a été obtenue en utilisant le schéma d'intégration de Newmark combiné avec la méthode d'itération modifiée de Newton-Raphson.

III.2.3. Modèle TSDT

La TSDT développé par Reddy (1984) pour les plaques composites stratifiées représente l'effet de la déformation de cisaillement transversal et satisfait la condition de la nullité des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure d'une plaque. Un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire. Il est à noter que le champ de déplacement de la théorie de Reddy est identique à celle de la théorie de Levinson (1980). Cependant, les équations du mouvement des deux théories sont différentes les unes des autres. Cela est dû au fait que Levinson (1987) a utilisé les équations d'équilibre de la FSDT qui sont variationnellement incompatibles avec celles dérivées de l'approche variationnelle de Reddy (1984).

Reddy (2000) a présenté les deux formulations analytiques et par éléments finis basées sur la TSDT. Les formulations représentent le couplage thermo-mécanique, en fonction du temps et de la non-linéarité géométrique type Von-Karman. Shen (2002) a présenté l'analyse non linéaire des plaques FG sous des charges transversales dans des environnements thermiques. Les équations régissantes basées sur la TSDT avec les hypothèses de Von-Karman ont été résolues pour la charge de déviation et la charge du moment de flexion courbes des plaques simplement appuyées et encastées en utilisant une technique de perturbation mixte de Galerkin. Une analyse de la flexion non linéaire des plaques FG sous

chargements thermiques et mécaniques a été réalisée par Yang et Shen (2003) en utilisant la TSDT avec les hypothèses de Von- Karman. Une approche de perturbation multi-paramétrique a été utilisée pour obtenir les réponses en flexion des plaques FG avec deux appuis opposés encastres ou simplement appuyés et les deux appuis restants ayant des conditions aux limites arbitraires. Yang et al. (2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwich FG sous une action combinée de changement de température uniforme et de compression périodique dans le plan en utilisant la TSDT et une méthode semi-analytique. Akbarzadeh et al. (2011) ont étudié les réponses statiques et dynamiques des plaques FG sous des charges latérales en utilisant la TSDT et la méthode des séries de Fourier. Zhang (2014) a employé la TSDT basée sur la surface neutre avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier la réponse non linéaire de la flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique dans des environnements thermiques. Des solutions analytiques pour les plaques FG avec six conditions aux limites différentes ont été obtenues en utilisant la méthode de Ritz.

Javaheri et Eslami (2002) ont dérivés les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées sous quatre types de charges thermiques en utilisant la TSDT et la solution de Navier. Un travail similaire a été réalisé par Samsam Shariat et Eslami (2007) pour les plaques FG soumises à trois types de sollicitations mécaniques et deux types de charges thermiques. Najafzadeh et Heydari (2007) ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques circulaires FG en utilisant la TSDT. Bodaghi et Saidi (2010) ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy sous chargement en plan. En introduisant quatre nouvelles fonctions, cinq équations régissant dérivés de la TSDT ont été converties en deux équations indépendantes. Ces équations sont ensuite résolues pour les plaques rectangulaires FG en utilisant la solution Levy. Cette approche de la solution a également été adoptée par Saidi et al. (2012) pour dériver des solutions analytiques pour la déviation et les contraintes des plaques FG type Levy soumises à des charges transversales. Thaï et Kim (2013) ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre et ont dérivée la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Yang et al. (2006) ont étudié la sensibilité des imperfections géométriques initiales sur le comportement en post flambement des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques. L'imperfection géométrique initiale a été supposée dans la forme du produit de fonctions trigonométriques et hyperboliques. Les équations régissant basées sur la TSDT et

les hypothèses de Von-Karman ont été résolus pour le chemin d'équilibre post flambement des plaques FG avec différentes conditions aux limites en utilisant une approche semi-analytique, en combinaison avec une procédure d'itération. Shen (2007) a étendu son travail précédent (2002) à l'analyse du post flambement des plaques FG simplement appuyées sous chargement thermique. Une technique de perturbation en deux étapes a été utilisée pour calculer la température de flambement et le chemin d'équilibre post flambement. Les résultats révèlent que la dépendance à la température a un effet significatif sur le comportement thermique post flambement des plaques FG. Nguyen et Pham (2013) ont étudié le comportement post flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Des solutions analytiques pour la charge de flambement et la température de flambement des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques ont été obtenues en utilisant la TSDT et la méthode de Galerkin.

Kim (2005) a étudié les caractéristiques de vibration des contraintes initiales des plaques FG dans des environnements thermiques en utilisant la TSDT et la procédure de Rayleigh-Ritz. Yang et Shen (2002) ont employé la TSDT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les caractéristiques de vibration et la réponse transitoire des contraintes initiales des plaques FG dans des environnements thermiques. Le DQM et l'approche de superposition modale ont été respectivement utilisés pour déterminer les caractéristiques de vibration et les réponses transitoires des plaques FG avec deux appuis encastres et les deux restants ayant des conditions aux limites arbitraires. Huang et Shen (2004) ont également examiné la vibration non linéaire et la réponse transitoire des plaques FG dans des environnements thermiques utilisant la TSDT avec les hypothèses de Von-Karman. Cependant, ils ont utilisé une technique de perturbation améliorée pour dériver les solutions analytiques pour des plaques simplement appuyées. En se basant sur la TSDT, Hosseini-Hashemi et al. (2011) et Hasani Baferani et al. (2011) ont dérivé la solution type Levy de la fréquence naturelle des plaques FG (2011) et des plaques FG reposant sur une fondation élastique (2011).

Ferreira et al. (2006) étendirent leurs travaux précédents (2005,2007) à la vibration libre des plaques FG. Gulshan Taj et al. (2013) ont développé un élément continu isoparamétrique de neuf nœuds C0 avec sept degrés de liberté par nœud pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques en utilisant la TSDT. Foroughi et Azhari (2014) ont utilisé la TSDT et la méthode spline des bandes finies pour étudier le flambement et la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation

élastique. Tran et al. (2013) ont effectué les analyses de la flexion statique, du flambement et de la vibration libre des plaques FG en utilisant la TSDT et l'IGA. Tran et al. (2013) étendirent leurs travaux précédents (2013) au flambement thermique des plaques FG. La TSDT et l'IGA ont également été employées par Jari et al. (2015) pour étudier le comportement de la flexion linéaire et non linéaire, du flambement et de la vibration libre des plaques FG soumises à des charges thermiques et mécaniques.

La TSDT a été également plus utilisée pour les coques FG. Shen [156] et Shen et Leung (2003) ont effectué l'analyse post flambement des panneaux cylindriques FG dans des environnements thermiques, soumis à une compression axiale (2002) ou à une pression latérale (2003). Les équations régissantes sont dérivées de la TSDT avec les hypothèses de Von-Karman. Les deux déformations non linéaires post flambement et les imperfections géométriques initiales des panneaux cylindriques FG ont été inclus dans l'analyse post flambement en utilisant une théorie de la couche limite de flambement des coques. La charge de flambement et le chemin d'équilibre post flambement ont été déterminés en utilisant une technique de perturbation singulière. Shen (2005) et Shen et Noda (2007) ont étendu les travaux antérieurs (2002,2003) aux coques cylindriques FG avec actionneurs piézoélectriques. Shen et Liew (2004) ont également prolongé les travaux antérieurs (2002) pour les panneaux cylindriques FG avec des couches piézoélectriques sous actions combinées des charges de compression axiale, électrique et thermiques. Shen et Noda (2005) ont présenté des solutions analytiques pour le post flambement des coques cylindriques FG soumises à des charges axiales et radiales dans des environnements thermiques. La formulation a été basée sur la TSDT avec les hypothèses Von-Karman et représentait les deux déformations non linéaires avant flambement et les imperfections géométriques initiales. Shen (2007) a fourni des solutions analytiques pour la post flambement thermique des coques cylindriques FG sous conduction de chaleur suivant une approche similaire.

III.2.4. Modèles HSDT

Les HSDTs représentent les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou à la fois les déplacements dans le plan et les déplacements transversaux (théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent, la capture des effets de la déformation de cisaillement ou à la fois le cisaillement et les déformations normales. Les HSDTs peuvent être développées à l'aide des fonctions de forme polynômiale ou des fonctions de forme non-polynômiale.

III.2.4.1. Modèles basés sur la fonction Polynomiale

Qian et al. (2004,2003) et Gilhooley et al. (2007) ont employé une méthode locale de maillage de Petrov-Galerkin et la quasi-3D de Batra et Vidoli (2002) pour étudier la flexion et la vibration des plaques FG. Cette théorie quasi-3D a également été utilisée par Sheikholeslami et Saidi (2013) pour étudier la vibration des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la solution de Navier. Qian et Batra (2004) ont étendu leur travail antérieur (2004) pour les problèmes transitoires des plaques FG sous chargements thermiques et mécaniques. Patel et al. (2005) ont étudié les caractéristiques de la vibration libre des coques cylindriques elliptique FG en utilisant la théorie de la quasi-3D et la méthode des éléments finis. Le champ de déplacement de la théorie de la quasi-3D de Lo et al. (1977) a 11 inconnues et représente une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation quadratique du déplacement transversal à travers l'épaisseur.

Pradyumna et Bandyopadhyay (2008,2010) ont développé un élément de coque continue à quatre noeuds C0 avec neuf degrés de liberté par nœud pour la vibration libre (2008) et l'instabilité dynamique (2010) des panneaux incurvés FG. La formulation a été basée sur la HSDT de Kant et Khare (1997), dans laquelle les déplacements dans le plan sont développés en tant que variation cubique des coordonnées de l'épaisseur tandis que le déplacement transversal est constant. Alijani et al. (2011) ont étudié l'effet de la température sur la vibration géométrique non linéaire des panneaux double courbure FG en fonction de la variation thermique et de l'excitation harmonique. La formulation a été basée sur la HSDT de Amabili et Reddy (2010) et la méthode de l'énergie multi-modal. Chen et al. (2009) ont étudié la vibration libre et le flambement des plaques FG sous une combinaison de contrainte d'extension et d'une contrainte de flexion pure. Les équations régissant le mouvement basées sur le champ de déplacement de Lo et al. (1977) sont analytiquement résolues pour la fréquence naturelle et la charge de flambement des plaques FG simplement appuyées. Les effets de divers paramètres et des contraintes initiales sur la fréquence propre et la charge de flambement des plaques FG ont été étudiés. Talha et Singh (2010) ont développé une théorie quasi-3D pour l'analyse de la flexion statique et la vibration libre des plaques FG. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant le champ de déplacement de Lo et al. (1977) pour satisfaire la nullité des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Un élément isoparamétrique continue à neuf nœuds C0 avec 13 degrés de liberté par nœud a été développé pour étudier l'influence de la forme géométrique, du rapport d'épaisseur, de l'indice de la fraction de volume et des conditions aux limites sur les réponses

de la flexion et de la vibration libre des plaques FG. Talha et Singh (2011) ont étendu leur travail antérieur (2009) à la vibration thermo-mécanique des plaques FG. Gulshan Taj et al. (2014) ont également prolongé les travaux antérieurs (2009) à l'analyse de la flexion des plaques sandwich obliques FG.

Sur la base du champ de déplacement de Lo et al. (1977), Reddy (2011) a développé une HSDT générale avec la non-linéarité géométrique de Von-Karman pour l'analyse thermomécanique des plaques FG. La CPT, FSDT, TSDT et HSDT avec des surfaces inférieures et supérieures libres peuvent être déduites de la HSDT générale. Cette théorie a été également employée par Kant et al. (2014) pour étudier la flexion statique et les réponses de la vibration libre des plaques FG. Jha et al. (2013) ont étudié la flexion statique et la vibration libre (2013) des plaques FG en utilisant la théorie quasi-3D de Kant et Manjunatha (1988) avec 12 inconnues. Des solutions analytiques ont été obtenues pour les plaques simplement appuyées en utilisant la solution de Navier. L'influence des termes d'ordre supérieur dans le champ de déplacement sur la fréquence naturelle des plaques FG a également été étudiée (2013). Cette théorie quasi-3D a également été employée par Swaminathan et Naveenkumar (2014) pour étudier le flambement des plaques sandwich FG. La formulation a été basée sur la théorie quasi-3D de Ali et al. (1999). Ils ont également étudié l'influence des termes d'ordre supérieur dans le champ de déplacement sur l'exactitude de la théorie de la quasi-3D. Nguyen Xuan et al. (2013) ont présenté une formulation simple et efficace pour les plaques sandwich composites à l'aide d'une théorie de déformation de cisaillement de cinquième ordre (FiSDT) en combinaison avec l'IGA. Le comportement des plaques rectangulaires et circulaires sous différentes conditions aux limites vis-à-vis de la flexion statique, le flambement et la vibration libre, a été étudié.

III.2.4.2. Modèles basés sur la fonction non Polynomiale

La fonction non-polynomiale a été d'abord utilisée par Levy (1877) avec une fonction sinusoïdale pour développer une théorie raffinée pour les plaques épaisses isotropes. La fonction sinusoïdale a été adoptée plus tard par Stein (1986) et Touratier (1991) pour développer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale à cinq inconnues (SSDT) pour les plaques composites isotropes et stratifiés, respectivement. La SSDT a été largement utilisée pour étudier la flexion thermique des plaques composites (2004,2005), le flambement des plaques composites (2004), la flexion des plaques sandwich FG (2005,2010), le flambement et la vibration des plaques sandwich FG (2004,2005), la vibration des plaques FG

(2005), la flexion des plaques FG (2006), la flexion thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique (2009), le flambement thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique (2011), nano poutres (2012) et nano plaques (2014). Les relations de flexion entre les quantités SSDT et CPT ont été dérivées par Zenkour (2012) pour des plaques FG type Levy.

Une fonction tangentielle a été employée par Mantari et al. (2012) et Mantari et Guedes Soares (2012) pour développer une HSDT pour les plaques isotropes, composites et sandwiches (2012) et les plaques FG (2012). Mantari et al. (2012) ont combiné les fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer une HSDT pour les plaques sandwich et plaques composites (2012), plaques FG (2012) et coques FG doublement incurvées (2012). Mantari et Guedes Soares (2012,2013) ont combiné les fonctions exponentielles et hyperboliques pour développer une HSDT pour les plaques et coques isotropes et multicouches (2012) et les plaques FG (2013). Une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles a été proposée par Mantari et al. (2014) pour développer une HSDT pour les plaques FG. Nguyen et al. (2014) ont combiné les fonctions tangentielles inverses et cubiques pour les plaques sandwich FG, tandis que Thai et al. (2014) ont combiné les fonctions tangentielles inverses et linéaires pour les plaques composites et les plaques sandwich. Thai et al. (2014) ont suivi leur travail précédent (2014) pour développer une HSDT pour les IGA des plaques sandwich FG utilisant deux nouvelles fonctions trigonométriques.

En outre, les fonctions non polynomiales ont également été utilisées pour développer des théories quasi-3D qui représentent à la fois les effets du cisaillement et de la déformation normale. Par exemple, Zenkour (2007) a utilisé la fonction sinusoïdale pour développer une théorie quasi-3D pour les plaques FG. Mantari et Guedes Soares (2012) ont présenté une formulation généralisée dans laquelle de nombreuses théories quasi-3D peuvent être déduites en utilisant des fonctions polynômiales, hybrides ou trigonométriques. Mantari et Guedes Soares (2014) ont optimisés la théorie sinusoïdale quasi-3D pour l'analyse de la flexion des coques FG. Mantari et Guedes Soares (2013) ont amélioré leur travail antérieur (2012) en incluant l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans des plaques FG.

III.2.5. Théories Simplifiées

Il est bien connu que les théories HSDTs et quasi-3D développées en élargissant les déplacements en série de puissances des coordonnées de l'épaisseur sont plus coûteuses, car chaque calcul de puissance supplémentaire des coordonnées de l'épaisseur va induire une inconnue supplémentaire à la théorie. Par conséquent, il est nécessaire de simplifier les HSDTs existantes et les théories quasi-3D ou de développer des théories simples avec moins d'inconnues.

Shimpi (2002) a développé une théorie des plaques raffinée (RPT) pour les plaques isotropes en divisant le déplacement en composants de flexion et de cisaillement. La RPT ne contient que deux inconnues comparée avec trois inconnues dans le cas de la FSDT et de la TSDT, mais elle est suffisamment précise pour prédire les réponses globales des plaques isotropes (2002,2013) et des plaques orthotropes (2012,2013). Kim et al. (2009) ont étendu la RPT pour les plaques composites stratifiés et ont modifié la RPT en prenant en compte la composante d'extension du déplacement transversal. Il a été conclu que la RPT ne peut prédire avec précision le comportement de la flexion statique, du flambement et de la vibration libre des plaques composites stratifiés (2009,2014). La RPT a été largement appliquée à des plaques FG (2010,2014), plaques sandwichs FG (2011,2012), plaques FG avec des couches piézoélectriques (2015), nano plaques (2011,2013) et nano poutres (2012). Thaï et Uy (2013) ont reformulé la RPT basée sur la surface neutre et ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy. Thaï et Choi (2014) ont amélioré la RPT en tenant compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG.

En utilisant des hypothèses similaires à celles de Shimpi (2002), de nombreuses théories de déformation de cisaillement à quatre inconnus ont été développées en utilisant différentes fonctions de forme. Par exemple, MECHAB et al. (2013) et El Meiche et al. (2011) ont proposé une HSDT à quatre inconnue pour les plaques FG (2013) et les plaques sandwich FG (2011) en utilisant des fonctions hyperboliques. Merdaci et al. (2011), Tounsi et al. (2013), Ameer et al. (2011), et thaïlandais et Vo (2013) ont développé une HSDT à quatre inconnus pour les plaques sandwich FG (2011,2013) et les plaques FG (2011,2013) en utilisant la fonction sinusoidale. En se basant sur une fonction tangentielle inverse, Nguyen Xuan et al. (2014) ont proposé une HSDT à quatre inconnus pour l'IGA des plaques FG. Thaï et Choi (2013) ont proposé diverses HSDTs à quatre inconnus pour les plaques FG en utilisant différentes fonctions de forme y compris les fonctions cubiques (1984), les fonctions

sinusoïdales (1991), les fonctions hyperboliques (1992) et les fonctions exponentielles (2003). L'exactitude de ces théories est évaluée pour les problèmes de flexion et de vibration libre des plaques FG en utilisant les deux solutions analytiques (2013) et les solutions d'éléments finis (2013). Yaghoobi et Fereidoon (2014) ont simplifié la théorie de déformation de cisaillement d'ordre n développée par Xiang et al. (2011,2014) pour le flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique soumises à des charges thermiques. Thai et Choi (2013) ont simplifié la FSDT pour les plaques FG (2013) et les plaques composites laminées (2013). Cette FSDT simplifiée a été employée plus tard par Yu et al. (2013) et le Yin et al. (2014) pour les IGA des plaques FG présentant une non-linéarité géométrique. Thai et al. (2014) ont également développé une autre FSDT simplifiée pour les plaques sandwich FG en utilisant les hypothèses de Shimpi et al. (2007). Des solutions analytiques pour la déflexion, la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour les plaques dans des conditions limites arbitraires en utilisant la méthode des solutions de Sobhy (2013).

III.2.6. Théories Mixtes

Murakami (1986) a été le premier à appliquer la RMVT pour développer une théorie des stratifiés mixte en utilisant le modèle du déplacement zig-zag du premier ordre. En se basant sur la RMVT, Demasi (2009) a développé une variété de théories de stratifiés mixtes dans une série de cinq articles dont les théories de LayerWise (2009), HSDTs et les modèles en zigzag (2009). Fares et al. (2009) ont proposé une théorie basée sur la RMVT pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FG. La théorie est basée sur un champ de déplacement qui représente une variation linéaire des déplacements en plan et une variation quadratique du déplacement transversal à travers l'épaisseur. Wu et Li (2010) ont développé une TSDT basée sur la RMVT pour l'analyse de la flexion des plaques multicouches FG en utilisant le modèle du déplacement de la TSDT et les distributions quadratiques couche par couche de la déformation du cisaillement transversal. Par conséquent, les conditions de continuité des deux déplacements et de la déformation de cisaillement transversal au niveau des interfaces entre les couches adjacentes sont exactement remplies. Une technique de condensation statique a été utilisée pour réduire le nombre d'inconnus à cinq qui est le même que celui de la TSDT basée sur la PVD. Des solutions analytiques ont été obtenues pour des plaques simplement appuyées et les résultats obtenus ont été également comparés à celles prédites par le modèle basé sur la PVD. Il se trouve que le modèle basé sur la RMVT est légèrement supérieur à celui basé sur la PVD pour prédire les réponses globales des plaques FG orthotropes et stratifiées. En se basant sur la RMVT et la

PVD, Wu et Li (2013) ont développé des modèles de couches finies pour l'analyse de la flexion 3D des plaques multicouches et FG. Dans ces modèles, la plaque est divisée en un certain nombre de couches finies dans lesquelles les fonctions trigonométriques et les polynômes de Lagrange ont été utilisées respectivement pour interpoler les variations en plan et transversales du champ des variables de chaque couche individuellement. Ces modèles ont été étendus par Wu et Chang (2012) et Wu et al. (2014) pour la flexion statique (2012), la vibration libre (2014) et le flambement (2014) des cylindres composites multicouches et des cylindres sandwich.

III.3. Théorie De L'élasticité 3D

Le développement de solutions exactes de la théorie de l'élasticité 3D est très utile pour évaluer l'exactitude et la validité des modèles ESL. Mian et Spencer (1998) ont établis des solutions exactes pour les plaques FG et les composites laminées. Ootao et Tanigawa (1999) ont développé des solutions exactes 3D pour les problèmes de contraintes thermiques des plaques FG simplement appuyées sous transfert partiel de chaleur. Cheng et Batra (2000) ont dérivé des solutions exactes pour l'analyse de la flexion 3D des plaques elliptiques FG encastées sous chargements thermiques en utilisant une méthode de développement asymptotique. Reddy et Cheng (2001) ont également adopté la méthode de développement asymptotique pour obtenir des solutions exactes pour l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées sous sollicitations thermiques. Au lieu d'utiliser la méthode de développement asymptotique, Vel et Batra (2002) ont adopté une méthode des séries de puissance pour dériver les solutions exactes de l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées soumises à des charges thermiques et mécaniques. Vel et Batra (2003) ont étendu leur travail antérieur (2002) pour analyser les problèmes transitoires de conduction de chaleur des plaques FG simplement appuyées soit soumises à la température en fonction du temps ou le flux étendu sur les surfaces supérieure et inférieure. Alibeigloo (2010) a effectué l'analyse de la flexion 3D des plaques FG sous sollicitations thermiques et mécaniques. Des solutions précises pour la température, la contrainte et le déplacement sont obtenus pour les plaques simplement appuyées en utilisant la méthode de l'état de l'espace.

Des solutions précises pour les vibrations 3D libres et forcées des plaques FG simplement appuyées ont été fournies par Vel et Batra (2004) en utilisant la méthode des séries de puissance. Des solutions précises pour les fréquences naturelles, les déplacements et

les contraintes sont comparés à celles prédites par les modèles ESL. Vel (2010) a étendu le travail précédent (2004) pour les coques FG. Uymaz et Aydogdu (2007) ont présenté des solutions exactes pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev. Li et al. (2008) ont effectué l'analyse de la vibration libre 3D des plaques sandwich FG encastées et simplement appuyées. Les fréquences naturelles de deux types de plaques sandwich FG, à savoir la plaque sandwich avec des faces FG et un noyau homogène et la plaque sandwich avec des faces homogènes et un noyau FG, sont obtenus en utilisant la méthode de Ritz avec les polynômes de Chebyshev. Amini et al. (2009) ont suivi la même méthode de Li et al. (2008) pour dériver la fréquence naturelle et les formes de mode pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG reposant sur une fondation élastique avec des conditions aux limites arbitraires. Lu et al. (2009) et Malekzadeh (2009) ont également étudié la vibration libre 3D des plaques FG reposant sur une fondation élastique, mais ont utilisé des approches différentes. Lu et al. (2009) ont adopté la méthode de l'état de l'espace pour dériver des solutions exactes pour la fréquence naturelle des plaques simplement appuyées, alors que Malekzadeh (2009) a utilisé la solution DQM et la solution des séries pour obtenir des solutions semi-analytiques pour la fréquence naturelle des plaques type Levy. La DQM a également été adoptée par Malekzadeh et al. (2010) pour étudier la réponse de la vibration libre 3D des plaques annulaires FG en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Les solutions 3D exactes de la vibration libre des plaques rectangulaires FG avec des conditions aux limites générales ont également été fournies par Jin et al. (2014) en utilisant la méthode de Rayleigh Ritz. Reddy et Kant (2014) ont présenté une solution analytique pour l'analyse de la vibration libre 3D des plaques FG simplement appuyées en utilisant la méthode des séries de puissance.

Kim et Na (2004) ont étudié le comportement du flambement thermique 3D des plaques FG sous élévation de température uniforme, linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur au moyen d'un élément solide de 18 nœuds. Pour éviter le blocage du cisaillement et pour maintenir la stabilité cinématique des structures minces, une formulation assumée de déformation mixte a été employée. Na et Kim (2005) ont amélioré leur travail antérieur (2004) en tenant compte de l'augmentation de la température en fonction du temps. Na et Kim (2006) ont étendu leur travail antérieur (2005) aux plaques sandwich FG avec des faces homogènes et un noyau en FG. Na et Kim (2006) ont employés la méthode des éléments finis pour étudier le post flambement thermique 3D des plaques FG sous élévation de température

CHAPITRE III : REVUE SUR LES TRAVAUX REALISES SUR LES STRUCTURES FGM

uniformes ou non uniforme. Un élément solide de 18 nœuds basé sur la relation de Green-Lagrange a été développé pour tenir compte de la grande déformation. Le schéma d'itération de Newton-Raphson a été utilisé pour déterminer le chemin d'équilibre post flambement. Na et Kim (2006) ont étendu leur travail antérieur (2006) pour étudier la flexion non linéaire 3D des plaques FG soumises à des charges de pressions uniformes et à des charges thermiques.

CHAPITRE IV

MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDITIONS ELASTIQUES

IV.1 Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) sont un nouveau type de matériaux hétérogènes (Yamanouchi et al., 1990; Koizumi, 1993, 1997) où le gradient des propriétés macroscopiques change dans l'espace. Ainsi, les FGMs peuvent être confectionnés pour répondre à des performances matérielles aux différentes parties de la structure. Actuellement, les FGMs sont utilisés dans de diverses applications structurelles telles que la mécanique, le domaine spatial, nucléaire et l'ingénierie civile.

Récemment, plusieurs travaux scientifiques s'intéressant au comportement statique et dynamique des matériaux FGM ont vus le jour. Une revue intéressante de la littérature sur ces travaux peut être trouvée dans l'article de Birman and Byrd (2007).

Reddy (2000) a présenté des modèles basés sur la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre pour l'analyse des plaques fonctionnellement graduées. Pour ce faire, il a utilisé la solution de Navier et celle en éléments finis.

Cheng and Batra (2000) ont obtenus les équations des plaques polygonales fonctionnellement graduées et simplement appuyées en utilisant la théorie du premier et du troisième ordre de cisaillement. Une relation exacte a été établie entre la flèche d'une plaque fonctionnellement graduée et celle d'une plaque homogène de Kirchhoff. Vel et Batra (2002, 2004) ont développés une analyse tridimensionnelle des contraintes thermiques et des vibrations libre et forcée des plaques FG rectangulaire simplement appuyée. Qian et al. (2004) ont conduit une investigation sur les vibrations forcé et libre ainsi que les déformations statiques d'une plaque FG épaisse simplement appuyée par le biais de la théorie d'ordre élevé de déformation normale et de cisaillement ainsi que la méthode de Petrov-Galerkin. Zhong et Yu (2006) ont utilisés l'approche state-space pour analyser la vibration forcée et libre d'une plaque FG piézoélectrique épaisse simplement appuyée.

L'analyse de la vibration libre d'une plaque rectangulaire FG simplement appuyée a été étudiée par Pradyumna et Bandyopadhyay (2008) en utilisant une formulation d'éléments finis d'ordre élevé. Matsunaga (2008) a étudié les fréquences naturelles et les contraintes de flambement des plaques FG rectangulaire simplement appuyée en se basant sur la théorie des plaques d'ordre élevé en 2 D. Lü et al. (2009) ont développé la solution exacte 3D de la vibration libre des plaques épaisses FG sur les fondations type Pasternak. L'analyse de quelques solutions approximatives 3D pour la réponse en vibration libre des plaques composite multicouche et des plaques FG one été présentées en utilisant la RMVT.

CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

Certaines analyses approximatives 3D de la réponse de la vibration libre des plaques composites multicouches et FG ont été également présentés en utilisant le RMVT- et les méthodes de la couche finis à base de la PVD (Wu et Li, 2010a).

Benachour, et al. (2011) ont étudié la vibration libre des plaques FG en utilisant la théorie des plaques raffinées à quatre variables. El Meiche, et al. (2011) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique qui prend en compte les effets de déformation de cisaillement transverse et ce pour l'analyse du flambement et de la vibration libre des plaques sandwichs épaisses FG. Brischetto (2013) a développé un modèle exacte en élasticité tridimensionnel pour l'analyse de la vibration libre des plaques et coques FG monocouches et sandwichs simplement appuyés. Bachir Bouiadjra et al (2013) ont étudié le comportement du flambement thermique non linéaire des plaques FG en utilisant l'efficente théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal. Houari et al (2013) ont étudié la réponse thermoélastique en flexion des plaques sandwichs en utilisant la nouvelle théorie d'ordre élevé de déformation normale et de cisaillement. Belabed, et al. (2014) ont développé une théorie simple de cisaillement à ordre élevé et de déformation normale des plaques FG. Ait Amar Meziane, et al. (2014) ont présenté une théorie raffinée simple de déformation de cisaillement de la vibration et du flambement des plaques sandwichs FG ayant une variation exponentielle des propriétés et reposant sur fondations élastiques sous diverse conditions d'appuis. Hebali, et al. (2014) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi 3D pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM. Hamidi et al (2014) ont présenté une théorie sinusoïdale des plaques à cinq inconnus avec la prise en compte de l'effet d'étirement pour l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG. Chakraverty and Pradhan (2014) ont étudié le comportement en vibration libre des plaques rectangulaires FG ayant une variation exponentiel dans un environnement thermique dans des conditions générales d'appuis. Ait Yahia et al (2014) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FG avec la prise en compte de la porosité en utilisant plusieurs théorie de déformation de cisaillement des plaques d'ordres élevés. Plusieurs études concernant le flambement, flexion et vibration des plaques FG/poutres et les plaques composites qui peuvent être trouvées dans les références récentes telles que (Attia et al, 2014; Draiche et al, 2014; Khalfi et al, 2014; Nedri et al, 2014; Mahi et al, 2014).

Récemment, les investigations des plaques FG reposant sur des fondations élastique ont été identifiées comme un acte de recherche intéressant. Bien que peu d'études sur la vibration et

CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

l'analyse du flambement des plaques rectangulaire homogènes isotrope sur fondations élastiques ont été réalisées (à titre d'exemple, Xiang et al. (1994), Xiang (2003), Lam et al. (2000), Zhou et al. (2004)) et les références citées), les recherches sur le comportement dynamique et en flambement des plaques FG ont reçues peut d'attention. Cheng and Kitipornchai (1999) ont propose une analogie pour déduire des valeurs propres exacte explicite du flambement mécanique, flambement hydrothermique, et la vibration des plaques FG sous fondations type Winkler–Pasternak basés sur la théorie de déformation du premier ordre. Yang and Shen (2001) on se basant sur la théorie classique des plaques (CPT), ont étudié à la fois la vibration libre et la réponse transitoire des plaques rectangulaires minces sujette à un chargement latéral impulsif, reposant sur des fondations élastiques type Pasternak. En se basant sur la CPT, Yang et Shen (2001) ont étudié à la fois la vibration libre et la réponse transitoire de la déformation initiale des plaques rectangulaires minces FG soumises à des charges latérales impulsives, reposant sur une fondation élastique.

Le second ordre statistique du flambement des plaques FG rectangulaire encastées et reposant sur fondations élastiques type Pasternak et soumise à une compression uniforme aux bords a été étudiées par Yang et al. (2005) par le biais de la FSDT. Ying et al. (2008) ont présenté une solution d'élasticité 2D de la flexion et de la vibration libre des poutres FG reposant sur fondations élastiques type Pasternak

Huang et al. (2008) ont utilisé les références de la solution d'élasticité 3D pour l'étude du comportement en flexion des plaques épaisses simplement appuyées sur fondations élastiques type Pasternak. Yaghoobi and Yaghoobi (2013) ont étudié le comportement en flambement des plaques sandwiches symétriques avec des faces FGM, sujettes à des chargements mécanique, thermique et thermomécanique et reposant sur des fondations élastiques en utilisant la théorie de déformation du premier ordre. Boudarba et al. (2013) on se basant sur une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée, ont analysé la réponse en flexion thermomécanique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques, Tounsi et al. (2013a) ont analysé le comportement en flexion thermoélastique des plaques sandwiches FGM. Zidi et al. (2014) ont étudié la réponse en flexion des plaques FGM sous chargement hygro-thermo-mécanique en utilisant la théorie raffiné à quatre variables.

Due à son efficacité et sa simplicité, la théorie de déformation du premier ordre FSDT a été utilisée pour l'analyse des plaques modérément épaisse. La théorie de déformation du premier ordre FSDT proposée par Reissner (1950) et une autre proposée par Mindlin (1951) sont

CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

considérées comme des théories pionnières qui prennent en compte les effets de cisaillement. Praveen and Reddy (1998) a examine la réponse non linéaire statique et dynamiques des plaques FG céramique-métal en utilisant la théorie de déformation du premier ordre FSDT et le tenseur de Von Karman. Croce and Venini (2004) ont formulé un élément fini hiérarchique selon la théorie de Reissner–Mindlin theory. Zenkour et al. (2011) ont présenté une théorie mixte de déformation en cisaillement transverse du premier ordre(MFPT) la réponse en flexion des plaques rectangulaire orthotrope sur fondations élastiques. Ensuite, Zenkour and Radwan (2013) ont prolongé cette théorie au comportement en flexion des plaques FG. Il est a noter que cette théorie (Zenkour et al., 2011; Zenkour and Radwan, 2013) est une modification de la théorie conventionnelle du premier ordre FSDT. Dans la FMPT, les déplacements et les contraintes doivent être considérées comme arbitraire. Récemment, Thai and Choi (2013ab) ont développé simple théorie du premier ordre FSDT contenant seulement quatre inconnus pour les plaques composites et FGM. En plus, les avantages et les inconvénients de la mise en œuvre des modèles numériques basés sur la FSDT ont été discutés par Yin et al (2014). Ainsi, il est à noter que le modèle basé sur la théorie de déformation de cisaillement du FSDT est souvent utilisé due à leur simplicité dans l'analyse et la programmation. Récemment, Sadoune et al (2014) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour les plaques composites.

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (NFSDT) pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des poutres FG est développée incluant l'interaction plaques-fondations. En utilisant la même méthodologie développée par Thai and Choi (2013ab), cette théorie est basée sur la supposition que le déplacement transversal consiste en deux composantes l'une de flexion et l'autre de cisaillement, pour lesquelles celle de flexion ne contribue pas dans les forces de cisaillement et la composante de cisaillement ne contribue pas avec le moment de flexion. Contrairement a la theorie de déformation de cisaillement du premier ordre conventionnelle FSDT (Reissner, 1950; Mindlin, 1951), la theorie de déformation de cisaillement du premier ordre a deux inconnus est proposée. Comme les propriétés matérielles des plaques FG varie suivant l'épaisseur de la plaque, la surface neutre de telles plaques ne coïncide pas avec la surface moyenne géométrique plane (Yahoobi and Feraidoon, 2010; Ould Larbi et al., 2013; Bouremana et al., 2013; Bousahla et al., 2014; Fekrar et al., 2014; Bourada et al., 2014). En plus, Bouremana et al. (2013) and Ould Larbi et al. (2013) ont démontré que le couplage membrane-flexion dans les équations constitutive de plaque FG est inexistant si le système de coordonné est situé a la

CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

surface physique neutre de la plaque. A cet effet, les équations gouvernant les plaques FG peuvent être simplifiées. On se basant sur la présente théorie et la position exacte de la surface neutre du principe de Hamilton's, les équations du mouvement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sont obtenues. Des solutions analytiques de la flexion et de la vibration libre des plaques FG simplement appuyé sont obtenues. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer la validité et la précision de la théorie NFSDT.

IV.2 Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement (NFSDT) des plaques FG

Due à la symétrie des propriétés matérielles des plaques par rapport à la surface moyenne, les équations membrane-flexion sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est proprement définie dans la direction de l'épaisseur des plaques FG pour être la surface neutre, les propriétés de la plaque FG deviennent symétriques par rapport à cette surface.

Pour spécifier la position de la surface neutre des plaques FG deux différents plans sont retenus pour mesurer de la coordonnée «z» nommée z_{ms} et z_{ns} qui sont mesurées à partir de la surface moyenne et la surface neutre de la plaque respectivement (voir figure IV.1)

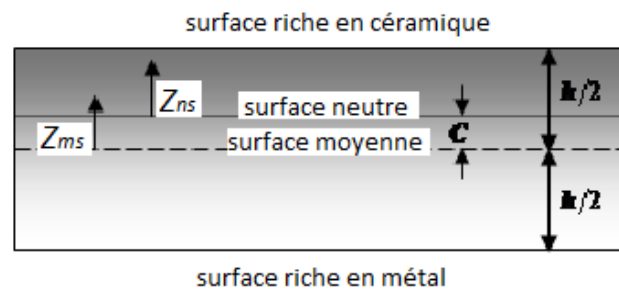


Figure IV-1 : position des surfaces moyenne et neutre de la plaque fonctionnellement graduée (FGP)

IV.2.1. Hypothèses de la présente théorie (hypothèses de bases)

Les hypothèses retenues pour la présente théorie s'énoncent comme suit :

- L'origine du système de coordonnées cartésien est pris dans la surface neutre des plaques FG;
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, par conséquent, les contraintes générées sont infinitésimales ;
- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes en plan σ_x et σ_y .

CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

- cette théorie suppose des contraintes de cisaillement transverse, ce qui necessite un coefficient correcteur de cisaillement dans le but de satisfaire les conditions aux limites aux faces supérieure et inférieure de la plaque.
- Le déplacement transversal « w » comprend deux composantes, une de flexion « w_b » et l'autre de cisaillement « w_s » et ces dernières sont fonction des coordonnées x , et y et du temps t seulement.

IV.2.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses présentées dans la section précédente, le champ de déplacement est obtenu en utilisant :

$$u(x, y, z_{ns}, t) = u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (IV.1a)$$

$$v(x, y, z_{ns}, t) = v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (IV.1b)$$

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (IV.1c)$$

Où, u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z . u_0, v_0, w_b et w_s sont les déplacements de la surface neutre.

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq.(1) sont

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.2)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.3)$$

IV.2.3 Equations constitutives

Les plaques FG sont un mélange de céramique et de métal et leurs propriétés sont supposées varier suivant l'épaisseur selon une simple loi de puissance. La fraction volumique de la céramique V_c est exprimée en terme des coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (IV.4)$$

Où p est l'indice matériel qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. C est la distance entre les deux surfaces moyenne et neutre. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée peuvent être obtenues par le biais de la loi de mélange de Voigt (Suresh et Mortensen 1998). Ainsi, en utilisant l'équation (IV-1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FG notées \mathbf{P} , en fonction de la coordonnée d'épaisseur deviennent :

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad \mathbf{P}_{CM} = \mathbf{P}_C - \mathbf{P}_M \quad (IV.5)$$

Avec \mathbf{P}_M et \mathbf{P}_C sont les propriétés correspondant au métal et à la céramique.

où P représente la propriété effective du matériau telles que le module de Young E , la masse volumique ρ , les indices m et c représentent les constituants du métal et de la céramique respectivement. La valeur de l'indice matériel p égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, et quand p tend vers l'infinie cela indique une plaque entièrement métallique.

La position de la surface neutre de la plaque FG est déterminée de telle manière que le moment par rapport au module de Young soit égal à zéro comme suit (Ould Larbi et al., 2013)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (IV.6)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue par :

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (IV.7)$$

Il est clair que le paramètre C est égal à zéro pour les plaques homogènes et isotropes.

Les relations linéaires constitutives de la plaque FG peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s Q_{44} & 0 \\ 0 & k_s Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (IV.8)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. k_s est un facteur de correction de cisaillement qui est analogue à un facteur de correction de cisaillement proposée par Mindlin (1951). En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (5), les coefficients de rigidités, Q_{ij} , peuvent être exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ms})}{1 - \nu^2}, \quad (IV.9a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ms})}{1 - \nu^2}, \quad (IV.9b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ms})}{2(1 + \nu)}, \quad (IV.9c)$$

K_s est un facteur de correction de cisaillement qui est analogue au facteur de correction cisaillement proposé par Mindlin.

IV.2.4 Equations du mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvement. Le principe peut être déclaré sous forme analytique (Reddy, 2002)

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPOSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (IV.10)$$

Ou δU est la variation de l'énergie de (strain) déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est calculée par

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz_{ns} \\ &= \int_A \left\{ -M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right\} dA \end{aligned} \quad (IV.11)$$

Ou M et Q sont les résultantes des efforts qui sont définies comme suit :

$$M_i^b = \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} z_{ns} \sigma_i dz_{ns}, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz_{ns}. \quad (IV.12)$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée par

$$\delta V = - \int_A (q + f_e) \delta w dA \quad (IV.13)$$

Où q est la charge transverse appliquée et f_e est la force de réaction de la fondation du modèle de Pasternak:

$$f_e = K_w w - J_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (IV.14)$$

Ou K_w est le coefficient de Winkler et J_1, J_2 sont les modules de cisaillement de la fondation (cisaillement de la couche de fondation rigide). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $J_1 = J_2 = J_0$. si le cisaillement de la couche de fondation rigide est négligé, la fondation type Pasternak devient fondation type Winkler.

La variation de l'énergie cinétique des plaques peu s'écrire :

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z_{ns}) dA dz_{ns} \\ &= \int_A \left\{ I_0 [(\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)] + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (IV.15)$$

Où la notation en point comme exposant indique la dérivée par rapport à la variable temporelle t ; $\rho(z_{ns})$ est la masse volumique et (I_0, I_2) sont les inerties massiques et définies comme suit :

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} (1, z_{ns}^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns} \quad (IV.16)$$

En substituant les expressions de δU , δV et δK des équations (11), (13), et (15) dans l'équation (10), intégrant par parties et en collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_s et δw_b les équations suivantes du mouvement de la plaque sont obtenues

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (IV.17a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (IV.17b)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q = I_0 (\dot{w}_b + \dot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \quad (IV.17c)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - f_e + q = I_0 (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \quad (IV.17d)$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (8) par la suite dans l'équation (12), les résultantes de déformation sont obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \end{Bmatrix}, \quad Q = A^s \gamma, \quad (IV.18)$$

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPOSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad (IV.19a)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (IV.19b)$$

$$Q = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.19c)$$

Où A_{ij} , D_{ij} , etc., sont les rigidités des plaques, définies par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} \\ A_{12} & D_{12} \\ A_{66} & D_{66} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} Q_{11}(1, z_{ns}^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (IV.20a)$$

et

$$(A_{22}, D_{22}) = (A_{11}, D_{11}), \quad (IV.20b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = k_s \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} dz_{ns} \quad (IV.20c)$$

En substituant l'équation (18) dans l'équation (17), les équations du mouvement peuvent être exprimées en terme de déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s)

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (IV.21a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (IV.21b)$$

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

$$-D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - f_e + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2\nabla^2\ddot{w}_b \quad (IV.21c)$$

$$A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s - f_e + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (IV.21d)$$

Où d_{ij} et sont d_{ijlm} sont des opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (IV.22)$$

Quand l'effet de cisaillement transverse de déformation est négligé ($w_s = 0$), l'équation (21) donne les équations du mouvement de la plaque FG basée sur la théorie classique des plaques et le concept physique de la surface neutre.

IV.3 Solution exact pour les Plaques FG

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte de l'équation (21a-d). Les conditions aux limites suivantes sont retenues pour la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x^b = 0 \quad \text{à } x = 0, a \quad (IV.23a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y^b = 0 \quad \text{à } y = 0, b \quad (IV.23b)$$

On se basant sur l'approche de Navier, les expressions des déplacements suivants sont choisis pour satisfaire les conditions aux limites des plaques simplement appuyées

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV.24)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée à (m, n) le mode propre, et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et $i = \sqrt{-1}$.

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPONSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

Dans le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \quad (\text{IV.25})$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En substituant l'équation (24) dans l'équation (21), les solutions sont obtenues par

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{P\} \quad (\text{IV.26})$$

Où $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^t$ et $[K]$ et $[M]$ sont les matrices symétriques données par

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Dans lesquelles :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= 0 \\ a_{14} &= 0 \\ a_{22} &= A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2 \\ a_{23} &= 0 \\ a_{24} &= 0 \\ a_{33} &= D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 + K_w + J_1 \lambda^2 + J_2 \mu^2 \\ a_{34} &= K_w + J_1 \lambda^2 + J_2 \mu^2 \\ a_{44} &= A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2 + K_w + J_1 \lambda^2 + J_2 \mu^2 \\ m_{11} &= I_0 \\ m_{22} &= I_0 \\ m_{13} &= -\lambda I_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

**CHAPITRE IV : MODELE THEORIQUE DU PREMIER ORDRE POUR L'ETUDE DE LA
REPOSE MECANIQUE DES PLAQUES FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES**

$$\begin{aligned}m_{23} &= -\mu I_1 \\m_{33} &= I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\m_{34} &= I_0 \\m_{44} &= I_0\end{aligned}$$

Les composantes généralisées du vecteur de la force $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^t$ sont donnés par

$$\begin{aligned}P_1 &= 0 \\P_2 &= 0 \\P_3 &= -q_0 \\P_4 &= -q_0\end{aligned}\tag{IV.29}$$

CHAPITRE V

RESULTATS ET DISCUSSIONS

V. Résultats et Discussions

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion, et les réponses de vibration des plaques FG simplement appuyées. Deux types de plaques FG sont utilisés dans la présente étude Al / Al₂O₃ et Ti-6Al-4V / ZrO₂, les propriétés du matériau sont indiquées dans le tableau V.1. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature. Dans tous les exemples, un facteur de correction de cisaillement de 5/6 est utilisé pour la présente NFSDT. Le coefficient de Poisson de la plaque est supposé être constant à travers l'épaisseur et égal à 0,3.

Propriétés	Métal		Céramique	
	Aluminum (Al)	Titanium (Ti-6Al-4V)	Alumina (Al ₂ O ₃)	Zirconia (ZrO ₂)
E (GPa)	70	66.2	380	117.0
ρ (kg/m ³)	2702	–	3800	–

Table V.1: Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.

V.1. Problème de la Flexion

Dans cette section, divers exemples numériques sont décrits et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) pour prédire les flèches et les contraintes des plaques FG soumises à une charge répartie sinusoïdale sans dimension. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10 E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \hat{w} = \frac{10^2 D}{a^4 q_0} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} - C \right), \\ \hat{\sigma}_x &= \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{3} - C \right), \quad \hat{\tau}_{xy} = \frac{1}{10 q_0} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{-h}{3} \right), \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} - C \right), \\ K_0 &= \frac{a^4 K_w}{D}, \quad J_0 = \frac{a^2 J_1}{D} = \frac{b^2 J_2}{D}, \quad D = \frac{h^3 E_c}{12(1-\nu^2)}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \end{aligned}$$

Aux fins de vérification, les résultats obtenus par NFSDT sont comparés avec d'autres issus de la littérature. Il convient de noter que les résultats rapportés par Wu et Li (2010b) ont

utilisé la RMVT basée sur la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Cependant, les résultats rapportés par Benyoucef et al. (2010) ont été basés sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Wu et al. (2011) ont employé la RMVT basée sur la méthode des éléments finis et celle de Galerkin pour une analyse quasi-3D des plaques composites multicouches et celles en MGF. Dans le cas des plaques FG sur fondation élastique, Boudierba et al. (2013) ont utilisé une théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique.

Le tableau V.2 montre une comparaison des flèches et des contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée sans fondation élastique soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

Table V.2: comparaison des flèches adimensionnelles et des contraintes d'une plaque carrée en Aluminium/alumina soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
1	Présente (04 inconnus)	0.5891	1.4968	0.6125	0.2348
	FSDT (05 inconnus)	0.5891	1.4968	0.6125	0.2348
	Benyoucef et al. (2010)	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	RMVT basée sur la TSDT ^(a)	0.5890	1.4898	0.6111	0.2506
	RMVT basée sur la collocation ^(b)	0.5876	1.5062	0.6112	0.2509
	RMVT basée sur Galerkin ^(b)	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
2	Présente (04 inconnus)	0.7552	1.4057	0.5459	0.2289
	FSDT (05 inconnus)	0.7552	1.4057	0.5459	0.2289
	Benyoucef et al. (2010)	0.7572	1.3954	0.5441	0.2763
	RMVT basée sur la TSDT ^(a)	0.7573	1.3960	0.5442	0.2491
	RMVT basée sur la collocation ^(b)	0.7572	1.4129	0.5437	0.2495
	RMVT basée sur Galerkin ^(b)	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
4	Présente (04 inconnus)	0.8736	1.1922	0.5693	0.1899
	FSDT (05 inconnus)	0.8736	1.1922	0.5693	0.1899
	Benyoucef et al. (2010)	0.8810	1.1783	0.5667	0.2580
	RMVT basée sur la TSDT ^(a)	0.8815	1.1794	0.5669	0.2360
	RMVT basée sur la collocation ^(b)	0.8826	1.1935	0.5674	0.2360
	RMVT basée sur Galerkin ^(b)	0.8823	1.1941	0.5671	0.2362
8	Présente (04 inconnus)	0.9623	0.9608	0.5887	0.1501
	FSDT (05 inconnus)	0.9623	0.9608	0.5887	0.1501
	Benyoucef et al. (2010)	0.9741	0.9466	0.5856	0.2121
	RMVT basée sur la TSDT ^(a)	0.9747	0.9477	0.5858	0.2263
	RMVT basée sur la collocation ^(b)	0.9727	0.9568	0.5886	0.2251
	RMVT basée sur Galerkin ^(b)	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261

^(a) donné par Wu et Li (2010b)

^(b) donné par Wu et al. (2011)

Les résultats obtenus sont comparés avec le travail des auteurs mentionnés ci-dessus, et il peut être conclu, en général, que les résultats sont en bon accord avec toutes les théories comparées dans cette section, en particulier avec les résultats fournis par Benyoucef et al. (2010) pour toutes les valeurs considérées comme de l'indice de loi de puissance p . En outre, on peut voir que la théorie proposée (NFSDT) et FSDT classique donnent des résultats identiques des flèches ainsi que des contraintes pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p . Il convient de noter que le nombre d'inconnus dans la présente théorie est de quatre, tandis qu'il est de cinq dans la FSDT et dans d'autres théories de déformation de cisaillement.

Le tableau V.3 présente la comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelle d'une plaque rectangulaire FG avec ou sans fondations élastiques soumise à une charge mécanique.

Table V.3: Effet de l'indice de loi de puissance et des paramètres élastiques de la fondation sur la dimension et les contraintes d'une plaque rectangulaire FG en titane / Zirconia ($a = 10 h, b = 2a, q_0 = 100$).

p	K_0	J_0	Théories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Céramique	0	0	Présente	0.68135	0.42148	0.86459	-0.30558
			Bouderba et al. (2013)	0.68131	0.42424	0.86240	-0.39400
			FSDT ^(a)	0.68135	0.42148	0.86459	-0.30558
			CPT ^(a)	0.65704	0.42148	0.86459	–
	100	0	Présente	0.40525	0.25070	0.51426	-0.18175
			Bouderba et al. (2013)	0.40523	0.25233	0.51296	-0.23435
			FSDT ^(a)	0.40525	0.25070	0.51426	-0.18175
			CPT ^(a)	0.39652	0.25437	0.52183	–
	0	100	Présente	0.083655	0.051750	0.10615	-0.037518
			Bouderba et al. (2013)	0.083654	0.052093	0.10589	-0.048377
			FSDT ^(a)	0.083655	0.051750	0.10615	-0.037518
			CPT ^(a)	0.08328	0.05342	0.10959	–
	100	100	Présente	0.077198	0.047754	0.097959	-0.034622
			Bouderba et al. (2013)	0.077197	0.048071	0.097724	-0.044643
			FSDT ^(a)	0.077198	0.047754	0.097959	-0.034622
			CPT ^(a)	0.07688	0.04932	0.10116	–
0.5	100	100	Présente	0.078732	0.045460	0.081870	-0.029835
			Bouderba et al. (2013)	0.078729	0.045788	0.081728	-0.038066
			FSDT ^(a)	0.078732	0.045460	0.081870	-0.029835
			CPT ^(a)	0.078463	0.04693	0.08451	–
1	100	100	Présente	0.079322	0.044575	0.073208	-0.027163
			Bouderba et al. (2013)	0.079321	0.044892	0.073054	-0.035023
			FSDT ^(a)	0.079322	0.044575	0.073208	-0.027163
			CPT ^(a)	0.07907	0.04604	0.07561	–

2	100	100	Présente	0.079753	0.044297	0.067395	-0.024345
			Bouderba et al. (2013)	0.079758	0.044595	0.067185	-0.032215
			FSDT ^(a)	0.079753	0.044297	0.067395	-0.024345
			CPT ^(a)	0.07950	0.04581	0.06969	–
5	100	100	Present	0.080141	0.045462	0.064399	-0.022053
			Bouderba et al. (2013)	0.080150	0.045736	0.064125	-0.029922
			FSDT ^(a)	0.080141	0.045462	0.064399	-0.022053
			CPT ^(a)	0.07989	0.04710	0.06672	–
Métal	100	100	Présente	0.081191	0.050227	0.058294	-0.020603
			Bouderba et al. (2013)	0.081190	0.050559	0.058148	-0.026565
			FSDT ^(a)	0.081191	0.050227	0.058294	-0.020603
			CPT ^(a)	0.08099	0.05196	0.06030	–

^(a)donné par Bouderba et al. (2013)

La plaque FG utilisée est constituée d'un mélange de titane et de zirconia comme celle utilisée par Bouderba et al. (2013). Les résultats obtenus sont comparés à ceux de Bouderba et al. (2013) et un bon accord est observé pour toutes les valeurs considérées de l'indice de loi p et des paramètres de fondation élastique. Il est à constater que les flèches et les contraintes diminuent avec l'existence d'une fondation élastique. L'introduction du paramètre de fondation de Winkler donne des résultats supérieurs que ceux avec l'introduction des paramètres de fondation de Pasternak. Comme la fraction volumique exponentielle augmente pour les plaques FG, cela fait accroître la flèche. En plus, les contraintes sont également sensibles à la variation de l'indice p .

En général, Il peut être conclu à partir des tableaux V.2 et V.3, qu'un bon accord entre les résultats est obtenu, sauf pour le cas des contraintes de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ où une différence entre la présente théorie et des modèles basés sur la RMVT-est constatée. L'écart entre la théorie actuelle et les solutions précises augmente, lorsque l'indice de loi de puissance devient supérieur. Cela est dû au fait que la présente théorie viole les conditions aux limites des contraintes libres sur la surface de la plaque et en raison de l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement constant pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p . Pour surmonter ce problème, les contraintes de cisaillement transversales peuvent être calculées en utilisant les équations d'équilibre, plutôt que d'utiliser l'équation constitutive. Pour illustrer l'exactitude de la théorie actuelle pour une large gamme d'indice de loi de puissance p , rapport d'épaisseur a/h , le rapport a/b , les variations de la flèche adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice de la loi de puissance p , rapport d'épaisseur a/h , rapport a/b sont illustrés dans les figures V.1,2 et 3, respectivement, pour une plaque FG

soumise à une charge sinusoïdale. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par la CPT et la FSDT classique. On peut voir que les résultats de la présente théorie et la FSDT conventionnelle sont identiques, tandis que la CPT sous-estime la flèche de la plaque.

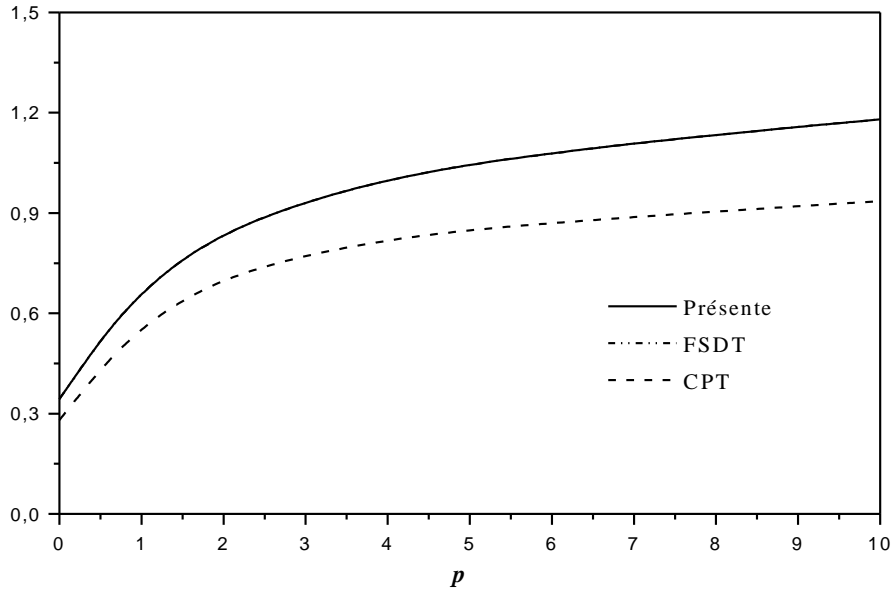


Fig. V.1: La comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction de l'Indice de la loi de puissance p ($a/h = 5$).

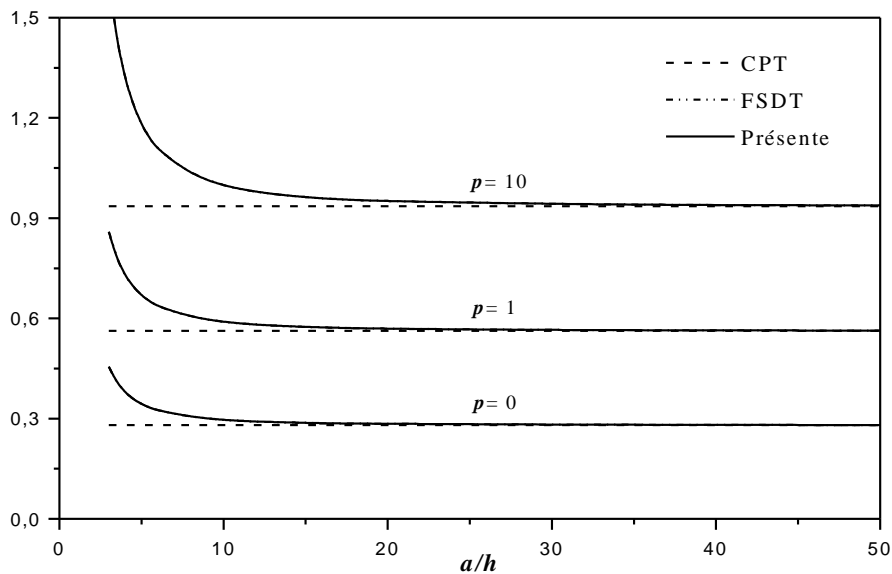


Fig. V.2: comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b .

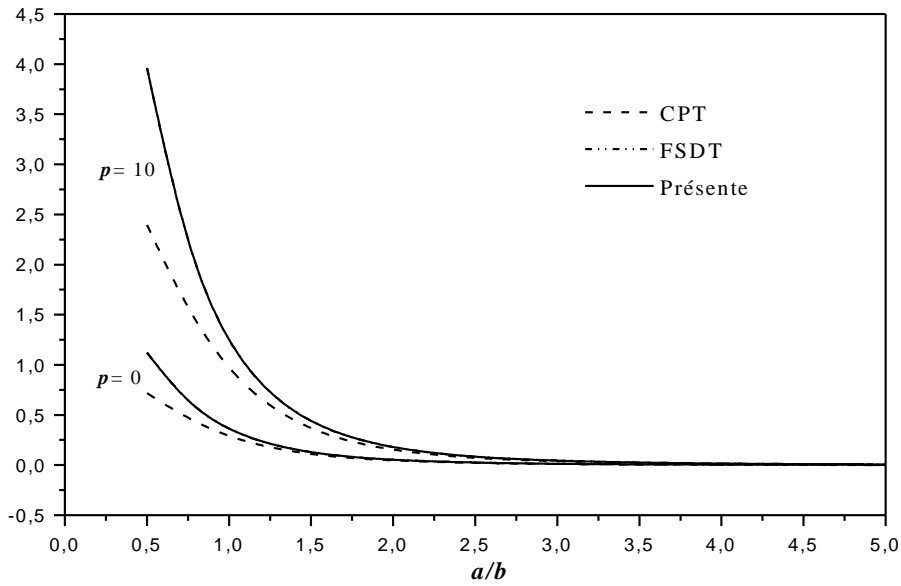


Fig. V.3: Comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b ($a/h = 5$).

Étant donné que les effets de déformation transversale de cisaillement ne sont pas considérés dans la CPT, les valeurs de la flèche adimensionnelle \bar{w} dées par la CPT sont indépendantes du rapport d'épaisseur a/h (voir Fig. V.2).

La figure V.3 montre les effets du rapport a/b en fonction de la flèche adimensionnelle \bar{w} de la plaque FG. Les flèches trouvées par les différentes théories diminuent à mesure que le rapport a/b augmente. Il convient de noter que la théorie proposée (NFSDT) comporte quatre inconnues contre cinq dans le cas de la FSDT classique.

L'effet des paramètres de fondation élastiques (K_0 et J_0) et le rapport d'épaisseur a/h sur la flèche \bar{w} de la plaque carrée FG ($p = 2$) est présenté dans les figures V.4 et 5. Comme prévu, les flèches diminuent progressivement à mesure que le paramètre de Winkler K_0 ou le paramètre de cisaillement de Pasternak J_0 augmente.

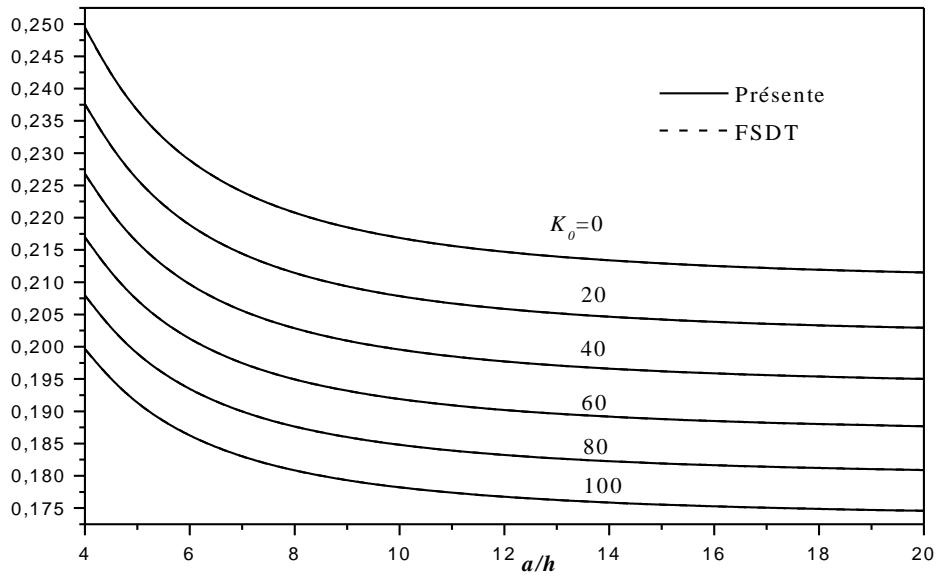


Fig. V.4: Effet du paramètre du module de Winkler sur la flèche dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées de titane / zircon ($p = 2$) pour différent rapport de a / h avec $J_0 = 10$ et $q_0 = 100$.

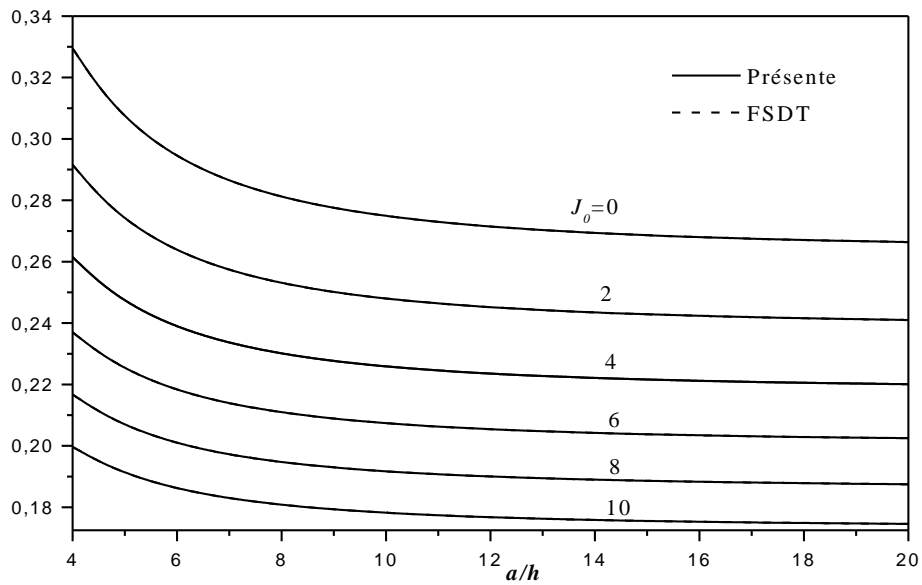


Fig. V.5: Effet du paramètre du module de cisaillement de Pasternak sur la flèche dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées de titane / zircon ($p = 2$) pour différent rapport de a / h avec $K_0 = 10$ et $q_0 = 100$.

On peut également voir que l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h entraîne une diminution de la flèche au centre de la plaque FG.

L'effet des paramètres de fondation élastiques (K_0 et J_0) sur la contrainte axiale $\hat{\sigma}_x$ de la plaque carrée FG ($p = 2$) est représenté dans les figures 6 et 7. On voit que les contraintes de compression maximales se produisent à un point proche de la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, à un point proche de la surface supérieure de la plaque FG.

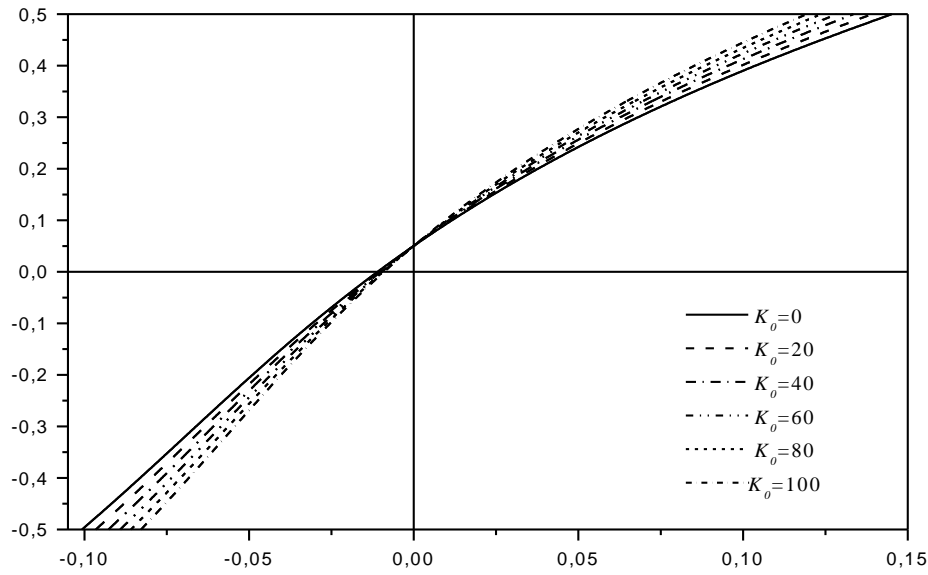


Fig.V.6: Variation de la contrainte axiale dimensionnelle ($\hat{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée Titanium / Zirconia ($p = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_0 avec $J_0 = 10$, $q_0 = 100$ et $a/h = 10$.

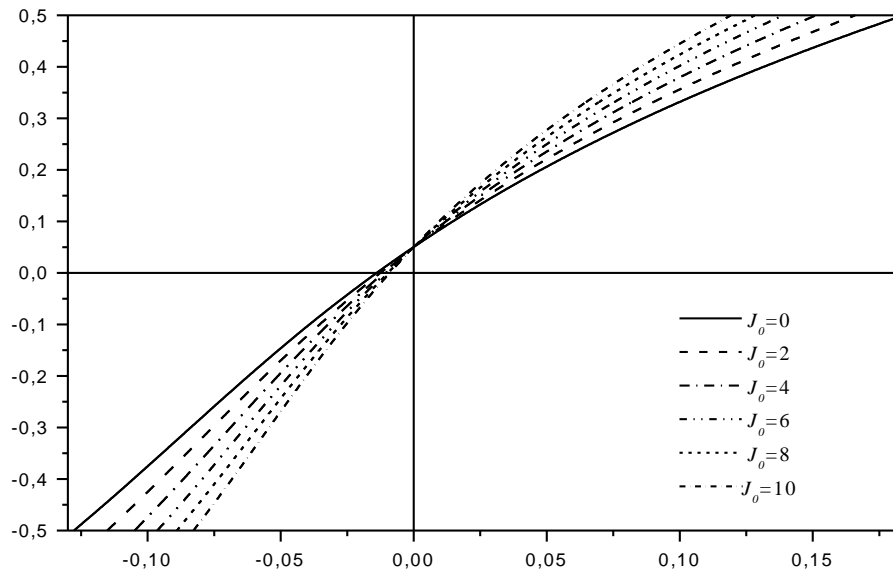


Fig. V.7: Variation e la contrainte axiale dimensionnelle d ($\hat{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée Titanium / Zirconia ($p = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement de Pasternak J_0 avec $K_0 = 10$, $q_0 = 100$ et $a/h = 10$.

En outre, il peut être observé à partir de ces figures que la fondation élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale. On observe que la contrainte normale diminue progressivement avec K_0 ou J_0 . Cependant, l'effet du paramètre du module de cisaillement de Pasternak est plus important que celui de Winkler.

V.2. Problème de la vibration libre

Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées dans ce qui suit:

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}, \Omega = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, ; J_0 = \frac{a^2 J_1}{D_m} = \frac{b^2 J_2}{D_m}, D = \frac{h^3 E_m}{12(1 - \nu^2)}$$

La fréquence naturelle adimensionnelle de la plaque carrée obtenue à partir de la théorie proposée (NFSDT) est comparée à ceux rapportés par Hosseini-Hashemi et al. (2011a) basée sur la FSDT et Hosseini-Hashemi et al. (2011b) basée sur la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Les résultats sont donnés dans le tableau 4 pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de loi de puissance p .

Table V.4: Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\hat{\omega}$) de la plaque carrée en Aluminium / Alumina

a/h	Méthode	Indice de la loi de puissance (p)				
		0	0.5	1	4	10
	FSDT ^(a)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	TSDT ^(b)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1398	0.1301
	Présente	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	FSDT ^(a)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	TSDT ^(b)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Présente	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	FSDT ^(a)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	TSDT ^(b)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Présente	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

^(a)Hosseini-Hashemi et al. (2011a)

^(b)Hosseini-Hashemi et al. (2011b)

D'après le tableau V.4, on peut observer que les présents résultats sont en excellent accord avec ceux acquis par la FSDT (Hosseini-Hashemi et al., 2011a), et la TSDT (Hosseini-Hashemi et al., 2011b).

Les quatre premières fréquences naturelles ($\bar{\omega}$) de la plaque rectangulaire FG ($b = 2a$) sont comparés, pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport d'épaisseur avec ceux donnés par Hosseini-Hashemi et al. (2011a) basés sur la FSDT et à ceux obtenus avec la TSDT (Reddy, 2000) dans le tableauV.5. On peut voir que les résultats prévus par la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) et TSDT sont presque identiques pour tous les modes de vibration des plaques minces et épaisses. En

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

outre, la théorie proposée avec seulement quatre fonctions inconnues donne une prévision plus précise de la fréquence naturelle par rapport à la FSDT conventionnel qui nécessite cinq inconnues.

Table V.5: Comparaison des quatre premières fréquences adimensionnelle ($\bar{\omega}$) de la plaque rectangulaire en aluminium / alumine ($b = 2a$).

a/h	Mode (m,n)	Méthode	Indice de la loi de puissance (p)						
			0	0.5	1	2	5	8	10
	1(1,1)	FSDT ^(a)	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		TSDT	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		Présente	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
	2(1,2)	FSDT ^(a)	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		TSDT	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Présente	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	3(1,3)	FSDT ^(a)	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		TSDT	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Présente	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
	4(2,1)	FSDT ^(a)	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		TSDT	10.1164	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954
		Présente	10.1089	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	6.3707	6.2683
	1(1,1)	FSDT ^(a)	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		TSDT	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Présente	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
	2(1,2)	FSDT ^(a)	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		TSDT	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368
		Présente	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
	3(1,3)	FSDT ^(a)	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		TSDT	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7576
		Présente	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
	4(2,1)	FSDT ^(a)	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		TSDT	11.8315	10.0810	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
		Présente	11.8307	10.0737	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
	1(1,1)	FSDT ^(a)	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		TSDT	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Présente	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
	2(1,2)	FSDT ^(a)	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		TSDT	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		Présente	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
	3(1,3)	FSDT ^(a)	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		TSDT	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Présente	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
	4(2,1)	FSDT ^(a)	12.4560	10.5660	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		TSDT	12.4562	10.5677	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909
		Présente	12.4562	10.5657	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9165

^(a)Hosseini-Hashemi et al. (2011a)

Les paramètres de la fréquence fondamentale ω de la plaque carrée Al / Al₂O₃ sont listés dans le Tableau V.6 pour différentes valeurs du rapport épaisseur sur la longueur ($h/a = 0,05, 0,1, \text{ et } 0,2$), l'indice de la loi de puissance ($p = 0, 0,5, 1, 2 \text{ et } 5$) et les paramètres de

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

rigidité de la fondation (K_0, J_0). Les présents résultats sont comparés à ceux obtenus par la FSDT conventionnel et par Baferani et al. (2011) en utilisant la TSDT. Le tableau V.6 montre le fait que tous les résultats sont en excellent accord.

Table V.6: Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) de la plaque FG aluminium / alumina reposant sur fondation élastique.

K_0	J_0	h/a	Méthode	Indice de la loi de puissance (p)				
				0	0.5	1	2	5
0	0	0.05	Présente	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
			FSDT	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
			TSDT ^(a)	0.0291	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
		0.1	Présente	0.1133	0.0963	0.0868	0.0789	0.0744
			FSDT	0.1133	0.0963	0.0868	0.0789	0.0744
			TSDT ^(a)	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767
		0.2	Présente	0.4150	0.3546	0.3204	0.2904	0.2711
			FSDT	0.4150	0.3546	0.3204	0.2904	0.2711
			TSDT ^(a)	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
0	100	0.05	Présente	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
			FSDT	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
			TSDT ^(a)	0.0406	0.0389	0.0382	0.0380	0.0381
		0.1	Présente	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1489
			FSDT	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1489
			TSDT ^(a)	0.1599	0.1540	0.1517	0.1508	0.1515
		0.2	Présente	0.6074	0.5855	0.5752	0.5698	0.5734
			FSDT	0.6074	0.5855	0.5752	0.5698	0.5734
			TSDT ^(a)	0.6080	0.5932	0.5876	0.5861	0.5879
100	0	0.05	Présente	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0205
			FSDT	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0205
			TSDT ^(a)	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.0210
		0.1	Présente	0.1161	0.0999	0.0910	0.0837	0.0799
			FSDT	0.1161	0.0999	0.0910	0.0837	0.0799
			TSDT ^(a)	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821
		0.2	Présente	0.4268	0.3698	0.3380	0.3107	0.2941
			FSDT	0.4268	0.3698	0.3380	0.3107	0.2941
			TSDT ^(a)	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
100	100	0.05	Présente	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
			FSDT	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
			TSDT ^(a)	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
		0.1	Présente	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1517
			FSDT	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1517
			TSDT ^(a)	0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543
		0.2	Présente	0.6156	0.5948	0.5852	0.5804	0.5845
			FSDT	0.6156	0.5948	0.5852	0.5804	0.5845
			TSDT ^(a)	0.6162	0.6026	0.5978	0.5978	0.5993

^(a)donné par Baferani et al. (2011)

Les variations de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque carrée en fonction de l'indice de la loi de puissance p et du rapport d'épaisseur a/h sont reportées dans les figures V.8 et 9, respectivement. On observe que les fréquences adimensionnelles prédites par la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) et la FSDT classique sont identiques, et que la CPT surestime la fréquence dans le cas d'une plaque épaisse.

La figure V.10 montre les effets du rapport a/b en fonction de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque FG. On observe que le paramètre de la fréquence augmente avec l'augmentation du rapport a/b des plaques. On observe que la théorie proposée et la FSDT classique donnent des résultats identiques.

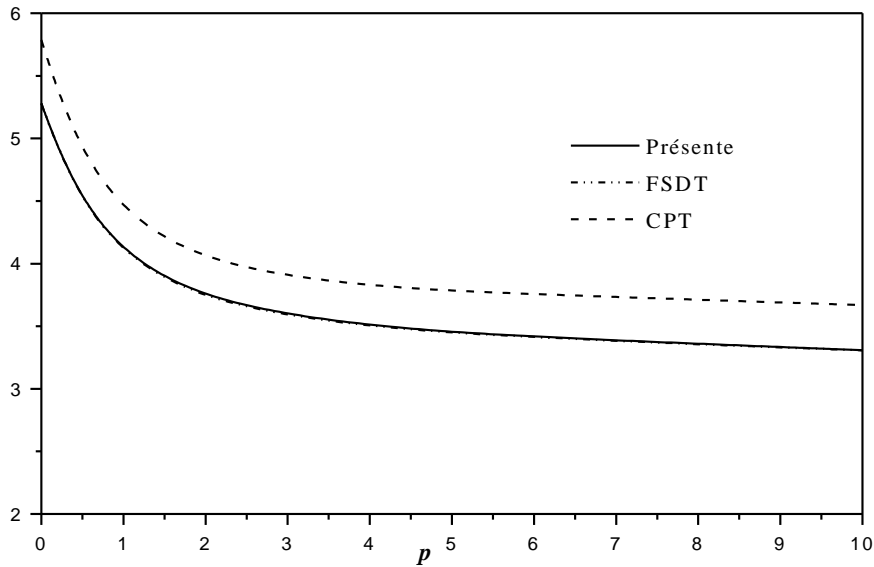


Fig. V.8: Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque Aluminium / Alumine par rapport à l'indice de loi de puissance p ($a/h = 5$).

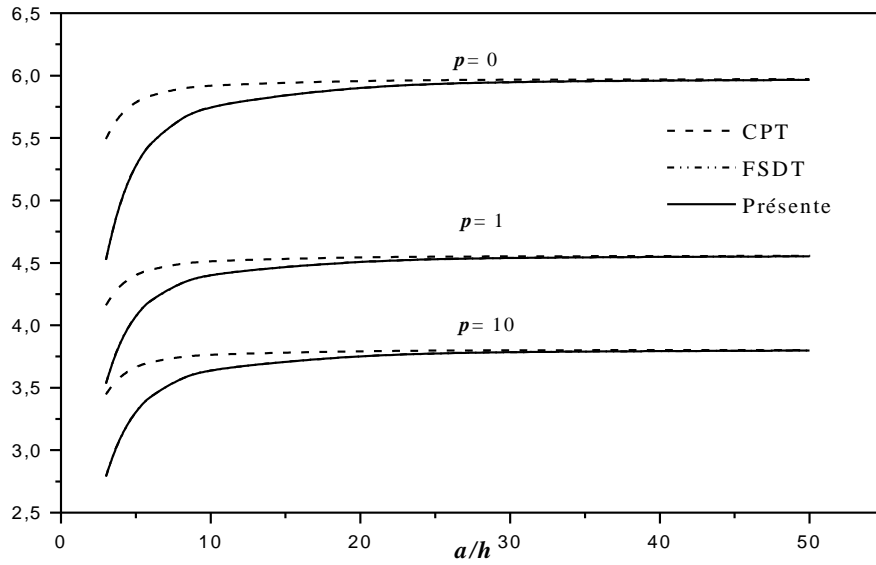


Fig. V.9: Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque Aluminium / Alumina en fonction du rapport (a/h) .

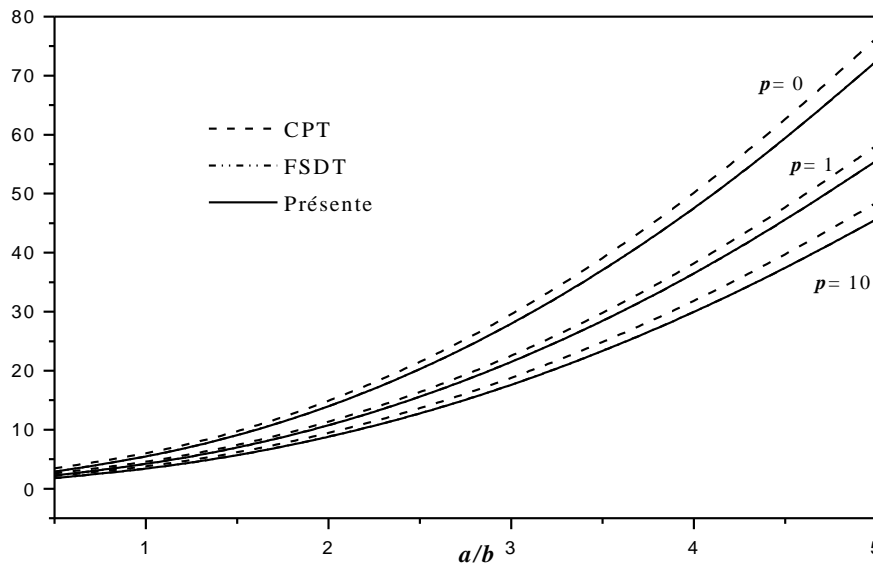


Fig. V.10: Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une plaque Aluminium / Alumina en fonction du rapport a/b ($a/h = 5$).

L'effet de la rigidité de la fondation sur les fréquences fondamentales adimensionnelles (Ω) des plaques carrées FG est représenté sur la Fig.V.11 ($a/h = 10$). La figure montre que les fréquences des plaques FG augmentent lorsque les paramètres de fondation augmentent. Il est également noté dans ce cas que l'effet du paramètre du module de cisailment de Pasternak est plus significatif que le paramètre du module de Winkler.

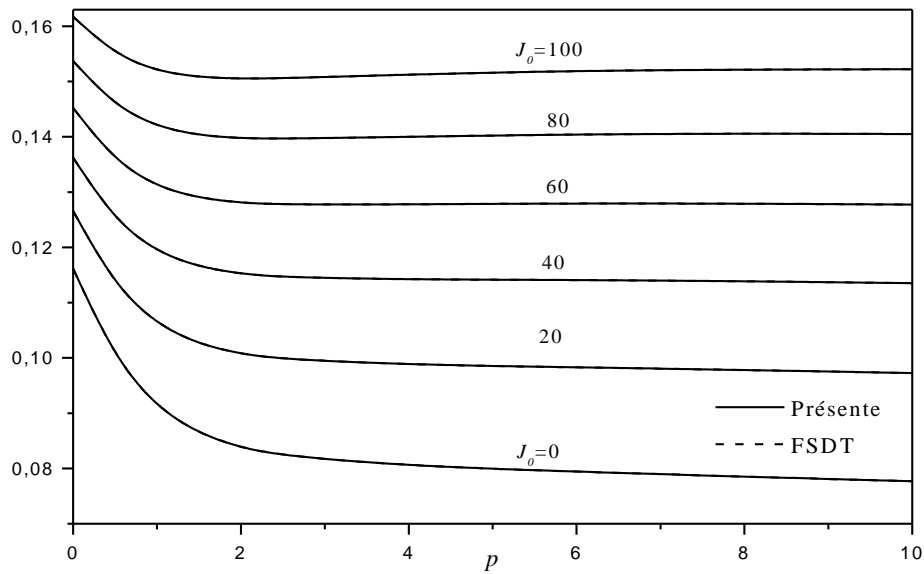


Fig. V.11: Effet du paramètre du module de cisaillement de Pasternak sur les dimensions de la fréquence fondamentale Ω de la plaque carré Aluminium / Alumina pour différents indice de loi de puissance p ($a/h = 10$, $K_0 = 100$).

V.3 Conclusions

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (NFSDT) a été proposée pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduée reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak. La position de la surface neutre de ces plaques a été déterminée. L'efficacité de la théorie est mise en évidence en l'appliquant pour l'analyse statique et dynamique. Les résultats obtenus en utilisant cette nouvelle théorie, se trouvent être en excellent accord avec des études précédentes. Contrairement à la théorie classique de déformation du cisaillement du premier ordre, cette ne contient que quatre inconnues plutôt que cinq pour l'habituel. en plus, elle élimine l'effet du couplage membrane- flexion et facilite considérablement l'analyse technique.

Toutefois, les inconvénients pour la mise en œuvre des présentes modèles numériques basés sur la NFSDT-est discutées et résolues récemment par Yin et al (2014). En conclusion, on peut dire que la théorie NFSDT proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour simuler le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques. La

formulation se prête particulièrement bien à la simulation par éléments finis (Curiel Sosa et al, 2012;. Curiel Sosa et al, 2013).

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'étude de la réponse des plaques en FGM avec sur fondation élastique.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail comme suit :

Une théorie raffinée de plaque basée sur la position exacte de la surface neutre a été utilisée pour déterminer les équations de base de la plaque FG sur fondation élastique. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement où un excellent accord a été observé. L'étude paramétrique menée a permis de souligner les effets des différents paramètres influant la réponse totale des plaques FGM sur fondation élastique.

Dans l'application de technologie, l'étude de ce problème (plaque sur fondation élastique) est très essentielle pour choisir les paramètres de matériau appropriés pour s'assurer que ces plaques ne remettent pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à champ de température élevé.

En perspective, il est prévu de proposer de nouveaux champs de déplacement pour l'étude de la réponse globale des plaques FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermiques.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Allahverdizadeh A, Naei MH, Nikkhah Bahrami M (2008). Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *J Sound Vib*;310(4–5):966–84.

Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, Bakhtiari-Nejad F (2011). Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *J Sound Vib*;330(7):1432–54.

Alijani F, Bakhtiari-Nejad F, Amabili M (2011). Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *Nonlinear Dyn*;66(3):251–70.

Alinia MM, Ghannadpour SAM (2009). Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates. *Compos Struct*;88(3):354–9.

Arshad SH, Naeem MN, Sultana N (2007). Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*;221(12):1483–95.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.

Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 187-212.

Aydogdu M (2012). Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory. *Compos Struct*;82(1):155–7.

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, **48**, 547 – 567.

Baferani, AH, Saidi, AR and Ehteshami, H. (2011), “Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”, *Compos. Struct.*, **93**(7), 1842-1853.

Bao, G, Wang. L. (1995), Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, **60**, 274-283.

Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994). Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Eng* 1994;37(2):229–56.

Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B*, **42**, 1386-1394.

Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M. and Semmah, A. (2014), "Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes", *Compos. Part B*, **57**, 21-24.

Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H. and Adda Bedia, E.A. (2010), "Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Mech. Compos. Mater.*, **46**(4), 425-434.

Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. and Boumia, L. (2008), "The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **41**, 225404.

Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams", *Struct. Eng. Mech.*, **48**(3), 351-365.

Bodaghi M, Saidi AR (2011). Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. *Arch Appl Mech*;81(6):765–80.

Bouazza M, Tounsi A, Adda-Bedia EA, Megueni A (2010). Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Comput Mater Sci*;49(4):865–70.

Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct.*, **14**, 85-104.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 409-423.

Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams”, *Steel Compos.* 1237

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(6), 1350082.

Brischetto, S. (2013), “Exact elasticity solution for natural frequencies of functionally graded simply-supported structures”, *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, **95**(5), 361-400.

Birman V, Byrd LW(2007). Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl Mech Rev*;60(5):195–216.

Chakraverty S, Pradhan KK (2014). Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerosp Sci Technol*;36:132–56.

Chakraverty S, Pradhan KK (2014). Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *Int J Appl Mech*;6(4):1450043.

Chen CS (2005). Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Compos Struct*;68(3):295–302.

Cheng W, Wang ZG, Long SC (2014). Theory analysis of functionally graded materials cylindrical shell buckling under pure bending. *Appl Mech Mater*;580:2928–31.

Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. (2000), “Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories”, *Arch. Mech.*, **52**, 143-158.

Cheng, Z.Q. and Kitipornchai, S. (1999), “Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates”, *J. Eng. Mech.*, ASCE, **125**, 1293-1297.

Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

Croce, L.D. and Venini, P. (2004), “Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **193**, 705-725.

Curiel Sosa, J.L., Anwar Bég, O. and Liebana Murillo, J.M. (2013), “Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique”, *Int. J. Comp. Meth. Eng. Sci. Mech.*, **14**, 452-464.

Curiel Sosa, J.L., Munoz, J.J., Pinho, S.T. and Anwar Bég, O. (2012), “(XFEM) Simulation of damage in laminates”, *Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, Eds. Eberhardsteiner, J. *et al.*, Vienna, Austria, September.

Damanpack AR, Bodaghi M, Ghassemi H, Sayehbani M (2013). Boundary element method applied to the bending analysis of thin functionally graded plates. *Latin Am J Solids Struct*;10:549–70.

Dai KY, Liu GR, Han X, Lim KM (2005). Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method. *Comput Struct* 2005;83(17–18):1487–502.

Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

Della Croce L, Venini P (2004). Finite elements for functionally graded Reissner– Mindlin plates. *Comput Methods Appl Mech Eng*;193(9):705–25.

Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct.*, **17**(1), 69-81.

Du C, Li Y, Jin X (2011). Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Struct*;78:26–36.

Du C, Li Y (2013). Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct*;102:164–74.

Ebrahimi MJ, Najafizadeh MM (2014). Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Appl Math Model*;38(1):308–24.

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53**, 237-247.

Fallah A, Aghdam MM (2013), Kargarnovin MH. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Arch Appl Mech*;83(2):177–91.

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795-810.

Feldman E, Aboudi J (1997). Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos Struct*;38(1):29–36.

Ganapathi M, Prakash T, Sundararajan N (2006). Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads. *J Eng Mech*;132(8):902–5.

Ghannadpour SAM, Ovesy HR, Nassirnia M (2012). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Comput Struct*;108–109:93–9.

Ghomshei M, Abbasi V (2013). Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method. *J Mech Sci Technol*;27(4):1031–9.

Ghugal YM, Shimpi RP (2002). A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *J Reinf Plast Compos* ;21(9):775–813.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 235-253.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech.*, ASCE, **140**, 374-383.

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M. and Adda Bedia, E.A. (2008), “Sound Wave Propagation in Single- Walled Carbon Nanotubes using Nonlocal Elasticity”, *Physica E*, **40**, 2791-2799.

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R. (2011a), “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53**(1), 11-22.

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R. (2011b), “Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure”, *Compos. Struct.*, **93**(2), 722-735.

Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, **76**, 102-111.

Huang H, Han Q, Feng N, Fan X (2011). Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined loads. *Mech Adv Mater Struct*;18(5):337–46.

Huang, Z.Y., Lü, C.F. and Chen, W.Q. (2008), “Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Compos. Struct.*, **85**, 95-104.

Hu Y, Zhang X (2011). Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. *Mech Based Des Struct Mach*;39(3):367–77.

Javaheri R, Eslami MR (2002). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J* ;40(1):162–9.

Jha DK, Kant T, Singh RK (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Compos Struct* ;96:833.

Khandan R, Noroozi S, Sewell P, Vinney J (2012). The development of laminated composite plate theories: a review. *J Mater Sci*;47(16):5901–10.

Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(5), 135007.

Koizumi M (1997). FGM activities in Japan. *Compos B Eng* 1997;28(1):1–4.

Koizumi, M. (1993), “Concept of FGM”, *Ceramic Tran.*, **34**, 3-10.

Kowal-Michalska K, Mania R (2013). Static and dynamic thermo-mechanical buckling loads of functionally graded plates. *Mech Mech Eng*;17(1):99–112.

Kiani Y, Bagherizadeh E, Eslami MR (2011). Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions). *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech*;91(7):581–93.

Kiani Y, Eslami MR (2012). Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation. *Arch Appl Mech*;82(7):891–905.

Kim KD, Lomboy GR, Han SC (2008). Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element. *J Compos Mater*;42(5):485–511.

Kirchhoff, G.R. (1850 a), "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88.

Kirchhoff,G.R. (1850 b), "Über die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe", *Poggendorffs Annalen.*, 81, 258–264.

Lam, K.Y., Wang, C.M. and He, X.Q. (2000), "Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions", *Eng. Struct.*, **22**, 364-378.

Lanhe W (2004). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos Struct*;64(2):211–8.

Lee YY, Zhao X, Liew KM (2009). Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Smart Mater Struct*;18(3):035007.

Lee YY, Zhao X, Reddy JN (2010). Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads. *Comput Methods Appl Mech Eng*;199(25–28):1645–53.

Levy, M.,(1899), "Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3, 219–306.

Loy CT, Lam KY, Reddy JN (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int J Mech Sci*;41(3):309–24.

Li SR, Zhang JH, Zhao YG (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. *Thin-Walled Struct* ;45(5):528–36.

Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W.Q. (2009), "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **16**, 576-584.

Mahdavian M (2009). Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *J Solid Mech*;1(3):213–25.

Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.* (in Press)

Ma LS, Wang TJ (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *Int J Solids Struct*;40(13–14):3311–30.

Memar Ardestani M, Soltani B, Shams S (2014). Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method. *Compos Struct*;112:231–40.

Mohammadi M, Saidi AR, Jomehzadeh E (2010).. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl Compos Mater*;17(2):81–93.

Mindlin. R.D, (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38.

Mirzavand B, Eslami MR (2008). Thermoelastic stability analysis of imperfect functionally graded cylindrical shells. *J Mech Mater Struct*;3(8):1561–72.

Naeem MN, Arshad SH, Sharma CB (2010) . The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*;224(1):43–54.

Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, **49**(6), 641-650.

Nguyen DD (2013). Nonlinear dynamic response of imperfect eccentrically stiffened FGM double curved shallow shells on elastic foundation. *Compos Struct*;99:88–96.

Nguyen DD, Tran QQ (2013). Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments. *Compos Struct*;106:590–600.

Nguyen DD, Tran QQ (2014). Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened FGM cylindrical panels on elastic foundation subjected to mechanical loads. *Eur J Mech A Solids*;46:60–71.

Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mech. Base. Des. Struct. Mach.*, **41**, 421-433.

Nguyen DD, Pham TT (2014). Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression. *Compos Struct*;110:200–6.

Nguyen DD, Tran QQ (2013). Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperaturedependent properties on elastic foundation. *J Vib Control*. [http:// dx.doi.org/10.1177/1077546313494114](http://dx.doi.org/10.1177/1077546313494114).

Nguyen DD, Tran QQ (2012). Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments. *Mech Compos Mater*;48(4):435–48.

Nguyen DD, Hoang VT (2010). Mechanical and thermal postbuckling of sheardeformable FGM plates with temperature-dependent properties. *Mech Compos Mater*;46(5):461–76.

Panc V (1975). Theories of elastic plates. Springer.

Park JS, Kim JH (2006). Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *J Sound Vib*;289(1–2):77–93.

Pasternak PL (1954) On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosuedarstvennoe Izdatelstvo Literatim po Stroitelstvu i Arkhitekture* 1:1–56.

Polit. O and M. Touratier, (1997). A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44.

Pradhan SC, Loy CT, Lam KY, Reddy JN (2000) . Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Appl Acoust*;61(1):111–29.

Pradyumna, S. and Bandyopadhyay, J.N. (2008), “Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation”, *J. Sound. Vib*, **318**, 176-192.

Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", *International Journal of Solids and Structures*, 44:4457-4476.

Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M. (2004), “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plate by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method”, *Compos. Part B*, **35**, 685-697.

Rashidi, M.M., Shooshtari, A. and Anwar Bég, O. (2012), “Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates”, *Comput. Struct.*, **106/107**, 46-55.

Reddy, J.N. (2002), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc.

Reddy JN (1984) . A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51:745–52.

Reddy. J.N, (1997). *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton.

Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **47**, 663-684.

Reissner E (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech*;12(2):69–72.

Reissner E (1947). On bending of elastic plates. *Q Appl Math*;5(1):55–68.

Reissner, E. (1950), “On a variational theorem in elasticity”, *J. Math. Phys. (Cambridge, Mass.)*, **29**, 90-95.

Roque CMC, Ferreira AJM, Neves AMA, Fasshauer GE, Soares CMM, Jorge RMN(2010). Dynamic analysis of functionally graded plates and shells by radial basis functions. *Mech Adv Mater Struct*;17(8):636–52.

Ruan M, Wang ZM (2014). Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *J Vib Control*. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel Compos. Struct.*, **17**(3), 321-338

Semmah, A., Tounsi, A., Zidour, M., Heireche, H. and Naceri, M. (2014), “Effect of chirality on critical buckling temperature of a zigzag single-walled carbon nanotubes using nonlocal continuum theory”, *Full., Nanotub. Carb. Nanostr.*, **23**, 518-522.

Shen HS(1962). Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Sci Technol*; (7– 8):977–87.

Shen HS (2003). Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Eng Struct*;25(4):487–97.

Shen HS (2013). Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Int J Solids Struct*;41(7):1961–74.

Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137–146.

Swaminathan K, Naveenkumar DT, Zenkour AM, Carrera E (2015). Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review. *Compos Struct*;120:10–31.

Sun J, Xu X, Lim CW (2014). Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined thermal and compressive loads. *J Therm Stresses*;37(3):340–62.

Thai, H.T. and Choi, D.H. (2013a), “A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, **101**, 332-340.

Thai, H.T. and Choi, D.H., (2013b), “A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Compos. Struct.*, **106**, 754-763.

Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 626–633.

Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.

Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A. and Zidour, M. (2013b), “Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes”, *Adv. Nano Res.*, **1**(1), 1-11.

Tounsi, A., Houari Mohammed, S. A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24, 209–220.

Tounsi, A., Semmah, A. and Bousahla, A.A. (2013c), “Thermal buckling behavior of nanobeam using an efficient higher-order nonlocal beam theory”, *J. Nanomech. Micromech.*, ASCE, **3**, 37-42.

Touratier. M, (1991). An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916.

Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.

Timoshenko, S. (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series 46) p. 744–746. Reissner (1945)

Uflyand, Y.S. (1948), "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", 12, 287–300.

Vel, S.S. and Batra, R.C. (2002), “Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates”, *Int. J. Solid. Struct.*, **40**, 7181-7196.

Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound. Vib.*, **272**, 703-730.

Wang CM, Lim GT, Reddy JN, Lee KH (2001). Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Eng Struct*;23(7):838–49.

Woo J, Meguid SA(2003), Liew KM. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mech*;165(1–2):99–115.

Woo J, Meguid SA (2001). Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct*;38(42):7409–21.

Woo J, Meguid SA, Ong LS (2006). Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib*;289(3):595–611.

Wu, C.P., Chiu, K.H. and Wang, Y.M. (2011), “RMVT-based meshless collocation and element free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Compos. Struct.*, **93**, 923-943.

Wu, C.P. and Chiu, K.H. (2011), “RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Compos. Struct.*, **93**, 1433-1448.

Wu, C.P. and Li, H.Y. (2010b), “An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates”, *Compos. Struct.*, **92**, 2591-2605.

Wu, C.P. and Li, H.Y. (2010), “RMVT- and PVD-based finite layer methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Comput. Mater. Contin.*, **19**, 155-198.

Wu TL, Shukla KK, Huang JH (2007). Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Compos Struct*;81(1):1–10.

Xiang, Y., Wang, C.M. and Kitipornchai, S. (1994), “Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundation”, *Int. J. Mech. Sci.*, **36**, 311-316.

Xiang, Y. (2003), “Vibration of rectangular Mindlin plates resting on non-homogenous elastic foundations”, *Int. J. Mech. Sci.*, **45**, 1229-1244.

Yahoobi, H. and Feraidoon, A. (2010), “Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load”, *World Appl. Sci. J.*, **10**(3), 337-341.

Yaghoobi H, Yaghoobi P (2013). Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*;48(8):2019–35.

Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota I. (1990), *Proceedings of the 1st International Symposium Functionally Gradient Material*, Japan.

Yang, J., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. (2005), “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Tech.*, **65**, 1165-1175.

Ying, J., Lü, C.F. and Chen, W.Q. (2008), “Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations”, *Compos. Struct.*, **84**, 209-219.

Yang J, Shen HS (2001). Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Compos Struct*;54(4):497–508.

Yanga J, Shen HS (2003). Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-Linear Mech*;38(4):467–82.

Yin, S., Hale, J.S., Yu, T., Bui, T.Q. and Bordas, S.P.A. (2014), “Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, **118**, 121-138.

Zenkour, A.M., Allam, M.N.M., Shaker, M.O. and Radwan, A.F. (2011), “On the simple and mixed first-order theories for plates resting on elastic foundations”, *Acta Mechanica*, **220**, 33-46.

Zenkour, A.M. and Radwan, A.F. (2013), “On the simple and mixed first-order theories for functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Meccanica*, **48**, 1501-1516.

Zenkour, A.M, Mashat, D.S. (2010), Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates, *Natural Sciences*, 2, 968-978.

Zenkour. A. M and Sobhy. M (2011), Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory, *Journal of Thermal Stresses*, 34, 1119–1138.

Zhang, D.G., Zhou, Y.H. (2008), A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Computational Materials Science*, 44, 716-720.

Zhang Y, Huang H, Han Q (2015). Buckling of elastoplastic functionally graded cylindrical shells under combined compression and pressure. *Compos B Eng*;69:120–6.

Zhong, Z. and Yu, T. (2006), “Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate”, *Smart. Mater. Struct*, **15**, 1404-1412.

Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H. and Au, F.T.K. (2004), “Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **59**, 1313-1334.

Zhang LW, Zhu P, Liew KM (2014). Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method. *Compos Struct*;108:472–92.

Zhao. X and Liew. K.M (2009), Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198, 2796-2811.

Zhao. X, Lee. Y. Y, and K. M. Liew (2009), Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct*, 161-171.

Zhao X, Liew KM (2011). An element-free analysis of mechanical and thermal buckling of functionally graded conical shell panels. *Int J Numer Methods Eng*;86(3):269–85.

Zhao X, Liew KM (2009). Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Comput Methods Appl Mech Eng*;198(33):2796–811.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Tech.*, **34**, 24-34.